Outils Statistiques

Devoir Maison

A l'attention de :
Mr Stats

Rédigé par :
CARVAILLO Thomas
PONS Hugo

Table des matières

1 Problème 1

Soient $X = (X_1, \dots X_n), U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ et

$$g : \left| \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ x & \longmapsto & y = g(x) \end{array} \right.$$

de classe $\mathscr{C}^1$ nulle sur $\mathbb{R}^n - U$ telle que sa jacobienne soit inversible
Soit $Y := g(X)$
Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$

Question 1. Déterminons si Y admet une densité, pour cela donnons nous une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ borélienne.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(g(X)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(g(X)) d\mathbb{P}_X \\ &= \int_U \phi(g(x)) f_X(x) dx\end{aligned}$$

Par le théorème de changement de variable sur $\mathbb{R}^n$, en posant $y = g(x)$, on obtient

$$= \int_{g(U)} \phi(y) f_X(g^{-1}(y)) |det(D_g(g^{-1}(y))| dy$$

Or, par propriété de la matrice jacobienne, on a que

$$D_g^{-1}(y) = \frac{1}{D_g(x)} = \frac{1}{D_g(g^{-1}(y))} \text{ (via } x = g^{-1}(y))$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(g(X)) &= \int_V \phi(y) \frac{f_X(g^{-1}(y))}{det|D_g(g^{-1}(y))|} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \mathbb{1}_V(y) \frac{f_X(g^{-1}(y))}{det|D_g(g^{-1}(y))|} dy\end{aligned}$$

Y est donc absolument continue, de densité

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_V(y) \frac{f_X(g^{-1}(y))}{det|D_g(g^{-1}(y))|}$$

Question 2. Soient X_1, X_2 deux v.a. de densité jointe

$$f_{(X_1, X_2)} = 2.\mathbb{1}_{\{0 < x_1 < x_2 < \infty\}}(x_1, x_2) e^{-x_1 - x_2}$$

Soit $(Y_1, Y_2) = (2X_1, X_2 - X_1)$.
On a donc $(Y_1, Y_2) = g(X)$, où $g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc
$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $g^{-1} : (y_1, y_2) \longrightarrow (1/2 y_1, 1/2 y_1, y_2)$.
D'abord, remarquons que $|det D_g(g^{-1}(y))| = |det D_g(x)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ et que

$$g(\{0 < x_1 < x_2 < \infty\}) = \{(2x_1, x_2 - x_1), 0 < x_1 < x_2 < \infty\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$$

Donc, par la question 1) on obtient que

$$\begin{aligned} f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) &= \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0, y>0\}} \frac{f_X(g^{-1}(y))}{det|D_g(g^{-1}(y))|} \\ &= \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0, y>0\}} \frac{2.e^{g^{-1}(y_1,y_2)}}{2} \\ &= \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0, y>0\}} e^{-y_1-y_2} \end{aligned}$$

Les deux variables sont indépendantes, en effet

$$\begin{aligned} f_{Y_1} &= \int_{\mathbb{R}} f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) dy_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0, y>0\}} e^{-y_1-y_2} dy_2 \\ &= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y_1) e^{-y_1} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-y_2} dy_2 \\ &= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y_1) e^{-y_1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_{y_2} &= \int_{\mathbb{R}} f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) dy_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0, y>0\}} e^{-y_1-y_2} dy_1 \\ &= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y_2) e^{-y_2} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-y_1} dy_1 \\ &= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y_2) e^{-y_2} \end{aligned}$$

donc

$$f_{Y_1}.f_{Y_2} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y_1) e^{-y_1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y_2) e^{-y_2} = \mathbb{1}_{\{y_1>0, y_2>0\}}(y_1,y_2) e^{-y_1-y_2} = f_{(Y_1,Y_2)}$$

ce qui signifie que les v.a. sont indépendantes.

2 Problème 2

On définit $\Gamma(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$.

Question 1.

