Outils Statistiques

Devoir Maison

A l'attention de :
Mr. Silva

Rédigé par :
CARVAILLO Thomas
PONS Hugo

Table des matières

NOTE : Dans ce qui suit, on notera $\mathbb{1}_A(x)$ l'indicatrice de A, .i.e. $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$
ϕ désignera une fonction borélienne

1 Problème 1

Soit $X = (X_1, \dots X_n)$
Soient $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$
Soit

$$g : \left| \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ x & \longmapsto & y = g(x) \end{array} \right.$$

de classe $\mathscr{C}^1$ nulle sur $\mathbb{R}^n - U$ de matrice jacobienne inversible.
Soit $Y := g(X)$
Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$

Question 1. Déterminons si Y admet une densité, pour cela donnons nous une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ borélienne et considérons $\mathbb{E}(\phi(g(X)))$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(g(X))) &= \int_\Omega \phi(g(X))d\mathbb{P} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(g(x))d\mathbb{P}_X \\ &= \int_U \phi(g(x))f_X(x)dx\end{aligned}$$

Par le théorème de changement de variable sur $\mathbb{R}^n$, en posant $y = g(x)$, on obtient

$$\mathbb{E}(\phi(g(X))) = \int_{g(U)} \phi(y)f_X(g^{-1}(y))|det(D_g(g^{-1}(y)))|dy$$

Or, par propriété de la matrice jacobienne, on a que

$$D_g^{-1}(y) = \frac{1}{D_g(x)} = \frac{1}{D_g(g^{-1}(y))} \text{ (via } x = g^{-1}(y))$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(g(X))) &= \int_V \phi(y)\frac{f_X(g^{-1}(y))}{|detD_g(g^{-1}(y))|}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\mathbb{1}_V(y)\frac{f_X(g^{-1}(y))}{|detD_g(g^{-1}(y))|}dy\end{aligned}$$

Y est donc absolument continue, de densité

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_V(y)\frac{f_X(g^{-1}(y))}{|detD_g(g^{-1}(y))|}$$

Question 2. Soient X_1, X_2 deux v.a. de densité jointe

$$f_{(X_1,X_2)} = 2.\mathbb{1}_{\{0<x_1<x_2<\infty\}}(x_1, x_2)e^{-x_1-x_2}$$

Soit $(Y_1, Y_2) = (2X_1, X_2 - X_1)$.
On a donc $(Y_1, Y_2) = g(X)$, où $g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $g^{-1} : (y_1, y_2) \longrightarrow (1/2y_1, 1/2y_1, y_2)$.

Remarquons que $|detD_g(g^{-1}(y))| = |detD_g(x)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ puis que

$g(\{0 < x_1 < x_2 < \infty\}) = \{(2x_1, x_2 - x_1), 0 < x_1 < x_2 < \infty\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$

Donc, par la question 1) on obtient que

$$\begin{aligned}
f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) &= \mathbb{1}_{\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2, y_1>0, y_2>0\}} \frac{f_X(g^{-1}((y_1, y_2)))}{det|D_g(g^{-1}((y_1, y_2)))|} \\
&= \mathbb{1}_{\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2, y_1>0, y_2>0\}} \frac{2.e^{g^{-1}(y_1,y_2)}}{2} \\
&= \mathbb{1}_{\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2, y_1>0, y_2>0\}} e^{-y_1-y_2}
\end{aligned}$$

Les deux variables sont indépendantes, en effet

$$\begin{aligned}
f_{Y_1} &= \int_{\mathbb{R}} f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) dy_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2, y_1>0, y_2>0\}} e^{-y_1-y_2} dy_2 \\
&= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y_1) e^{-y_1} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-y_2} dy_2 \\
&= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y_1) e^{-y_1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f_{Y_2} &= \int_{\mathbb{R}} f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) dy_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2, y_1>0, y_2>0\}} e^{-y_1-y_2} dy_1 \\
&= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y_2) e^{-y_2} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-y_1} dy_1 \\
&= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y_2) e^{-y_2}
\end{aligned}$$

donc

$$f_{Y_1}.f_{Y_2} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y_1) e^{-y_1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y_2) e^{-y_2} = \mathbb{1}_{\{y_1>0, y_2>0\}}(y_1, y_2) e^{-y_1-y_2} = f_{(Y_1,Y_2)}$$

ce qui signifie que les v.a. sont indépendantes.

2 Problème 2

On définit $\Gamma(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$.

Question 1.

