Sprawozdanie - Laboratorium nr 4

Uogólniony (symetryczny) problem własny -

- wyznaczanie modów własnych struny w 1D

Hubert Wdowiak, 26.03.2020

1. Wstęp Teoretyczny

Podczas trwania zajęć podjęliśmy próbę rozwiązania uogólnionego problemu własnego zdefiniowanego przez poniższe równanie:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \lambda\,\vec{y}, \tag{1}$$

gdzie:

- **A** jest symetryczną macierzą kwadratową, a więc spełniającą następujący warunek:

$$a_{i,j} = a_{j,i}\ , \tag{2}$$

dla i, j = 1, … , n (n jest stopniem macierzy). Warunek ten można również zapisać jako:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \tag{3}$$

- λ w równaniu (1), jest nazywana wartością własną,
- wektor $\vec{x}$ w równaniu (1), nazywany jest wektorem własnym macierzy, odpowiadającym wartości własnej.

Jako że macierz **A** jest symetryczna, nasze równanie wygenerowało n liniowo niezależnych wektorów własnych. Generalnie rozwiązanie równania własnego, jest problemem często występującym w fizyce kwantowej. Dzięki odpowiednim przybliżeniom umożliwia rozwiązanie problemu nieliniowego jako problemu liniowego.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

W trakcie laboratorium naszym zadaniem obliczyć częstotliwości drgań własnych struny, na podstawie danych opisujących jej wychylenie w czasie i przestrzeni. Dane początkowe: L=10, n=200, $\rho(x) = 1 + 4\alpha x^2$, N=1.

Pierwszym zadaniem było wypełnienie dwóch macierzy **A**, oraz **B** wartościami, tak by spełniony był wzór:

$$\mathbf{A}_{i,j} = (-\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1})/\Delta x^2\ , \tag{4}$$

$$\mathbf{B}_{i,j} = \rho_i / N \cdot \delta_{i,j}\ , \tag{5}$$

przy czym:

$$\Delta x\ = L/(n+1)\ , \tag{6}$$

$$\delta_{i,j} = 1,\ \text{gdy}\ i = j,\ 0,\ \text{gdy}\ i \neq\ j\ . \tag{7}$$

Kolejnym elementem do wykonania było rozwiązanie równania:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \lambda\,\mathbf{B}\,\vec{x}, \tag{8}$$

dla $\alpha \in [0, 100]$ i kroku $\Delta\alpha = 2$. Aby rozwiązać powyższy problem, posłużyliśmy się funkcją: 2.1 *int **gsl_eigen_gensymmv**(**A**, **B**, eval, **evec**, w),* znajdującą się w bibliotece 2.2 GSL. W tej funkcji **A** i **B** są macierzami typu double (stworzonymi za pomocą procedury *gsl_matrix_calloc*), eval to wektor wyjściowy typu double (stworzony za pomocą procedury *gsl_vector_calloc*), **evec** to macierz wyjściowa typu double tworzona analogicznie jak macierze **A** i **B**, natomiast w jest pomocniczą przestrzenią funkcji deklarowaną wywołaniem *gsl_eigen_gensymmv_alloc*. Rozmiary używanych macierzy to n x n, długość wektorów i przestrzeni w to n.

Dzięki użyciu powyżej wspomnianej funkcji *gsl_eigen_gensymmv* w wektorze *eval* zapisane zostały znalezione wartości własne, natomiast kolumny macierzy ***evec*** wypełniły znormalizowane wektory własne rozwiązywanego problemu.

Ostatnim zadaniem wykonywanym w ramach laboratorium był zapis otrzymanych wyników do pliku i stworzenie wykresów wizualizujących je. Format zapisu do pliku *eval.dat* wygląda tak:

α λ_0 λ_1 λ_2 λ_3 λ_4 λ_5

.

.

.

Aby móc otrzymać taki format, potrzebowaliśmy posortować wartości własne w porządku rosnącym względem modułów wartości, za pomocą funkcji *int **gsl_eigen_gensymmv_sort**(eval, evec, sort_type),* co posortowało, także wektory własne rozwiązywanego aktualnie problemu (Wybrany *sort_type* to GSL_EIGEN_SORT_ABS_ASC).

Do pliku *evec.dat* zobowiązani byliśmy zapisać wektory własne dla x = 0, oraz x = 100, w formacie:

x_o $u_0(x_o)$ $u_1(x_o)$ $u_2(x_o)$ $u_3(x_o)$ $u_4(x_o)$ $u_5(x_o)$

.

.

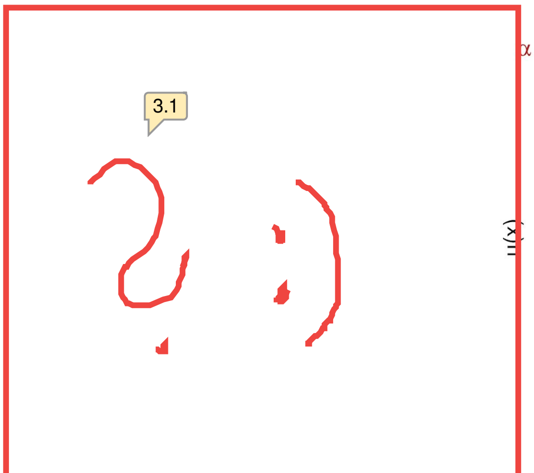
.

oddzielając wektory dla x = 0 i x = 100 dwoma pustymi liniami.

