Sprawozdanie - Laboratorium nr 12

Całkowanie numeryczne metodą Romberga

Hubert Wdowiak, 28.05.2020

1. Wstęp Teoretyczny

Podczas trwania zajęć poznaliśmy sposób na oszacowanie wartości całki oznaczonej - metodę Romberga, której sposób działania łączy dwie inne metody:

- Bazując na iteracyjnej metodzie trapezów, otrzymywane jest przybliżenie funkcji *f(x)* (w każdym obiegu funkcji, wyznaczona wartość nacechowana jest mniejszym błędem). Aby je otrzymać, na przedziale [*a*, *b*], obliczana jest wartość pola powierzchni trapezu wyznaczonego przez punkty (*a, 0*), (*a, f(a)*), (*b, 0*), (*b, f(b)*). W kolejnych iteracjach przedział ten jest dzielony na 2, równe sobie przedziały i dla każdego z nich wyznaczane jest pole powierzchni wyznaczonych trapezów, a otrzymane wyniki zostają zsumowane. Następnie, każdy z wspomnianych powyżej "podprzedziałów" zostaje podzielony na dwa równe, mniejsze przedziały i proces zostaje powtórzony… Oznacza to, że każde *n*-te przejście pętli skutkuje otrzymaniem 2^n trapezów, których suma pól jest przybliżoną wartością rozpatrywanej całki.

- Zbieżność wyniku poznawanej przez nas metody, jest poprawiona przez ekstrapolację Richardsona. W tym celu wykorzystywana jest trójkątna macierz:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{0,0} & & & & \\ D_{1,0} & D_{1,1} & & & \\ D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_{n,0} & D_{n,1} & D_{n,2} & \dots & D_{n,n} \end{pmatrix}$$

  której pierwsza kolumna oznacza wyniki otrzymane za pomocą metody trapezów, w kolejnych iteracjach

$$D_{0,0} = \frac{1}{2}(b-a)\big(f(a)+f(b)\big) \quad , \qquad (1)$$

$$D_{w,0} = \frac{1}{2}D_{w-1,0} + h_w \sum_{i=1}^{2^{w-1}} f\big(a+(2i-1)h_w\big) \quad , \qquad (2)$$

  (gdzie h_w oznacza szerokość podprzedziału (długość podstawy dolnej trapezu), określoną wzorem:

$$h_w = \frac{b-a}{2^w} \quad), \qquad (3)$$

a kolumny następujące po niej, obliczane są właśnie przy pomocy interpolacji. W celu obliczenia wartości macierzy wykorzystywany jest wzór:

$$D_{w,k} = \frac{4^k D_{w,k-1} - D_{w-1,k-1}}{4^k - 1} \quad , \tag{4}$$

gdzie *w* oznacza numer wiersza, a *k* - numer kolumny. W ten sposób, wyniki kolejnych kolumn, zbliżają nas do dokładniejszego rozwiązania problemu.

2. Opis problemu

Zadaniem postawionym nam, podczas trwania laboratorium, było obliczenie wartości poniższych trzech całek oznaczonych:

$$\int_0^1 \frac{sin(x)}{x} dx \quad (= 0.94608307) \quad , \tag{5}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{cos(x) - e^x}{sin(x)} dx \quad (= -2.246591721) \quad , \tag{6}$$

$$\int_1^\infty (xe^x)^{-1} dx \quad (= 0.219383934) \quad . \tag{7}$$

Program wypełniający macierz, jak we wstępie, został napisany w całości w języki *C++* i nie wykorzystaliśmy w nim żadnej specjalistycznej biblioteki. W celu uniknięcia błędu *Nan*, przy operacji dzielenia przez *x* (możliwe dzielenie 0 przez 0), do wartości *x* dodaliśmy niewielką stałą równą 1e-8, w sytuacji gdy $|x| < 1e{-}7$. Wartości całek obliczyliśmy dla odpowiedniej ilości iteracji równej odpowiednio 7 (dla całki z wzoru (5)), 15 (dla całki z wzoru (6)), 7 (dla całki z wzoru(7)), a następnie zapisaliśmy wyniki w plikach *file1.dat, file2.dat, file3.dat*.

