1주차-2차시

P.7 연습문제 1.1 중 문제 2,3,6,7,8을 푸시오.

2)
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$라 할 때, AB와 BA를 각각 구하여 비교하여라.

Sol)
$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0+2) & (1+0) \\ (0+0) & (3+0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

3)
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$이고 행렬 B는 $ABA = A$를 만족할 때, $A+B$를 구하여라.

Sol)
$ABA = A$가 될려면 AB가 단위행렬 I_2가 되야된다.
$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$일 때 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+c) & (b+d) \\ (2a+3c) & (2b+3d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$a+c=1 \qquad b+d=0$
$2a+3c=0 \qquad 2b+3d=1$

$2a+2c=2 \qquad 2b+2d=0$
$2a+3c=0 \qquad 2b+3d=1$

$-c=2 \qquad -d=-1$

$c=-2 \qquad d=1$
$a=3 \qquad b=-1$

$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$A+B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

6)

정방행렬 중에서 주대각선성분 이외의 모든 성분이 0인 행렬을 대각행렬이라고 한다.
다음과 같은 대각렬이 주어졌을 때 D^n을 구하시오

$$D=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

Sol)

만약 $n=2$이면 $D^2 = D\times D$이다.

$$D\times D=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {a_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {a_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {a_3}^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {a_1}^n & 0 & 0 \\ 0 & {a_2}^n & 0 \\ 0 & 0 & {a_3}^n \end{pmatrix}$$ 이다.

그러므로

$$D^n=\begin{pmatrix} {a_1}^n & 0 & 0 \\ 0 & {a_2}^n & 0 \\ 0 & 0 & {a_3}^n \end{pmatrix}$$ 이다.

7)

다음을 만족하는 행렬 A를 구하여라.

$$\left\{A^T+2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\right\}^T=5\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Sol)

$$(A^T)^T+\left(\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}\right)^T=\begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 5 & 35 \end{bmatrix}$$

$$A+\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 5 & 35 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 5 & 35 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 13 & -15 \\ 9 & 35 \end{bmatrix}$$

8)

행렬 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$에 대하여 $A+A^3=0$임을 확인하여라.

Sol)

$$AA=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=-A$$

$$A+A^3=A+(-A)=0$$