1. Soient λ_1, λ_2 tels que $0 < \lambda_1 < \lambda < \infty$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^\alpha e^{-t} &= [-t^\alpha e^{-t}]_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\ &= -\lambda_2^\alpha e^{-\lambda_1} + \lambda_1^\alpha e^{-\lambda_1} + \alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha-1}e^{-t}dt\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_{\mathbb{R}_+} t^\alpha e^{-t}dt \\ &= lim_{\lambda_1,\to 0,\lambda_2\to\infty} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^\alpha e^{-t}dt \\ &= lim_{\lambda_1,\to 0,\lambda_2\to\infty} - \lambda_2^\alpha e^{-\lambda_1} + \lambda_1^\alpha e^{-\lambda_1} + \alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\ &= \alpha . lim_{\lambda_1,\to 0,\lambda_2\to\infty} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\ &= \alpha\Gamma(\alpha)\end{aligned}$$

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+, \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Donc, en particulier $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. De plus, $\Gamma(1) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} = 1$.
Par une simple récurrence on obtient donc que $\Gamma(n+1) = n!$

3.

$$\Gamma(1/2) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t}t^{1/2}dt$$

changement de variable : on pose $u = \sqrt{t}$, donc $t = u^2$ et $dt = 2udu$

$$\begin{aligned}&= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u^2}\frac{2u}{u}du \\ &= 2\int_{\mathbb{R}_+} e^{-u^2}du \text{ (intégrale de Gauss)} \\ &= 2.\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Question 2.

1. Soit $f_X(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}$. Par définition, $f_X(x) > 0$, il suffit donc de montrer que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx \\
&\text{On pose } u = x/\beta, \text{ donc } x = u\beta \text{ et } dx = \beta du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_{\mathbb{R}_+} \beta(\beta u)^{\alpha-1}e^{-u}du \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_{\mathbb{R}_+} u^{\alpha-1}e^{-u}du \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$f_X(x)$ est donc bien une densité de probabilité.

2.

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{tx}f_X(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} e^{tx}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-(-t+1/\beta)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}dx \\
&\text{On pose } u = x(1/\beta - t), \text{ donc } x = \frac{u}{1/\beta - t} \text{ et } dx = \frac{du}{1/\beta - t} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}u^{\alpha-1}\frac{1}{(1/\beta - t)^{\alpha-1}}\frac{1}{1/\beta - t}du \\
&= \frac{1}{(1/\beta - t)^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-u}u^{\alpha-1}du \\
&= \frac{1}{(1-t\beta)^\alpha}
\end{aligned}$$

3. $M_X^{'}(t) = \alpha\beta(1-\beta.t)^{-1-\alpha}$ et $M_X^{''}(t) = \alpha\beta^2(1+\alpha)(1-\beta.t)^{-\alpha-2}$.
Or, $\mathbb{E}(X) = M_X^{'}(0)$ et $\mathbb{E}(X^2) = M_X^{''}(0)$.
D'où $\mathbb{E}(X) = \alpha\beta$ et $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$.

4. Soient $X_1, \dots X_m$ telles que $X_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soit $S_n^2 = \dfrac{\sum(X_k - \overline{X_n})^2}{n}$.
D'après le cours, on a que $n\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.
Posons $Y := \frac{nS_n^2}{\sigma^2}$, donc $Y \sim \chi^2(n-1)$ et $S_n^2 = \frac{Y\sigma^2}{n}$. Calculons la densité de $\frac{Y\sigma^2}{n}$. Soit

ϕ borélienne de r dans r ;

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(\frac{Y\sigma^2}{n})) &= \int_\Omega \phi(\frac{Y\sigma^2}{n})d\mathbb{P} \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(\frac{y\sigma^2}{n})d\mathbb{P}_Y \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(\frac{y\sigma^2}{n})(\frac{1}{2})^{(n-1)/2}\frac{1}{\Gamma((n-1)/2)}y^{(n-1)/2-1}e^{-y/2}dy \\
&\text{On pose } u = \frac{y\sigma^2}{n} \text{ donc } y = \frac{un}{\sigma^2} \text{ et } dy = \frac{ndu}{\sigma^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(u)(\frac{1}{2})^{(n-1)/2}\frac{1}{\Gamma((n-1)/2)}(\frac{nu}{\sigma^2})^{(n-1)/2-1}e^{-un/(2\sigma^2)}\frac{n}{\sigma^2}dy
\end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{2}^{(n-1)/2}(\frac{n}{\sigma^2})^{(n-1)/2-1}\frac{n}{\sigma^2} = (\frac{n}{2\sigma^2})^{(n-1)/2}$.
Finalement, on obtient que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(\frac{Y\sigma^2}{n})) &= \int_\mathbb{R} \phi(u)\frac{1}{\Gamma((n-1)/2)}u^{(n-1)/2-1}e^{-un/(2\sigma^2)}(\frac{n}{2\sigma^2})^{(n-1)/2}dy \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(u)\frac{1}{\Gamma((n-1)/2)}u^{(n-1)/2-1}e^{-u/\frac{2\sigma^2}{n}}\left(\frac{1}{\frac{2\sigma^2}{n}}\right)^{(n-1)/2}dy
\end{aligned}$$

La densité de S_n^2 est donc

$$\frac{1}{\Gamma((n-1)/2)}u^{(n-1)/2-1}e^{-u/\frac{2\sigma^2}{n}}\left(\frac{1}{\frac{2\sigma^2}{n}}\right)^{(n-1)/2}$$

Et de ce fait, $Y \sim \Gamma((n-1)/2), \frac{2\sigma^2}{n})$

Question 3.

