Sprawozdanie - Laboratorium nr 3

Metoda sprzężonych gradientów dla macierzy wstęgowej

Hubert Wdowiak, 19.03.2020

1. Wstęp Teoretyczny

Laboratorium polegało na rozwiązaniu układu równań liniowych Ax = b metodą sprzężonych gradientów. Jest to algorytm numeryczny iteracyjny, który z każdym przejściem pętli dochodzi do coraz to dokładniejszych wyników. Metoda sprzężonych gradientów może być wykorzystana w równaniach, w których macierz kwadratowa jest określona dodatnio (czyli wszystkie minory licząc od lewego, górnego rogu są dodatnie; Innymi słowy wyznaczniki coraz to większych podmacierzy mają być dodatnie)

Macierz wstęgowa to macierz której wszystkie elementy są zerowe, poza przekątną główną i m - przekątnymi "okalającymi" przekątną główną. My w zadaniu otrzymaliśmy informację, że m = 5, zatem nasza macierz miała 2*5 + 1 niezerowych przekątnych.

2. Zadanie do wykonania

Aby przeprowadzić ćwiczenie, potrzebowaliśmy:

- utworzyć macierz o wymiarze n = 1000 i wypełnić jej elementy:

$$\mathbf{A}[i][j] = \frac{1}{1+|i-j|}\text{, kiedy } |i - j| \le 5, \qquad i, j = 0, \dots, n - 1$$

- wypełnić wektor wyrazów wolnych:

$$b[i] = i + 1, \qquad i = 0, \dots, n - 1$$

- wypełnić wektor startowy:

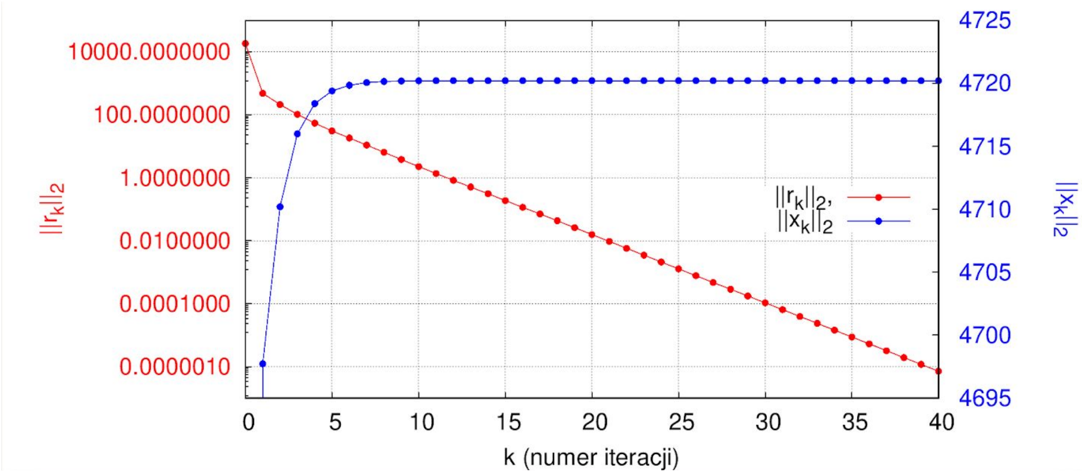
$$x[i] = 0, \qquad i = 0, \dots, n - 1$$

- zaprogramować metodę modyfikując algorytm podany przez prowadzących, przy czym mieliśmy przyjąć, że główna pętla kończy się gdy wartość normy euklidesowej wektora rozwiązań będzie mniejsza niż 10^{-6}.

- Sporządzić wykresy wartości norm euklidesowych, wektorów *x* oraz *r*, dla każdej iteracji. (r jest wektorem inicjalizowanym jako $b - \mathbf{A}x$)

- Porównać wydajności metody gradientów sprzężonych, oraz metody eliminacji zupełnej, którą poznaliśmy na wcześniejszych zajęciach.

