Problème #2

Soit $\Gamma(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} x^{\alpha-1} . e^{-x} dx \,;\quad \alpha > 0$

1) i) Soient λ_1, λ_2 tels que $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha} e^{-t} dt = \left[-t^{\alpha} e^{-t}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$$= -\lambda_2^{\alpha} e^{-\lambda_2} + \lambda_1^{\alpha} e^{-\lambda_1} + \alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Or; $\Gamma(\alpha+1) = \int_{\mathbb{R}_+} t^{\alpha} e^{-t} dt = \lim\limits_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to +\infty}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha} e^{-t} dt$

$$= \lim_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to \infty}} -\lambda_2^{\alpha} e^{-\lambda_2} + \lambda_1^{\alpha} e^{-\lambda_1} + \alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$$= \alpha . \lim_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to \infty}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$$= \alpha . \Gamma(\alpha)$$

ii) On a $\Gamma(1) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_{\mathbb{R}} = 1$

De plus, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$

Donc en particulier, ~~en obtient par simple calcul~~

pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = \Gamma(n) \cdot n$

et par une simple récurrence, on obtient que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

iii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \cdot t^{-1/2}\, dt$

changement de variable : on pose $u = \sqrt{t}$; donc $u^2 = t$

et $\frac{dt}{du} = 2u$; $dt = 2u\,du$

donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u^2} \cdot \frac{u \cdot 2}{u}\, du$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u^2}\, du$$

$= 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (intégrale de Gauss)

$$= \sqrt{\pi}$$

2) Soit $f_X(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$

i) Par définition, $f_X(x) \geq 0$; il suffit donc de montrer

que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = 1$

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha).\beta^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}_+} x^{\alpha-1} . e^{-x/\beta}\,dx$$

changement de variable : $u = \frac{x}{\beta}$; donc $x = \beta u$
et $\frac{dx}{du} = \beta$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}_+} \beta(\beta u)^{\alpha-1} e^{-u}\,du$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\beta^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_{\mathbb{R}_+} u^{\alpha-1} e^{-u}\,du$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1$$

ii) $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{tx} \cdot f_X(x)\,dx$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} e^{tx} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x(-t+1/\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\,dx$$

changement de variable :

$$u = x\left(\frac{1}{\beta} - t\right) \quad \text{donc} \quad x = \frac{u}{\frac{1}{\beta} - t}$$

$$\text{et} \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{1}{\beta} - t}$$

donc

$$M_x(t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-u} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \, \frac{u^{\alpha-1}}{(1/\beta - t)^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\beta} - t} \, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\beta^\alpha\left(\frac{1}{\beta} - t\right)^\alpha} \cdot \int_{\mathbb{R}^+} e^{-u} u^{\alpha-1} \, du$$

$$= \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$$

iii) $M_x'(t) = \dfrac{-\alpha(-\beta)(1-\beta t)^{\alpha-1}}{(1-\beta t)^{2\alpha}} = \alpha\beta \cdot (1-\beta t)^{-1-\alpha}$

$$M_x''(t) = \alpha\beta \cdot (-1-\alpha) \cdot (-\beta) \cdot (1-\beta t)^{-\alpha-2}$$

$$= \alpha\beta^2(1+\alpha) \cdot (1-\beta t)^{-\alpha-2}$$

or, $\mathbb{E}(X) = M_x'(0)$ et $\mathbb{E}(X^2) = M_x''(0)$

d'où $\mathbb{E}(X) = \alpha\beta$ et $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$$= \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha\beta^2$$

iv) Soient $X_1, \dots, X_n$ telles que $X_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (5)

Soit $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum (X_k - \overline{X_n})$, où $X_n = \frac{1}{n} \sum X_k$

D'après le cours, cf page 83 ; on a $n \frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

Posons $Y := \frac{n S_n^2}{\sigma^2}$ donc $S_n^2 = \frac{Y\sigma^2}{n}$

Calculons la densité de $\frac{Y\sigma^2}{n}$

Soit φ borélienne ; $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{Y\sigma^2}{n}\right)\right) = \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{Y\sigma^2}{n}\right) . d\mathbb{P}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{y\sigma^2}{n}\right) . d\mathbb{P}_Y$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{y\sigma^2}{n}\right) . \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} y^{\frac{n-1}{2}-1} . e^{-y/2} \, dy$$

changement de variable : $u = \frac{y\sigma^2}{n}$ donc $y = \frac{un}{\sigma^2}$

$\frac{dy}{du} = \frac{n}{\sigma^2}$; $dy = \frac{n\,du}{\sigma^2}$

donc

$$\mathbb{E}\left(\varphi(Y\sigma^2/n)\right) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(u) . \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} . \left(\frac{nu}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} . e^{-un/2\sigma^2} . \frac{n}{\sigma^2} \, du$$

or, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{n}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}-1} \cdot \left(\frac{n}{\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ ⑥

$$= \left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

finalement,

$$\mathbb{E}(\varphi(S_n^2)) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(u) \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}} u^{\frac{n-1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{un}{2\sigma^2}} du$$

la densité de S_n^2 est donc

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}} u^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{un}{2\sigma^2}}$$

et donc $Y \sim \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2\sigma^2}\right)$

3) i) Soient $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}^n$

Soient $Y_1, \dots, Y_n$ telles que $Y_k \sim \chi^2(r_k)$ indépendantes donc $Y_k \sim \Gamma\left(\frac{r_k}{2}, 2\right)$ par définition de la χ^2