1. Soient $r_1, \dots r_n \in \mathbb{N}^*$ et soient $Y_1, \dots Y_n$ indépendantes telles que $Y_k \sim \chi^2(r_k)$, i.e. $Y_k \sim \Gamma(r_k/2, 2)$.
Soit $M_{\sum Y_k}$ la fonction génératrice de $\sum Y_k$. Déterminons la loi $\sum Y_k$ à l'aide de la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned}
M_{\sum Y_k}(t) &= \mathbb{E}(e^{t\sum Y_k}) \\
&= \mathbb{E}(\prod e^{tY_k}) \\
&= \prod \mathbb{E}(e^{tY_k})\text{par indépendance} \\
&= \prod (1-t)^{-r_k/2}\text{par 2)ii)} \\
&= (1-2t)^{-\sum r_k/2}
\end{aligned}$$

Or, la fonction génératrice caractérise la loi, donc

$$\sum Y_k \sim \Gamma(\sum r_k/2, 2), \text{ i.e. } \sum Y_k \sim \chi^2(\sum r_k)$$

2. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, et soit ϕ borélienne, calculons la densité de Z^2

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(Z^2)) &= \int_\Omega \phi(Z^2) d\mathbb{P} \\
&= \int_\mathbb{R} \phi z^2) dP_Z \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(z^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \\
&= 2\int_{\mathbb{R}_+} \phi(z^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \text{ fonction paire} \\
&\text{changement de variable : on pose } x = z^2, \text{ donc } z = \sqrt{x} \text{ et } dx = \frac{dz}{2\sqrt{x}} \\
&= 2\int_{\mathbb{R}_+} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x/2} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x/2} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{2}.\Gamma(1/2)} x^{1/2-1} e^{-x/2} dx \text{ car } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

donc Z^2 admet pour densité

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \frac{1}{\sqrt{2}.\Gamma(1/2)} x^{1/2-1} e^{-x/2}$$

donc $Z^2 \sim \Gamma(1/2, 2)$, i.e. $Z^2 \sim \chi^2(1)$.
On en déduit que si $X_1, \dots X_n$ sont telles que $X_k \sim \mathcal{N}(0,1) \forall k = 1 \dots n$, alors les X_k^2 suivent une $\chi^2(1)$.
Donc, de par 3)i), $\sum X_k^2 \sim \chi^2(\sum_{k=1}^r 1)$, i.e.$\sum X_k^2 \sim \chi^2(r)$

3. Soit (Y_n) telle que $Y_n \sim \chi^2(n)$. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
De par la question 2), on peut poser $\sum_{i=1}^n X_i$, où les $X_i \sim \chi^2(1)$.
De plus, par 2)iii), on obtient que $\mu := \mathbb{E}(X_i) = 1$ et $\sigma^2 := V(X_i) = 2$.
Finalement, on obtient que

$$\frac{Y_n - n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \longrightarrow Z \text{en loi}$$

de par le théorème central limite.

Question 4.

1. Soient $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(r)$ indépendantes. Donc $X := \frac{\sqrt{r}Z}{\sqrt{Y}}$ et Y sont indépendantes. Voyons si le vecteur (X, Y) admet une densité. Pour cela, considérons

ϕ et ψ boréliennes.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(X)\psi(Y)) &= \int_\Omega \phi(\frac{\sqrt{r}Z}{\sqrt{Y}})\psi(Y)d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\frac{\sqrt{r}z}{\sqrt{y}})\psi(y)d\mathbb{P}_{(Y,Z)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\frac{\sqrt{r}z}{\sqrt{y}})\psi(y)d\mathbb{P}_Y d\mathbb{P}_Z \text{ par indépendance} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\frac{\sqrt{r}z}{\sqrt{y}})\psi(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}(\frac{1/2}{\Gamma(r/2)})^{r/2}y^{r/2-1}e^{-y/2}dydz \\
&\text{Changement de variable, on pose } x = \frac{\sqrt{r}z}{\sqrt{y}}\text{, donc } z = \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{r}} \text{ et } dz = \frac{dx\sqrt{y}}{\sqrt{r}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x)\psi(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2.y}{2r}}(\frac{1/2}{\Gamma(r/2)})^{r/2}y^{r/2-1}e^{-y/2}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{r}}dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x)\psi(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\frac{1}{\sqrt{2r\pi}}e^{\frac{-y}{2}(1+x^2/r)}(\frac{1/2}{\Gamma(r/2)})^{r/2}y^{(r-1)/2}dydx
\end{aligned}$$

