

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

О. О. ЧЕРНО, А. П. ГУРОВ, М. В. ПОКРОВСЬКИЙ, О. А. АВДЄЄВА

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ
З дисципліни «Системи управління маніпуляційних роботів»**

Рекомендовано Методичною радою НУК

Електронне видання
комбінованого використання на DVD-ROM

Миколаїв ♦ НУК ♦ 2018

УДК 007.52:621.865.8

ББК 32.844-040.21я73

Ч49

Автори О. О. Черно, канд. техн. наук, доцент,

А. П. Гуров, канд. техн. наук, професор,

М. В. Покровський, канд. техн. наук,

О. А. Авдєєва, канд. техн. наук

Рецензент С. М. Новогрецький, канд. техн. наук, доцент

Черно О. О.

Ч Системи управління маніпуляційних роботів: Методичні вказівки до лабораторних робіт / О. О. Черно, А. П. Гуров, М. В. Покровський, О. Л. Авдєєва. – Миколаїв : НУК, 2018. – 28 с.

Вказівки містять опис лабораторних робіт, що виконуються студентами при вивченні дисципліни "Системи управління маніпуляційних роботів".

Призначені для студентів спеціальностей "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології" і "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка". Також можуть бути використані в процесі вивчення інших дисциплін технічного спрямування, студентами інших спеціальностей вищих навчальних закладів.

© Черно О. О., Гуров А. П.,

Покровський М. В., Авдєєва О. Л., 2018

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2018

ВСТУП

Промислові роботи і збудовані на їх основі роботизовані комплекси є перспективним засобом комплексної автоматизації виробничих процесів [1 – 3]. Застосування роботів дозволяє істотно підвищити продуктивність праці, ефективність діючого і заново розробляемого обладнання, а також позбавляє людину від монотонних, фізично важких, ризикованих та шкідливих для здоров'я робіт [4, 5].

Дані вказівки присвячені комплексу лабораторних робіт з кінематики маніпуляторів та систем управління промисловими роботами. Проведення лабораторних робіт дозволить поглибити і закріпити знання студентів з дисципліни "Системи управління маніпуляційних роботів".

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

МАТРИЦІ ПОВОРОТУ

Мета роботи: визначення координат точки, зв'язаної з системою відліку, що обертається, за допомогою матриці повороту.

Теоретичні відомості

Для опису обертального руху зв'язаної системи відліку відносно абсолютної використовується матриця повороту розмірністю 3×3 . Вона визначається як матриця перетворення тривимірного вектора положення в евклідовому просторі, переводить його координати з поверненої (зв'язаної) системи відліку UVW в абсолютну систему координат XYZ [4].

$$\vec{P}_{UVW} = (p_U, p_V, p_W)^T$$

$$\vec{P}_{XYZ} = (p_X, p_Y, p_Z)^T$$

Необхідно визначити матрицю R, яка перетворює координати \vec{P}_{UVW} в координати \vec{P}_{XYZ} :

$$\begin{aligned}\vec{P}_{XYZ} &= R\vec{P}_{UVW} \\ \vec{P}_{UVW} &= p_U \vec{i}_U + p_V \vec{j}_V + p_W \vec{k}_W\end{aligned}\tag{1}$$

Визначаємо проекції вектора \vec{P} на осі X, Y і Z :

$$\begin{aligned}p_X &= \vec{i}_X \cdot \vec{P} = \vec{i}_X \cdot \vec{i}_U \cdot p_U + \vec{i}_X \cdot \vec{j}_V \cdot p_V + \vec{i}_X \cdot \vec{k}_W \cdot p_W \\ p_Y &= \vec{j}_Y \cdot \vec{P} = \vec{j}_Y \cdot \vec{i}_U \cdot p_U + \vec{j}_Y \cdot \vec{j}_V \cdot p_V + \vec{j}_Y \cdot \vec{k}_W \cdot p_W \\ p_Z &= \vec{k}_Z \cdot \vec{P} = \vec{k}_Z \cdot \vec{i}_U \cdot p_U + \vec{k}_Z \cdot \vec{j}_V \cdot p_V + \vec{k}_Z \cdot \vec{k}_W \cdot p_W\end{aligned}$$

Або в матричній формі :

$$\begin{bmatrix} p_X \\ p_Y \\ p_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}_X \cdot \vec{i}_U & \vec{i}_X \cdot \vec{j}_V & \vec{i}_X \cdot \vec{k}_W \\ \vec{j}_Y \cdot \vec{i}_U & \vec{j}_Y \cdot \vec{j}_V & \vec{j}_Y \cdot \vec{k}_W \\ \vec{k}_Z \cdot \vec{i}_U & \vec{k}_Z \cdot \vec{j}_V & \vec{k}_Z \cdot \vec{k}_W \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_U \\ p_V \\ p_W \end{bmatrix}$$

Аналогічно координаті \vec{P}_{UVW} можна отримати з координат \vec{P}_{XYZ} :

$$\vec{P}_{UVW} = Q \cdot \vec{P}_{XYZ} .\tag{2}$$

Або

$$\begin{bmatrix} p_U \\ p_V \\ p_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}_X \cdot \vec{i}_U & \vec{j}_Y \cdot \vec{i}_U & \vec{k}_Z \cdot \vec{i}_U \\ \vec{i}_X \cdot \vec{j}_V & \vec{j}_Y \cdot \vec{j}_V & \vec{k}_Z \cdot \vec{j}_V \\ \vec{i}_X \cdot \vec{k}_W & \vec{k}_Z \cdot \vec{j}_V & \vec{k}_Z \cdot \vec{k}_W \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_X \\ p_Y \\ p_Z \end{bmatrix}$$

З останнього виразу випливає, що

$$Q = R^{-1} = R^T$$

Перетворення, обумовлене формулою (1) або (2), називається ортогональним. Особливий інтерес представляють матриці поворотів навколо координатних осей. Матриця повороту на кут α навколо осі X:

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Матриця повороту на кут φ навколо осі Y:

$$R_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Матриця повороту на кут Θ навколо осі Z:

$$R_{z,\Theta} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриці $R_{x,\alpha}$, $R_{y,\varphi}$, $R_{z,\Theta}$ називаються матрицями елементарних поворотів.

Будь-який поворот у просторі можна представити послідовністю з 3-х поворотів навколо координатних осей, а матрицю повороту отримати шляхом перемноження матриць елементарних поворотів. Оскільки операція множення матриць не є комутативною, тут істотне значення має послідовність виконання поворотів. Результуюча матриця повороту може бути отримана з використанням наступних простих правил:

– якщо рухома система координат UVW робить поворот навколо однієї з осей системи XYZ, відповідну матрицю елементарного повороту потрібно помножити зліва на матрицю попереднього результуючого повороту;

– якщо рухома система координат UVW робить поворот навколо однієї зі своїх власних осей, відповідну матрицю елементарного повороту потрібно помножити справа на матрицю попереднього результуючого повороту.

