Sprawozdanie - Laboratorium nr 8

Interpolacja funkcjami sklejanymi w bazie

Hubert Wdowiak, 30.04.2020

1. Wstęp Teoretyczny

Podczas trwania zajęć analizowaliśmy zagadnienie interpolacji funkcjami sklejanymi w bazie. Jest to metoda numeryczna służąca do znajdywania przybliżeń nieznanych funkcji, przy użyciu wielomianów niskiego stopnia. Bazuje na dzieleniu przedziału [a, b], na $n+1$ podprzedziałów, następnie interpolowaniu funkcji wielomianem interpolacyjnym. Łączenie wielomianów nazywamy sklejaniem, stąd słowo to występuje w tytule sprawozdania.

Wzór na funkcję sklejaną:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x)\ ,\ \ x \in [a,\ b] \tag{1}$$

- s_i we wzorze oznaczają tzw. sklejki kubiczne należące do bazy, które podczas laboratorium zostały odpowiednio określone.
- c_i to odpowiednie współczynniki dla każdej z "podfunkcji".

Funkcję $s(x)$ stopnia m nazywamy sklejaną gdy:

- Stopień wielomianu $s(x)$ nie przewyższa m, na każdym z podprzedziałów wspomnianych powyżej.
- $s(x) \in C^m$.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

W trakcie laboratorium naszym zadaniem było przeprowadzenie interpolacji dwóch funkcji, określonych wzorami:

$$f_1 = \frac{1}{1+x^2}\ , \tag{2}$$

$$f_2 = \cos(2x)\ , \tag{3}$$

na przedziale [-5, 5], oraz dla korzystając z funkcji interpolującej określonej wzorem (1), przy czym s zostało określone jako:

$$s = 1/h^3 \cdot (x - x_{i-2})^3, \qquad \text{dla } x \in [x_{i-2},\ x_{i-1}) \tag{4}$$

$$s = 1/h^3 \cdot (\,h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3\,), \qquad \text{dla } x \in [x_{i-1},\ x) \tag{5}$$

$$s = 1/h^3 \cdot (\,h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{x+1} - x)^2 - 3(x_{x+1} - x)^3\,), \qquad \text{dla } x \in [x_i,\ x_{i+1}) \tag{6}$$

$$s = 1/h^3 \cdot (x_{i+2} - x)^3, \qquad \text{dla } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}) \tag{7}$$

$$s = 0, \qquad \text{dla } x \in [x_i, x_{i+1}) \tag{8}$$

gdzie *h* jest odległością między sąsiednimi węzłami.

Wartości macierzy **A**: kolumna współczynników *c*: Wynik:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 4 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_1 + \frac{h}{3}\alpha \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n - \frac{h}{3}\beta \end{bmatrix}$$

W zadaniu przyjęliśmy wartość dx = 0.01.
Aby rozwiązać układ powyżej przedstawionych wartości, posłużyliśmy się metodą

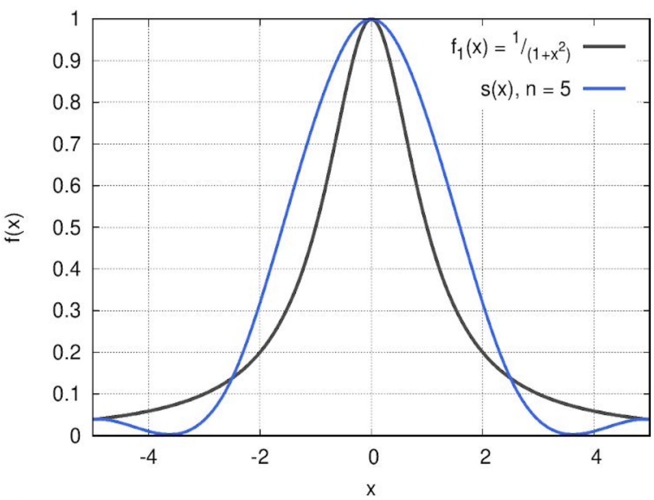
*void gaussj (float **a, int n, float **b, int m),*

należącej do biblioteki "numerical_recipes" (wykonuje ona operacje na wierszach, dzięki którym możliwe jest otrzymanie macierzy jednostkowej a następnie rozwiązanie układu równań). Aby przechować wartości macierzy i wektorów, użyliśmy metod *matrix* i *vector* z tej samej biblioteki.

