SPRAWOZDANIE

Zajęcia: Matematyka Konkretna

Prowadzący: prof. dr hab. Vasyl Martsenyuk

Laboratorium Nr 5 Data 11.05.2025	Imię Nazwisko Hubert Mentel Informatyka
Temat: Metoda gradientu prostego. Stosowanie do algorytmu wstecznej propagacji błędu	II stopień, niestacjonarne,
Wariant 6	2 semestr, gr.1a

1. Cel:

Celem jest nabycie podstawowej znajomości obliczenia gradientów oraz stosowanie gradientu w celu optymalizacji funkcji wielu zmiennych i wstecznej propagacji błędu

2. Zadania:

Zadanie dotyczy odnalezienia wartości minimalnej funkcji dwóch zmiennych *f* oraz zmiennych *x* i *y* metodą gradienta wraz z wizualizacją w 3D odpowiednio do określonego zadania. Można skorzystać z dowolnych bibliotek Python.

6. $f(x, y) = \cos((x + 3y)^2), x \in [1, 3], \quad y \in [1, 3]$

Zadanie dotyczy obliczenia gradientów sieci neuronowej z pomocą biblioteki numpy zadanej z pomocy architektury

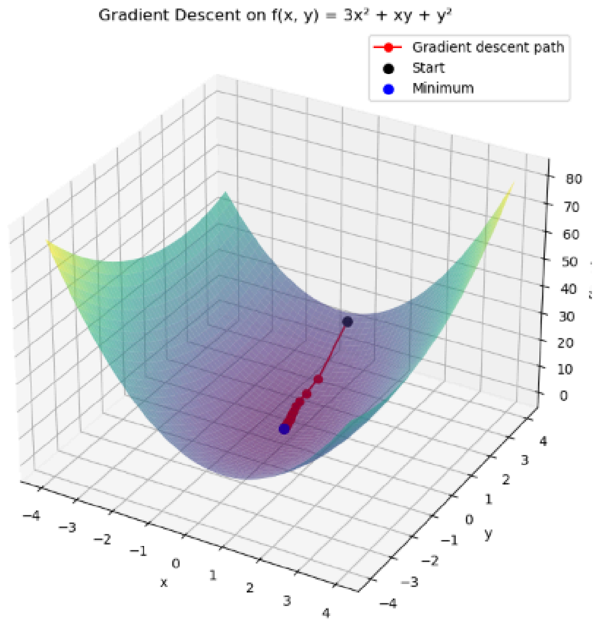
```
6. nn_architecture = [
       {"input_dim": 2, "output_dim": 2, "activation": "relu"},
       {"input_dim": 2, "output_dim": 1, "activation": "tanh"}
   ]
```

Pliki dostępne są pod linkiem:
https://github.com/HubiPX/NOD/tree/master/MK/Zadanie%205

3. Opis programu opracowanego (kody źródłowe, zrzuty ekranu)

[1]:

```
import tensorflow as tf
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Funkcja celu
def f(x, y):
    return 3 * x**2 + x*y + y**2

# Parametry optymalizacji
lr = 0.1
epochs = 50

# Startowe punkty
x = tf.Variable(2.0)
y = tf.Variable(3.0)

# Optymalizator
optimizer = tf.keras.optimizers.SGD(learning_rate=lr)

# Historia do wizualizacji
x_list, y_list, f_list = [], [], []

# Pętla optymalizacji
for epoch in range(epochs):
    with tf.GradientTape() as tape:
        z = f(x, y)
    grads = tape.gradient(z, [x, y])
    optimizer.apply_gradients(zip(grads, [x, y]))

    # Zapisz dane do wizualizacji
    x_list.append(x.numpy())
    y_list.append(y.numpy())
    f_list.append(z.numpy())

# Siatka do wizualizacji funkcji
x_grid = np.linspace(-4, 4, 100)
y_grid = np.linspace(-4, 4, 100)
X, Y = np.meshgrid(x_grid, y_grid)
Z = f(X, Y)

# Wizualizacja 3D
fig = plt.figure(figsize=(10,8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis', alpha=0.6)

# Trajektoria optymalizacji
ax.plot(x_list, y_list, f_list, color='r', marker='o', label='Gradient descent path')
ax.scatter(x_list[0], y_list[0], f_list[0], color='black', s=50, label='Start')
ax.scatter(x_list[-1], y_list[-1], f_list[-1], color='blue', s=50, label='Minimum')

# Opis osi
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('f(x, y)')
ax.set_title('Gradient Descent on f(x, y) = 3x² + xy + y²')
ax.legend()
plt.show()
```



