Blatt 10

Barth, Kaiser, Nickel

16. Januar 2018

1 Aufgabe 29 "Die Likelihoodkurve"

Poisson - Verteilung:

$$P_\lambda(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Stichprobe: 13, 8, 9

Likelihood:

$$\mathcal{L} = P(13,\lambda) \cdot P(8,\lambda) \cdot P(9,\lambda)$$

$$\ln \mathcal{L} = \ln(P(13,\lambda)) + \ln(P(8,\lambda)) + \ln(P(9,\lambda))$$

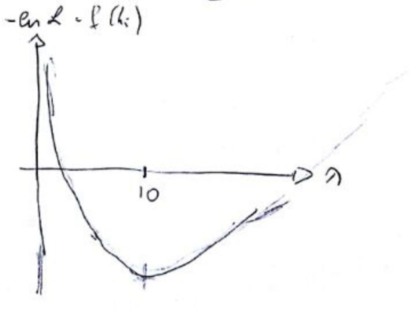
$$= 13 \ln\lambda - \ln 13! + \underbrace{\ln e^{-\lambda}}_{=-\lambda} + 8 \ln\lambda - \ln(8!) + \underbrace{\ln e^{-\lambda}}_{=-\lambda} + 9 \ln\lambda - \ln(9!) + \underbrace{\ln e^{-\lambda}}_{=-\lambda}$$

$$-\ln \mathcal{L} = 3\lambda - 30 \ln\lambda + f(k_i)$$

Minimum von $-\ln\mathcal{L}$ finden

$$\hookrightarrow \frac{\partial(-\ln\mathcal{L})}{\partial\lambda} = 3 - 30\frac{1}{\lambda} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\hookrightarrow 3\lambda = 30 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 10}$$



$$-\ln\mathcal{L}(10) = 30 - 30 \ln 10 + \ln 13! + \ln 8! + \ln 9! = 6{,}881$$

für welches λ wird $-\ln\mathcal{L}$:

$$-\ln\mathcal{L}_{max} + \frac{1}{2}$$

$$+ 2$$

$$+ \frac{9}{2}$$

$$\hookrightarrow -\ln\mathcal{L}_{max} + a = -\ln\mathcal{L}'$$

$$\Leftrightarrow 30 - 30\ln 10 + a = 3\lambda' - 30 \ln\lambda'$$

$$\rightarrow \lambda' - 10 \ln\lambda' = 10(1 - \ln 10) + a = -13{,}026 + a$$

↓

Wolfram*Alpha

↓ solve for x

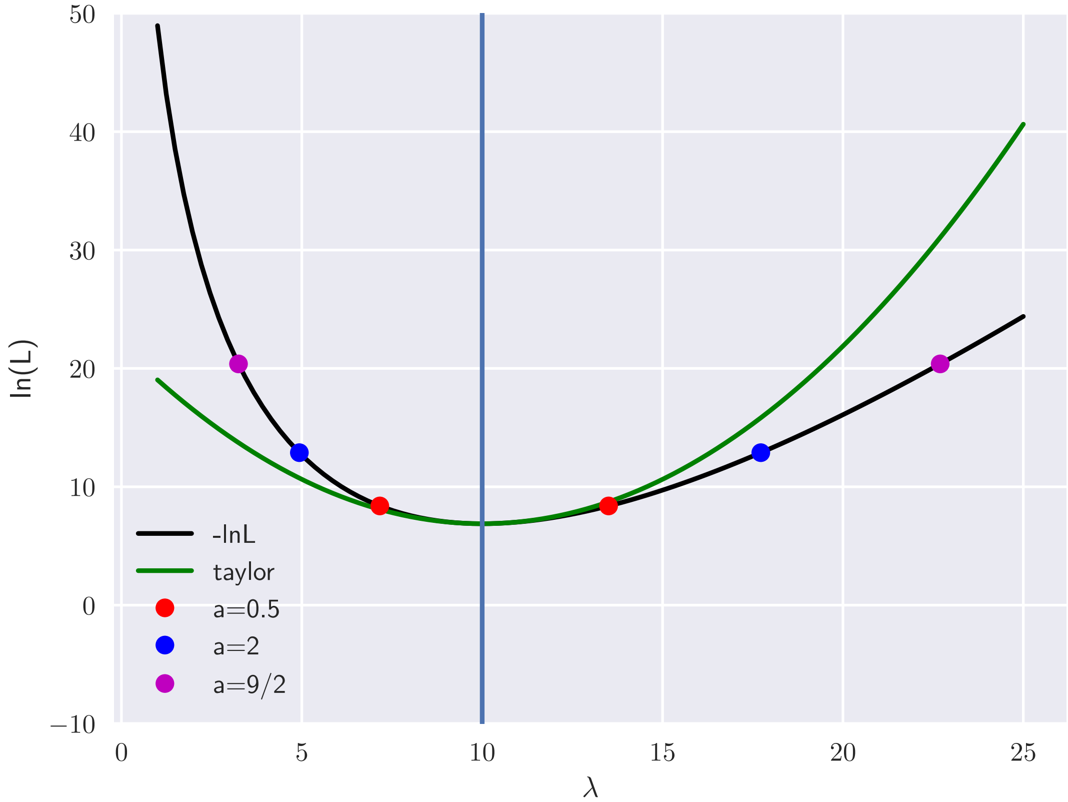
$a = \frac{1}{2}$: $\lambda_1' = 7{,}162$, $\lambda_2' = 13{,}504$