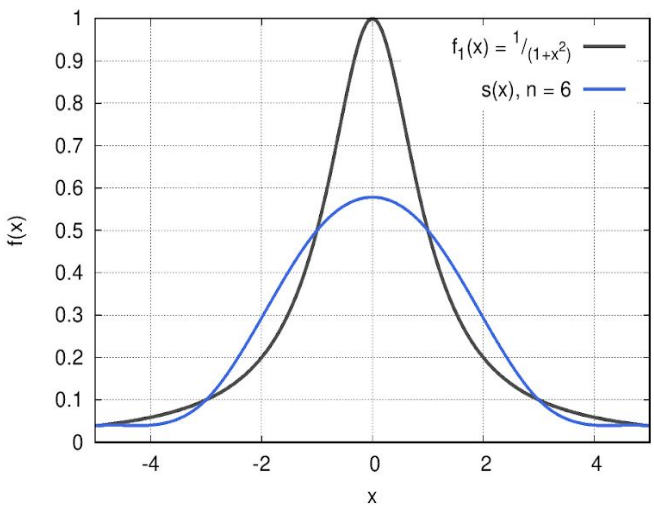
Interpolację funkcji określonej wzorem (2) wykonaliśmy dla liczby węzłów równej: 5, 6 ,10, 20.
Interpolację funkcji określonej wzorem (3) wykonaliśmy dla liczby węzłów równej: 6,7,14 i dla każdego z tych przypadków obu funkcji, sporządziliśmy wykresy funkcji interpolowanej i interpolującej i zapisaliśmy je w plikach *f1.dat* oraz *f2.dat*.

3. Wyniki

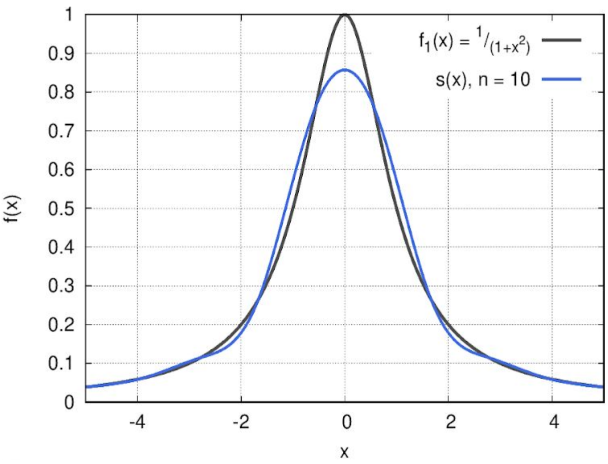
Przy użyciu programu *gnuplot* zobrazowaliśmy wyniki zapisane w plikach *f1.dat* oraz *f2.dat.*



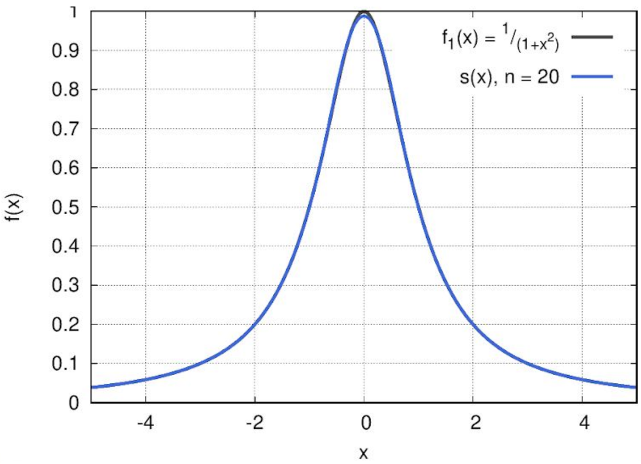
Wykres 1 Porównanie funkcji interpolacyjnej i interpolowanej f1 dla 5 węzłów