1. Soient λ_1, λ_2 tels que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$
D'une part, on a

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^\alpha e^{-t} &= [-t^\alpha e^{-t}]_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\ &= -\lambda_2^\alpha e^{-\lambda_2} + \lambda_1^\alpha e^{-\lambda_1} + \alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha-1} e^{-t} dt\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_{\mathbb{R}_+} t^\alpha e^{-t} dt \\ &= lim_{\lambda_1, \to 0, \lambda_2 \to \infty} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^\alpha e^{-t} dt \\ &= lim_{\lambda_1, \to 0, \lambda_2 \to \infty} - \lambda_2^\alpha e^{-\lambda_2} + \lambda_1^\alpha e^{-\lambda_1} + \alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\ &= \alpha . lim_{\lambda_1, \to 0, \lambda_2 \to \infty} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\ &= \alpha \Gamma(\alpha)\end{aligned}$$

2. Remarquons que $\Gamma(1) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} = 1$.
Or, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+, \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Donc, en particulier $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
Par une simple récurrence on obtient donc que $\Gamma(n+1) = n!$

3.

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t}\sqrt{t} dt \\ &\text{changement de variable : on pose } u = \sqrt{t}, \text{ donc } t = u^2 \text{ et } dt = 2udu \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u^2} \frac{2u}{u} du \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u^2} du \text{ (intégrale de Gauss)} \\ &= 2.\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Question 2.

1. Soit $f_X(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$. Par définition, $f_X(x) > 0$, il suffit donc de montrer que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx \\ &\text{On pose } u = x/\beta\text{, donc } x = u\beta \text{ et } dx = \beta du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_{\mathbb{R}_+}\beta(\beta u)^{\alpha-1}e^{-u}du \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_{\mathbb{R}_+}u^{\alpha-1}e^{-u}du \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \\ &= 1\end{aligned}$$

$f_X(x)$ est donc bien une densité de probabilité.

2.

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{tx}f_X(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{tx}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x(-t+1/\beta)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}dx \\ &\text{On pose } u = x(1/\beta - t)\text{, donc } x = \frac{u}{1/\beta - t} \text{ et } dx = \frac{du}{1/\beta - t} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}u^{\alpha-1}\frac{1}{(1/\beta-t)^{\alpha-1}}\frac{1}{1/\beta-t}du \\ &= \frac{1}{(1/\beta-t)^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_{\mathbb{R}_+}e^{-u}u^{\alpha-1}du \\ &= \frac{1}{(1-t\beta)^\alpha}\end{aligned}$$

3. On a

$$M_X'(t) = \alpha\beta(1-\beta.t)^{-1-\alpha}.$$

et

$$M_X''(t) = \alpha\beta^2(1+\alpha)(1-\beta.t)^{-\alpha-2}$$

Or, $\mathbb{E}(X) = M_X'(0)$ et $\mathbb{E}(X^2) = M_X''(0)$.
On obtient donc $\mathbb{E}(X) = \alpha\beta$ et
$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$.

4. Soient $X_1, \dots X_m$ telles que $X_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soit $S_n^2 = \frac{\sum(X_k - \overline{X_n})^2}{n}$.
D'après le cours, on a que $n\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

Posons $Y := \dfrac{nS_n^2}{\sigma^2}$, donc $Y \sim \chi^2(n-1)$ et $S_n^2 = \frac{Y\sigma^2}{n}$.
Calculons la densité de $\dfrac{Y\sigma^2}{n}$.
Considérons pour cela $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne et calculons $\mathbb{E}(\phi(\frac{Y\sigma^2}{n}))$;

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(\frac{Y\sigma^2}{n})) &= \int_\Omega \phi(\frac{Y\sigma^2}{n})d\mathbb{P} \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(\frac{y\sigma^2}{n})d\mathbb{P}_Y \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(\frac{y\sigma^2}{n})(\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}y^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-y/2}dy \\
&\text{On pose } u = \frac{y\sigma^2}{n} \text{ donc } y = \frac{un}{\sigma^2} \text{ et } dy = \frac{ndu}{\sigma^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(u)(\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}(\frac{nu}{\sigma^2})^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-un/(2\sigma^2)}\frac{n}{\sigma^2}dy
\end{aligned}$$

Or, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}(\dfrac{n}{\sigma^2})^{\frac{n-1}{2}-1}\dfrac{n}{\sigma^2} = (\dfrac{n}{2\sigma^2})^{\frac{n-1}{2}}$.
Finalement, on obtient que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(\frac{Y\sigma^2}{n})) &= \int_\mathbb{R} \phi(u)\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}u^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-un/(2\sigma^2)}(\frac{n}{2\sigma^2})^{\frac{n-1}{2}}dy \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(u)\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}u^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-u/\frac{2\sigma^2}{n}}\left(\frac{1}{\frac{2\sigma^2}{n}}\right)^{\frac{n-1}{2}}dy
\end{aligned}$$

La densité de S_n^2 est donc

$$f_{S_n^2}(u) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}u^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-u/\frac{2\sigma^2}{n}}\left(\frac{1}{\frac{2\sigma^2}{n}}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

Et de ce fait, $Y \sim \Gamma(\frac{n-1}{2}, \frac{2\sigma^2}{n})$

Question 3.