Завдання

Задані координати точки P відносно рухомої системи UVW . Система UVW описує поворот у просторі, що описується наступною послідовністю поворотів: на кут 55° навколо осі Z , на 40° навколо осі V , на 15° навколо осі X . Необхідно знайти координати точки P відносно нерухомої системи XYZ .

Хід роботи

В середовищі Mathcad складаємо обчислювальну програму (рис. 1.1).

Початкові дані

Координати вектора відносно рухомої системи координат:

$$P_{uvw} := (3 \ 10 \ 5)^T$$

Кути поворотів:

$$\alpha := 15 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \varphi := 40 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \theta := 55 \cdot \frac{\pi}{180}$$

Послідовність поворотів: θ навколо Z , φ навколо V , α навколо X ,

Розв'язання задачі

Матриці елементарних поворотів:

$$R_X(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad R_V(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad R_Z(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця результуючого повороту:

$$R := R_X(\alpha) \cdot R_Z(\theta) \cdot R_V(\varphi)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0.439 & -0.819 & 0.369 \\ 0.772 & 0.554 & 0.31 \\ -0.458 & 0.148 & 0.876 \end{pmatrix}$$

Координати вектора P відносно абсолютної системи координат:

$$P_{xyz} := R \cdot P_{uvw} \quad P_{xyz}^T = (-5.03 \ 9.409 \ 4.49)$$

Рис. 1.1. Програма розрахунку координат вектора

Таким чином, за допомогою розробленої програми, були знайдені координати точки P у нерухомій системі відліку.

Зміст звіту

1. Тема та мета роботи.
2. Завдання.
3. Текст програми.
4. Висновки.

Контрольні питання

1. Що таке матриця повороту?
2. Для чого вона використовується?
3. Як представити складний поворот у просторі за допомогою матриць елементарних поворотів?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2 ПРЯМА ЗАДАЧА КІНЕМАТИКИ

Мета роботи: розв'язати пряму задачу кінематики для трьохланкового маніпулятора

Теоретичні відомості

Ланки роботів зазвичай з'єднані зчленуваннями з одним ступенем свободи: обертальними або поступальними. Для опису обертальних і поступальних зв'язків між сусідніми ланками Денавіт і Хантенберг запропонували матричний метод послідовної побудови систем координат, пов'язаних з кожною ланкою кінематичного кола [4]. Сенс представлення Денавіта-Хартенберга полягає у формуванні однорідної матриці перетворен-

ня розмірністю 4×4 і описує положення системи кожної ланки щодо системи координат попередньої ланки. Це дає можливість послідовно перетворити координати робочого органу маніпулятора з системи відліку, пов'язаної з останньою ланкою, в базову систему відліку, яка є інерціальній системою координат.

Крім базової системи (x_0, y_0, z_0) для кожної ланки на осі її зчленування визначається система координат (x_i, y_i, z_i) , де $i=1, 2, \dots, n$; n - число ступенів свободи маніпулятора. Кожна система координат (x_i, y_i, z_i) відповідає $(i+1)$ -у сочлененню і пов'язана з i -м ланкою. Кожна система координат формується на підставі наступних правил:

1. Вісь Z_{i-1} спрямована вздовж осі i -го зчленування.
2. Вісь X_i перпендикулярна осі X_{i-1} і спрямована від неї.
3. Вісь Y_i доповнює осі X_i і Z_i до правої системи координат.

Нульова і n -а системи координат можуть бути обрані довільним чином, за умови, що вісь Z_0 спрямована уздовж осі першого зчленування, а вісь X_n перпендикулярна осі Z_{n-1} . Положення пов'язаних систем координат описується за допомогою чотирьох параметрів: a_i - найкоротша відстань між z_i і z_{i-1} ; α_i - кут між z_i і z_{i-1} (навколо x_i); d_i - найкоротша відстань між x_i і x_{i-1} ; Θ_i - кут між x_i і x_{i-1} (навколо z_{i-1}).

Якщо ланки з'єднані обертальним зчленуванням, то кут Θ_i є змінною величиною. Якщо поступальним - то змінною є d_i .

Координати довільної точки в i -тій системі координат можна перетворити в координати цієї ж точки в $(i-1)$ -й системі, виконавши наступну послідовність операцій:

1. Поворот навколо осі z_{i-1} на кут Θ_i , щоб вісь x_{i-1} стала співспрямована з віссю x_i .
2. Зрушення уздовж осі z_{i-1} на відстань d_i , щоб поєднати x_{i-1} і x_i .
3. Зрушення уздовж осі x_i на відстань a_i , щоб поєднати початку координат.
4. Поворот навколо осі x_i на кут α_i , в результаті якого досягається

збіг систем координат.

Кожну з цих операцій можна представити однорідною матрицею елементарного повороту чи зсуву, а добуток таких матриць дасть однорідну матрицю складного перетворення для суміжних систем координат:

$${}^{i-1}A_i = T_{z,\Theta} T_{z,d} T_{x,a} T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos \Theta_i & -\sin \Theta_i & 0 & 0 \\ \sin \Theta_i & \cos \Theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta_i & -\cos \alpha_i \sin \Theta_i & \sin \alpha_i \sin \Theta_i & a_i \cos \Theta_i \\ \sin \Theta_i & \cos \alpha_i \cos \Theta_i & -\sin \alpha_i \cos \Theta_i & a_i \sin \Theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матриця ${}^{i-1}A_i$ називається ДХ – матрицею перетворення.

Матриця, зворотна до ${}^{i-1}A_i$ має вигляд:

$$({}^{i-1}A_i)^{-1} = {}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \Theta_i & \sin \Theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \sin \Theta_i & \cos \alpha_i \cos \Theta_i & \sin \alpha_i & -d_i \sin \Theta_i \\ \sin \alpha_i \sin \Theta_i & -\sin \alpha_i \cos \Theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Однорідна матриця 0T_i , що визначає положення і-ї системи координат відносно базової являє собою добуток послідовності однорідних матриць перетворення:

$${}^0T_i = {}^0A \cdot {}^1A \cdot \dots \cdot {}^{i-1}A_i = \prod_{j=1}^i {}^{j-1}A_j = \begin{bmatrix} {}^0R_i & {}^0P_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

де 0R_i - матриця, що визначає орієнтацію і-й системи координат по відношенню до базової; 0P_i - вектор, що з'єднує початку базової і і-ї систем координат.

