Sprawozdanie - Laboratorium nr 2

Dekompozycja LU, odwracanie macierzy

Hubert Wdowiak, 05.03.2020

1. Wstęp Teoretyczny

Podczas trwania zajęć dokonaliśmy rozkładu LU. Jest to metoda w trakcie której, z jednej macierzy A, zostają wyliczone dwie macierze: L (macierz dolnotrójkątną - “lower”), oraz U (górnotrójkątną - “upper”). Takie macierze pozwalają na rozwiązanie układu liniowego:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{y},$$

gdzie $\vec{x}$ jest wektorem niewiadomych, a $\vec{y}$ to wektor danych. Korzysta przy tym z zależności:

$$\mathbf{L\ U = A}, \tag{1}$$

z której wynikają dwa układy równań:

$$\mathbf{L}\ \vec{y} = \vec{b}, \tag{2}$$

$$\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{y}. \tag{3}$$

Rozkład LU umożliwia także szybkie obliczenie wyznacznika macierzy **A**, bazując na wzorze (1), własności mówiącej, że wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi elementów znajdujących się na głównej przekątnej, oraz równaniu:

$$\det(\mathbf{L}) * \det(\mathbf{U}) = \det(\mathbf{LU}). \tag{4}$$

Macierze LU mogą pomóc w odnalezieniu macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$. Aby to zrobić, należy rozwiązać *n* układów równań:

$$\mathbf{L\,U}\,\vec{x}_{(i)} = \vec{b}_{(i)}, \tag{5}$$

gdzie *i* oznacza kolejne liczby naturalne, aż do wymiaru macierzy **A**, a wektory $b_{(i)}$ to pojedyncze kolumny, prawie całkowicie wypełnione zerami. Każdy z nich posiada jedną jedynkę na innym miejscu.

W trakcie laboratorium, jednym z naszych zadań było obliczenie wskaźników uwarunkowania macierzy. Decyduje on o tym, czy dany problem może być skutecznie rozwiązywany za pomocą metod numerycznych, czy może zapis danych wejściowych w postaci liczb zmiennoprzecinkowych wpływa zbytnio na błąd wyniku końcowego. Wskaźnik uwarunkowania jest definiowany jest wzorem:

$$\square = \|\mathbf{A}^{-1}\| * \|\mathbf{A}\|. \tag{6}$$

Normy potrzebne w wyliczeniu wskaźnika mogą mieć różne postaci. Ta której użyliśmy do obliczenia $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ oraz $\|\mathbf{A}\|$ została ustalona jako:

$$\|\mathbf{A}\|_{1,\infty} = \max_{1 \le i,\, j \le n} |a_{i,j}|. \tag{7}$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

W trakcie laboratorium naszym zadaniem było dokonać rozkładu LU na macierzach o podanych uprzednio wartościach:

Wartości macierzy A		
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Tabela 1

Wartości macierzy B		
1.1	2	3
4	5	6
7	8	9

Tabela 2

Jak widać, macierz **B** różni się od macierzy **A** jedynie wartością pierwszego elementu i to stosunkowo niewiele. Aby dokonać rozkładu LU, posłużyliśmy się funkcją *ludcmp(A, n, indx, &d)* znajdującą się w bibliotece *Numerical Recipes*. W tej funkcji: *A* jest macierzą liczb typu float (stworzoną za pomocą procedury *matrix*), podlegającą rozkładowi, *n* to stopień macierzy podany jako liczba typu integer, *indx* to wektor permutacji typu integer (stworzony za pomocą procedury *ivector*), a *d* jest zmienną typu float, określającą parzystość liczby permutacji za pomocą swojego znaku. Po wykonaniu procedury *ludcmp* macierz **A** została nadpisana macierzami **LU.**

Następnie, podczas laboratorium mieliśmy znaleźć macierze odwrotne $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$. Aby to zrobić, dla każdej z nich musieliśmy rozwiązać 3 układy równań, takie jak we wzorze (5). Wektory wyrazów wolnych miały zatem postać:

1
0
0

0
1
0

0
0
1

Stosując funkcję *lukbsb(LU, n, indx, x)* również pochodzącą z biblioteki *Numerical Recipes*, byliśmy w stanie łatwo otrzymać kolejne kolumny macierzy odwrotnej. We wspomnianej funkcji, *LU* oznacza rozkład rozpatrywanej macierzy, *n* to wymiar macierzy podany jako integer, *indx* to wektor, który już wcześniej otrzymaliśmy przy metodzie *ludcmp*, a *x* to ukazane powyżej wektory wyrazów wolnych. Obliczona kolumna macierzy odwrotnej jest zwrócona na miejsce wektora “iksa”.

Kolejnym krokiem było obliczenie wskaźników uwarunkowania macierzy wedle wzorów (6) i (7), oraz mnożenie macierzy przez ich macierze odwrotne, w celu otrzymania macierzy jednostkowej. Przyglądając się wynikom, mogliśmy dojść do interesujących wniosków.

2.2. Wyniki

Wartości macierzy otrzymanych po rozkładzie LU:

L_A		
1	0	0
0.142857	1	0
0.571429	0.5	1

Tabela 3

U_A		
7	8	9
0	0.857143	1.71429
0	0	$1*10^{-20}$

Tabela 4

L_B		
1	0	0
0.157143	1	0
0.571429	0.576923	1

Tabela 5

U_B		
7	8	9
0	0.742857	1.58571
0	0	-0.0576923

Tabela 6

Wartości obliczonych macierzy odwrotnych:

A^{-1}		
$-5*10^{19}$	1*10*20	$-5*10^{19}$
$1*10^{20}$	$-2*10^{20}$	$1*10^{20}$
$-5*10^{19}$	$1*10^{20}$	$-5*10^{19}$

Tabela 7

B^{-1}		
10	-20	10
-20	37	-18
10	-17.3333	8.33334

Tabela 8

Wskaźniki uwarunkowania:

dla macierzy A: $9 * 2 * 10^{20} = 1.8 * 10^{21}$
dla macierzy B: $9 * 37 = 333$

Widać wyraźnie, że wskaźnik uwarunkowania dla macierzy **A** jest wielokrotnie większy, od wskaźnika macierzy **B**. Oznacza to, że nieznaczna zmiana wartości jej wartości początkowych, może mieć ogromny wpływ na wynik operacji. Jest to przesłanka mówiąca nam, że wymnożenie $\mathbf{AA^{-1}}$, może nie zwrócić oczekiwanej macierzy jednostkowej.

Sprawdzenie:

AA^{-1}		
0	0	0
$3.51844*10^{13}$	$-7.03687*10^{13}$	0
0	0	0

Tabela 9

BB^{-1}		
1	0	$1.90735*10^{-6}$
$-3.8147*10^{-6}$	1	$3.8147*10^{-6}$
0	0	1

Tabela 10

3. Wnioski

W teorii powinniśmy otrzymać dwie macierze jednostkowe, jednak tak jak mogliśmy się spodziewać po wartościach wskaźników uwarunkowań, wynik dla macierzy B jest dużo bardziej dokładny. Nasze wyniki potwierdzają bezpośrednie powiązanie wysokiej wartości wskaźnika i błędów spowodowanych przybliżeniami numerycznymi w trakcie operacji. Mają one znaczący wpływ na wynik końcowy. Oznacza to, że metoda rozkładu LU pomimo faktu, że jest ona bardzo efektywna, nie zawsze może przynieść oczekiwany efekt, ze względu na specyficzne uwarunkowania danych wejściowych. Paradoksalnie, ze względu na fakt, że wyznacznik macierzy **A**, wynosi dokładnie 0, czyli jest teoretycznie łatwy do wyliczenia, powoduje to szereg utrudnień dla numerycznego rozwiązania problemu. Stąd też wynika wysoka wartość wskaźnika uwarunkowania dla macierzy **A**.