1. Soient $r_1, \dots r_n \in \mathbb{N}^*$ et soient $Y_1, \dots Y_n$ indépendantes telles que $Y_k \sim \chi^2(r_k)$, i.e. $Y_k \sim \Gamma(r_k/2, 2)$.

Soit $M_{\sum Y_k}$ la fonction génératrice de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_k$. Déterminons la loi de $\sum_{i=1}^{n} Y_k$.

$$\begin{aligned} M_{\sum Y_k}(t) &= \mathbb{E}(e^{t\sum_{i=1}^{n} Y_k}) \\ &= \mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} e^{tY_k}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tY_k}) \text{ par indépendance} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (1-t)^{-r_k/2} \text{ par 2)ii)} \\ &= (1-2t)^{-\sum_{i=1}^{n} r_k/2} \end{aligned}$$

Or, la fonction génératrice caractérise la loi, donc

$$\sum_{i=1}^{n} Y_k \sim \Gamma\left(\sum r_k/2, 2\right), \text{ i.e. } \sum_{i=1}^{n} Y_k \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{n} r_k\right)$$

2. Soit $Z \sim \mathscr{N}(0,1)$, et soit ϕ borélienne, calculons la densité de Z^2

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi(Z^2)) &= \int_{\Omega} \phi(Z^2) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(z^2) dP_Z \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(z^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \\ &= 2\int_{\mathbb{R}_+} \phi(z^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \text{ car fonction paire} \\ & \text{changement de variable : on pose } x = z^2 \text{, donc } z = \sqrt{x} \text{ et } dx = \frac{dz}{2\sqrt{x}} \\ &= 2\int_{\mathbb{R}_+} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x/2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x/2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{2}.\Gamma(1/2)} x^{1/2-1} e^{-x/2} dx \text{ car } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

donc Z^2 admet pour densité

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \frac{1}{\sqrt{2}.\Gamma(1/2)} x^{1/2-1} e^{-x/2}$$

donc $Z^2 \sim \Gamma(1/2, 2)$, i.e. $Z^2 \sim \chi^2(1)$.
On en déduit que si $X_1, \dots X_n$ sont telles que $X_k \sim \mathscr{N}(0,1) \forall k = 1 \dots n$, alors les

X_k^2 suivent une $\chi^2(1)$.

Donc, de par 3)i), $\sum X_k^2 \sim \chi^2\left(\sum_{k=1}^{r} 1\right)$, i.e.$\sum X_k^2 \sim \chi^2(r)$

3. Soit (Y_n) telle que $Y_n \sim \chi^2(n)$. Soit $Z \sim \mathscr{N}(0,1)$.

De par la question 2), on peut poser $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où les $X_i \sim \chi^2(1)$.

De plus, par 2)iii), on obtient que $\mu := \mathbb{E}(X_i) = 1$ et $\sigma^2 := V(X_i) = 2$.
Finalement, on obtient que

$$\frac{Y_n - n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \longrightarrow Z \text{ en loi}$$

de par le théorème central limite.

Question 4.

1. Soient $Z \sim \mathscr{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(r)$ indépendantes. Donc $X := \dfrac{\sqrt{r}Z}{\sqrt{Y}}$ et Y sont indépendantes. Voyons si le vecteur (X,Y) admet une densité. Pour cela, considérons ϕ et ψ boréliennes.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(X)\psi(Y)) &= \int_{\Omega} \phi(\frac{\sqrt{r}Z}{\sqrt{Y}})\psi(Y)d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\frac{\sqrt{r}z}{\sqrt{y}})\psi(y)d\mathbb{P}_{(Y,Z)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\frac{\sqrt{r}z}{\sqrt{y}})\psi(y)d\mathbb{P}_Y d\mathbb{P}_Z \text{ par indépendance} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\frac{\sqrt{r}z}{\sqrt{y}})\psi(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})}y^{\frac{r}{2}-1}e^{-y/2}dydz \\
&\quad \text{Changement de variable, on pose } x = \frac{\sqrt{r}z}{\sqrt{y}}, \text{ donc } z = \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{r}} \text{ et } dz = \frac{dx\sqrt{y}}{\sqrt{r}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x)\psi(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2.y}{2r}}\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})}y^{\frac{r}{2}-1}e^{-y/2}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{r}}dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x)\psi(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\frac{1}{\sqrt{2r\pi}}e^{\frac{-y}{2}(1+x^2/r)}\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})}y^{(r-1)/2}dydx
\end{aligned}$$

La densité jointe de (X,Y) est donc

$$f_{(X,Y)} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\frac{1}{\sqrt{2r\pi}}e^{\frac{-y}{2}(1+x^2/r)}\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})}y^{(r-1)/2}$$

et donc (X,Y) est absolument continue.

