Sprawozdanie - Laboratorium nr 7

Interpolacja Newtona

Hubert Wdowiak, 23.04.2020

1. Wstęp Teoretyczny

Podczas trwania zajęć analizowaliśmy zagadnienie interpolacji Newtona, która jest szczególnym przypadkiem aproksymacji (przybliżenia na podstawie znanych danych). Wykorzystując metodę interpolacji Newtona, jesteśmy w stanie odnaleźć przybliżenie wartości poszukiwanej funkcji Interpolującej, oraz oszacować ich wartości błędu, na podstawie danych w postaci węzłów (wybranych argumentów poszukiwanej funkcji), oraz odpowiadającym im wartościom funkcji interpolowanej. Jako, że do użycia metody nie jest wymagana znajomość całej dziedziny i obrazu funkcji, a jedynie skończona ilość punktów (argumentów, wraz z odpowiadającymi wartościami), nie potrzebna jest znajomość wzoru owej interpolowanej funkcji.

1.1 Iloraz różnicowy i interpolacja

W metodzie interpolacji Newtona występuje tzw. iloraz różnicowy. Jest to wielkość opisująca przyrost funkcji na danym przedziale. A poprzez poznanie odpowiedniej ilości ilorazów różnicowych, jesteśmy w stanie oszacować postać funkcji interpolującej.

Iloraz różnicowy n-tego rzędu wyznacza się rekurencyjnym wzorem:

$$f^{(j)}(x_0) = \sum_{k=0}^{j} y_k \prod_{l=0,\, l\neq k}^{j} 1/(x_k - x_l) \tag{1}$$

gdzie *j* jest rzędem ilorazu.

Wyznaczany wielomian interpolacyjny określony jest wzorem:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) \tag{2}$$

inna postać tego wielomianu dla nierówno odległych węzłów to:

$$W_n(x)=f(x_0)+f(x_0; x_1)\,\omega_0(x)+f(x_0; x_1; x_2)\,\omega_1(x)+ \dots +f(x_0; x_1; \dots ; x_n)\,\omega_{n-1}(x) \tag{3}$$

Paradoksalnie zwiększając liczbę znanych węzłów, niekoniecznie można spodziewać się otrzymania wyników cechujących się mniejszym błędem. Ze względu na oscylację wielomianów wyższych rzędów, może zajść zjawisko zwane efektem Rungego. Zwykle efekt ten można zaobserwować dopiero od pewnego momentu zwiększania ilości węzłów (do pewnego czasu ich większa ilość poprawia oszacowanie).

W wyniku na występowanie ekstremów funkcji interpolującej, jeśli przebieg funkcji jest wyraźnie różny od przebiegu wielomianu interpolacyjnego, może się okazać, że interpolacja nie odnajdzie odpowiednich wyników, przy danych wielu węzłach.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

W trakcie laboratorium naszym zadaniem było przeprowadzenie interpolacji wielomianowej dla nierównych odstępów argumentów, przy użyciu ilorazów różnicowych - interpolacji Newtona.

Danymi początkowymi były wspomniane nierównomiernie rozmieszczone węzły:

$$x_i = -5, -2, -½, 0, ½, 2, 5$$

Oprócz tego, tą samą metodą przeprowadziliśmy interpolację dla równomiernie oddalonych od siebie węzłów.

Interpolowana funkcja określona została wzorem:

$$f(x) = 1 / (1 + x^2) \tag{3}$$

Aby wykonać zadanie na początku obliczyliśmy wartości funkcji *f* dla każdego zadanego argumentu, a następnie potrzebowaliśmy obliczyć ilorazy różnicowe.

W tym celu zapisaliśmy własną funkcję *void **iloraz_roznicowy**(double* fm, int n, double* ym, double* xm)*, która jako argumenty przyjmowała odpowiednio:

- tablicę liczb zmiennoprzecinkowych, w której zapisywane były wyniki,
- liczbę węzłów,
- tablicę liczb zmiennoprzecinkowych z wartościami interpolowanej funkcji dla każdego węzła,
- tablica liczb zmiennoprzecinkowych wypełnioną węzłami.