Пряма задача кінематики полягає у визначенні положення і орієнтації робочого органа (схвата) маніпулятора щодо абсолютної системи координат. Її розв'язання зводиться до визначення так званої «матриці маніпу-

лятора»:

$$T = {}^0 T_n = \prod_{i=1}^n {}^{i-1} A_i = \begin{bmatrix} {}^0 R_i & {}^0 P_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{s} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де \vec{n} - вектор нормалі до схвату; \vec{s} - дотичний вектор схвату; \vec{a} - вектор підходу схвату; \vec{p} - вектор положення схвату.

Завдання

За заданою конфігурацією маніпулятора і поточними значеннями відносних переміщень ланок визначити координати та орієнтацію схвату у просторі.

Хід роботи

В середовищі Mathcad складаємо обчислювальну програму (рис. 2.1).

Довжини ланок:

$$L := (0 \ 1 \ 3 \ 3)^T$$

Параметри, що характеризують конфігурацію маніпулятора:

$$a := (0 \ 0 \ L_2 \ L_3)^T$$

$$\alpha := \left(0 \ \frac{\pi}{2} \ 0 \ 0\right)^T$$

$$d := (0 \ L_1 \ 0 \ 0)^T$$

$$N := 4 \text{ (Номер варіанта)}$$

Поточні значення кутів повороту ланок:

$$\theta := \left(0 \ \frac{N \cdot \pi}{180} \ \frac{2 \cdot N \cdot \pi}{180} \ \frac{-3 \cdot N \cdot \pi}{180}\right)^T$$

Визначаємо матриці перетворення для систем координат сусідніх ланок:

$$n := 3 \text{ (Число ланок)}$$

$$i := 1..n \text{ (Номер ланки)}$$

$$A_i := \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -(\cos(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i)) & \sin(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cdot \cos(\theta_i) & -(\sin(\alpha_i) \cdot \cos(\theta_i)) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перемножуємо матриці перетворення для систем координат сусідніх ланок і отримуємо матрицю маніпулятора:

$$T := \prod_{i=1}^n A_i$$

$$T = \begin{pmatrix} 0.995 & 0.07 & 0.07 & 5.949 \\ 0.07 & 4.866 \times 10^{-3} & -0.998 & 0.416 \\ -0.07 & 0.998 & 0 & 1.208 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перевірка:

$$x := \cos(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3))$$

$$y := \sin(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3))$$

$$z := L_1 + L_2 \cdot \sin(\theta_2) + L_3 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3)$$

$$x = 5.949$$

$$y = 0.416$$

$$z = 1.208$$

Рис. 2.1. Програма розв'язання прямої задачі кінематики

Результати перевірки підтвердили правильність розв'язання задачі.

Зміст звіту

1. Тема та мета роботи.
2. Завдання.
3. Текст програми.
4. Висновки.

Контрольні питання

1. У чому полягає пряма задача кінематики?
2. Що задається у початкових даних?
3. Яким чином отримують матрицю маніпулятора?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

ЗВОРОТНА ЗАДАЧА КІНЕМАТИКИ

Мета роботи: розв'язати зворотну задачу кінематики для трьохланкового маніпулятора.

Теоретичні відомості

Зворотна задача кінематики полягає у визначенні приєднаних координат ланок маніпулятора, що забезпечують певне положення та орієнтацію схвату у просторі [4]. Розв'язання цієї задачі здійснюється для планування траєкторії маніпулятора.

Контрольними точками траєкторії є: початкова точка, точка уходу, точка підходу і кінцева точка. Координати початкової точки x_{t0} , y_{t0} і z_{t0} і точки уходу x_{t1} , y_{t1} і z_{t1} задані у початкових даних. Координати кінцевої точки дорівнюють координатам вантажу в момент часу $t = t_3$:

$$x_{t3} = x_B(t_3); \quad y_{t3} = y_B(t_3); \quad z_{t3} = z_B(t_3).$$

Точка підходу повинна знаходитись на відстані Δz_{t23} над вантажем в момент часу $t = t_2$:

$$x_{t2} = x_B(t_2); \quad y_{t2} = y_B(t_2); \quad z_{t2} = z_B(t_2) + \Delta z_{t23}.$$

Для кожної контрольної точки необхідно розв'язати зворотну задачу кінематики, тобто визначити кути повороту ланок маніпулятора θ_1 , θ_2 і θ_3 (рис. 3.1), при яких координати схвату x ; y ; z з певною точністю співпадають з координатами заданої точки x_t ; y_t ; z_t :

$$x = x_t \pm \delta x; \quad y = y_t \pm \delta y; \quad z = z_t \pm \delta z.$$

Похибки δx , δy і δz повинні бути на порядок меншими за припустимі похибки позиціювання схвату:

$$\delta x = 0,1\Delta x_{\max}; \quad \delta y = 0,1\Delta y_{\max}; \quad \delta z = 0,1\Delta z_{\max}.$$

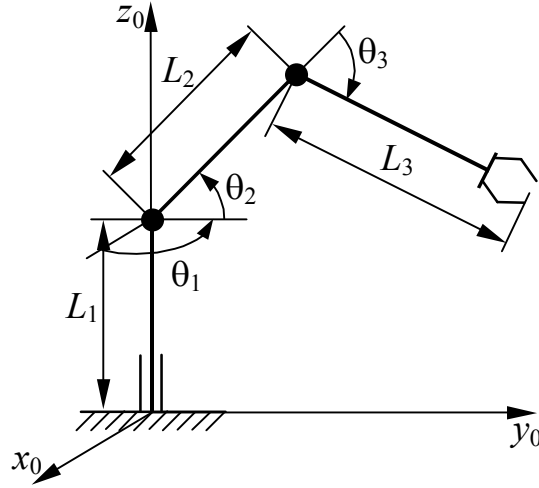


Рис. 3.1. Кінематична схема маніпулятора

Таким чином, вектор приєднаних координат $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3)^T$ повинен задовольняти наступній умові:

$$(|x(\boldsymbol{\theta}) - x_t| < \delta x) \cap (|y(\boldsymbol{\theta}) - y_t| < \delta y) \cap (|z(\boldsymbol{\theta}) - z_t| < \delta z), \quad 1)$$

де координати схвату $x(\boldsymbol{\theta})$, $y(\boldsymbol{\theta})$ і $z(\boldsymbol{\theta})$ визначаються в процесі розв'язання прямої задачі кінематики для кінематичної схеми (рис. 3):

$$x(\boldsymbol{\theta}) = (L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \cos \theta_1; \quad 2)$$

$$y(\boldsymbol{\theta}) = (L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \sin \theta_1; \quad 3)$$

$$z(\boldsymbol{\theta}) = L_1 + L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3). \quad 4)$$