2. Par i) on a,

$$f_{(X,Y)} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\tfrac{1}{\sqrt{2r\pi}}e^{\frac{-y}{2}(1+x^2/r)}\tfrac{(1/2)^{r/2}}{\Gamma(r/2)}y^{\frac{r-1}{2}}$$

Or, la loi marginale de X nous est donnée par

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)} dy$$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \frac{1}{\sqrt{2r\pi}} e^{\frac{-y}{2}(1+x^2/r)} \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})} y^{\frac{r-1}{2}} dy$$

changement de variable : on pose $z = \dfrac{y(1+x^2/r)}{2}$ donc $y = \dfrac{2z}{1+x^2/r}$ et $dy = \dfrac{2dz}{1+x^2/r}$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) \frac{1}{\sqrt{2r\pi}} e^{-z} \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})} (\frac{2z}{1+x^2/r})^{\frac{r-1}{2}} \frac{2}{1+x^2/r} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})} \frac{1}{1+x^2/r} \left(\frac{1}{1+x^2/r}\right)^{\frac{r-1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) e^{-z} z^{\frac{r-1}{2}} \frac{2^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{2}} .2.(\frac{1}{2})^{\frac{r}{2}} dz$$

Or, $\dfrac{r-1}{2} = \dfrac{r+1-2}{2} = \dfrac{r+1}{2} - 1$ et $\dfrac{2^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{2}} .2.(\dfrac{1}{2})^{\frac{r}{2}} = 1$ donc

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) e^{-z} z^{\frac{r-1}{2}} \frac{2^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{2}} .2.(\frac{1}{2})^{\frac{r}{2}} dz = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) e^{-z} z^{\frac{r+1}{2}-1} dz = \Gamma(\frac{r+1}{2})$$

Enfin, nous obtenons que

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((r+1)/2)}{\sqrt{r\pi}\Gamma(\frac{r}{2})} \left(\frac{1}{1+x^2/r}\right)^{(r+1)/2}$$

Pour $r = 1$, la densité est

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{1+x^2}$$
$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

On retrouve donc une Cauchy $\mathscr{C}(0,1)$.

3.

4.

3 Problème 3

Question 1. Soient X, Y absolument continues et indépendantes telles que $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0) = 1$. On a $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0) = \mathbb{P}(X > 0).\mathbb{P}(Y > 0) = 1$.
Donc $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(Y > 0) = 1$. De plus, $P(Y = 0) = 0$ donc $Z := X/Y$ est bien définie. Voyons si Z admet une densité. Soit ϕ borélienne, étudions $\mathbb{E}(\phi(Z))$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(Z)) &= \mathbb{E}(\phi(X/Y)) \\
&= \int_\Omega \phi(X/Y) d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x/y) d\mathbb{P}_{(x,y)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x/y) d\mathbb{P}x d\mathbb{P}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x/y) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) f_X(x) f_Y(y) dx dy \\
&\text{Changement de variable : on pose } z = x/y\,;\text{ d'ou } x = yz \text{ et } dx = y.dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(z) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(yz) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) f_X(yz) f_Y(y) y dz dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(z) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) f_X(yz) f_Y(y) y dy \right) dz
\end{aligned}$$

car $x, y > 0$ donc $yz > 0$.
$Z = X/Y$ est donc absolument continue de densité

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) f_X(yz) f_Y(y) y dy$$

Question 2. Soit $Z := \dfrac{X/m}{Y/n}$, où $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$.
Calculons les lois de X/m et Y/m. Soit ϕ borélienne.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(X/m)) &= \int_\Omega \phi(X/m) d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x/m) d\mathbb{P}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x/m) \frac{(1/2)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx \\
&\text{On pose } z = x/m\text{, d'où } x = mz \text{ et } dx = mdz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(z) \frac{(1/2)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} (mz)^{\frac{m}{2}-1} e^{-z\frac{m}{2}} m \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(z) \frac{(1/2)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} z^{\frac{m}{2}-1} e^{-z\frac{m}{2}} .m.m^{\frac{m}{2}-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(z) \frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} z^{\frac{m}{2}-1} e^{-z\frac{m}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) dz
\end{aligned}$$

On en déduit donc que X/m est absolument continue, de densité

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}z^{\frac{m}{2}-1}e^{-z\frac{m}{2}}$$

Donc $X \sim \Gamma(\frac{m}{2}, \frac{2}{m})$.
Par un raisonnement similaire, on obtient que $Y \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{2}{n})$.
De par i), $\frac{X/m}{Y/n}$ est absolument continue de densité

