10..数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n,a_1=1,a_{n+1}=2S_n(n\in\mathbf{N}^*)$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 $\because a_{n+1}=2S_n,\therefore a_n=2S_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

$\therefore$当 $n\geqslant2$ 时,$a_{n+1}-a_m=2S_n-2S_{n-1}=2a_n$.

$\therefore a_{n+1}=3a_n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

又 $a_2=2S_1=2a_1=2$,

$\therefore$数列$\{a_n\}$从第二项起是等比数列.

$\therefore a_n=a_2\cdot3^{n-2}=2\cdot3^{n-2}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

综上,$a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2\cdot3^{n-2},n\geq2,n\in\mathrm{N}^*.\end{cases}$

11.设在平面上有两个向量 $\mathbf{a}=(\cos 2\alpha,\sin 2\alpha)(0\leqslant\alpha<\pi)$,$\mathbf{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线.

(1)求证:向量 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 垂直;

(2)当向量$\sqrt{3}\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}-\sqrt{3}\mathbf{b}$ 的模相等时,求α的大小

(1)证明由已知得$|\mathbf{a}|=\sqrt{\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}=1$,$|\mathbf{b}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$,

则$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2=0$,

所以 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 垂直.

(2)解由$|\sqrt{3}\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\sqrt{3}\mathbf{b}|$两边平方,得 $3|\mathbf{a}|^2+2\sqrt{3}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2-2\sqrt{3}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+3|\mathbf{b}|^2$,

$\therefore 2(|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2)+4\sqrt{3}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$.

而$|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$,

$\therefore \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$.

$\therefore \frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha=0$,

即 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=0$,

$\therefore 2\alpha+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又 $0\leqslant\alpha<\pi$,

$\therefore \alpha=\frac{5\pi}{12}$或$\alpha=\frac{11\pi}{12}$.