

## ***Лабораторна робота № 3***

### **Дослідження нелінійних статичних характеристик та формування моделей із змінною структурою**

**Мета роботи:** засвоїти методику апроксимації графічно заданих нелінійних функцій та оцінки точності апроксимації; дослідити статичні характеристики типових нелінійних елементів і засвоїти технологію синтезу блоків перемикавання в системах із змінною структурою на основі використання типових логічних, нелінійних та функціональних блоків Simulink.

### **Теоретичні відомості**

#### ***Поняття про нелінійні системи. Основні типи нелінійних характеристик***

Лінійні системи автоматичного керування описуються лінійними диференціальними рівняннями. У цих рівняннях змінні та їх похідні зустрічаються лише у першому ступені й відсутні взаємні добутки змінних та їх добутки з похідними.

На практиці лінійних САУ не існує, бо характеристики більшості елементів, що утворюють системи, нелінійні, й точні диференціальні рівняння систем є нелінійними. У них крім першого зустрічаються й інші ступені змінних і їх похідних.

До нелінійних САУ належать усі системи, в які входить один або декілька нелінійних елементів. Ми будемо розглядати вузький клас нелінійних САУ, що характеризуються такими особливостями:

- САУ складається з лінійної частини, яка описується лінійним диференціальним рівнянням із постійними коефіцієнтами, і нелінійного елемента (НЕ);
- нелінійний елемент є безінерційним, і його вхідна та вихідна величини пов'язані нелінійними алгебраїчними рівняннями;
- нелінійних елементів може бути декілька, але вони не повинні розділятися лінійними інерційними ланками.

Структурні схеми нелінійних САУ, що відповідають цим вимогам, наведено на рис. 3.1.

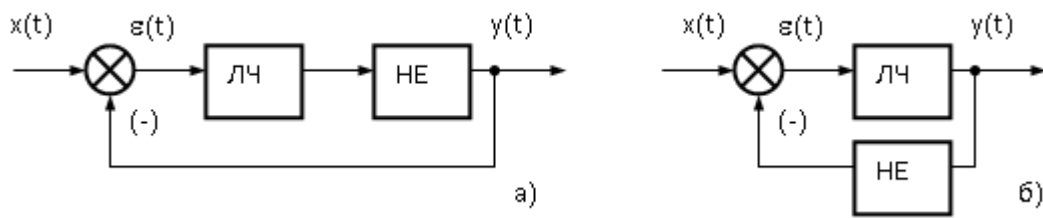


Рис. 3.1. Структурні схеми нелінійних САУ

Таким чином, нелінійність даного класу САУ обумовлена нелінійністю статичної характеристики одного з її елементів.

Найпростішими нелійними елементами є *статичні нелінійності*. У них вихідна величина  $y$  залежить тільки від вхідної величини  $x$ , причому ця залежність однозначна (рис. 3.2 а, в; рис. 3.3 а, б, г).

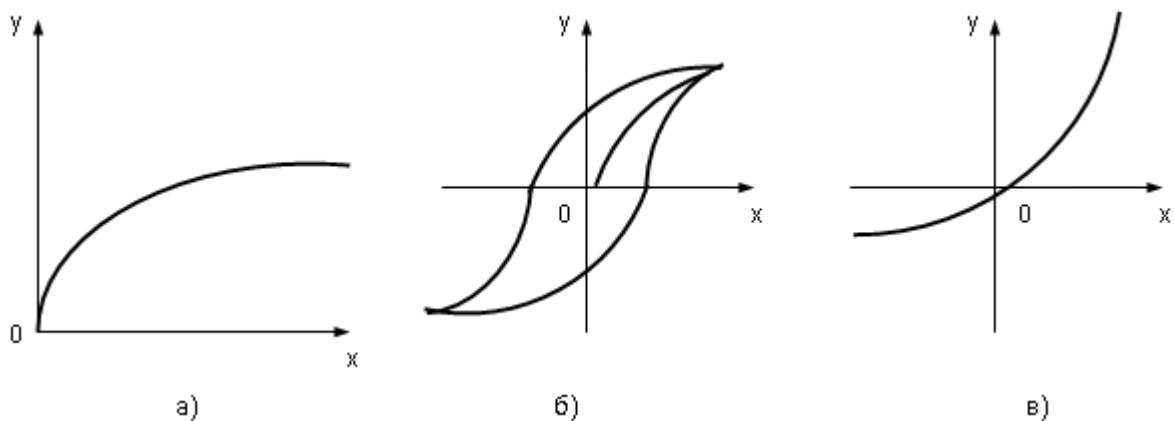


Рис. 3.2. Типові нелінійні характеристики:

