Sprawozdanie - Laboratorium nr 9

Aproksymacja funkcji okresowych

Hubert Wdowiak, 07.05.2020

1. Wstęp Teoretyczny

Podczas trwania zajęć analizowaliśmy zagadnienie aproksymacji funkcji okresowych.

Jest to proces, w którym dzięki pewnej liczbie znanych, dokładnych rozwiązań, jesteśmy w stanie odgadnąć przybliżone rozwiązanie. Kiedy nie mamy informacji o funkcji analitycznej, znalezienie wartości dla dowolnego argumentu jest niemożliwe. W takiej sytuacji warto użyć metody aproksymacji. Otrzymane rozwiązanie jest zbliżone do oryginalnie poszukiwanych wartości. Zasada działania jest inna niż w przypadku interpolacji, gdzie funkcja interpolująca przecinała wyznaczone punkty. Tutaj nie ma tego wymogu, a dobra jakość rozwiązania jest osiągana poprzez zmniejszanie wartości błędu, bazującego na różnicy pomiędzy funkcjami aproksymującą i aproksymowaną, który może być definiowany na różne sposoby.

2. Opis problemu

W trakcie laboratorium naszym zadaniem było przeprowadzenie aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej trzech funkcji, okresowych, zdefiniowanych wzorami:

$$f_1 = 2sin(x) + sin(2x) + 2sin(3x) + \alpha\,, \tag{1}$$

$$f_2 = 2sin(x) + sin(2x) + 2cos(x) + cos(2x)\,, \tag{2}$$

$$f_3 = 2sin(1.1x) + sin(2.1x) + 2sin(3.1x)\,, \tag{3}$$

gdzie α została określona jako liczba pseudolosowa z przedziału [-0.5, 0.5]:

$$\alpha = \frac{rand()}{RAND_{MAX}+1} - 0.5. \tag{4}$$

Aproksymacja została przeprowadzona na przedziale $[0,\ 2\pi]$, przy użyciu n = 100 węzłów, oraz funkcji

$$F(x) = \sum_{k=0}^{Ms} a_k sin(kx) + \sum_{j=0}^{Mc} b_j cos(jx), \tag{5}$$

przy czym współczynniki a oraz b, zdefiniowane zostały wzorami:

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i sin(kx_i) \tag{6}$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i cos(jx_i) \tag{7}$$

Proces przeprowadziliśmy kilkukrotnie dla każdej z funkcji, oraz różnych liczb współczynników aproksymacji Ms/Mc. Na końcu zapisaliśmy dane wynikowe dla zadanego przedziału, przy ustalonym kroku równym 0.01 .

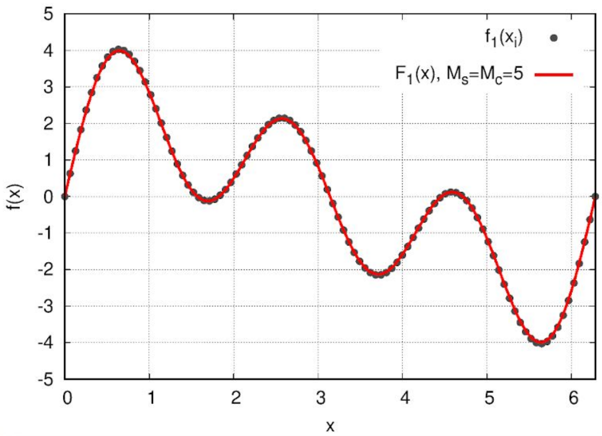
Aproksymację wykonaliśmy dla zestawów funkcji/współczynników:

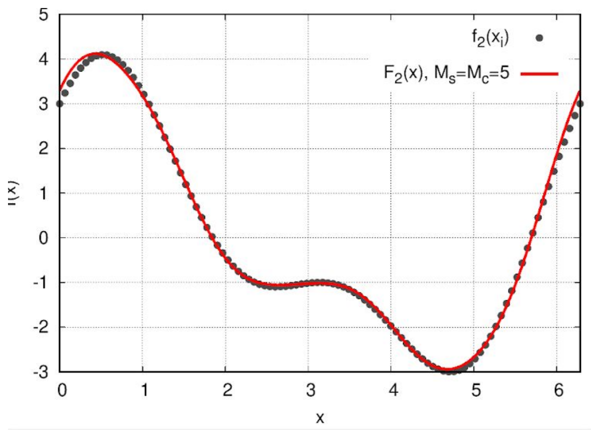
- funkcja = f_1, α=0, (Ms, Mc) = {(5,5)},
- funkcja = f_2, (Ms, Mc) = {(5,5)},
- funkcja = f_3, (Ms, Mc) = {(5,0), (5, 5), (10, 10)},
- funkcja = f1 , α wg wzoru (4), (Ms, Mc) = {(5,5), (30, 30)},

Aby przeprowadzić aproksymację, napisaliśmy program w języku C++, w którym nie potrzebne było wykorzystywanie żadnych specjalistycznych bibliotek numerycznych.

3. Wyniki

Przy użyciu programu *gnuplot* zobrazowaliśmy wyniki zapisane w plikach.