Wykres 2 Porównanie funkcji interpolacyjnej i interpolowanej f1 dla 6 węzłów

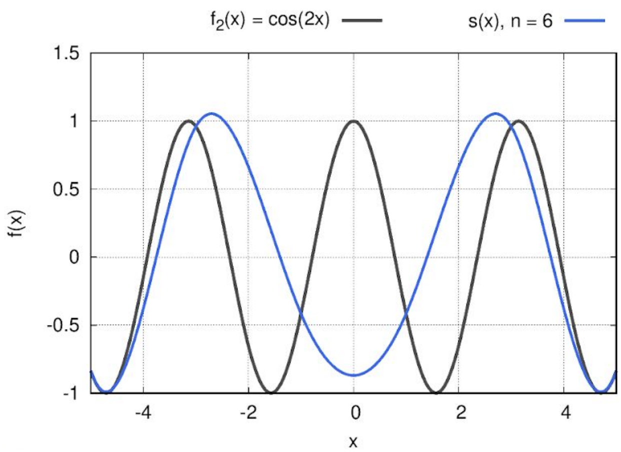


Wykres 3 Porównanie funkcji interpolacyjnej i interpolowanej f1 dla 10 węzłów

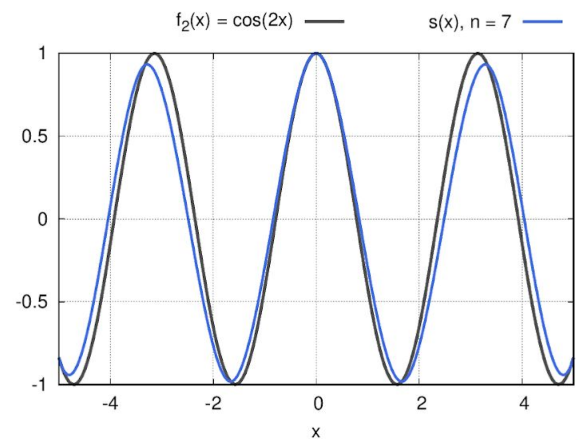


Wykres 4 Porównanie funkcji interpolacyjnej i interpolowanej f1 dla 20 węzłów

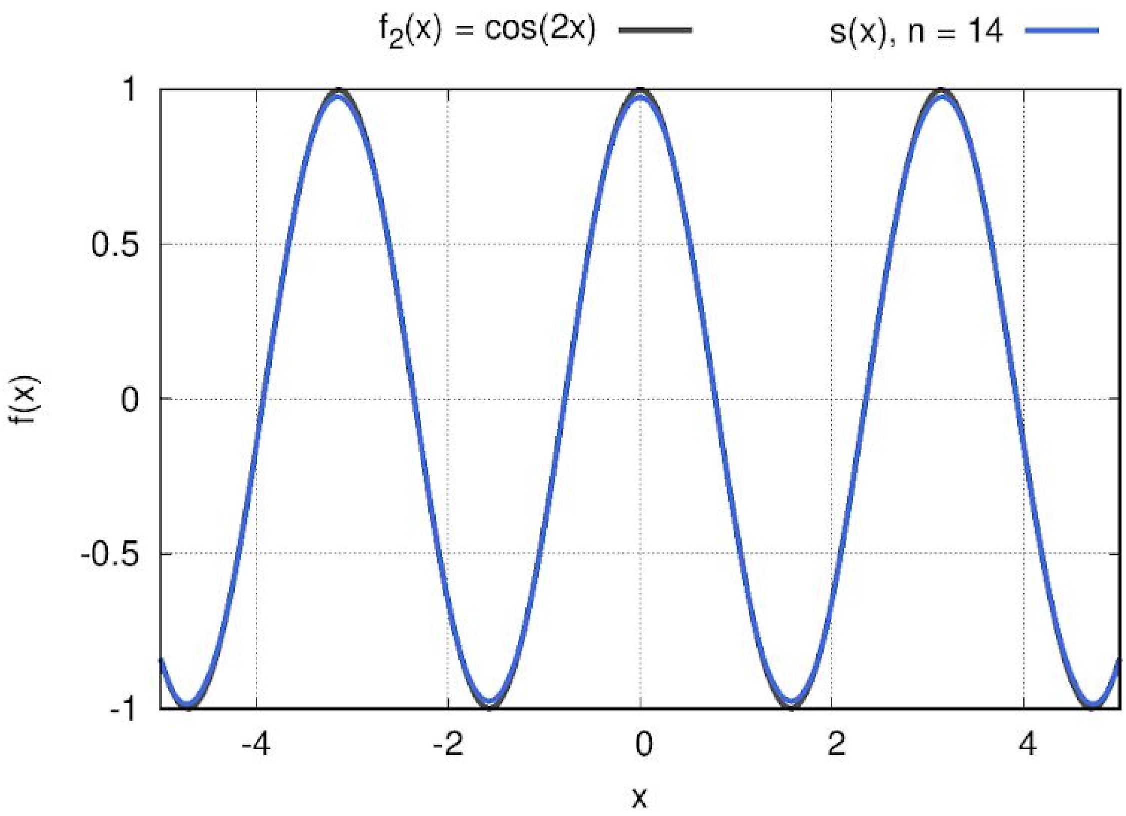
Na wykresie 1, przedstawione wyniki interpolacji funkcji $f_{1,}$okazały się być dosyć niedokładne. Zwiększając liczbę węzłów do sześciu nie osiągnęliśmy lepszego dopasowania, a wręcz wizualnie wykres 2, wydaje się być dużo gorzej dopasowany niż wykres 1. Jednak kontynuując proces zwiększania liczby węzłów interpolacji, dla n=10 osiągnęliśmy już stosunkowo lepszy wykres. Głównym problemem owego przybliżenia przedstawionego na wykresie 3, jest wyraźna niedokładność na środku przedziału. Ten problem można łatwo wyeliminować ustalając liczność węzłów jako liczbę nieparzystą. Potwierdza to fakt, że na wykresie 1, gdzie n jest nieparzyste, wartość na środku jest idealnie dopasowana, co zostało wymuszone odpowiednim umiejscowieniem jednego z węzłów. Ostatni wykres z powyższych - wykres 4, ukazujący wynik interpolacji dla 20 węzłów, jest widocznie najlepiej dopasowany i ciężko dopatrzeć się w nim jakichkolwiek nieścisłości.