Soit $M_{\Sigma Y_k}(t)$ la fonction génératrice de $\sum_{k=1}^{n} Y_k$

$$M_{\Sigma Y_k}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{k=1}^{n} Y_k}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{tY_k}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{tY_k}\right) \quad \text{par indépendance}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (1-2t)^{-\frac{r_k}{2}} \quad \text{par 2) ii)}$$

$$= (1-2t)^{-\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{2}}$$

or, la fonction génératrice caractérise la loi ; donc

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k \sim \Gamma\left(\frac{\sum r_k}{2}, 2\right)$$

donc $\sum_{k=1}^{n} Y_k \sim \chi^2\left(\sum_{k=1}^{n} r_k\right)$

ii) Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$; calculons la densité de Z^2

Soit φ borélienne

$$\mathbb{E}(\varphi(Z^2)) = \int_{\Omega} \varphi(Z^2) \, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z^2) \, d\mathbb{P}_Z$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(z^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz$$

$$= 2\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(z^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz \quad \text{(fonction paire)}$$

changement de variable : $x = z^2$ donc $z = \sqrt{x}$

et $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

donc $\mathbb{E}(\varphi(Z^2)) = 2\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} \cdot 2} \cdot e^{-x/2}\, dx$

$= \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) \cdot x^{1/2-1} \cdot e^{-x/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(1/2)}\, dx$

car $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

donc Z^2 admet pour densité

$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \cdot x^{1/2-1} \cdot e^{-x/2} \cdot \frac{1}{2^{1/2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(1/2)}$

donc $Z^2 \sim \Gamma(1/2, 2)$

donc $Z^2 \sim \chi(1)$

- On en déduit donc que si $X_1, \dots, X_n$ sont telles que $X_k \sim \mathcal{N}(0,1)\ \forall k = 1, \dots, n$,

alors les $X_1^2, \dots, X_n^2$ suivent une $\chi^2(1)$

Donc de par 3) i), $\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \sim \chi^2\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)$

$\sim \chi^2(n)$

iii) Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $Y_n \sim \chi^2(n)$

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

De par la question 2) ; on part pour $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où

les $X_i \sim \chi^2(i)$

Or, par 2)iii) et 1)iii) ; on obtient que

$$\mathbb{E}(X_i) = 1 := \mu \quad \forall i = 1, \dots, n$$
$$V(X_i) = 2 := \sigma^2$$

donc $\sigma = \sqrt{2}$

- On obtient finalement que

$$\frac{Y_n - n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n.\mu}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{loi} Z$$

par le théorème central limite

iv) i) Soient $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendantes.
$Y \sim \chi^2(n)$

On a donc que $X := \frac{\sqrt{n}\, Z}{\sqrt{Y}}$ et $W := Y$

sont indépendants ; voyons si (X,W) admet une densité jointe

;

Soient φ, ψ boréliennes

$$\mathbb{E}(\varphi(X)\cdot\psi(Y)) = \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{\sqrt{n}\,Z}{\sqrt{Y}}\right)\cdot\psi(Y)\, d\mathbb{P}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(\frac{\sqrt{n}\,Z}{\sqrt{Y}}\right)\cdot\psi(Y)\cdot d\mathbb{P}_{(Y,Z)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(\frac{\sqrt{n}\,Z}{\sqrt{Y}}\right)\cdot\psi(Y)\cdot d\mathbb{P}_Y\, d\mathbb{P}_Z \quad \text{par indépendance.}$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+} \varphi\left(\frac{\sqrt{n}\,z}{\sqrt{y}}\right)\cdot\psi(y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\,\frac{\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\cdot y^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-y/2}\,dy\,dz$$

changement de variable: $x = \dfrac{\sqrt{n}\,z}{\sqrt{y}}$ donc $z = \dfrac{x\sqrt{y}}{\sqrt{n}}$

et $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{n}}$ donc $dz = \dfrac{dx\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{n}}$

donc

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x)\cdot\psi(y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2 y}{2n}}\,\frac{\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot e^{-y/2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{n}}\,dx\,dy$$

la densité jointe de (X,Y) est donc

$$f_{(X,Y)} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\cdot e^{-y/2\,(x^2/n+1)}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,y^{\frac{n-1}{2}}$$

et donc (X,Y) est absolument continue.

ii) Par i); on a

$$f_{(X,Y)} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot e^{-\frac{y}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{n}+1\right)} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} \cdot y^{\frac{n-1}{2}}$$

Par théorème, la loi marginale de X est donnée par

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}\, dy.$$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{y}{2}\left(\frac{x^2}{n}+1\right)} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot y^{\frac{n-1}{2}}\, dy$$

changement de variable : $z = \frac{y}{2}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)$

$$\text{donc } y = \frac{2z}{1+\frac{x^2}{n}}$$

$$\text{donc } \frac{dy}{dz} = \frac{2}{1+\frac{x^2}{n}}$$

donc

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-z} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{2z}{1+\frac{x^2}{n}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{1+\frac{x^2}{n}}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{1}{(1+x^2/n)^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \int_{\mathbb{R}_+} e^{-z} z^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2}} \cdot 2\, dz$$

Or, $\frac{n+1}{2} = \frac{2+1-2}{2} = \frac{n+1}{2} - 1$

et $\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2}} \cdot 2 = 1$ et $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-z} \cdot z^{\frac{n-1}{2}} dz = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$

Finalement,

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$