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)f_X(yz)f_Y(y)ydy \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}(zy)^{\frac{m}{2}-1}e^{-zy\frac{m}{2}}.\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-y\frac{n}{2}}y.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)dy \\
&= \frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\int_{\mathbb{R}_+} y^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-y(zm+n)/2}dy \\
&\text{On pose } u = y(\frac{zm+n}{2}), \text{ d'où } dy = \frac{2du}{zm+n} \\
&= \frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\int_{\mathbb{R}_+} (\frac{2}{zm+n})^{\frac{m+n}{2}}u^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-u}du \\
&= \frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)(\frac{2}{zm+n})^{\frac{m+n}{2}}\int_{\mathbb{R}_+} u^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-u}du \\
&= \frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)(\frac{2}{zm+n})^{\frac{m+n}{2}}\Gamma(\frac{m+n}{2}) \\
&= \frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}(1/2)^{\frac{m+n}{2}}2^{\frac{m+n}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{(zm+n)^{\frac{m+n}{2}}} \\
&= \frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{(n(z\frac{m}{n}+1))^{\frac{m+n}{2}}} \\
&= \frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{(z\frac{m}{n}+1)^{\frac{m+n}{2}}}\frac{1}{n^{\frac{m+n}{2}}} \\
&= \frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{(z\frac{m}{n}+1)^{\frac{m+n}{2}}}
\end{aligned}$$

car $\dfrac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{m+n}{2}}} = m^{\frac{m}{2}}.n^{\frac{n}{2}-(-m-n)/2} = (\dfrac{m}{n})^{\frac{m}{2}}$.
Finalement,

$$f_Z(z) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}\frac{1}{(z\frac{m}{n}+1)^{\frac{m+n}{2}}}z^{\frac{m}{2}-1}$$

Question 3.

Question 4. Soit $T \sim T(n)$, calculons la densité de T^2, pour cela donnons nous une fonction ϕ borélienne quelconque.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(T^2)) &= \int_\Omega \phi(T^2) d\mathbb{P} \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(t^2) d\mathbb{P}T \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(t^2) \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1+t^2/n)^{(n+1)/2}} dt \\
&\text{Or, } t \longrightarrow t^2 \text{ est paire, donc} \\
&= 2\int_{\mathbb{R}_+} \phi(t^2) \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1+t^2/n)^{(n+1)/2}} dt \\
&\text{changement de variable, on pose } u = t^2 \text{, d'où } t = \sqrt{u} \text{ et } dt = \frac{du}{2\sqrt{u}} \\
&= 2\int_{\mathbb{R}_+} \phi(u) \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1+u/n)^{(n+1)/2}} \frac{1}{2\sqrt{u}} du \\
&\text{Or, } \sqrt{\pi} = \Gamma(1/2) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(u) \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(1/2)\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1+u/n)^{(n+1)/2}} u^{-1/2} (\frac{1}{n})^{1/2} du \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(u) \frac{1}{\beta(1/2, \frac{n}{2})} \frac{1}{(1+u/n)^{(n+1)/2}} u^{1/2-1} (\frac{1}{n})^{1/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) du
\end{aligned}$$

Donc T^2 et absolument continue, de densité

$$f_Z(z) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \frac{1}{\beta(1/2, \frac{n}{2})} \frac{1}{(1+t/n)^{(n+1)/2}} t^{1/2-1} (\frac{1}{n})^{1/2}$$

Donc $T^2 \sim F(1, n)$

Question 5. Soit $X \sim F(m, n)$, $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ donc $1/X$ est bien définie.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(1/X)) &= \int_\Omega \phi(1/X) d\mathbb{P} \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(1/x) d\mathbb{P}x \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(1/x) \frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}}{\beta(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+mx/n)^{\frac{m+n}{2}}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx \\
&\text{On pose } z = 1/x \text{ donc } x = 1/z \text{ et } dx = -dz/z^2 \\
&= -\int_{\mathbb{R}_+} \phi(z) \frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}}{\beta(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}-1} \frac{1}{(1+m/zn)^{\frac{m+n}{2}}} \frac{dz}{-z^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \beta(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+\frac{n}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{m}{2})} = \beta(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$$

Et

$$
\begin{aligned}
&(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}-1} \frac{1}{(1+m/zn)^{\frac{m+n}{2}}} \frac{1}{z^2} \\
&= (\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}+1} \left(\frac{1}{(nz+m)/nz}\right)^{\frac{m+n}{2}} \\
&= (\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} n^{\frac{m+n}{2}} \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}+1} z^{\frac{m+n}{2}} \left(\frac{1}{m(1+zn/m)}\right)^{\frac{m+n}{2}} \\
&= (\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} n^{\frac{m+n}{2}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m+n}{2}} z^{\frac{m+n}{2}-\frac{m}{2}-1} \left(\frac{1}{1+zn/m}\right)^{\frac{m+n}{2}} \\
&= (n/m)^{\frac{m+n}{2}-\frac{m}{2}} z^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{1}{1+zn/m}\right)^{\frac{m+n}{2}} \\
&= (n/m)^{\frac{n}{2}} z^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{1}{1+zn/m}\right)^{\frac{m+n}{2}}
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$\mathbb{E}(\phi(1/X)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\,(n/m)^{\frac{n}{2}} z^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{1}{1+zn/m}\right)^{\frac{m+n}{2}} \frac{1}{\beta(\frac{n}{2},\frac{m}{2})} dz$$