Для визначення необхідних кутів θ_1 , θ_2 і θ_3 найбільш зручно використовувати метод градієнтного спуску. Суть даного методу зводиться до пошуку мінімуму функціоналу

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} ((x(\boldsymbol{\theta}) - x_t)^2 + (y(\boldsymbol{\theta}) - y_t)^2 + (z(\boldsymbol{\theta}) - z_t)^2) = \min \quad 5)$$

шляхом зміни координат вектора $\boldsymbol{\theta}$ (кутів повороту ланок) у циклі за наступним алгоритмом:

$$\theta_i := \theta_i - \gamma_i \frac{\partial J}{\partial \theta_i}, \quad 6)$$

де i – номер ланки; γ_i – ітераційний коефіцієнт. Враховуючи (2) – (6), алгоритм зміни кутів θ_1, θ_2 і θ_3 для маніпулятора (рис. 9.1), визначається наступною послідовністю операцій присвоєння:

$$\theta_1 := \theta_1 - \gamma_1 \cdot \left((x - x_t) \frac{\partial x}{\partial \theta_1} + (y - y_t) \frac{\partial y}{\partial \theta_1} \right); \quad (7)$$

$$\theta_2 := \theta_2 - \gamma_2 \cdot \left((x - x_t) \frac{\partial x}{\partial \theta_2} + (y - y_t) \frac{\partial y}{\partial \theta_2} + (z - z_t) \frac{\partial z}{\partial \theta_2} \right); \quad (8)$$

$$\theta_3 := \theta_3 - \gamma_3 \cdot \left((x - x_t) \frac{\partial x}{\partial \theta_3} + (y - y_t) \frac{\partial y}{\partial \theta_3} + (z - z_t) \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \right), \quad (9)$$

де

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = -(L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \sin \theta_1;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_2} = -(L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)) \cos \theta_1; \quad \frac{\partial x}{\partial \theta_3} = -L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_1;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = (L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \cos \theta_1;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_2} = -(L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)) \sin \theta_1; \quad \frac{\partial y}{\partial \theta_3} = -L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_2} = L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3); \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_3} = L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3).$$

Таким чином, розв'язання зворотної задачі кінематики зводиться до наступного: спочатку кутам θ_1, θ_2 і θ_3 присвоюються довільні значення, а потім вони змінюються в циклі за алгоритмом (7) – (9), доки не задовольнять умові (1). Ітераційні коефіцієнти γ_i впливають на швидкість та стійкість розрахунку. Якщо значення цих коефіцієнтів обрати занадто малими, процес розрахунку буде дуже довгим, а якщо великими – обчислювання буде розбіжним, і задачу взагалі не буде розв'язано. Тому, для кожного окремого випадку ітераційні коефіцієнти треба підбирати індивідуально.

Завдання

За заданою конфігурацією маніпулятора, координатами схвату і припустимими помилками визначити відносні кути повороту ланок маніпулятора.

Хід роботи

В середовищі Mathcad складаємо обчислювальну програму, де спочатку задаємо початкові дані для зворотної задачі кінематики (рис. 3.2).

Номер студента за списком: $N := 25$

Потрібні координати схвату:

$$x_T := 0.4 + 0.03 N \quad x_T = 1.15$$

$$y_T := 0.3 + 0.04 N \quad y_T = 1.3$$

$$z_T := 0.8 + 0.05 N \quad z_T = 2.05$$

Довжини ланок маніпулятора:

$$L_1 := 1 \quad L_2 := 1.3 \quad L_3 := 1.2$$

Конфігурація маніпулятора:

$$x(\theta) := \cos(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3))$$

$$y(\theta) := \sin(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3))$$

$$z(\theta) := L_1 + L_2 \cdot \sin(\theta_2) + L_3 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3)$$

Припустимі помилки позиціювання схвату:

$$\varepsilon_x := 0.001 \quad \varepsilon_y := 0.001 \quad \varepsilon_z := 0.001$$

Рис. 3.2. Завдання початкових даних для зворотної задачі кінематики

Задаємо первинні значення ітераційних коефіцієнтів (рис. 3.3).

Задаємо ітераційні коефіцієнти:

$$\gamma_1 := 1 \quad \gamma_2 := 1 \quad \gamma_3 := 1$$

Рис. 3.3. Завдання ітераційних коефіцієнтів

На підставі методу градієнтного спуску складаємо програму розв'язання зворотної задачі кінематики (рис. 3.4). Результат виводимо у матрицю θ , в 0-й елемент якої записуємо кількість виконаних ітерацій i , а в 1-й, 2-й і 3-й – знайдені значення кутів повороту ланок. Якщо після вихо-

ду з циклу $i = 10^4$, умова (1) не виконалася, і потрібно змінити ітераційні коефіцієнти і повторити розрахунок. Таким чином, підбираємо ітераційні коефіцієнти та отримуємо розв'язок задачі (рис. 3.4).

Складаємо обчислювальну програму за методом градієнтного спуску:

```

θ :=
  θ1 ←  $\frac{\pi}{6}$ 
  θ2 ←  $\frac{\pi}{6}$ 
  θ3 ←  $-\frac{\pi}{4}$ 
  for i ∈ 1..104
    x ← cos(θ1) · (L2 · cos(θ2) + L3 · cos(θ2 + θ3))
    y ← sin(θ1) · (L2 · cos(θ2) + L3 · cos(θ2 + θ3))
    z ← L1 + L2 · sin(θ2) + L3 · sin(θ2 + θ3)
    break if (|xT - x| < εx) ∧ (|yT - y| < εy) ∧ (|zT - z| < εz)
    dx1 ← -sin(θ1) · (L2 · cos(θ2) + L3 · cos(θ2 + θ3))
    dx2 ← -cos(θ1) · (L2 · sin(θ2) + L3 · sin(θ2 + θ3))
    dx3 ← -L3 · cos(θ1) · sin(θ2 + θ3)
    dy1 ← cos(θ1) · (L2 · cos(θ2) + L3 · cos(θ2 + θ3))
    dy2 ← -sin(θ1) · (L2 · sin(θ2) + L3 · sin(θ2 + θ3))
    dy3 ← -L3 · sin(θ1) · sin(θ2 + θ3)
    dz1 ← 0
    dz2 ← L2 · cos(θ2) + L3 · cos(θ2 + θ3)
    dz3 ← L3 · cos(θ2 + θ3)
    θ1 ← θ1 + γ1 · [(xT - x) · dx1 + (yT - y) · dy1 + (zT - z) · dz1]
    θ2 ← θ2 + γ2 · [(xT - x) · dx2 + (yT - y) · dy2 + (zT - z) · dz2]
    θ3 ← θ3 + γ3 · [(xT - x) · dx3 + (yT - y) · dy3 + (zT - z) · dz3]
  θ0 ← i
  θ1 ← θ1
  θ2 ← θ2
  θ3 ← θ3
  θ

θ =  $\begin{pmatrix} 308 \\ 0.847 \\ 1.139 \\ -1.248 \end{pmatrix}$ 

```

Рис. 3.4. Програма розв'язання зворотної задачі кінематики

Шляхом розв'язання прямої задачі кінематики робимо перевірку правильності визначення кутів повороту ланок (рис. 3.5).

