# Problème 3

i). Soient $X, Y$ absolument continues telles que $\mathbb{P}(X>0, Y>0)=1$ indépendantes.

. $\mathbb{P}(X>0, Y>0) = \mathbb{P}(X>0) . \mathbb{P}(Y>0)$ par indépendance.
$= 1$

donc $\mathbb{P}(X>0) = \mathbb{P}(Y>0) = 1$

$\mathbb{P}(\cancel{Y}=0)=0$

. Soit $Z := \frac{X}{Y}$ ; donc $\frac{X}{Y}$ bien définie.

Voyons si $Z$ admet une densité

Soit $\varphi$ borélienne ; étudions $\mathbb{E}(\varphi(Z))$

$$\mathbb{E}(\varphi(Z)) = \mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{X}{Y}\right) . d\mathbb{P}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) . d\mathbb{P}_{(X,Y)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) . d\mathbb{P}_X . d\mathbb{P}_Y \quad \text{par indépendance}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) . \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) . \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) . f_X(x) . f_Y(y) \, dx \, dy$$

changement de variable : on pose $z = \frac{x}{y}$ donc $x = yz$

et $\frac{dx}{dz} = y$ donc $dx = y \, dz$

d'où $\mathbb{E}(\varphi(Z)) = \iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}} \varphi(z) . 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(yz) . 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(y) . f_X(yz) . f_Y(y) . y \, dz \, dz$

2

or, $y > 0$ donc $1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(yz) = 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(z)$

finalement, $\mathbb{E}(\varphi(Z)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) . \left( \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(y) 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(z) . y . f_X(yz) . f_Y(y) dy \right) dz$

$Z = \frac{X}{Y}$ est donc absolument continue, de densité

$$\int_{\mathbb{R}_+} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(z) . f_X(yz) . f_Y(y) . y . dy$$

ii) Soit $Z := \frac{X/m}{Y/n}$ ; où $X \sim \chi^2(m)$
$Y \sim \chi^2(n)$

Calculons en premier lieu les lois de $X/m$ et $Y/n$

Soit $\varphi$ borélienne

$$\mathbb{E}(\varphi(X/m)) = \int_{\Omega} \varphi(X/m) . d\mathbb{P}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{m}\right) . d\mathbb{P}_X$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{m}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} . x^{\frac{m}{2}-1} . e^{-x/2} dx$$

changement de variable : on pose $z = \frac{x}{m}$ donc $x = mz$
et $\frac{dx}{dz} = m dz$

dès lors,

$$\mathbb{E}\left(\varphi(X/m)\right) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot (m.z)^{\frac{m}{2}-1} e^{-z\frac{m}{2}} \cdot m\,dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot m^{\frac{m}{2}-1} \cdot m \cdot z^{\frac{m}{2}-1} \cdot e^{-z\frac{m}{2}} dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot z^{\frac{m}{2}-1} \cdot e^{-z\frac{m}{2}} dz$$

$\frac{X}{m}$ est donc absolument absolument continue de densité

$$\frac{(m/2)^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} z^{\frac{m}{2}-1} \cdot e^{-z m/2}$$

On en déduit que $\frac{X}{m} \sim \Gamma\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)$

. Par un raisonnement similaire, on obtient $\frac{Y}{n} \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$

. De par i) ; $\frac{X/m}{Y/n}$ est absolument continue, de densité

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}_+} f_X(yz) \cdot y \cdot f_Y(y)\,dy \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot (zy)^{\frac{m}{2}-1} \cdot e^{-yz\frac{m}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y\frac{n}{2}} dy \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z^{\frac{m}{2}-1} \int_{\mathbb{R}} y^{\frac{m+n}{2}-1} \cdot e^{-y\left(\frac{zm+n}{2}\right)} \cdot dy \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$$

changement de variable : on pose $u = y\left(\frac{zm+n}{2}\right)$

donc $y = \frac{2u}{zm+n}$ et $dy = \frac{2\,du}{zm+n}$

donc $f_Z(z) = \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot z^{\frac{m}{2}-1} \int_{\mathbb{R}} u^{\frac{m+n}{2}-1} \cdot e^{-u} \left(\frac{2}{zm+n}\right)^{\frac{m+n}{2}} du \; \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$

$$= \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot z^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{2}{zm+n}\right)^{\frac{m+n}{2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u^{\frac{m+n}{2}-1} \cdot e^{-u} du}_{=\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot z^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{zm+n}\right)^{\frac{m+n}{2}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$$

$$= \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot m^{m/2} \cdot n^{n/2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}} \cdot 2^{\frac{m+n}{2}} \cdot z^{\frac{m}{2}-1} \cdot \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)}{(zm+n)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} m^{\frac{m}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot z^{\frac{m}{2}-1} \cdot \frac{1}{\left(n\left(z\frac{m}{n}+1\right)\right)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(z)$$

$$= \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot m^{\frac{m}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot z^{\frac{m}{2}-1} \cdot \frac{1}{n^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(z\frac{m}{n}+1\right)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$$

$$= \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{m^{\frac{m}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{m+n}{2}}} \cdot z^{\frac{m}{2}-1} \cdot \frac{1}{\left(z\frac{m}{n}+1\right)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$$ 5

Or, $$\frac{m^{\frac{m}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{m+n}{2}}} = m^{\frac{m}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot n^{\frac{-m-n}{2}} = m^{\frac{m}{2}} \cdot n^{-\frac{m}{2}}$$
$$= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}$$

finalement,
$$f_Z(z) = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{mz}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot z^{\frac{m}{2}-1} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$$

iii)

iv) Soit $T \sim T(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Calculons la densité de $T^2(n)$

Soit $\varphi$ borélienne.