$a = 2$: $\lambda_1' = 4{,}932$, $\lambda_2' = 17{,}723$

$a = \frac{9}{2}$: $\lambda_1' = 3{,}245$, $\lambda_2' = 22{,}696$

zu d) $\ln(d) \approx \ln(a) + \frac{\partial \ln(d)}{\partial d}(a)(d-a) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln(d)}{\partial d^2}(a)(d-a)^2$

mit $a = 10 \Rightarrow \ln(d) \approx \ln(10) + \frac{1}{10}(d-10) + \frac{1}{2}\frac{1}{10^2}(d-10)^2$



ln(L)
λ
-lnL
taylor
a=0.5
a=2
a=9/2

2 Aufgabe 30 " F- Praktikum"

a.) Berechung der Design Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \cos(30) & \sin(30) \\ \cos(60) & \sin(60) \\ \cos(90) & \sin(90) \\ \cos(120) & \sin(120) \\ \cos(150) & \sin(150) \\ \cos(180) & \sin(180) \\ \cos(210) & \sin(210) \\ \cos(240) & \sin(240) \\ \cos(270) & \sin(270) \\ \cos(300) & \sin(300) \\ \cos(330) & \sin(330) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.866 & 0.5 \\ 0.5 & 0.866 \\ 0 & 1 \\ -0.5 & 0.866 \\ -0.866 & 0.5 \\ -1 & 0 \\ -0.866 & -0.5 \\ -0.5 & -0.866 \\ 0 & -1 \\ 0.5 & -0.866 \\ 0.866 & -0.5 \end{pmatrix}$$

b.) Der Lösungsvektor berechnet sich wie folgt:

$$\hat{a} = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\vec{y}$$

Die Berechnung wurde in der main.py durchgeführt. Es ergibt sich somit für dien Lösungsvektor: $a = (-0.0375, 0.0774)^{\mathrm{T}}$

c.)

Die Berechnung der Kovarianzmatrix erfolgt ebenfalls in der main.py, diese berechnet sich wie folgt:

$$\mathrm{V}[\hat{a}] = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 6.84 & -4.74 \\ -5.42 & 6.84 \end{pmatrix}$$

Für die Fehler ergibt sich :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.261 \\ 0.261 \end{pmatrix}$$

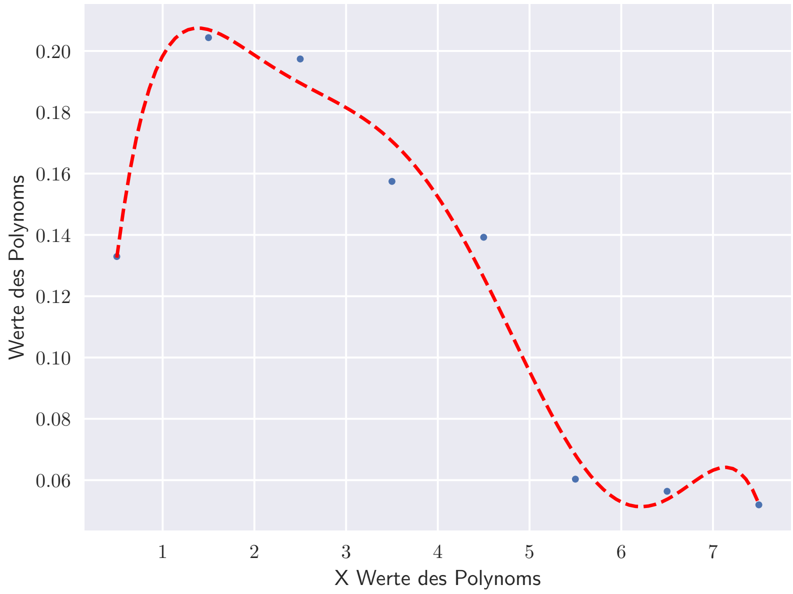
d.)

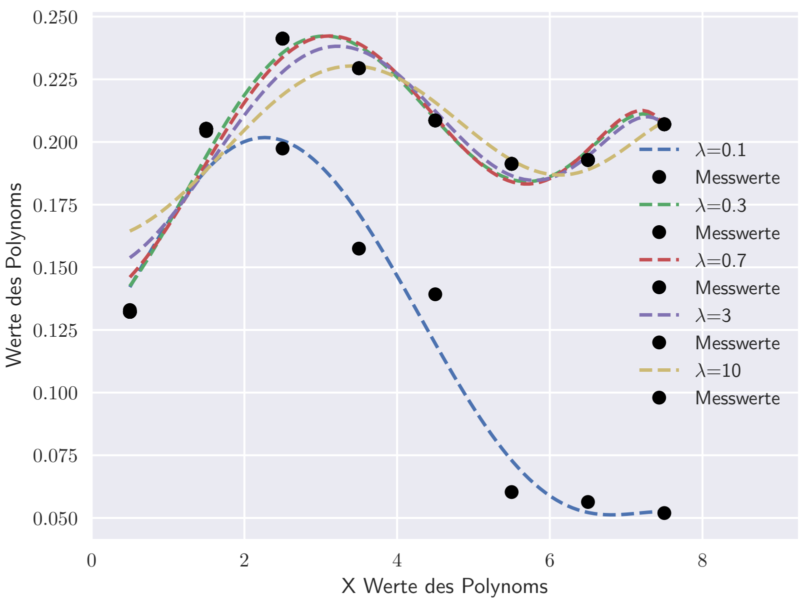
Für die Koeffizienten aus der Theorie folgt:

$$A_0 = -0.038 \pm 0.026 \qquad \delta = 0.077 \pm 0.026$$

3 Aufgabe 31 "Regularisierung kleinste Quadrate"

a.) b.)


Werte des Polynoms
X Werte des Polynoms


Werte des Polynoms
X Werte des Polynoms
λ=0.1
Messwerte
λ=0.3
Messwerte
λ=0.7
Messwerte
λ=3
Messwerte
λ=10
Messwerte