а) елемент з насиченням; б) гістерезіс; в) випрямляч

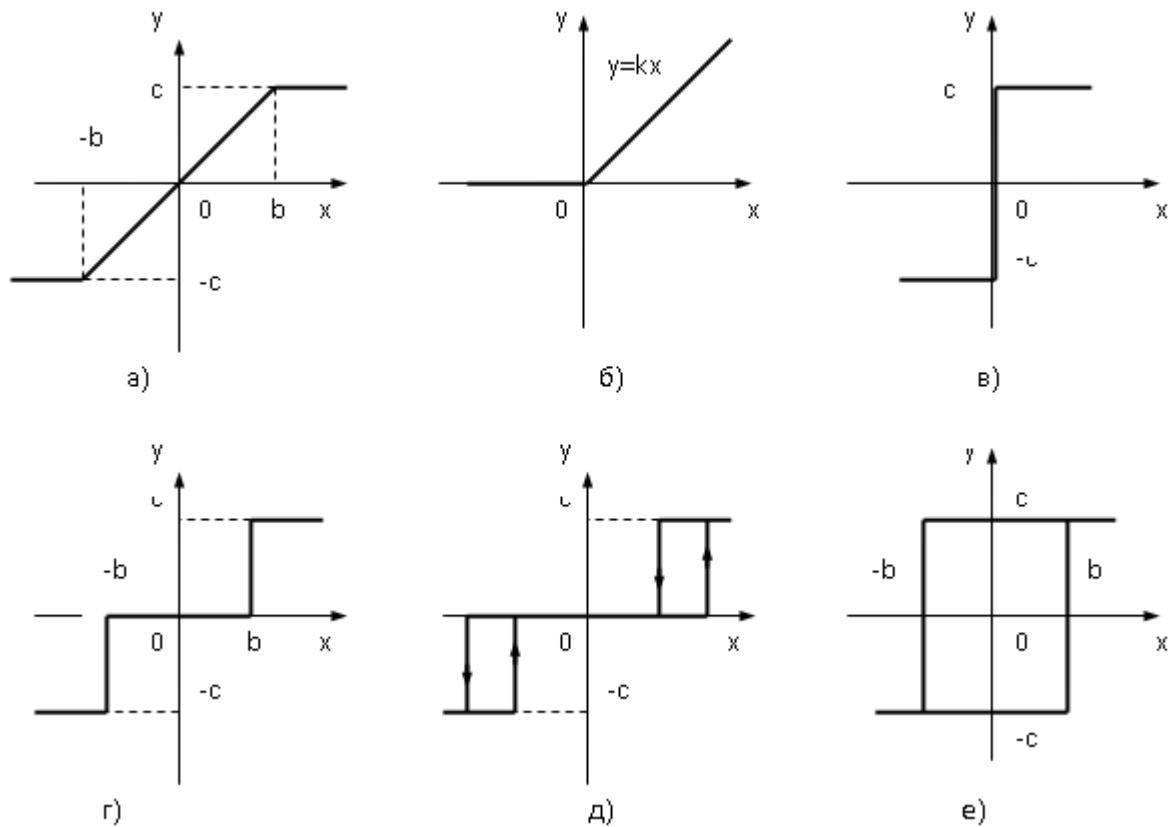


Рис. 3.3. Типові частково-лінійні характеристики:

- а) характеристика з насиченням; б) ідеальний випрямляч; в) ідеальне реле; г) трипозиційне реле із зоною нечутливості; д) трипозиційне реле із зоною нечутливості і гістерезисом; е) двопозиційне реле з гістерезисом

У динамічних нелінійностей вихідна величина  $y$  залежить як від вхідної величини  $x$ , так і від її похідної  $x'$ . Характеристика динамічної нелінійності завжди неоднозначна. Це петльові характеристики (рис. 3.2 б; рис. 3.3 д, е). Більш складною динамічною нелінійністю є елемент із сухим тертям або ідеальне реле, що часто зустрічається в технічних пристроях (рис. 3.3 в).