$$\mathbb{E}(\varphi(T^2)) = \int_\Omega \varphi(T^2) \cdot d\mathbb{P}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t^2) \cdot d\mathbb{P}_T$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t^2) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \, dt$$

or, $f : t \longmapsto t^2$ est paire !

donc

$$\mathbb{E}(\varphi(T^2)) = 2 \cdot \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t^2) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\, dt$$

changement de variable : $u = t^2$ donc $t = \sqrt{u}$

$$\text{et } \frac{dt}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

donc

$$\mathbb{E}(\varphi(T^2)) = 2 \cdot \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(u) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du$$

or, $\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$

$$\mathbb{E}(\varphi(T^2)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot u^{-1/2} \cdot \frac{(n)^{-1/2}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\, du$$

donc $T^2$ admet pour densité

$$f_{T^2}(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \cdot \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot t^{-1/2} \frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}$$

$$= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \cdot \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{t^{1/2 - 1}}{n^{1/2}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

donc $T^2 \sim F(1, n)$.

v) Soit $X \sim F(m,n)$

$\mathbb{P}(X=0)=0$ donc $\frac{1}{X}$ absolument continue.

Calculons sa densité:

Soit $\varphi$ borélienne

$$\mathbb{E}(\varphi(1/X)) = \int_\Omega \varphi\left(\frac{1}{X}\right) . d\mathbb{P}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) . d\mathbb{P}_X$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) . \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} . \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}}} . \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, dx$$

changement de variable: $z = \frac{1}{x}$ donc $x = \frac{1}{z}$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{-1}{z^2}$$

donc

$$\mathbb{E}(\varphi(1/X)) = -\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(z) . \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} . \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}-1} \frac{1}{\left(1+\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{z}\right)^{\frac{m+n}{2}}} . \frac{dz}{-z^2}$$

Or, $\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right).\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}\right)}$

$$= \beta\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$$

et,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}-1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{z}\right)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \frac{1}{z^2}$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{z}\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}+1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{nz+m}{nz}\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}+1} \cdot \frac{1}{(nz+m)^{\frac{m+n}{2}} \cdot \frac{1}{(nz)^{\frac{m+n}{2}}}}$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot n^{\frac{m+n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}+1} \cdot z^{\frac{m+n}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{n}{m}z\right)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \frac{1}{m^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m+n}{2}} \cdot z^{\frac{m+n}{2}-\frac{m}{2}-1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{n}{m}z\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m+n}{2}-\frac{m}{2}} \cdot z^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{n}{m}z\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot z^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{n}{m}z\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

finalement,

$$\mathbb{E}\left(\varphi(1/x)\right) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot z^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{n}{m}z\right)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \frac{1}{\beta\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)} \cdot dz$$

Et donc, $\frac{1}{x} \sim F(n, m)$

vi) Soient $X_1, \dots, X_m$ telles que $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$

$Y_1, \dots, Y_n$ telles que $Y_k \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Soit $\alpha \in ]0,1[$, on va construire un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ de $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_Y^2}$.

Notons $S_{m,x}^2 = \sum_{k=0}^{m} X_k^2 - \overline{X_m}^2$ ; où $\overline{X_m} = \frac{\sum X_k}{m}$

$S_{n,Y}^2 = \sum_{k=0}^{n} Y_k^2 - \overline{Y_k}^2$ ; où $\overline{Y_k} = \frac{\sum Y_k}{n}$

D'après le cours, cf page 83, on a que

$$\frac{m S_{m,x}^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2(m-1)$$

et

$$\frac{n S_{n,Y}^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

or, de par la question iii), $\frac{\chi^2(m-1)/m-1}{\chi^2(n-1)/n-1} \sim F(m-1, n-1)$

donc
$$\frac{\frac{m}{m-1} \cdot \frac{S_{m,x}^2}{\sigma_x^2}}{\frac{n}{n-1} \frac{S_{n,Y}^2}{\sigma_Y^2}} \sim F(m-1, n-1)$$

Maintenant

Soient $f_{\alpha_1}$ ; $f_{\alpha_2}$ tels que

$$\mathbb{P}\left(f_{\alpha_1} \leq F \leq f_{\alpha_2}\right) = 1-\alpha$$

où

$$F \sim F(m-1, n-1)$$

On obtient donc sous ces notations et conditions que

$$\mathbb{P}\left( f_{\alpha_1} \leq \frac{\frac{m}{m-1} \frac{S_{m,x}^2}{\sigma_x^2}}{\frac{n}{n-1} \frac{S_{n,y}^2}{\sigma_y^2}} \leq f_{\alpha_2} \right) = 1-\alpha$$

d'où

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left( \frac{f_{\alpha_1} \cdot \frac{n}{n-1} S_{n,y}^2}{S_{m,x}^2 \cdot \frac{m}{m-1}} \leq \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \leq \frac{f_{\alpha_2} \cdot \frac{n}{n-1} S_{n,y}^2}{S_{m,x}^2 \cdot \frac{m}{m-1}} \right)$$

$$= \mathbb{P}\left( \frac{\frac{m}{m-1} S_{m,x}^2}{f_{\alpha_1} \cdot \frac{n}{n-1} S_{n,y}^2} \geq \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \geq \frac{\frac{m}{m-1} S_{m,x}^2}{f_{\alpha_2} \cdot \frac{n}{n-1} S_{n,y}^2} \right)$$

Un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ de $\dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$

est donc

$$\left[ \frac{\frac{m}{m-1} S_{m,x}^2}{f_{\alpha_2} \cdot \frac{n}{n-1} S_{n,y}^2} \; ; \; \frac{\frac{m}{m-1} S_{m,x}^2}{f_{\alpha_1} \cdot \frac{n}{n-1} S_{n,y}^2} \right]$$