Wykres 5 Porównanie funkcji interpolacyjnej i interpolowanej f2 dla 6 węzłów



Wykres 6 Porównanie funkcji interpolacyjnej i interpolowanej f2 dla 7 węzłów



Wykres 7 Porównanie interpolacyjnej i interpolowanej f2 dla 14 węzłów

W przypadku interpolacji funkcji cos(2x), wyzwaniem dla algorytmu była znacznie większa liczba istniejących ekstremów lokalnych, od tych w funkcji f1, na przedziale [-5, 5], które jak już zauważyliśmy, jest dosyć ciężko dopasować, jeśli żaden z węzłów nie przechodzi przez nie. Wykres 1 dla n=6, kompletnie nie przypomina poszukiwanej funkcji, jednak wystarczyło zwiększyć liczbę węzłów o jeden, a otrzymaliśmy naprawdę zbliżony obraz interpolacji. Następnie podwajając liczbę węzłów do 14, otrzymaliśmy prawie idealne przybliżenie poszukiwanej funkcji trygonometrycznej. Jedyne niedociągnięcia widoczne są na wykresie 4, w okolicach ekstremów lokalnych w powodu wspomnianego powyżej.

4. Wnioski

Dzięki interpolacji funkcjami sklejanymi, jesteśmy w stanie znaleźć funkcje interpolujące, których dokładność dopasowania, można łatwo kontrolować poprzez zwiększanie bądź zmniejszanie liczby węzłów branych pod uwagę. Zwiększając ich ilość, w każdym z naszych przypadków poprawiliśmy końcowy obraz, dlatego można wnioskować że to jednoznaczny sposób na poprawę dopasowania. Funkcje symetryczne względem któregoś z punktów na osi x, łatwiej interpolować, jeśli którykolwiek z węzłów przechodzi przez ów punkt. Jeśli taki punkt znajduje się dokładnie na środku analizowanego przedziału, najprostszym rozwiązaniem jest wyznaczenie nieparzystej wartości n. Analogiczne zachowanie występuje w przypadku wszystkich ekstremów lokalnych/globalnych.

Index of comments

1.1 bardziej: w nazwie metody :)

1.2 Według Pańskiej notacji: to s powinno mieć indeks dolny _i (w odróżnieniu od s(x), które rozumiem, że oznacza całą funkcję interpolującą).

2.1 A co to jest? Czytelnik potrzebuje tu jakiegoś słowa wprowadzenia, że to jest układ równań, który daje nam przepis na współczynniki c.
Poza tym: nawet, jeśli czytelnik się tego domyśli, to nie ma tutaj określonego, skąd biorą się współczynniki c_0 oraz c_{n+1} (z pochodnych na krańcach przedziału).

2.2 O właśnie, tylko że to dx nigdzie według tych wzorów nie jest potrzebne :)
Istota tego parametru stałaby się jasna dopiero po wprowadzeniu wzorów na c_0 oraz c_{n+1}, w których pojawiałaby się pochodna liczona z ilorazu różnicowego.

2.3 Powyższego opisu się trochę czepiałam, za to dyskusja wyników jest przeprowadzona bardzo ciekawie.

4.1 5?