Досить часто зустрічаються елементи, характеристики яких є частково-лінійними або апроксимуються частково-лінійними графіками (рис. 3.3).

Якщо у систему входить декілька нелінійних елементів, з'єднаних послідовно, паралельно або зустрічно-паралельно, то сумарну характеристику можна побудувати за певними правилами.

*Паралельне з'єднання нелінійних елементів.* При паралельному з'єднанні НЕ сумарну характеристику будують як геометричну суму нелінійних характеристик окремих елементів (рис. 3.4).

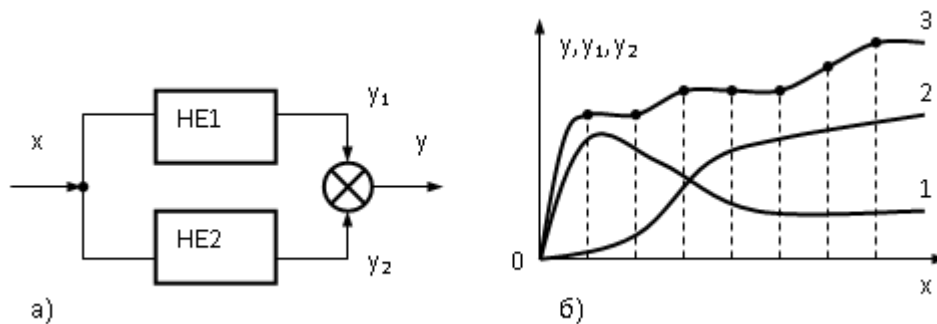


Рис. 3.4. а) Структурна схема паралельного з'єднання нелінійних елементів;  
б) нелінійні характеристики елементів (1 і 2) і сумарна характеристика (3)

*Послідовне з'єднання двох нелінійних елементів.* При послідовному з'єднанні нелінійних елементів вихідна величина одного НЕ є входною для дальшого НЕ (рис. 7.5 а). Тому під час побудови сумарної нелінійної характеристики систему координат другої характеристики повертають на  $90^\circ$ , сполучаючи вісі  $X_{1\text{вих}}$  і  $X_{2\text{вх}}$ .

У першій чверті будують характеристику НЕ1, в другій – НЕ2, в третій проводять бісектрису, за допомогою якої у четвертій чверті отримують сумарну нелінійну характеристику (рис. 7.5 б).

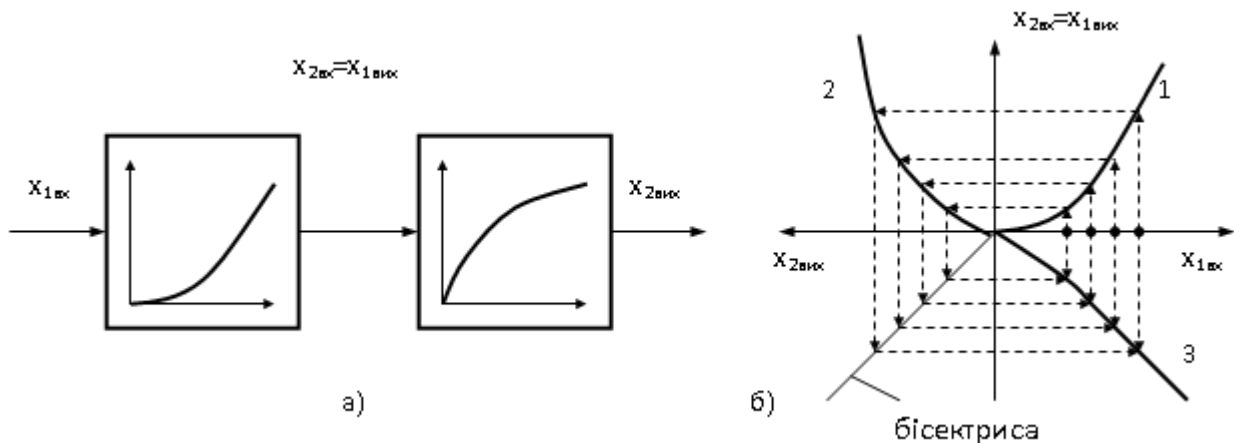


Рис. 3.5. а) Структурна схема послідовного з'єднання нелінійних елементів;  
б) побудова сумарної (3) нелінійної характеристики при послідовному з'єднанні НЕ

У керуючих пристроях автоматичних систем поряд з релейними елементами використовуються так звані *особливі нелінійності*: добуткова ланка, елементи зі змінною структурою, елементи логічного типу.