Розв'язання прямої задачі кінематики:

$$\begin{aligned}x &:= \cos(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)) & x = 1.151 & \quad x_T = 1.15 \\y &:= \sin(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)) & y = 1.301 & \quad y_T = 1.3 \\z &:= L_1 + L_2 \cdot \sin(\theta_2) + L_3 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) & z = 2.051 & \quad z_T = 2.05\end{aligned}$$

Помилки:

$$|x_T - x| = 8.791 \times 10^{-4} \quad |y_T - y| = 9.938 \times 10^{-4} \quad |z_T - z| = 5.519 \times 10^{-4}$$

Рис. 3.5. Перевірка результатів розв'язання зворотної задачі кінематики

Результати перевірки підтверджують правильність розв'язання задачі, а отримані помилки не перевищують заданих величин.

Зміст звіту

1. Тема та мета роботи.
2. Завдання.
3. Текст програми.
4. Висновки.

Контрольні питання

1. У чому полягає зворотна задача кінематики?
2. Що задається у початкових даних?
3. У чому полягає метод градієнтного спуску?
4. Як потрібно обирати ітераційні коефіцієнти?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4

ПЛАНУВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ МАНІПУЛЯТОРА

Мета роботи: визначити закони зміни у часі кутів повороту ланок маніпулятора, що забезпечують задану траєкторію руху схвату.

Теоретичні відомості

Задача планування траєкторії маніпулятора полягає у визначенні законів зміни у часі приєднаних змінних, що забезпечують задану траєкторію схвату.

Траєкторія схвату задається у вигляді координат контрольних точок, через які повинен пройти схват і моментів часу їх проходження. Звичайно задаються 4 точки: початкова точка, точка уходу, точка підходу і кінцева точка [4].

Найбільш розповсюджений підхід до планування траєкторії маніпулятора передбачає 2 етапи:

- розв’язання зворотної задачі кінематики для контрольних точок траєкторії;
- інтерполяція законів зміни приєднаних змінних неперервними функціями часу.

Для інтерполяції залежностей, які задані великим числом точок, або для яких сформульовано багато додаткових умов (задані значення першої та другої похідних у точках), звичайно використовуються сплайн-функції [4]. Сплайн-функція представляє собою послідовність поліномів низького ступеня (поліноміальних сплайнів), кожен з яких описує її поведінку на певному інтервалі значень аргументу. В залежності від кількості інтервалів розбиття області значень аргументу та порядків інтерполюючих поліномів існує багато різновидів сплайн-функцій. Для інтерполяції законів зміни кутів повороту ланок маніпулятора будемо використовувати функцію "4 – 3 – 4". Тоді закон зміни кута повороту i -ї ланки прийме наступ-

ний вигляд:

$$\theta_i(t) = \begin{cases} a14_i \cdot (t - t_0)^4 + a13_i \cdot (t - t_0)^3 + a12_i \cdot (t - t_0)^2 + \\ + a11_i \cdot (t - t_0) + a10_i \text{ при } t_0 \leq t \leq t_1; \\ a23_i \cdot (t - t_1)^3 + a22_i \cdot (t - t_1)^2 + \\ + a21_i \cdot (t - t_1) + a20_i \text{ при } t_1 \leq t \leq t_2; \\ a34_i \cdot (t - t_2)^4 + a33_i \cdot (t - t_2)^3 + a32_i \cdot (t - t_2)^2 + \\ + a31_i \cdot (t - t_2) + a30_i \text{ при } t_2 \leq t \leq t_3, \end{cases}$$

де коефіцієнти поліномів визначаються шляхом розв'язання рівнянь, складених на основі умов проходження через контрольні точки, забезпечення необхідних значень першої та другої похідних функції у крайніх точках, а також умов неперервності першої та другої похідних в точках сполучень сплайнів:

$$a10_i = \theta_i(t_0); \quad a20_i = \theta_i(t_1); \quad a30_i = \theta_i(t_2); \quad a11_i = 0; \quad a12_i = 0;$$

$$(a14_i \quad a13_i \quad a23_i \quad a22_i \quad a21_i \quad a34_i \quad a33_i \quad a32_i \quad a31_i)^T = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{F}_i;$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \Delta t_1^4 & \Delta t_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\Delta t_1^3 & 3\Delta t_1^2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\Delta t_1^2 & 6\Delta t_1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t_2^3 & \Delta t_2^2 & \Delta t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\Delta t_2^2 & 2\Delta t_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6\Delta t_2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t_3^4 & \Delta t_3^3 & \Delta t_3^2 & \Delta t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\Delta t_3^3 & 3\Delta t_3^2 & 2\Delta t_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12\Delta t_3^2 & 6\Delta t_3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_i = [(\theta_i(t_1) - \theta_i(t_0)) \quad 0 \quad 0 \quad (\theta_i(t_2) - \theta_i(t_1)) \quad 0 \quad 0 \quad (\theta_i(t_3) - \theta_i(t_2)) \quad 0 \quad 0]^T;$$

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0; \quad \Delta t_2 = t_2 - t_1; \quad \Delta t_3 = t_3 - t_2.$$

Завдання

Розв'язати задачу планування траєкторії трьохланкового маніпулятора.

Хід роботи

В середовищі Mathcad складаємо обчислювальну програму, де задаємо початкові дані: координати контрольних точок траєкторії схвату та моменти часу їх проходження, довжини ланок і конфігурацію маніпулятора, припустимі помилки позиціювання схвату (рис. 4.1).