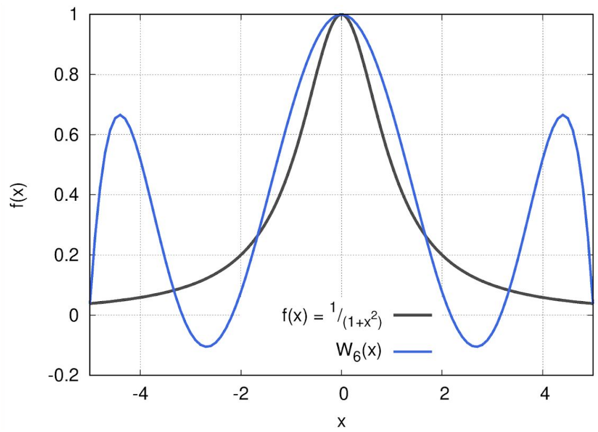
Ciało funkcji obliczało kolejne wartości według wzoru (1).

Kolejnym krokiem było obliczenie wartości wielomiany interpolacyjnego wykorzystującego obliczone ilorazy różnicowe, zatem kolejny raz zapisaliśmy własną funkcję. Owa metoda miała postać: *double **interpolacja** (double x, int n, double* xm, double* fm)*, której ciało zwracało wynik obliczony według wzoru (2).

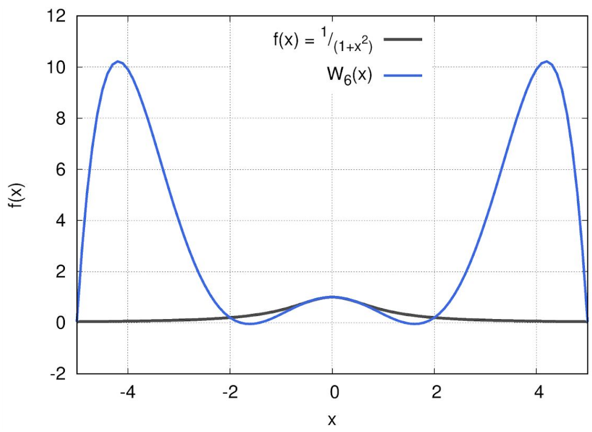
Do wykonania powyższych poleceń, nie były wymagane żadne dodatkowe biblioteki numeryczne, a wykresy otrzymanych wyników utworzyliśmy przy pomocy programu *Gnuplot*. Za pomocą przygotowanego uprzednio skryptu *gnupot7.sh* zwizualizowaliśmy obraz funkcji interpolowanej i interpolującej, co pozwoliło na przeprowadzenie analizy.

3. Wyniki

3.1 Wykresy funkcji interpolowanej oraz interpolującej



Wykres 1. Obraz funkcji interpolowanej i interpolującej dla węzłów w równych odległościach



Wykres 2. Obraz funkcji interpolowanej i interpolującej dla węzłów w różnych odległościach

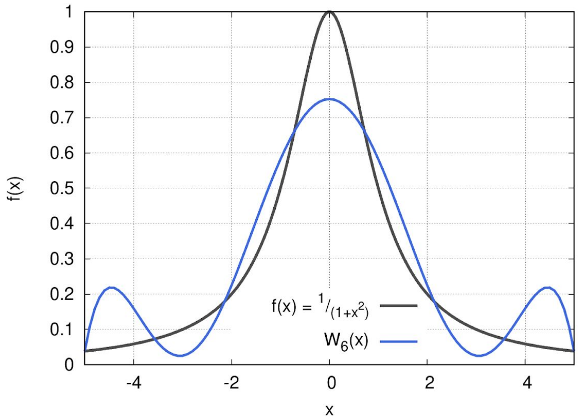
Drugi wykres przyniósł nam rezultaty których można by się było nie spodziewać, patrząc na pierwszy otrzymany wykres. W końcu tam, każda z wartości własnych wydawała się osiągnąć stabilizację, a mimo wszystko po zwiększeniu liczby iteracji okazało się, że niemal każda z wartości osiąga tą stabilizację dużo później. λ_1, λ_3 oraz λ_5 wyraźnie zwiększają się około iteracji odpowiednio dwudziestej, trzydziestej i siedemdziesiątej.