La densité jointe de (X,Y) est donc

$$f_{(X,Y)} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\tfrac{1}{\sqrt{2r\pi}}e^{\frac{-y}{2}(1+x^2/r)}(\tfrac{1/2}{\Gamma(r/2)})^{r/2}y^{(r-1)/2}$$

et donc (X,Y) est absolument continue.

2. Par i) on a,

$$f_{(X,Y)} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\tfrac{1}{\sqrt{2r\pi}}e^{\frac{-y}{2}(1+x^2/r)}(\tfrac{1/2}{\Gamma(r/2)})^{r/2}y^{(r-1)/2}$$

Or, la loi marginale de X nous est donnée par

$$f_X(x) = \textstyle\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}dy$$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\frac{1}{\sqrt{2r\pi}}e^{\frac{-y}{2}(1+x^2/r)}(\frac{1/2}{\Gamma(r/2)})^{r/2}y^{(r-1)/2}dy \\
&\text{changement de variable : on pose } z = \frac{y(1+x^2/r)}{2} \text{ donc } y = \frac{2z}{1+x^2/r} \text{ et } dy = \frac{2dz}{1+x^2/r} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{\sqrt{2r\pi}}e^{-z}(\frac{1/2}{\Gamma(r/2)})^{r/2}(\frac{2z}{1+x^2/r})^{(r-1)/2}\frac{2}{1+x^2/r}dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{r\pi}}(\frac{1/2}{\Gamma(r/2)})^{r/2}\frac{2}{1+x^2/r}\left(\frac{2}{1+x^2/r}\right)^{(r-1)/2}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)e^{-z}z^{(r-1)/2}\frac{2^{(r-1)/2}}{\sqrt{2}}.2dz
\end{aligned}$$

Or, $\frac{r-1}{2} = \frac{r+1-2}{2} = \frac{r+1}{2} - 1$ et $\frac{2^{(r-1)/2}}{\sqrt{2}}.2 = 1$ donc

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)e^{-z}z^{(r-1)/2}\frac{2^{(r-1)/2}}{\sqrt{2}}.2dz = \Gamma(\frac{r+1}{2})$$

Enfin, nous obtenons que

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((r+1)/2)}{\sqrt{r\pi}\Gamma(r/2)} \left(\frac{1}{1+x^2/r}\right)^{(r+1)/2}$$

Pour $r = 1$, la densité est

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2)} \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

On retrouve donc une Cauchy $\mathscr{C}(0,1)$.

3.

4.

3 Problème 3

Question 1. Soient X, Y absolument continues et indépendantes telles que $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0) = 1$. On a $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0) = \mathbb{P}(X > 0).\mathbb{P}(Y > 0) = 1$ Donc $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(Y > 0) = 1$. De plus, $P(Y = 0) = 0$ donc $Z := X/Y$ est bien définie. Voyons si Z admet une densité. Soit ϕ borélienne, étudions $\mathbb{E}(\phi(Z))$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(Z)) &= \mathbb{E}(\phi(X/Y)) \\
&= \int_\Omega \phi(X/Y) d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x/y) d\mathbb{P}_{(x,y)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x/y) d\mathbb{P}x d\mathbb{P}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x/y) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) f_X(x) f_Y(y) dxdy \\
&\text{Changement de variable : on pose } z = x/y \,; \text{ d'ou } x = yz \text{ et } dx = y.dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(z) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(yz) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) f_X(yz) f_Y(y) ydzdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(z) (\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) f_X(yz) f_Y(y) ydy) dz
\end{aligned}$$

car $x, y > 0$ donc $yz > 0$.
$Z = X/Y$ est donc absolument continue de densité

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) f_X(yz) f_Y(y) ydy$$

Question 2. Soit $Z := \dfrac{X/m}{Y/n}$, où $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$.
Calculons les lois de X/m et Y/m. Soit ϕ borélienne.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(X/m)) &= \int_\Omega \phi(X/m) d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x/m) d\mathbb{P}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x/m) \frac{(1/2)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx \\
&\text{On pose } z = x/m, \text{ d'où } x = mz \text{ et } dx = mdz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(z) \frac{(1/2)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} (mz)^{\frac{m}{2}-1} e^{-z\frac{m}{2}} m \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(z) \frac{(1/2)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} z^{\frac{m}{2}-1} e^{-z\frac{m}{2}} .m.m^{\frac{m}{2}-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(z) \frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} z^{\frac{m}{2}-1} e^{-z\frac{m}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) dz
\end{aligned}$$

