ФГОБУ ВПО "СибГУТИ"
Кафедра вычислительных систем

ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ЯЗЫКИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Самостоятельное решение задач (циклы)

Преподаватель:

Доцент Кафедры ВС, к.т.н.

Поляков Артем Юрьевич

Порядок проведения занятия

1. Каждое задание выполняется в виде отдельной программы, название которой формируется по шаблону: **ex<номерЗадания>.c**

2. Задания выполняются **индивидуально** каждым студентом под **соответствующей учетной записью**.

3. Все программы, разработанные в рамках данного задания (включая домашнее задание) должны быть помещены в директорию **loops_self** в домашнем каталоге студента.

4. Проверка выполнения заданий будет производится на основе вышеуказанных правил.

Ряды Маклорена

Пусть функция $f\,(x)$ имеет непрерывные производные вплоть до $(n+1)$-го порядка. Тогда ее можно разложить в степенной ряд по формуле Маклорена:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+R_n,$$

где $f^{(n)}(0)$ – n-я производная функции $f\,(x)$ в точке $x = 0$, а R_n – остаточный член ряда. Для сходимости ряда Маклорена необходимо, чтобы:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

Ряд Маклорена позволяет находить приближенные значения функции в некотором диапазоне, который определяется $f\,(x)$

Задачи

Разработать программы, вычисляющие приближенные значения следующих элементарных функций в указанном диапазоне значений x. На вход программы подается:

1. Количество используемых членов ряда – n.
2. Точка x, в которой требуется вычислить приближенное значение $f(x)$.

Проверить полученные результаты для допустимых x, сравнив их с эталонными значениями приближаемых функций.

$$1.\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, -\infty < x < \infty$$

$$2.\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, -1 < x < 1$$

$$3.\ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} x^n, -1 < x < 1$$

Ряды Маклорена (вычисление с заданной точностью)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+R_n,$$

Как было сказано ранее рассмотренные ряды Маклорена являются убывающими, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \qquad R_n = f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+f^{(n+2)}(0)\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots.$$

Если ряд сходится, то для его элементов справедливо:

$$f(0) > f'(0)x > f''(0)\frac{x^2}{2!} > \ldots > f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

Для того, чтобы вычислить значение f(x) с заданной точностью ε можно прекратить вычисление суммы ряда на *n*-м элементе, таком что:

$$\left| f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \right| < \varepsilon$$

Задачи

Доработать программы решения задач 1 – 3 так, чтобы вычисление выполнялось с заданной точностью ε.

На вход программы подается:

1. Точность ε, с которой требуется вычислить $f(x)$.
2. Точка x, в которой требуется вычислить приближенное значение $f(x)$.

Проверить полученные результаты для допустимых x, сравнив их с эталонными значениями приближаемых функций.

$$4.\ e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \ldots + \frac{x^{n}}{n!},\ -\infty < x < \infty$$

$$5.\ \ln(1-x) = x - \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n}}{n},\ -1 < x < 1$$

$$6.\ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^{2}}{8} + \frac{x^{3}}{16} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n)!}{(1-2n)(n!)^{2}4^{n}}x^{n},\ -1 < x < 1$$

Итерационная формула Герона

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n} \right) \end{cases}$$

Итерационная формула задает убывающую (начиная со 2-го элемента) последовательность, которая при любом выборе быстро сходится к величине $\sqrt{a}$ (квадратный корень из числа), то есть:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{a}$$

Задачи

7. Разработать программу вычисления квадратного корня числа a. Вычисление прекращается, когда $(x_n - x_{n+1}) < \varepsilon$. Значения a и ε вводятся с клавиатуры.

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) \end{cases}$$

Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля – бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму.

В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси.

Треугольник Паскаля

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

0:	1
1:	1 1
2:	1 2 1
3:	1 3 3 1
4:	1 4 6 4 1
5:	1 5 10 10 5 1
6:	1 6 15 20 15 6 1
7:	1 7 21 35 35 21 7 1
8:	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9:	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10:	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11:	1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
12:	1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
13:	1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
14:	1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

Задачи

8. Вывести n строк треугольника паскаля на экран в форме:

```
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
   ...
```

9. Вывести n строк треугольника паскаля на экран в формате:

```
    1
   1 1
  1 2 1
 1 3 3 1
1 4 6 4 1
   ...
```

Домашняя работа

Ряды Маклорена

Разработать программы, вычисляющие приближенные значения следующих элементарных функций в указанном диапазоне значений *x*. На вход программы подается:

1. Количество используемых членов ряда – *n*.
2. Точка *x*, в которой требуется вычислить приближенное значение *f* (*x*).

Проверить полученные результаты для допустимых *x*, сравнив их с эталонными значениями приближаемых функций.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + R_n, \; -1 < x < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + R_n, = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + R_n, -\infty < x < \infty$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n + R_n, \; -1 < x < 1, \; \binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k}$$

Арифметическое извлечение квадратного корня

Для квадратов чисел верны следующие равенства:

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

. . . .

Используя данное свойство можно арифметически вычислить целую часть корня следующим образом:

Пусть x – число, для которого необходимо найти корень.

1. $x = x - 1$, если $x = 0$, то $\sqrt{x} = 1$, если $x < 0$, то $\sqrt{x} \approx 1$
2. $x = x - 3$, если $x = 0$, то $\sqrt{x} = 2$, если $x < 0$, то $\sqrt{x} \approx 2$
3. $x = x - 5$, если $x = 0$, то $\sqrt{x} = 3$, если $x < 0$, то $\sqrt{x} \approx 3$

….

n. $x = x - (2\cdot(n - 1)+1)$, , если $x = 0$, то $\sqrt{x} = n$, если $x < 0$, то $\sqrt{x} \approx n$

Разработать программу приближенного нахождения $\sqrt{x}$

Треугольник Паскаля
(то, что не решено на занятии)

8. Вывести n строк треугольника паскаля на экран в форме:

```
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
      ...
```

9. Вывести n строк треугольника паскаля на экран в формате:

```
    1
   1 1
  1 2 1
 1 3 3 1
1 4 6 4 1
   ...
```