Номер студента за списком: $N := 25$

Координати контрольних точок траєкторії схвату:

$$x_T := (0.01 \cdot N \quad 0.01 \cdot N \quad 1.2 \quad 1.2)^T \quad x_T^T = (0.25 \quad 0.25 \quad 1.2 \quad 1.2)$$

$$y_T := (1 \quad 1 \quad 1.1 \quad 1.1)^T$$

$$z_T := (0 \quad 0.3 \quad 1.3 \quad 1)^T$$

Моменти часу проходження контрольних точок:

$$T := (0 \quad 2 \quad 12 \quad 15)^T$$

Довжини ланок маніпулятора:

$$L_1 := 1 \quad L_2 := 1.3 \quad L_3 := 1.2$$

Конфігурація маніпулятора:

$$x(\theta) := \cos(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3))$$

$$y(\theta) := \sin(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3))$$

$$z(\theta) := L_1 + L_2 \cdot \sin(\theta_2) + L_3 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3)$$

Припустимі помилки позиціювання схвату:

$$\varepsilon_x := 0.001 \quad \varepsilon_y := 0.001 \quad \varepsilon_z := 0.001$$

Рис. 4.1. Початкові дані до задачі планування траєкторії маніпулятора

Задаємо ітераційні коефіцієнти і складаємо програму розв'язання зворотної задачі кінематики для 4-х точок траєкторії маніпулятора (рис. 4.2). Розраховані кути повороту ланок записуємо в матрицю q , де номери строк відповідають номерам ланок маніпулятора (окрім 0-ї строки, де зберігається кількість виконаних ітерацій i), а номери стовбців відповідають номерам точок траєкторії.

Задаємо ітераційні коефіцієнти:

$$\gamma_1 := 0.05 \quad \gamma_2 := 0.05 \quad \gamma_3 := 0.05$$

Складаємо обчислювальну програму за методом градієнтного спуску:

```

q := for j ∈ 0..3
    θ1 ←  $\frac{\pi}{6}$ 
    θ2 ←  $\frac{\pi}{6}$ 
    θ3 ←  $-\frac{\pi}{4}$ 
    for i ∈ 1..10000
        x ←  $\cos(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3))$ 
        y ←  $\sin(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3))$ 
        z ←  $L_1 + L_2 \cdot \sin(\theta_2) + L_3 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3)$ 
        break if  $(|x_{T_j} - x| < \varepsilon_x) \wedge (|y_{T_j} - y| < \varepsilon_y) \wedge (|z_{T_j} - z| < \varepsilon_z)$ 
        dx1 ←  $-\sin(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3))$ 
        dx2 ←  $-\cos(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \sin(\theta_2) + L_3 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3))$ 
        dx3 ←  $-L_3 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3)$ 
        dy1 ←  $\cos(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3))$ 
        dy2 ←  $-\sin(\theta_1) \cdot (L_2 \cdot \sin(\theta_2) + L_3 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3))$ 
        dy3 ←  $-L_3 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3)$ 
        dz1 ← 0
        dz2 ←  $L_2 \cdot \cos(\theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)$ 
        dz3 ←  $L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)$ 
        θ1 ←  $\theta_1 + \gamma_1 \cdot [(x_{T_j} - x) \cdot dx1 + (y_{T_j} - y) \cdot dy1 + (z_{T_j} - z) \cdot dz1]$ 
        θ2 ←  $\theta_2 + \gamma_2 \cdot [(x_{T_j} - x) \cdot dx2 + (y_{T_j} - y) \cdot dy2 + (z_{T_j} - z) \cdot dz2]$ 
        θ3 ←  $\theta_3 + \gamma_3 \cdot [(x_{T_j} - x) \cdot dx3 + (y_{T_j} - y) \cdot dy3 + (z_{T_j} - z) \cdot dz3]$ 
    θ0,j ← i
    θ1,j ← θ1
    θ2,j ← θ2
    θ3,j ← θ3
θ

q =  $\begin{pmatrix} 170 & 168 & 212 & 202 \\ 1.326 & 1.326 & 0.742 & 0.742 \\ 0.132 & 0.383 & 0.984 & 0.815 \\ -1.919 & -2.1 & -1.695 & -1.724 \end{pmatrix}$ 

```

Рис. 4.2. Програма розв'язання зворотної задачі кінематики

Складаємо програму інтерполяції законів зміни кутів повороту ланок сплайн-функціями (рис. 4.3).

Проміжки часу:

$$j := 0.. \text{rows}(T) - 2 \quad \Delta t_{j+1} := T_{j+1} - T_j$$

$$n := \text{rows}(q) - 1 \quad i := 1..n$$

$$a12_i := 0 \quad a11_i := 0 \quad a10_i := q_{i,0} \quad a20_i := q_{i,1} \quad a30_i := q_{i,2}$$

Матриця коефіцієнтів системи рівнянь:

$$C := \begin{bmatrix} (\Delta t_1)^4 & (\Delta t_1)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 \cdot (\Delta t_1)^3 & 3 \cdot (\Delta t_1)^2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 \cdot (\Delta t_1)^2 & 6 \cdot \Delta t_1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\Delta t_2)^3 & (\Delta t_2)^2 & \Delta t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot (\Delta t_2)^2 & 2 \cdot \Delta t_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \cdot \Delta t_2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\Delta t_3)^4 & (\Delta t_3)^3 & (\Delta t_3)^2 & \Delta t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \cdot (\Delta t_3)^3 & 3 \cdot (\Delta t_3)^2 & 2 \cdot \Delta t_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \cdot (\Delta t_3)^2 & 6 \cdot \Delta t_3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Матриця правих частин системи рівнянь:

$$B_i := \begin{bmatrix} (q_{i,1} - q_{i,0}) & 0 & 0 & (q_{i,2} - q_{i,1}) & 0 & 0 & (q_{i,3} - q_{i,2}) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Розв'язання системи рівнянь матричним методом:

$$A_i := C^{-1} \cdot B_i$$

Коефіцієнти сплайн-функцій:

$$a14_i := (A_i)_0 \quad a13_i := (A_i)_1 \quad a23_i := (A_i)_2 \quad a22_i := (A_i)_3 \quad a21_i := (A_i)_4$$

$$a34_i := (A_i)_5 \quad a33_i := (A_i)_6 \quad a32_i := (A_i)_7 \quad a31_i := (A_i)_8$$

Сплайн-функції:

$$\theta(t) := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ \left| \begin{array}{l} X_i \leftarrow a14_i \cdot (t - T_0)^4 + a13_i \cdot (t - T_0)^3 + a12_i \cdot (t - T_0)^2 + a11_i \cdot (t - T_0) + a10_i \text{ if } T_0 \leq t < T_1 \\ X_i \leftarrow a23_i \cdot (t - T_1)^3 + a22_i \cdot (t - T_1)^2 + a21_i \cdot (t - T_1) + a20_i \text{ if } T_1 \leq t < T_2 \\ X_i \leftarrow a34_i \cdot (t - T_2)^4 + a33_i \cdot (t - T_2)^3 + a32_i \cdot (t - T_2)^2 + a31_i \cdot (t - T_2) + a30_i \text{ if } T_2 \leq t \leq T_3 \end{array} \right. \\ X \end{cases}$$