*Добуткова ланка* використовується в обчислювальних блоках систем для обчислення квадрату сигналу і для визначення модуля сигналу.

Використання керуючих пристроїв зі *змінною структурою* створює великі можливості для покращення якості систем. У таких пристроях до основного контуру системи залежно від визначених умов вмикається або лінійна ланка  $W_1$ , або лінійна ланка  $W_2$ .

Нелінійності *логічного типу* залежно від комбінацій значень вхідних змінних видають сигнал, що дорівнює +1, -1 або 0.

### ***Властивості й методи дослідження нелінійних систем***

З математичної точки зору найбільш суттєвою відмінністю лінійних систем від нелінійних є те, що до останніх *не застосовується принцип суперпозиції*: реакція нелінійної системи на декілька впливів не дорівнює сумі реакцій на окремі впливи. Якщо, наприклад, є нелінійна квадратична залежність  $y=x^2$ , то при  $x = x_1+x_2$  отримуємо  $y=(x_1+x_2)^2$ , що не дорівнює сумі  $y_1=x_1^2$  і  $y_2=x_2^2$ , тобто  $(x_1+x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$ .

До нелінійних систем також *не застосовується принцип комутативності*, тобто у системі не можна міняти місцями між собою нелінійні елементи, а також нелінійні та лінійні елементи.

Для дослідження нелінійних систем *не можна застосовувати перетворення Лапласа і Фур'є* і отримані на їх основі передавальні функції, бо ці перетворення є лінійними.

Особливістю нелінійних систем є можливість виникнення у них стійких коливань певної амплітуди і частоти – *автоколивань*.

*Стійкість* нелінійних систем визначається не тільки структурою і параметрами САУ (як у лінійних системах), але *залежить і від початкових відхилень* відносно стану рівноваги.

Усі ці особливості нелінійних САУ обумовили необхідність розробки ряду методів для їх дослідження, у результаті якого мають бути розв'язані такі основні задачі:

- аналіз впливу нелінійностей, притаманних реальним елементам, на процеси у лінеаризованих системах;
- аналіз стійкості суттєво нелінійних систем, виявлення автоколивань і визначення їх амплітуди і частоти, визначення точності системи та її реакції на зовнішні впливи;
- корекція САУ за допомогою нелінійних коректувальних пристроїв і синтез суттєво нелінійних систем, що мають задані динамічні характеристики.

До методів дослідження нелінійних систем, які отримали практичне застосування, належать:

*Частотні методи.* Вони являють собою розповсюдження частотних методів на нелінійні системи. Це частотний метод В.М. Попова дослідження стійкості й метод гармонічної лінеаризації Л.С. Гольдфарба та Е.П. Попова.

*Метод фазової площини.* Цей метод ґрунтується на зображенні руху системи на фазовій площині за допомогою фазових траєкторій. Він дозволяє порівняно просто досліджувати динаміку нелінійних систем другого порядку.

*Метод припасовування.* Метод полягає у тому, що нелінійна характеристика замінюється декількома лінійними ділянками. Розв'язки, що відповідають цим ділянкам, зшиваються. Метод вирізняється складністю обчислень, особливо при високих степенях рівнянь.

*Графоаналітичні методи.* Серед них найбільш розповсюдженим є метод Д.А.Башкірова побудови перехідних процесів. Ґрунтується на розкладі складного диференціального рівняння на елементарні рівняння, для яких запропонований простий графічний спосіб інтегрування. Метод може бути застосований для систем будь-якого порядку.

*Чисельні методи.* Зводяться до чисельного розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь.