2.3. Wyniki ilorazów różnicowych

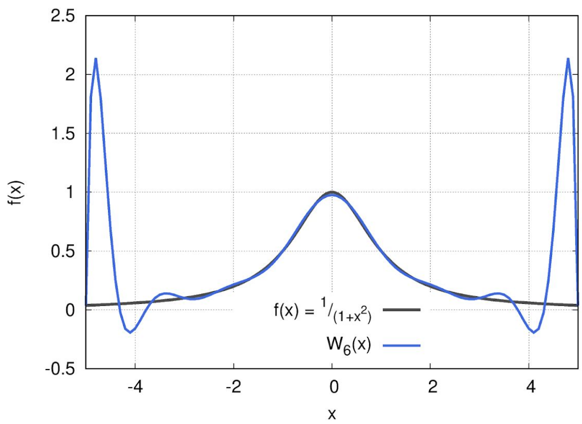
Obliczone ilorazy różnicowe dla nierównoodległych węzłów:
0.0384615
-0.0128205 0.0538462
0.002849 -0.0415954 0.0769231
-0.000569801 0.0216524 -0.215385 -0.0153846
0.0001036 -0.00878529 0.228252 -0.171748 -0.0553846
-1.48e-05 0.00220742 -0.0926074 0.107393 0.0298168 0.0307692
1.48e-06 -0.00031598 0.0169231 -0.0230769 -0.00583787 -0.00615533 -0.00615385

Na wykresie 2. wielomian, tak jak zakładaliśmy, przechodzi przez poszczególne węzły, jednak nie jest dokładnie dopasowany. Szczególnie widoczne są odchyły na brzegach wykresu. Wpływ na to zachowanie mógł mieć dobór węzłów oraz szerokość przedziału, na którym dokonywano interpolacji. Jednym ze sposobów na zniwelowanie takiego zachowania jest zagęszczenie węzłów, zbliżając się do brzegów przedziału.

Na wykresie 1. sytuacja wygląda podobnie. Na środku funkcja jest dopasowana, jednak niedokładnie, gdyż widać wyraźne nieścisłości z wykresem interpolowanej funkcji.



Zwiększając stopień wielomianu chcieliśmy sprawdzić jego wpływ na dokładność oszacowania. Wykres po lewej stronie przedstawia obraz funkcji stopnia 7, dla węzłów w równych odległościach. Jak widać ta aproksymacja kosztem dokładności na środku, zmniejszyła wahania na skrajach przedziału. Idąc dalej tym torem, zwiększyliśmy stopień wielomianu do 15.



Jak widać na wykresie po lewej stronie w tym wypadku, Ponownie powróciliśmy do dokładniejszej aproksymacji na środku przedziału(jest ona prawie idealna), jednak tym razem skrajne wartości zostały całkowicie oddalone od tych realnych.

4. Wnioski

Podsumowując: fakt iż zwiększymy liczbę węzłów, niekoniecznie poprawi wynik naszej aproksymacji. Działając w ten sposób, w naszym eksperymencie otrzymaliśmy dokładniejsze wyniki dla obszaru bliskiego środkowi wykresu, jednak wartości na jego krańcach okazywały się oddalać coraz bardziej od swoich prawdziwych pozycji. Zachowanie to jest tłumaczone efektem Rungego, który wynika z oscylacji wielomianów wysokich rzędów.