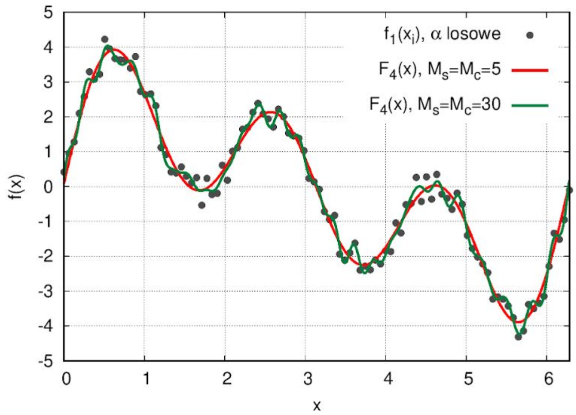




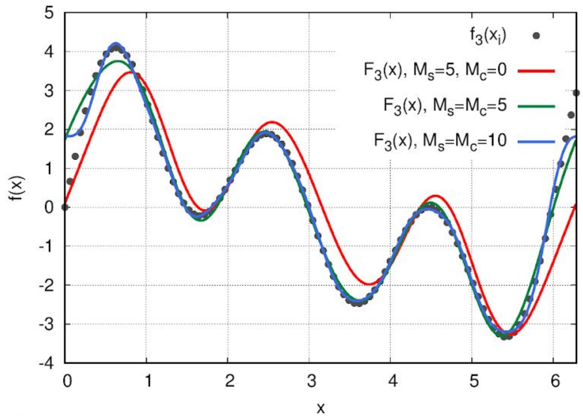
Wykres 1. Aproksymacja funkcji 1 dla Ms=Mc=5

Wykres 2. Aproksymacja funkcji 2 dla Ms=Mc=5

Na powyższych wykresach, zarówno funkcja f_1 jak i funkcja f_2 zostały stosunkowo dobrze oszacowane. W przeważających częściach wykresów, wyaproksymowana krzywa pokrywa się z oznaczonymi punktami aproksymowanej funkcji.



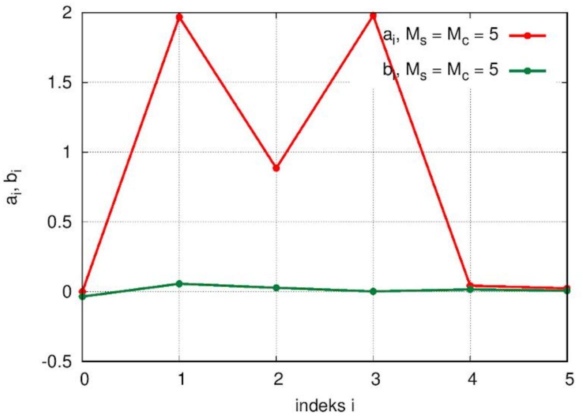
Wykres 3. Aproksymacja funkcji 1 dla Ms=Mc=5, oraz Ms=Mc=30



Wykres 4. Aproksymacja funkcji 3 dla Ms=Mc=5, Ms=Mc=10, oraz Ms=5 i Mc=0

Na wykresie 3. funkcja posiada szum. Oznacza to znaczące podniesienie wymiarowości funkcji, co skutkuje trudniejszym dopasowaniem odpowiedniego wielomianu. Zwiększając liczbę węzłów bylibyśmy w stanie dopasować krzywą jeszcze bardziej , jednak obecny wynik jest zadowalający, gdyż w widoczny sposób wprowadza kompromis z błędem średniokwadratowym.

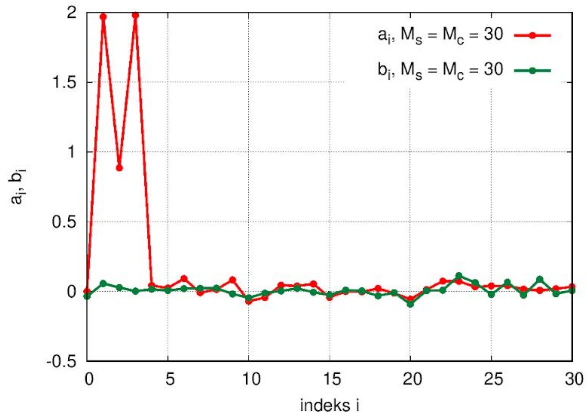
Na wykresie 4. jeden z wielomianów - wyznaczony dla parametrów Ms=5, Mc=0, znacząco odstaje od reszty i wyraźnie okazuje się być najgorzej dopasowanym, ze wszystkich na tym wykresie. Mimo wszystko ogólny kształt funkcji zdaje się przypominać jej prawdziwy przebieg.



Wykres 5, Wartosci parametrow a, b,

b,

dla Ms=Mc=5



Wykres 6. Wartości parametrów a,

dla Ms=Mc=30

4. Wnioski

Metoda średniokwadratowa w bazie funkcji trygonometrycznych, już dla małych wartości Ms i Mc okazuje się tworzyć wyniki zgodne i zbliżone do poszukiwanej funkcji. Kiedy liczba współczynników rośnie, obniżana jest wartość błędu. Ich większa ilość skutkuje wyostrzeniem krawędzi wykresu funkcji. Lepsze wyniki aproksymacji można uzyskać, gdy poszukiwana funkcja jest mniej złożona.