*Метод малого параметра або метод еквівалентної лінеаризації.* Метод застосовують для аналізу нелінійних САУ, до рівнянь яких входить деякий малий параметр  $\mu$  так, що при нульовому значенні  $\mu$  нелінійні рівняння вироджуються у лінійні.

*Метод моделювання* на електронних моделюючих установках, що дозволяють підвищити точність і швидкість дослідження нелінійних систем. Моделювання є найбільш ефективним, коли через складність системи інші методи не можуть бути використаними.

### ***Порядок виконання роботи***

1. Виконати апроксимацію графічно заданої викладачем нелінійної функції  $y = f(x)$ . Необхідно підготувати таблицю координат вузлових точок апроксимації для типового нелінійного блока Simulink, що реалізує однозначну нелінійну статичну характеристику довільного вигляду шляхом апроксимації кусково-ламаною функціональною залежністю (рис. 3.1).

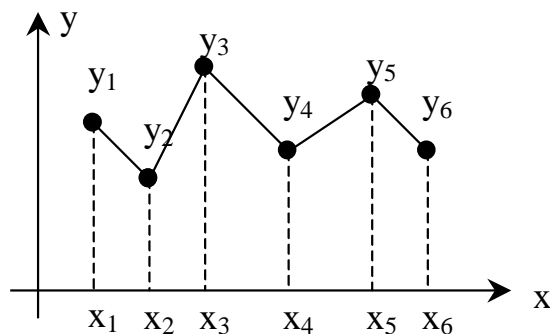


Рис. 3.1. Апроксимація нелінійних функцій

Для роботи блока *Simulink/Lookup Tables/Lookup Table* необхідно задати координати точок зламу  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$ , кількість точок зламу  $N$  студент визначає самостійно ( $N < 21$ ).

2. Сформувати схему для моделювання апроксимованої нелінійної функції  $y^* = f(x)$  у Simulink на зазначеному інтервалі зміни аргументу  $x_{\min} \dots x_{\max}$  та дослідити систему в режимі "Моделювання" при  $x_{\min} = 0$ ,  $x_{\max} = 25$ ,  $\Delta x = 0,01$ .

3. Сформувати блок-схему статичної нелінійної системи, що реалізує нелінійну функцію  $y^* = f(x)$  з обмеженнями  $y = y_{\lim} = \text{const}$  при  $Y \geq Y_{\lim}$ , на основі використання типової нелінійної статичної характеристики типу

"насичення". Відповідний блок знаходиться в бібліотеці типових блоків *Simulink/Discontinuities/Saturation*.

Блок "*Saturation*". Для роботи блока необхідно задати нижню  $x_{\min}$  і верхню  $x_{\max}$  границі вхідного параметра  $x$  (рис. 3.2).

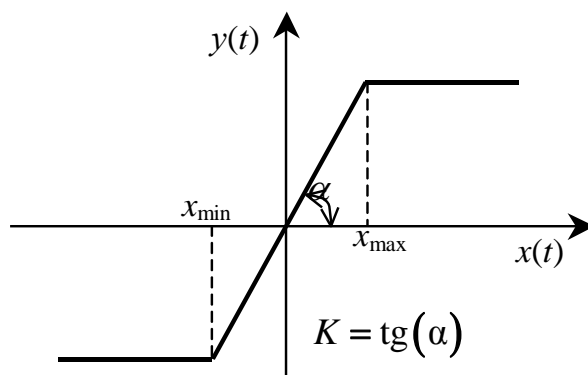


Рис. 3.2. Статична характеристика блока "*Saturation*"

4. Синтезувати в Simulink систему зі змінною структурою, яка трансформує нелінійну функцію  $Y = f(X)$  при  $X \geq X_0$  в постійну функцію  $Y = Y_c = \text{const}$ . При цьому рекомендується використовувати наступні логічні та нелінійні блоки Simulink:

*Simulink/Discontinuities/Relay*. Блок реалізує нелінійну статичну характеристику типу "двопозиційне реле".

Для роботи блока необхідно задати параметри нелінійності  $x_1$  і  $x_2$  та початковий стан релейного елемента  $Y_0$  (рис. 3.3).