[2]:

```python
import numpy as np

# --------------------------
# Funkcje aktywacji i ich pochodne
# --------------------------
def relu(Z):
    return np.maximum(0, Z)

def relu_backward(dA, Z):
    dZ = dA.copy()
    dZ[Z <= 0] = 0
    return dZ

def tanh(Z):
    return np.tanh(Z)

def tanh_backward(dA, Z):
    return dA * (1 - np.tanh(Z)**2)

# --------------------------
# Architektura sieci
# --------------------------
nn_architecture = [
    {"input_dim": 2, "output_dim": 2, "activation": "relu"},
    {"input_dim": 2, "output_dim": 1, "activation": "tanh"}
]

# --------------------------
# Inicjalizacja wag
# --------------------------
def init_layers(architecture, seed=42):
    np.random.seed(seed)
    parameters = {}
    for idx, layer in enumerate(architecture):
        layer_idx = idx + 1
        input_dim = layer["input_dim"]
        output_dim = layer["output_dim"]
        parameters["W" + str(layer_idx)] = np.random.randn(output_dim, input_dim) * 0.1
        parameters["b" + str(layer_idx)] = np.zeros((output_dim, 1))
    return parameters

# --------------------------
# Propagacja w przód
# --------------------------
def single_forward(A_prev, W, b, activation):
    Z = np.dot(W, A_prev) + b
    if activation == "relu":
        A = relu(Z)
    elif activation == "tanh":
        A = tanh(Z)
    else:
        raise Exception("Activation not supported")
    return A, Z

def full_forward(X, parameters, architecture):
    memory = {}
    A = X
    for idx, layer in enumerate(architecture):
        layer_idx = idx + 1
        W = parameters["W" + str(layer_idx)]
        b = parameters["b" + str(layer_idx)]
        activation = layer["activation"]

        A_prev = A
        A, Z = single_forward(A_prev, W, b, activation)

        memory["A" + str(idx)] = A_prev
        memory["Z" + str(layer_idx)] = Z
    memory["A" + str(len(architecture))] = A
    return A, memory

# --------------------------
# Funkcja kosztu (MSE)
# --------------------------
def compute_cost(Y_hat, Y):
    m = Y.shape[1]
    return np.sum((Y_hat - Y)**2) / (2 * m)

# --------------------------
# Propagacja wsteczna
# --------------------------
def single_backward(dA, W, Z, A_prev, activation):
    m = A_prev.shape[1]
    if activation == "relu":
        dZ = relu_backward(dA, Z)
    elif activation == "tanh":
        dZ = tanh_backward(dA, Z)
    else:
        raise Exception("Activation not supported")
    dW = (1 / m) * np.dot(dZ, A_prev.T)
    db = (1 / m) * np.sum(dZ, axis=1, keepdims=True)
    dA_prev = np.dot(W.T, dZ)
    return dA_prev, dW, db
```

```python
def full_backward(Y_hat, Y, memory, parameters, architecture):
    grads = {}
    m = Y.shape[1]
    dA_prev = Y_hat - Y

    for idx_prev, layer in reversed(list(enumerate(architecture))):
        layer_idx = idx_prev + 1
        activation = layer["activation"]
        A_prev = memory["A" + str(idx_prev)]
        Z = memory["Z" + str(layer_idx)]
        W = parameters["W" + str(layer_idx)]

        dA_prev, dW, db = single_backward(dA_prev, W, Z, A_prev, activation)

        grads["dW" + str(layer_idx)] = dW
        grads["db" + str(layer_idx)] = db

    return grads

# --------------------------
# Przykładowe dane wejściowe
# --------------------------
X = np.array([[0.5, -0.3], [0.1, 0.8]]).T  # shape (2, 2)
Y = np.array([[1, 0]])  # shape (1, 2)

# --------------------------
# Uruchomienie procesu
# --------------------------
params = init_layers(nn_architecture)
Y_hat, memory = full_forward(X, params, nn_architecture)
cost = compute_cost(Y_hat, Y)
grads = full_backward(Y_hat, Y, memory, params, nn_architecture)

# --------------------------
# Wyniki
# --------------------------
print("Koszt:", cost)
for i in range(1, len(nn_architecture) + 1):
    print(f"dW{i} =", grads["dW" + str(i)])
    print(f"db{i} =", grads["db" + str(i)])
```

```
Koszt: 0.25034170254432614
dW1 = [[ 5.85780444e-03 -3.51468267e-03]
 [ 3.51719632e-06  2.81375706e-05]]
db1 = [[1.17156089e-02]
 [3.51719632e-05]]
dW2 = [[-0.01450165 -0.00019276]]
db2 = [[-0.5018413]]
```

4. Wnioski

W zadaniu dotyczącym obliczenia gradientów sieci neuronowej z użyciem biblioteki NumPy, uzyskane wartości kosztu oraz gradientów wag i biasów wskazują, że sieć działa poprawnie, a obliczenia wstecznej propagacji zostały wykonane prawidłowo. Stosunkowo niewielkie wartości gradientów wag sugerują, że sieć znajduje się w spokojnym regionie funkcji kosztu (np. blisko minimum lokalnego), natomiast większy gradient biasu w warstwie wyjściowej może oznaczać potrzebę jego istotnej korekty dla poprawy predykcji. Z kolei w zadaniu polegającym na znalezieniu wartości minimalnej funkcji dwóch zmiennych metodą gradientu i jej wizualizacji w 3D, zastosowana metoda spadku gradientowego skutecznie doprowadziła do lokalnego minimum funkcji, co zostało zobrazowane na wykresie jako trajektoria zejścia po powierzchni funkcji celu. Analiza ta potwierdziła, że metoda gradientowa jest skutecznym narzędziem w optymalizacji funkcji nieliniowych, a wizualizacja 3D ułatwia intuicyjne zrozumienie procesu optymalizacji w przestrzeni parametrów.