On en déduit que $1/X \sim F(n,m)$

Question 6. Soient $X_1, \dots X_m$ telles que $X_k \sim \mathscr{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $Y_1, \dots Y_n$ telles que $Y_l \sim \mathscr{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ pour $k \in [\![1,m]\!]$ et $l \in [\![1,n]\!]$.
Soit $\alpha \in]0,1[$, on va construire un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ de $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$.
Notons $S_{m,X}^2 = \sum_{k=0}^{m} X_k - \overline{X_m}^2$; où $\overline{X_m} = \sum \frac{X_k}{m}$ et
$S_{m,Y}^2 = \sum_{l=0}^{n} Y_l - \overline{Y_n}^2$; où $\overline{Y_n} = \sum \frac{Y_l}{n}$
D'après le cours, cf page 83, on a que

$$\frac{mS_{m,X}^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$$

et

$$\frac{nS_{n,Y}^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

or, de par la question ii), on a

$$\frac{\chi^2(m-1)/(m-1)}{\chi^2(n-1)/(n-1)} \sim F(m-1,n-1)$$

donc

$$\frac{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2\frac{1}{\sigma_X^2}}{\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2\frac{1}{\sigma_Y^2}} \sim F(m-1,n-1)$$

Maintenant,
Soient $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}$ tels que

$$\mathbb{P}(f_{\alpha_1} \leq F \leq f_{\alpha_2}) = 1-\alpha$$

où $F \sim F(m-1,n-1)$. On obtient donc sous ces notations et conditions que

$$\mathbb{P}\left(f_{\alpha_1} \leq \frac{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2\frac{1}{\sigma_X^2}}{\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2\frac{1}{\sigma_Y^2}} \leq f_{\alpha_2}\right) = 1-\alpha$$

d'où

$$\mathbb{P}\left(\frac{f_{\alpha_1}\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2}{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2} \leq \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \leq \frac{f_{\alpha_2}\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2}{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2}\right) = 1-\alpha$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2}{f_{\alpha_1}\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2} \geq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \geq \frac{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2}{f_{\alpha_2}\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2}\right) = 1-\alpha$$

Un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ de $\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ est donc

$$\left[\frac{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2}{f_{\alpha_2}\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2}, \frac{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2}{f_{\alpha_1}\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2}\right]$$

4 Problème 4

Soit X une v.a. de carré intégrable dépendant d'un paramètre $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$.
Soient $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid de même loi de X.
Soit $g : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$.

Question 1.

$$\begin{aligned}
RQM(\hat{g_n}) &= \mathbb{E}[(\hat{g_n} - g(\theta))^2] \\
&= \mathbb{E}[\hat{g_n}^2 - 2\hat{g_n}g(\theta) + g(\theta)^2] \\
&= \mathbb{E}[\hat{g_n}^2 + \mathbb{E}(\hat{g_n})^2 - \mathbb{E}(\hat{g_n})^2 - 2\hat{g_n}g(\theta) + g(\theta)^2] \\
&= \mathbb{E}(\hat{g_n}^2) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{g_n})^2) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{g_n})^2) - \mathbb{E}(2\hat{g_n}g(\theta)) + \mathbb{E}(g(\theta)^2) \\
&= \mathbb{E}(\hat{g_n}^2) - \mathbb{E}(\hat{g_n})^2 + \mathbb{E}(\hat{g_n})^2 - 2g(\theta)\mathbb{E}(\hat{g_n}) + \mathbb{E}(g(\theta)^2) \\
&= \mathbb{V}(\hat{g_n}) + [\mathbb{E}(\hat{g_n}) - g(\theta)]^2
\end{aligned}$$

Question 2. Soit $\overline{X_n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{n}$

1. Les X_i sont par hypothèse de carrés intégrables, donc, de par la loi des grands nombres, on a

$$\overline{X_n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{n} \longrightarrow \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X) = \mu \text{ en loi}$$

$\overline{X_n}$ est donc par définition consistant.

2.

$$\begin{aligned}
RQM(\overline{X_n}) &= \mathbb{V}(\overline{X_n}) + [\mathbb{E}(\overline{X_n}) - \mu]^2 \\
&= \mathbb{V}(\overline{X_n}) + \mathbb{E}(\overline{X_n})^2 - 2\mu\mathbb{E}(\overline{X_n}) + \mu^2
\end{aligned}$$

On sait par hypothèse que les X_i sont indépendantes, leur covariance est donc nulle.
Ceci nous permet d'obtenir une expression simple de la variance de $\overline{X_n}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\overline{X_n}) &= \mathbb{V}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i)}{n^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma^2}{n^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \mathbb{E}(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

d'où

$$RQM(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - 2\mu\mu + \mu^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

3. Soit $\sigma^2 := \mathbb{V}(X)$.
D'une part, on a par le théorème central limite que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \longrightarrow \mathscr{N}(0,1) \text{ en loi}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} &= n\frac{\sum_{i=1}^n X_k/n - \mu}{\sqrt{n}\sigma} \\ &= \sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\end{aligned}$$

d'où

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \longrightarrow \mathscr{N}(0,1) \text{ en loi}$$