On en déduit donc que X/m est absolument continue, de densité

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}z^{\frac{m}{2}-1}e^{-z\frac{m}{2}}$$

Donc $X \sim \Gamma(\frac{m}{2}, \frac{m}{2})$.
Par un raisonnement similaire, on obtient que $Y \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$.
De par i), $\frac{X/m}{Y/n}$ est absolument continue de densité

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)f_X(yz)f_Y(y)ydy \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}(zy)^{\frac{m}{2}-1}e^{-zy\frac{m}{2}}.\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-y\frac{n}{2}}y.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)dy \\
&= \frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\int_{\mathbb{R}_+} y^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-y(zm+n)/2}dy \\
&\text{On pose } u = y(\frac{zm+n}{2}), \text{ d'où } dy = \frac{2du}{zm+n} \\
&= \frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\int_{\mathbb{R}_+} u^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-u}du \\
&= \frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)(\frac{2}{zm+n})^{\frac{m+n}{2}}\int_{\mathbb{R}_+} u^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-u}du \\
&= \frac{(\frac{m}{2})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)(\frac{2}{zm+n})^{\frac{m+n}{2}}\Gamma(\frac{m+n}{2}) \\
&= \frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}(1/2)^{\frac{m+n}{2}}2^{\frac{m+n}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{(zm+n)^{\frac{m+n}{2}}} \\
&= \frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{n(z\frac{m}{n}+1)^{\frac{m+n}{2}}} \\
&= \frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{(z\frac{m}{n}+1)^{\frac{m+n}{2}}}\frac{1}{n^{\frac{m+n}{2}}} \\
&= \frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{(z\frac{m}{n}+1)^{\frac{m+n}{2}}}
\end{aligned}$$

car $\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{m+n}{2}}} = m^{\frac{m}{2}}.n^{\frac{n}{2}-(-m-n)/2} = (\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}$.
Finalement,

$$f_Z(z) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}\frac{1}{(z\frac{m}{n}+1)^{\frac{m+n}{2}}}z^{\frac{m}{2}-1}$$

Question 3.

Question 4. Soit $T \sim T(n)$, calculons la densité de T^2, pour cela donnons nous une fonction ϕ borélienne quelconque.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(T^2)) &= \int_\Omega \phi(T^2)d\mathbb{P} \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(t^2)d\mathbb{P}T \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(t^2)\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{1}{(1+t^2/n)^{(n+1)/2}}dt \\
&\text{Or, } t \longrightarrow t^2 \text{ est paire, donc} \\
&= 2\int_{\mathbb{R}_+} \phi(t^2)\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{1}{(1+t^2/n)^{(n+1)/2}}dt \\
&\text{changement de variable, on pose } u = t^2\text{, d'où } t = \sqrt{u} \text{ et } dt = 1/(2\sqrt{u}) \\
&= 2\int_{\mathbb{R}_+} \phi(u)\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{1}{(1+u/n)^{(n+1)/2}}\frac{1}{2\sqrt{u}}du \\
&\text{Or, } \sqrt{\pi} = \Gamma(1/2) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(u)\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(1/2)\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{1}{(1+u/n)^{(n+1)/2}}u^{-1/2}(\frac{1}{n})^{1/2}du \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(u)\frac{1}{\beta(1/2,\frac{n}{2})}\frac{1}{(1+u/n)^{(n+1)/2}}u^{1/2-1}(\frac{1}{n})^{1/2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)du
\end{aligned}$$

Donc T^2 et absolument continue, de densité

$$f_Z(z) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\frac{1}{\beta(1/2,\frac{n}{2})}\frac{1}{(1+t/n)^{(n+1)/2}}t^{1/2-1}(\frac{1}{n})^{1/2}$$