Рис. 4.3. Програма інтерполяції законів зміни кутів повороту ланок

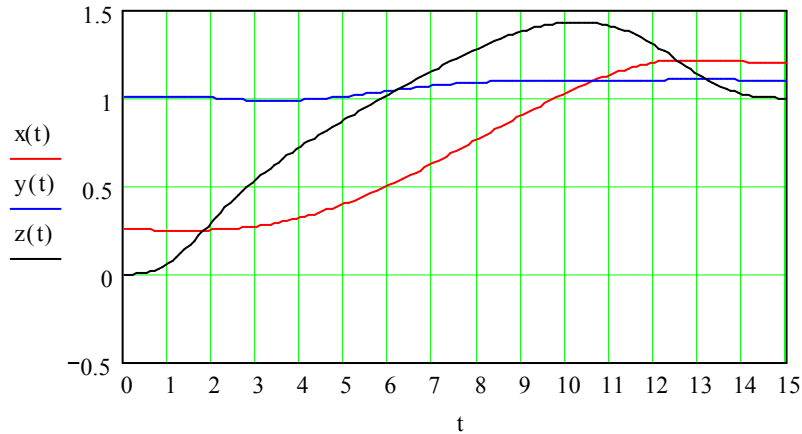
Робимо перевірку отриманих результатів і будуємо траєкторію схвату в трьох проекціях (рис. 4.4).

Розв'язання прямої задачі кінематики:

$$x(t) := \cos(\theta(t)_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta(t)_2) + L_3 \cdot \cos(\theta(t)_2 + \theta(t)_3))$$

$$y(t) := \sin(\theta(t)_1) \cdot (L_2 \cdot \cos(\theta(t)_2) + L_3 \cdot \cos(\theta(t)_2 + \theta(t)_3))$$

$$z(t) := L_1 + L_2 \cdot \sin(\theta(t)_2) + L_3 \cdot \sin(\theta(t)_2 + \theta(t)_3)$$



$$x_T^T = (0.25 \ 0.25 \ 1.2 \ 1.2) \quad y_T^T = (1 \ 1 \ 1.1 \ 1.1) \quad z_T^T = (0 \ 0.3 \ 1.3 \ 1)$$

Траєкторія руху схвату в трьох проекціях:

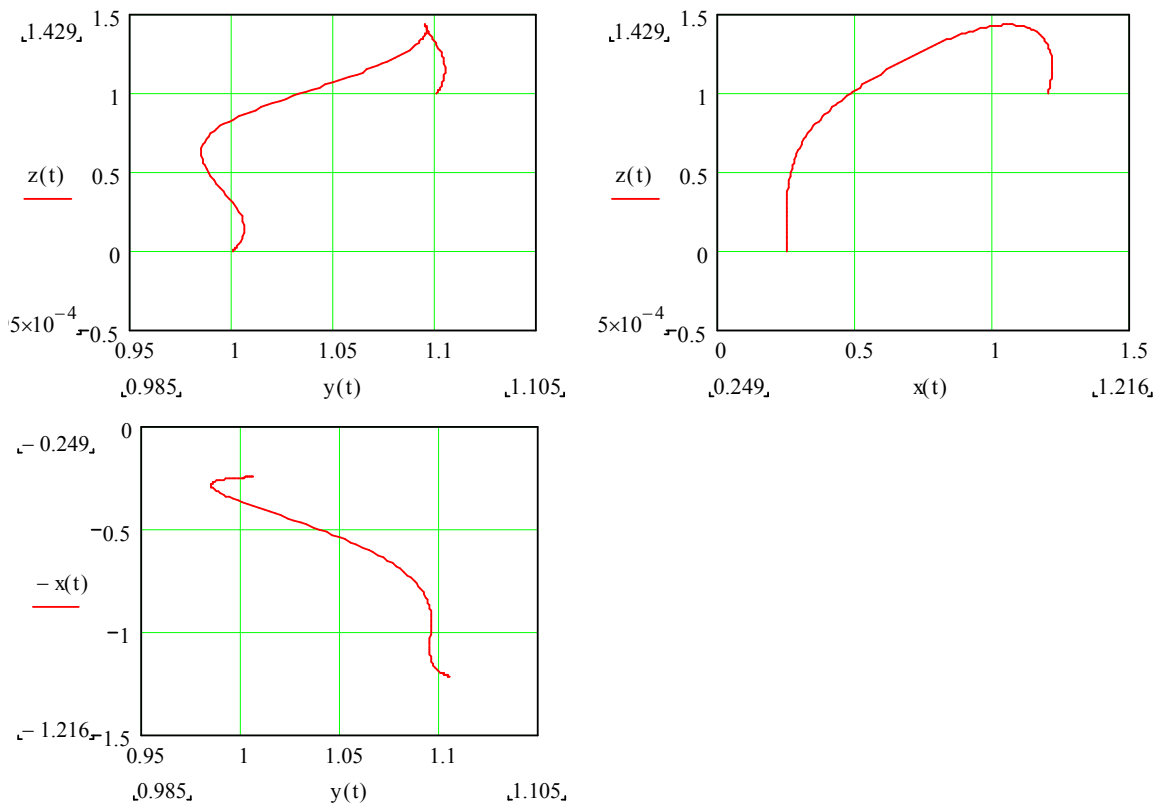


Рис. 4.4. Перевірка результатів розв'язання задачі та побудова траєкторії схвату в 3-х проекціях

Результати перевірки підтверджують правильність розв'язання задачі.

Зміст звіту

1. Тема та мета роботи.
2. Завдання.
3. Текст програми.
4. Висновки.

Контрольні питання

1. У чому полягає задача планування траєкторії?
2. Що задається у початкових даних?
3. Яка функція використовується для інтерполяції законів зміни кутів повороту ланок у часі?
4. З яких умов визначаються коефіцієнти інтерполюючої функції?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5 ДИНАМІКА МАНІПУЛЯТОРА

Мета роботи: визначення керуючих моментів, що забезпечують задані кути повороту, кутові швидкості та кутові прискорення ланок маніпулятора.

Завдання

Задана конфігурація маніпулятора, поточні значення кутів повороту ланок, кутові швидкості та кутові прискорення. Знайти величини керуючих моментів, прикладених до ланок з боку електроприводів.

Хід роботи

На підставі викладеної в [4] методики в середовищі Mathcad складемо обчислювальну програму, де задаємо початкові дані: кути повороту

ланок, кутові швидкості, кутові прискорення, маси ланок, довжини і радіуси ланок (рис. 5.1).