On en déduit donc que $\overline{X_n}$ est asymptotiquement normal, en effet les deux suites déterministes nous sont données par

$$\mu_n = \mu \text{ et } \sigma_n = \tfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Par le théorème de Slutsky, on a donc que

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu) \longrightarrow \sigma Y \text{ en loi, où } Y \sim \mathscr{N}(0,1)$$

Calculons la loi de σY. Pour ne pas changer, soit ϕ borélienne.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(\sigma Y)) &= \int_\Omega \phi(\sigma Y)d\mathbb{P} \\ &= \int_\mathbb{R} \phi(\sigma y)d\mathbb{P}_Y \\ &= \int_\mathbb{R} \phi(\sigma y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy \\ &\text{changement de variable ; on pose } z = \sigma y \text{ ; d'où } dy = \frac{dz}{\sigma} \\ &= \int_\mathbb{R} \phi(z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}dy\end{aligned}$$

Ce qui correspond à la densité d'une $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$.
Donc $\sigma Y \sim \mathscr{N}(0,\sigma^2)$, et finalement

$$\sqrt{n}(\overline{X_n}-\mu) \longrightarrow \mathscr{N}(0,\sigma^2) \text{ en loi}$$

Question 3.

1.

$$\begin{aligned}
S_n^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X_n})^2}{n}\\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu+\mu-\overline{X_n})^2}{n}\\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (\widetilde{X_i}-(\overline{X_n}-\mu))^2}{n}\\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2 - 2\widetilde{X_i}(\overline{X_n}-\mu)+(\overline{X_n}-\mu)^2}{n}\\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2}{n} - 2(\overline{X_n}-\mu)\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n} + (\overline{X_n}-\mu)^2\\
\text{Or, } \overline{X_n}-\mu &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}, \text{d'où}\\
S_n^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2}{n} - 2\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n} + \left(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}\right)^2\\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
S_n^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X_n})^2}{n}\\
&= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2X_i\overline{X_n} + \overline{X_n}^2}{n}\\
&= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - 2\overline{X_n}\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \overline{X_n}^2}{n}\\
&= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \overline{X_n}^2
\end{aligned}$$

La loi des grands nombres nous donne donc que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \overline{X_n}^2 \longrightarrow \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sigma^2$$

car $f : x \longmapsto x^2$ est continue.
S_n^2 est donc consistant.

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n^2) &= \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2}{n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right) - 2\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i\overline{X_n}}{n}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \overline{X_n}^2}{n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right) - 2\mathbb{E}\left(\overline{X_n}\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\frac{\overline{X_n}^2}{n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right) - 2\mathbb{E}\left(\overline{X_n}^2\right) + \mathbb{E}\left(\overline{X_n}^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right) - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}^2\right) \\
&\text{Or, } \sigma^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2, \text{ donc } \mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2 + \mathbb{E}(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2, \text{ d'où} \\
\mathbb{E}(S_n^2) &= \frac{\sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2)}{n} - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}^2\right)
\end{aligned}$$

Il nous manque donc à calculer $\mathbb{E}\left(\overline{X_n}^2\right)$.

$$\mathbb{E}\left(\overline{X_n}^2\right) = \mathbb{V}(\overline{X_n}) + \mathbb{E}(\overline{X_n})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

d'où

$$\mathbb{E}(S_n^2) = \sigma^2 + \mu^2 - (\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

4.

5. Remarquons en premier lieu, que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\widetilde{X_1}^2)\mathbb{E}(\widetilde{X_1}^2) &= \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2]\mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2)] \\
&= \mathbb{E}(X_1^2 - 2X_1\mu + \mu^2)\mathbb{E}(X_1^2 - 2X_1\mu + \mu^2) \\
&= [\mathbb{E}(X_1^2) - 2\mu^2 + \mu^2][\mathbb{E}(X_1^2) - 2\mu^2 + \mu^2] \\
&= (\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2)^2 \\
&= \sigma^4
\end{aligned}$$

Calculons maintenant $RQM(S_n^2)$

$$\begin{aligned}
RQM(S_n^2) &= \mathbb{V}(S_n^2) + \mathbb{E}(S_n^2) - 2\sigma^2\mathbb{E}(S_n^2) + \sigma^4 \\
&= \mathbb{E}(S_n^4) - \mathbb{E}(S_n^2)^2 + \mathbb{E}(S_n^2) - 2\sigma^2\mathbb{E}(S_n^2) + \sigma^4 \\
&= \mathbb{E}(S_n^4) - 2\sigma^2\frac{n-1}{n}\sigma^2 + \sigma^4 \\
&= \mathbb{E}(S_n^4) - 2\frac{n-1}{n}\sigma^4 + \sigma^4 \\
&= \mathbb{E}(\widetilde{X_1}^2)^2 + \frac{1}{n}(\mathbb{E}(\widetilde{X_1}^4) - 3\mathbb{E}(\widetilde{X_1}^2)^2) + \sigma^4(\frac{2-n}{n}) \\
&= \frac{n\sigma^4}{n} + \frac{\mathbb{E}(\widetilde{X_1}^4)}{n} - \frac{3\sigma^4}{n} + \frac{2\sigma^4 - n\sigma^4}{n} \\
&= \frac{\mathbb{E}(\widetilde{X_1}^4) - \sigma^4}{n} = \frac{\mathbb{E}((X-\mu)^4) - \sigma^4}{n}
\end{aligned}$$