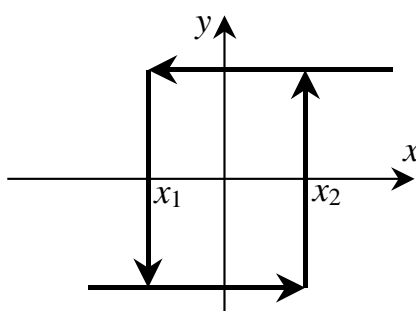


Рис. 3.3. Статична характеристика двопозиційного реле



Для відображення статичної характеристики блоку *Relay* в *Simulink* використовується модельна схема, що складається з генератору синусоїдального сигналу *Simulink/Sources/Sine Wave*, блоку *Simulink/Discontinuities/Relay*, блоку побудови графіків *Simulink/Sources/XY Graph* рис. 3.4.

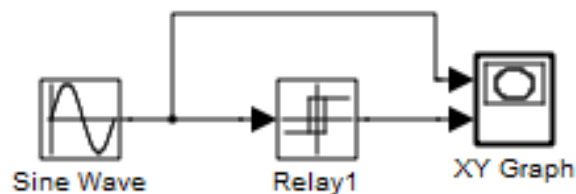


Рис. 3.4. Модельна схема для побудови статичної характеристики блоку *Relay*

*Simulink/Signal Routing/Switch*. Блок реалізує функцію керованого ключа за наступним алгоритмом:

$$\text{ЯКЩО } x_2(t) > k, \text{ ТО } y(t) = x_1(t) \text{ ІНАКШЕ } y(t) = x_3(t),$$

де  $y(t)$  – вихідний сигнал;  $x_1(t)$ ,  $x_3(t)$  – вхідні інформаційні сигнали;  $x_2(t)$  – вхідний керуючий сигнал.

*Simulink/Math Operations/Logical Operator*. Блок реалізує ряд логічних функцій, серед яких:

*AND* ("Логічне І"). Функція реалізує наступний алгоритм:

$$\text{ЯКЩО } x_1(t) \geq 0 \text{ І } x_2(t) \geq 0, \text{ ТО } y(t) = 1, \text{ ІНАКШЕ } y(t) = 0,$$

*OR* ("Логічне АБО"). Функція реалізує наступний алгоритм:

$$\text{ЯКЩО } x_1(t) \geq 0 \text{ АБО } x_2(t) \geq 0, \text{ ТО } y(t) = 1, \text{ ІНАКШЕ } y(t) = 0,$$

*NOT (Логічне "НІ").* Функція реалізує наступний алгоритм:

**ЯКЩО**  $x_1(t) > 0$ , **ТО**  $y(t) = 0$  **ІНАКШЕ**  $y(t) = 1$ ,

де  $y(t)$  – вихідний сигнал;  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  – вхідні сигнали.

5. Синтезувати схему, яка моделює нелінійний сигнал з завадою  $\eta$  у вигляді функції

$$Y_{\eta} = f(X) + \eta,$$

де  $\eta$  – випадковий сигнал з рівномірним або нормальним законом розподілу (закон розподілу задається викладачем), та визначає її мінімум  $Y_{\min}$  і максимум  $Y_{\max}$  у діапазоні зміни аргументу  $X$  ( $X_{\min} \dots X_{\max}$ ).

При цьому рекомендується використовувати наступні блоки Simulink:

"Білий шум" *Simulink/Sources/Band-Limited White Noise*. Блок генерує псевдовипадкову послідовність дійсних чисел, що рівномірно розподілені в діапазоні від  $Y_{\min}$  до  $Y_{\max}$ . Для роботи блока необхідно задати величину потужності шуму (*Noise Power*), шаг симуляції (*Sample Time*) та число, необхідне для ініціалізації генератора випадкових чисел (*Seed*).

"Нормальний шум" *Simulink/Sources/Random Number*. Блок генерує псевдовипадкову послідовність нормально розподілених дійсних чисел. Для роботи блока необхідно задати математичне сподівання (*Variance*)  $m_0 = 0$  і дисперсію (*Mean*)  $D = 1$  нормального закону розподілу.

"Запам'ятовування мінімуму/максимуму" *Simulink/ Math Operations/ MinMax Running Resettable*. Блок запам'ятовує та видає мінімальне або максимальне значення вхідного сигналу. В блоці реалізовано програмне скидання поточного значення за допомогою подачі ненульової константи на вхід  $R$  (*Reset*).