$N := 25$ номер варіанту

Початкові дані:

$$q := \begin{pmatrix} 0 \\ 1.2 \\ 0.8 \\ -0.9 \end{pmatrix} \quad q1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.008 N \\ 0.012 N \\ 0.016 N \end{pmatrix} \quad q1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad q2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0 \\ 0.06 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad m := \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 110 \\ 120 \end{pmatrix} \quad L := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1.3 \\ 1.2 \end{pmatrix} \quad R := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.04 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

Рис. 5.1. Початкові дані для задачі динаміки маніпулятора

Задаємо функцію "слід матриці", прискорення вільного падіння, визначаємо матриці інерції ланок і матриці перетворення систем координат ланок (рис. 5.2).

Функція "слід матриці":

$$\text{Tr}(A) := \sum_{i=0}^{\text{cols}(A)-1} A_{i,i} \quad g := (0 \ 0 \ -9.8 \ 0)$$

$$n := \text{rows}(q) - 1 \quad i := 2..n$$

Матриці інерції ланок:

$$J_i := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot m_i \cdot (L_i)^2 & 0 & 0 & m_i \cdot L_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_i \cdot L_i & 0 & 0 & m_i \end{bmatrix} \quad J_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (R_1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \quad O := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i := 1..n \quad \theta := q \quad \alpha := \left(0 \ \frac{\pi}{2} \ 0 \ 0\right)^T \quad a := (0 \ 0 \ L_2 \ L_3)^T \quad d := (0 \ L_1 \ 0 \ 0)^T$$

Матриці перетворення для сусідніх ланок маніпулятора:

$$A1_i := \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & a_i \cdot \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cdot \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cdot \cos(\theta_i) & a_i \cdot \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A1_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриці перетворення для систем координат ланок з номерами k і p:

$$A(k,p) := \prod_{j=k+1}^p A1_j$$

Рис. 5.2. Визначення матриць інерції та перетворення

Визначаємо першу та другу похідні від матриць перетворення (рис. 5.3).

Матриця-похідна:

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Координати центрів мас ланок:

$$\mathbf{r}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_2 := \begin{pmatrix} \frac{L_2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_3 := \begin{pmatrix} \frac{L_3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Похідна від матриці перетворення за приєднаною координатою:

$$U := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \qquad \left| \begin{array}{l} v_{i,j} \leftarrow A(0,j-1) \cdot Q \cdot A(j-1,i) \text{ if } j \leq i \\ v_{i,j} \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ v \end{array}$$

Друга похідна:

$$\text{U1}(s) := \begin{array}{|l} \text{for } j \in 1..n \\ \quad \text{for } k \in 1..n \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} v_{j,k} \leftarrow A(0,k-1) \cdot Q \cdot A(k-1,s-1) \cdot Q \cdot A(s-1,j) \text{ if } j \geq s \wedge s \geq k \\ v_{j,k} \leftarrow A(0,s-1) \cdot Q \cdot A(s-1,k-1) \cdot Q \cdot A(k-1,j) \text{ if } j \geq k \wedge k \geq s \end{array} \right. \\ \quad v \end{array}$$

Рис. 5.3. Визначення похідних матриць перетворення

Визначаємо керуючі моменти як суму трьох складових: обумовленої прискоренням лянки, обумовленої відцентровими та коріолісовими силами і обумовленою силою ваги (рис. 5.4).

В результаті виконання програми отримуємо значення трьох керуючих моментів, що діють відповідно на першу, другу і третю ланки маніпулятора.

Складова керуючого моменту, обумовлена прискоренням ланки:

$$D := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } k \in 1..n \\ \quad \quad D_{i,k} \leftarrow 0 \\ \quad \quad \text{for } j \in \max(i,k)..n \\ \quad \quad \quad D_{i,k} \leftarrow D_{i,k} + \text{Tr}(U_{j,k} \cdot J_j \cdot U_{j,i}^T) \end{cases} D$$

Складова керуючого моменту, обумовлена відцентровими та коріолісовими силами:

$$h_i := \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \left(\sum_{j=\max(i,k,s)}^n \text{Tr}(U_{j,k}^{(s)} \cdot J_j \cdot U_{j,i}^T) \right) \cdot q_1^k \cdot q_1^s$$

Складова керуючого моменту, обумовлена вагою ланки:

$$C_i := \left| \sum_{j=i}^n (-m_j \cdot g \cdot U_{i,j} \cdot r_j) \right|$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.796 \times 10^{-14} \\ 488.182 \\ 702.075 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 173.443 \\ 20.891 \\ 6.16 \end{pmatrix} \quad D \cdot q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 65.64 \\ 111.836 \\ 48.524 \end{pmatrix}$$

Результуючий момент:

$$M := D \cdot q_2 + h + C$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 239.083 \\ 620.909 \\ 756.759 \end{pmatrix}$$

Рис. 5.4. Визначення керуючих моментів

Зміст звіту

1. Тема та мета роботи.
2. Завдання.
3. Текст програми.
4. Висновки.

Контрольні питання

1. У чому полягає задача динаміки маніпулятора?
2. Що задається у початкових даних?
3. Яким чином розраховуються керуючі моменти?
4. Які складові моментів сили враховуються?

ЛІТЕРАТУРА

1. **Бурдаков, С. Ф.** Проектирование манипуляторов промышленных роботов и роботизированных комплексов: Учеб. пособие [Текст] / С. Ф. Бурдаков, В. А. Дьяченко, А. Н. Тимофеев. – М.: Высш. шк., 1986. – 264 с.
2. **Зенкевич, С. Л.** Основы управления манипуляционными роботами: Учеб. для вузов [Текст] / А. С. Ющенко, С. Л. Зенкевич. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. – 480 с.
3. **Крутько П. Д.** Управление исполнительными системами роботов [Текст] / П. Д. Крутько. – М.: Наука, 1991. – 336 с.
4. **Фу, К.** Робототехника: Пер. с англ. [Текст] / К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли. – М.: Мир, 1989. – 624 с.
5. **Шахинпур М.** Курс робототехники: Пер. с англ. [Текст] / М. Шахинпур. – М.: Мир., 1990. – 527 с.

Зміст

Вступ.....	3
Лабораторна робота №1. Матриці повороту	4
Лабораторна робота №2. Пряма задача кінематики	7
Лабораторна робота №3. Зворотна задача кінематики	12
Лабораторна робота №4. Планування траєкторії маніпулятора	18
Лабораторна робота №5. Динаміка маніпулятора.....	24
Література.....	28