3. Wyniki

Otrzymane wyniki prezentują się następująco:

Tabela 1 (dla wzoru (5))

Numer iteracji	Wartość całki dla metody trapezów	Wartość całki po wprowadzeniu ekstrapolacji Richardsona
0	0.9207354924	0.9207354924
1	0.9397932848	0.9461458823
2	0.9445135217	0.9460830041

3	0.9456908636	0.9460830704
4	0.9459850299	0.9460830704
5	0.9460585610	0.9460830704
6	0.9460769431	0.9460830704
7	0.9460815385	0.9460830704

Powyższe wyniki pokazują, że wartości, które znalazły się na przekątnej macierzy w naszym programie, osiągają zbieżność znacznie szybciej po już po trzecim przejściu pętli. Oznacza to, że ekstrapolacja Richardsona w znacznym stopniu przyśpieszyła osiągnięcie jak najlepszego wyniku, podczas gdy wartości wyznaczone przez (samą) metodę trapezów (wartości w pierwszej kolumny) nawet w 7 iteracji nie osiągnęły zbieżności, a jedynie powoli zbliżają się do niej.

Tabela 2 (dla wzoru (6))

Numer iteracji	Wartość całki dla metody trapezów	Wartość całki po wprowadzeniu ekstrapolacji Richardsona
0	-2.7932066937	-2.7932066937
1	-2.3966034462	-2.2644023637
2	-2.2852177581	-2.2470016508
3	-2.2563258990	-2.2465960135
4	-2.2490302656	-2.2465917462
5	-2.2472016745	-2.2465917245
6	-2.2467442304	-2.2465917226
7	-2.2466298502	-2.2465917217
8	-2.2466012536	-2.2465917212
9	-2.2465941041	-2.2465917210
10	-2.2465923167	-2.2465917208
11	-2.2465918698	-2.2465917208
12	-2.2465917580	-2.2465917208

13	-2.2465917301	-2.2465917207
14	-2.2465917231	-2.2465917207
15	-2.2465917213	-2.2465917207

Z wyników przedstawionych w Tabeli 3, można wysunąć podobne wnioski, do tych zapisanych powyżej. Również zbieżność została osiągnięta wcześniej - w 7 przejściu pętli, przez zastosowanie ekstrapolacji Richardsona. W tym wypadku jednak warto zaznaczyć, że oba warianty szacowania rozwiązania okazały się być bardzo efektywne, a ich wartości różnią się dopiero na dalszych miejscach po przecinku.

Tabela 3 (dla wzoru (7))

Numer iteracji	Wartość całki dla metody trapezów	Wartość całki po wprowadzeniu ekstrapolacji Richardsona
0	0.1839397206	0.1839397206
1	0.2273051435	0.2417602845
2	0.2198339234	0.2157157321
3	0.2193509579	0.2193701669
4	0.2193835798	0.2194097488
5	0.2193839324	0.2193828331
6	0.2193839343	0.2193839414
7	0.2193839344	0.2193839345

Tabela 3 ukazała nam wartości, po których nie możemy wyciągnąć takim samych wniosków jak dla dwóch poprzednich tabel. Tutaj zbieżność nie została osiągnięta na wyznaczonym przedziale iteracji, nawet przy wykorzystaniu ekstrapolacji. Możemy się jednak spodziewać, że ten moment nastałby niedługo, gdyż zmiany pomiędzy wartościami na diagonali, stopniowo zmniejszają się i w przypadku wierszy 6 i 7 są już naprawdę niewielkie.

4. Wnioski

Na podstawie prób obliczenia wartości całek oznaczonych, możemy wnioskować, że metoda Romberga jest wydajnym sposobem na oszacowanie dokładnych wyników. Według zebranych przez nas wyników, już sama metoda trapezów okazuje się zwracać stosunkowo dokładne wartości, jednak po wprowadzeniu do programu ekstrapolacji Richardsona, osiągnięcie zbieżności może nastać znacznie szybciej. Metoda Romberga umożliwia obliczenie wartości całki w szybki sposób i jest łatwa w implementacji. Aby otrzymane wyniki były miarodajne należy się jednak zabezpieczyć przed działaniem ukrytych błędów obliczeniowych (właśnie takich jak dzielenie 0 przez 0).

Index of comments

2.1 ekstrapolacji

2.2 W Pańskim programie tutaj również było 1e-8.

4.1 Warto byłoby wspomnieć o podstawieniu x = 1/t, bo dla czytelnika to może być niezrozumiałe, jak obliczyliśmy całkę w przedziale od 1 do nieskończoności przy tej metodzie.