2.1 Wyniki



Wykres 1:
Wartości norm euklidesowych wektorów: reszt oraz rozwiązań w kolejnych iteracjach

Powyższy wykres doskonale przedstawia w jaki sposób zmienia się wartość obliczana przez algorytm w kolejnych iteracjach metody. Startując od zera, już przy piątym przejściu pętli, wartość zbliżona jest do tej, przyjętej przez nas za końcową, a przy dziesiątej iteracji wykres jest całkowicie "ustatkowany" i żadne zmiany nie są widoczne bez zmiany skali.

Wartości normy euklidesowej wektora reszt widocznie spada w sposób wykładniczy, co potwierdza bardzo szybki wzrost dokładności końcowego wyniku, w kolejnych przejściach pętli.

2.3 Porównanie metod

Aby porównać wydajność metod zmierzyliśmy czasy potrzebne dla przebiegu każdego z algorytmów, oraz porównaliśmy je. Do pomiarów wykorzystaliśmy funkcję *clock_t clock(void),* znajdującą się w bibliotece time.h, oraz funkcję *gaussj* z biblioteki "numerical recipes". Pomiary zostały pobrane kilkukrotnie by zniwelować "zewnętrzne" czynniki pracy komputera. Dla macierzy wymiaru N^4 metoda eliminacji zupełnej nie dawała rezultatów przez długi czas, więc dlatego pomiar został przerwany i w tabeli jest brak wyniku.

Metoda gradientów sprzężonych		Metoda eliminacji zupełnej	
N = 10^3	0.134811 s	N = 10^3	1.56233 s
N = 10^3	0.141957 s	N = 10^3	1.33256 s
N = 10^3	0.132932 s	N = 10^3	1.44276 s
N = 10^4	14.0747 s	N = 10^4	-------
N = 10^4	14.0845 s	N = 10^4	-------
N = 10^4	14.2648 s	N = 10^4	-------

Tabela 1: Porównanie czasów działania metody gradientów sprzężonych, oraz eliminacji zupełnej

Powyższa tabela jednoznacznie wykazała, że metoda gradientów sprzężonych sprawdziła się w rozpatrywanym przez nas przykładzie znacznie lepiej. Uzyskała wyniki w wielokrotnie krótszym czasie, co wynika między innymi z niższej złożoności obliczeniowej - $O(\sqrt{km})$, gdzie k to wskaźnik uwarunkowania macierzy, a m to ilość jej niezerowych elementów. Złożoność metody eliminacji zupełnej wyraża notacja $O(n^3)$.

Optymalizacja metody gradientów sprzężonych polega m.in. na tym, że nie ma potrzeby zapamiętywania wszystkich zer znajdujących się wewnątrz macierzy, a jedynie wartości znajdujące się wewnątrz wstęgi (mniej niż N*(2m+1), m = szerokość wstęgi). Odwrotnie jest w metodzie eliminacji zupełnej gdzie zobowiązani jesteśmy do zapamiętania wszystkich wartości, a zatem złożoność pamięciowa wynosi tam n^2.

3. Wnioski

Zestawienie metod gradientów sprzężonych, oraz eliminacji zupełnej uświadomiła nas o jej wyższości zarówno w złożoności obliczeniowej, jak i pamięciowej. Zatem wydawałoby się, że zawsze lepszym wyborem będzie nowo poznana metoda, jednak nie może ona być zastosowana na każdej macierzy. Warunki wymienione we wstępie: symetryczność i dodatnia określoność sprawiają, że często nie można jej wykorzystać.

Pewni jednak możemy być, że w przypadku macierzy rzadkich o wysokim wymiarze (posiadających wiele zer), naszym pierwszym wyborem powinny być metody iteracyjne, właśnie takie jak metoda gradientów sprzężonych, gdyż mogą one w znacznym stopniu przyspieszyć działanie programu.