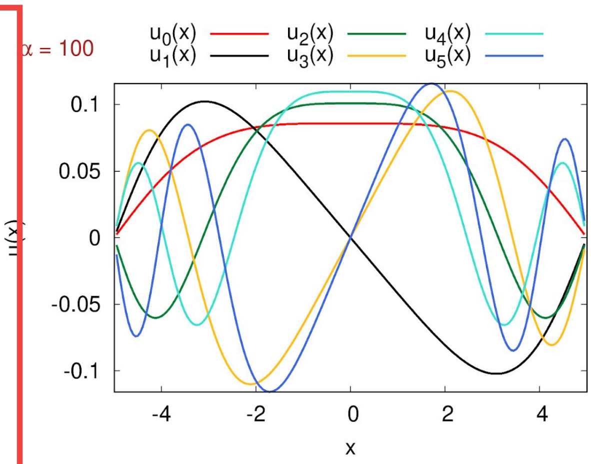
2.2. Wyniki

Przy użyciu programu *gnuplot* zobrazowaliśmy wyniki zapisane w plikach *eval.dat* i *evec.dat*. Otrzymaliśmy:

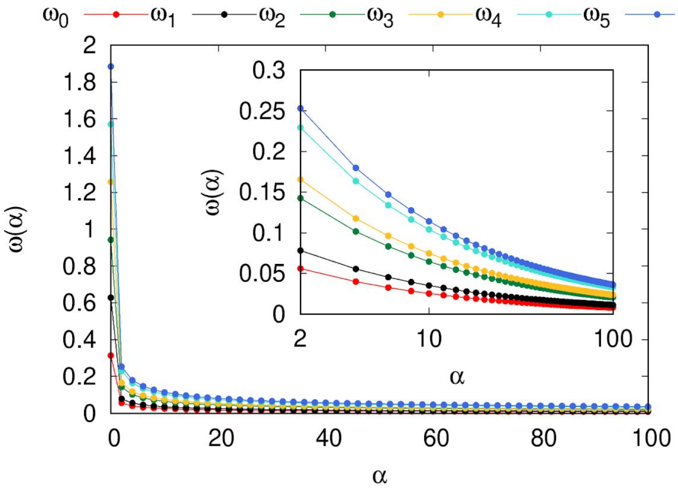
- wykres zmian wartości własnych funkcji w funkcji parametru α,
- wykresy wektorów własnych odpowiadającym sześciu najniższym wartościom własnym (tak jak było to w pliku *eval.dat*, a więc dla $\alpha = 0$ i $\alpha = 100$)



Wykres 1. Gęstość jednorodna, $\alpha = 0$



Wykres 2. Gęstość niejednorodna, $\alpha = 100$



Wykres 3. Zmiany wartości własnych w funkcji parametru α

Wykres 1 przedstawiający wektory własne dla wartości $\alpha = 0$ przypomina kształtem wykres okolicy funkcji sin($(2n+1)\pi$). Na całej przedstawionej długości, linie wykresu nie posiadają żadnych wypłaszczeń. Przeciwna sytuacja występuje w wykresie 2, obrazującym wektory własne dla wartości $\alpha = 100$. Tu wyraźnie widać, że każda z linii symetrycznych w płaszczyźnie pionowej, została w pewnym przedziale otaczającym "0" spłaszczona. Przyczyną takiego wyglądu wykresu 2, jest funkcja definiująca gęstość: $\rho(x) = 1 + 4\alpha x^2$. Jak widać gęstość nie jest zatem zależna liniowo, a od kwadratu x. Zauważyć można, że linie parzyste/nieparzyste na Wykresie 1, pozostają tak samo parzyste/nieparzyste na Wykresie 2.

Wykres 3 wizualizuje wyraźny spadek częstości własnej struny, zależny od wzrostu α. Pogrupowane w pary linie wykresu w "początkowym etapie" ($\alpha < 2$) przedstawiają stromy spadek, który następnie w zależności którą wartość własną przedstawia linia, na przedziale [2, 100], zostaje odpowiednio wyhamowany i stopniowo zbliża się do asymptotycznego zera.

3. Wnioski

Częstości własne strun mają tendencję do grupowania się pary, w taki sposób, że w każdej parze występuje zarówno nieparzysta, jak i parzysta funkcja wektorów własnych

Dzięki rozwiązaniu uogólnionego problemu własnego, dla zadanych danych, byliśmy w stanie wyznaczyć mody własne struny. Zobaczyliśmy sinusoidalny charakter wykresów gęstości struny. Z wykresów odczytać można było także fakt, że częstotliwość drgań jest coraz większa dla każdej kolejnej odpowiadającej jej wartości własnej - Zaczynając od parametru α = 0, gdzie nie było widać zależności między gęstością, a położeniem, a skończywszy na α = 100, gdzie gęstość wyraźnie zależy od położenia, co skutkowało odkształceniem modów struny.

Index of comments

1.1 Napisałam kilka uwag, ale ogólnie logika całego tekstu mi się podoba. Ocenę obniżyłam przede wszystkim za brakujący wykres (pewnie przez pomyłkę).

1.2 Przydałoby się na początek główne równanie (równanie falowe), które rozwiązujemy. Nie trzeba pisać wszystkich dalszych wyprowadzeń z treści, ale podstawowe równanie powinno się znaleźć w sprawozdaniu. Bo to z niego pochodzą wypisane poniżej wzory na elementy macierzy A i B.

1.3 Ok, tylko czym one są? :)

2.1 Nie do końca. A i B są strukturami gsl_matrix, które reprezentują macierze typu double.

2.2 o właśnie :)

3.1 Brakuje wykresu.

3.2 Brakuje zależności od x, ale mniej ogólnie dobre spostrzeżenie.