6. Дослідити схеми за пп. 3-5 у режимі "Моделювання" та проаналізувати отримані результати при лінійному законі зміни аргументу  $X$  на інтервалі  $X_{\min} \dots X_{\max}$ , використовуючи генераторний блок "Стрибок швидкості" *Simulink/Sources/Ramp*, що формує лінійно наростаючий сигнал, для наступних параметрів моделювання:  $T_{\min} = 0$ ;  $T_{\max} = 10$ ;  $\Delta T = 0,01$ . При цьому значення параметру *Slope* блоку *Simulink/Sources/Ramp* встановити рівним 2.5.

7. Побудувати за допомогою системи *Simulink* графіки нелінійних функцій, що формуються на виходах схем за пп. 2-5.

8. За допомогою нелінійного блоку *Simulink/Lookup Tables/Lookup Table*, що реалізує однозначну нелінійну статичну характеристику на основі координат вузлових точок, здійснити кусково-лінійну апроксимацію статичної характеристики, яка подана функцією

$$y(x) = K \arctg(\alpha x),$$

де  $K$  і  $\alpha$  – параметри функції ( $K = 1$ ,  $\alpha = 0,5$ ).

Оцінити інтегральну похибку лінеаризації шляхом обчислення інтеграла  $J_1(y, x)$  квадратів відхилень між розрахованою за точним аналітичним виразом нелінійною функцією  $y(x) = K \arctg(\alpha x)$  та апроксимованою функцією  $y^*(x)$ :

$$J_1(y, x) = \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} [y(x) - y^*(x)]^2 dx = \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} [K \arctg(\alpha x) - y^*(x)]^2 dx,$$

а також оцінити інтегральний показник:

$$\begin{aligned} J_2(y, x) &= \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}} \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} [y(x) - y^*(x)]^2 dx = \\ &= \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}} \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} [K \arctg(\alpha x) - y^*(x)]^2 dx \end{aligned}$$

на всьому діапазоні визначення параметра  $X$  ( $X_{\min} \dots X_{\max}$ ) з використанням типових блоків *Simulink*. Для цього використати блоки *Simulink/Math Operations/Sum*, *Simulink/Math Operations/Math Function* та блок

*Simulink/Continuous/Integrator*, що використовується для обчислення інтегралу вхідного сигналу.

Проаналізувати результати моделювання для різної кількості вузлових точок, що вибираються при лінеаризації заданої нелінійної функції ( $N = 2, 3, 4$ ), при  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 10$ ,  $\Delta X = 0,01$ .

9. Підготувати до захисту звіт, який повинен містити:

а) назву та мету виконання лабораторної роботи, графічно задану викладачем нелінійну функцію  $Y = f(X)$ , табличні дані для апроксимації функції  $Y = f(X)$  за допомогою відповідного типового нелінійного блока Simulink, обґрунтування необхідної кількості вузлових точок для апроксимації;

б) характеристику типових блоків Simulink, які використовуються при синтезі визначених вище систем моделювання;

в) апроксимовану функціональну залежність  $Y^* = f(X)$ , функцію  $Y^* = f(X)$  з урахуванням обмежень, результати моделювання систем із змінною структурою та з використанням генераторів випадкових сигналів і блоків для автоматичного визначення мінімальних та максимальних значень функції  $Y_{\eta} = f(X) + \eta$ ;

г) схемні реалізації моделей в системі Simulink для проведення досліджень згідно з пп. 2-5, 8;

д) результати моделювання в графічному вигляді, їх аналіз.

### ***Контрольні питання***

1. Кусково-лінійна апроксимація нелінійних залежностей.
2. Методи лінеаризації нелінійних статичних характеристик.
3. Методи оцінки точності апроксимації і лінеаризації нелінійних статичних характеристик.
4. Статичні характеристики типових нелінійностей.
5. Типові блоки Simulink для моделювання нелінійностей та здійснення логічних операцій.

6. Основні характеристики типових блоків Simulink для визначення мінімуму та максимуму.

7. Особливості формування моделей зі змінною структурою з використанням бібліотеки типових блоків Simulink.