6. Nous avons vu à la question précédente que

$$\mathbb{E}(\widetilde{X_i}^2) = \sigma^2$$

de plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\widetilde{X_i}^2) &= \mathbb{E}(\widetilde{X_i}^4) - \mathbb{E}(\widetilde{X_i}^2)^2 \\
&= \mathbb{E}((X_i-\mu)^4) - \mathbb{E}(\widetilde{X_i}^2)^2 \\
&= \mathbb{E}((X-\mu)^4) - (\sigma^2)^2 \text{ car } X \text{ de même loi que les } X_i \\
&= \mu^{(4)} - \sigma^4
\end{aligned}$$

Le théorème central limite nous indique donc que

$$\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2 - n\sigma^2}{\sqrt{n(\mu^{(4)} - \sigma^4)}} = \frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2 - n\sigma^2}{\sqrt{n}\sqrt{(\mu^{(4)} - \sigma^4)}} \longrightarrow \mathscr{N}(0,1) \text{ en loi}$$

Donc par le théorème de Slutsky, on obtient que

$$\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2 - n\sigma^2}{\sqrt{n}} \longrightarrow \sqrt{(\mu^{(4)} - \sigma^4)}\mathscr{N}(0,1) \text{ en loi}$$

Or,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2 - n\sigma^2}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\widetilde{X_i}^2}{n} - \sigma^2\right)$$

Donc

$$\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\widetilde{X_i}^2}{n} - \sigma^2\right) \longrightarrow \sqrt{(\mu^{(4)} - \sigma^4)}\mathscr{N}(0,1) \text{ en loi}$$

et par un raisonnement similaire à la question 2)iii), on obtient que

$$\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\widetilde{X_i}^2}{n}-\sigma^2\right)\longrightarrow \mathcal{N}(0,(\mu^{(4)}-\sigma^4)) \text{ en loi}$$

7.

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}(S_n^2-\sigma^2) &= \sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}\right)^2-\sigma^2\right) \text{ par 3)i)}\\
&= \sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2}{n}-\sigma^2\right)+(-\sqrt{n})\left(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}\right)^2\\
&= \sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2}{n}-\sigma^2\right)+\left(-\sqrt{n}\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}\right)\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}
\end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{E}(\widetilde{X_i})=\mathbb{E}(X_i-\mu)=\mathbb{E}(X_i)-\mathbb{E}(\mu)=\mu-\mu=0$$

Donc, par la loi des grands nombres, on obtient que

$$\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}\longrightarrow 0 \text{ en probabilité, donc aussi en loi}$$

De plus, de par les calculs effectués à la question 5, on obtient que

$$\mathbb{V}(\widetilde{X_i})=\mathbb{E}(\widetilde{X_i}^2)-\mathbb{E}(\widetilde{X_i})=\sigma^2$$

Par le théorème central limite, on en déduit que

$$\sqrt{n}\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n\sigma}=\left(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{\sqrt{n}\sigma}\right)\longrightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ en loi}$$

Par un raisonnement similaire à la question 2)iii), on a que

$$\sigma\sqrt{n}\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n\sigma}=\left(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{\sqrt{n}}\right)\longrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2) \text{ en loi}$$

Pour résumer, on obtient que

$$\underbrace{\left(\sqrt{n}\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}\right)}_{\longrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2) \text{ en loi}}\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}}_{\longrightarrow 0 \text{ en loi}}$$

Donc, par Slutsky,

$$\left(\sqrt{n}\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}\right)\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}}{n}\longrightarrow 0 \text{ en loi}$$

Ce qui nous donne notre suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. convergent vers 0 en loi.

8. Il suffit de combiner les deux questions précédentes. Par Slutsky, on obtient que

$$\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) = \sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2}{n} - \sigma^2\right) + Y_n \longrightarrow X + c \text{ en loi}$$

où X est telle que

$$\sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}^2}{n} - \sigma^2\right) \longrightarrow X \text{ en loi}$$

et c telle que

$$Y_n \longrightarrow c \text{ en loi}$$

De la question 3)vi), on en déduit que

$$\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \longrightarrow \mathscr{N}(0, \mu^{(4)} - \sigma^4) \text{ en loi}$$