Donc $T^2 \sim F(1,n)$

Question 5. Soit $X \sim F(m,n)$, $\mathbb{P}(X=0)=0$ donc $1/X$ est bien définie.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(1/X)) &= \int_\Omega \phi(1/X)d\mathbb{P} \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(1/x)d\mathbb{P}x \\
&= \int_\mathbb{R} \phi(1/x)\frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+mx/n)^{\frac{m+n}{2}}}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)dx \\
&\text{On pose } z = 1/x \text{ donc } x = 1/z \text{ et } dx = -dz/z^2 \\
&= -\int_{\mathbb{R}_+} \phi(z)\frac{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}-1}\frac{1}{(1+m/zn)^{\frac{m+n}{2}}}\frac{dz}{-z^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+\frac{n}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{m}{2})} = \beta(\frac{n}{2},\frac{m}{2})$$

Et

$$
\begin{aligned}
&(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}-1}\frac{1}{(1+m/zn)^{\frac{m+n}{2}}}\frac{1}{z^2}\\
&=(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}+1}\left(\frac{1}{(nz+m)/nz}\right)^{\frac{m+n}{2}}\\
&=(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}n^{\frac{m+n}{2}}\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{m}{2}+1}z^{\frac{m+n}{2}}\left(\frac{1}{m(1+zn/m)}\right)^{\frac{m+n}{2}}\\
&=(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}n^{\frac{m+n}{2}}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m+n}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-\frac{m}{2}-1}\left(\frac{1}{1+zn/m}\right)^{\frac{m+n}{2}}\\
&=(n/m)^{\frac{m+n}{2}-\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{n}{2}-1}z^{\frac{m+n}{2}}\left(\frac{1}{1+zn/m}\right)^{\frac{m+n}{2}}\\
&=(n/m)^{\frac{n}{2}}\,z^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1}{1+zn/m}\right)^{\frac{m+n}{2}}
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$\mathbb{E}(\phi(1/X))=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\,(n/m)^{\frac{n}{2}}\,z^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1}{1+zn/m}\right)^{\frac{m+n}{2}}\frac{1}{\beta(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}dz$$

On en déduit que $1/X\sim F(n,m)$

Question 6. Soient $X_1,\dots X_m$ telles que $X_k\sim\mathscr{N}(\mu_X,\sigma_X^2)$ et $Y_1,\dots Y_n$ telles que $Y_l\sim\mathscr{N}(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ pour $k\in[\![1,m]\!]$ et $l\in[\![1,n]\!]$.
Soit $\alpha\in]0,1[$, on va construire un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ de $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$.
Notons $S_{m,X}^2=\sum_{k=0}^{m}X_k-\overline{X_m}^2$; où $\overline{X_m}=\sum\frac{X_k}{m}$ et
$S_{m,Y}^2=\sum_{l=0}^{n}Y_l-\overline{Y_n}^2$; où $\overline{Y_n}=\sum\frac{Y_l}{n}$
D'après le cours, cf page 83, on a que

$$\frac{mS_{m,X}^2}{\sigma_X^2}\sim\chi^2(m-1)$$

et

$$\frac{nS_{n,Y}^2}{\sigma_Y^2}\sim\chi^2(n-1)$$

or, de par la question ii), on a

$$\frac{\chi^2(m-1)/(m-1)}{\chi^2(n-1)/(n-1)}\sim F(m-1,n-1)$$

donc

$$\frac{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2\frac{1}{\sigma_X^2}}{\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2\frac{1}{\sigma_Y^2}} \sim F(m-1,n-1)$$

Maintenant,
Soient $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}$ tels que

$$\mathbb{P}(f_{\alpha_1} \leq F \leq f_{\alpha_2})$$

où $F \sim F(m-1,n-1)$. On obtient donc sous ces notations et conditions que

$$\mathbb{P}\left(f_{\alpha_1} \leq \frac{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2\frac{1}{\sigma_X^2}}{\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2\frac{1}{\sigma_Y^2}} \leq f_{\alpha_2}\right) = 1-\alpha$$

d'où

$$\mathbb{P}\left(\frac{f_{\alpha_1}\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2}{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2} \leq \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \leq \frac{f_{\alpha_2}\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2}{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2}\right) = 1-\alpha$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2}{f_{\alpha_1}\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2} \geq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \geq \frac{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2}{f_{\alpha_2}\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2}\right) = 1-\alpha$$

Un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ de $\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ est donc

$$\left[\frac{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2}{f_{\alpha_2}\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2}, \frac{\frac{m}{m-1}S_{m,X}^2}{f_{\alpha_1}\frac{n}{n-1}S_{n,Y}^2}\right]$$