Conclusion

误差

误差类型

- 模型误差
- 观测误差
- 截断误差 ： 算法不可能无限迭代，只能近似到一定程度
- 舍入误差 ： 计算机表示的数位有限

绝对误差

$e(x) = x - x^*$ 近似值和绝对值的差

绝对误差限

$|e(x)| \leq \eta$

有效数字

n 位有效数字 则相对误差限 $\delta \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$

相对误差限为 $\delta \leq \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$ 则有n位有效数字

求近似值

> 不动点迭代

1. 二分法
    1. 零点存在定理/存在唯一
        1. **验证连续性**
        2. 零点存在与否
    2. 终止条件 $|\dfrac{(b-a)}{2^{k+1}}| < \epsilon$ AKA $k > \dfrac{log(b-a) - log\epsilon}{log2} - 1$
2. 不动点迭代
3. 牛顿迭代：一种特殊的不动点迭代法
    1. 验证二阶连续性 单根 $f''(x) \neq 0$ -> 平方收敛
    2. m重根情况 构造$f(x) = (x - x_0)^m g(x)$
    3. $x_{k+1} = x_k - m\dfrac{f(x)}{f'(x_k)}$

使用条件

1. 收敛条件 ： $|\varphi'(x)| \le 1$
2. 收敛值
3. 停机
4. 初值

收敛定理

全局收敛

函数 $\varphi(x)$满足

1. $\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \in [a,b]$
2. $\exists$常数 L, 使得$\forall x \in [a,b]$, 有$|\varphi'(x)| \le L < 1$

局部收敛

x^*是方程$x = \varphi(x)$的根 $\varphi'(x)$ 在x^*附近连续且$|\varphi'(x)| < 1$

则迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$在x^*附近具有局部收敛性

收敛速度

$$|\varphi'(x)| < |\varphi'(y)|$$

$\varphi(x)$ 的收敛速度更快

收敛率

> 若存在常数 $p \ge 1\ \ c \ne 0$ $((p > 1, c \ne 0)\ or\ (p = 1, c < 1))$使得
>
> $$lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c$$
>
> 称为 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是 p 阶收敛的

p=1 c=1 次线性收敛

设 $\varphi(x)$ 在 $x = \varphi(x)$ 的根 x^* 附近有连续 p 阶导数 则对于迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

1. $\varphi'(x^*) \ne 0$ 线性收敛
2. $\varphi'(x^*) = 0\ \ \varphi''(x^*) \ne 0$ 平方收敛
3. $\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \cdots = \varphi^{p-1}(x^*) = 0\ \varphi^p(x^*) \ne 0$ p阶收敛

p越大 收敛越快

p阶导数值越小 收敛越快

二分法

> 二分法事前估计
>
> $$|x - x^*| \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$$

不动点迭代

> 局部收敛定理:
>
> x^* 是方程 $s = \varphi(x)$ 的根
>
> $s = \varphi'(x)$ 在 x^* 附近连续且 $|\varphi'(x^*)| < 1$
>
> 则迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 在 x^* 附近具有**局部收敛性**

牛顿迭代(切线法)

> **初值敏感**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

定义域单根 二阶导不为0 则局部收敛

> 牛顿迭代法的二阶收敛率为 $\frac{1}{2}|f''(x^*)/f'(x^*)|$

简化牛顿法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

只计算初值导数

弦截法

取 $f'(x_k) \approx \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \times (x_k - x_{k-1})$$

割线代替切线

牛顿下山法

扩大初值选取范围

$$x_{k+1} = x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \lambda \in (0, 1]$$

λ 为下山因子

选取合适的下山因子 满足 $|f(x_k)| < |f(x_{k-1})|$

从 2^{-n} 数列中选取条件的

数值解法

范数

范数性质

1. 非负性
2. 齐次性
3. 满足三角不等式

> R^n中不同范数等价

向量范数

> 依坐标收敛和依向量收敛等价

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$$

矩阵范数

相容范数定义

相容性 $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

> 算子范数的定义: $\forall A \in R^{n\times n}$ $\|x\|$ 是 R^n 中的向量范数
>
> $$\|A\|_p = \sup_{x\in R^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| && \text{最大列和} \\ \|A\|_2 &= \lambda_1 && A^T \cdot A\text{最大特征值} \\ \|A\|_\infty &= \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| && \text{最大行和} \end{aligned}$$

谱半径 $\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$

> $\rho(A) \le \|A\|$成立

$\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} A^k = 0$

Gauss消去法

消元+回代

列主元消去：每次消元后 把绝对值最大元素所在的行换上来

LU分解

> 如果所有顺序主子式均不为零 则存在唯一分解式 $A=L\cdot D\cdot R$ 单位下三角X非奇异对角X单位上三角

Doolittle分解	Crout分解	Cholesky分解
$A=L\cdot(DR)=L\cdot U$	$A=(LD)\cdot R=\tilde{L}\cdot\tilde{U}$	$A=L\cdot L^T$ (A对称 正定)

> 如果 $A=A^T$ 则 $A=LDL^T$

计算过程

```
while n+1<len(A):
    A[n+1:,n]/=A[n,n+1:]
    A[n+1:,n+1:]-=A[n+1:,n]*A[n+1:,n+1:]
```

追赶法

求解过程稳定 只需要5n-4次乘法

基于特定格式对于LU分解的结论

改进平方根

> 优化掉了开方

$A=LDL^T$

$$d_r=(a_{rr}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}^2\cdot d_k)/l_{rr}$$
$$l_{jr}=(a_{rj}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}\cdot d_k\cdot l_{jk})/d_r$$

迭代法

Jacobi

$$A=D+N$$
$$Ax=b$$
$$(D+N)x=b$$
$$Dx=-Nx+b$$
$$x=-D^{-1}Nx+D^{-1}b$$
$$B_{Jacobi}=-D^{-1}N$$
$$g_{Jacobi}=D^{-1}b$$

Gauss-Seidel

Jacobi迭代的基础上 每次迭代使用最新的值

$$A = D + L + U$$
$$Dx^{k+1} = -Lx^{k+1} - Ux^k + b$$
$$x^{k+1} = -(D+L)^{-1}Ux^k + (D+L)^{-1}b$$

收敛性

判断条件 依次

1. A严格占优
2. $\|B\| < 1$
3. $\rho(B) < 1$

> (基本定理) $x = Bx + g$ 收敛 等价于 $\rho(B) < 1$

都不满足 说明**不确定是否收敛**

插值

多项式插值

$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

反插值法

> 构造反函数进行插值

Lagrange 插值法

构造插值基函数 $l_i(x_j) = \delta_{ij} = (i == j)$

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

$$l_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}$$

线性插值

$L_1(x) = y_0l_0(x) + y_1l_1(x) = y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$

抛物线插值

$L_2(x) = y_0l_0(x) + y_1l_1(x) + y_2l_2(x)$

Newton 插值法

> 减少增加数据时的计算开销

牛顿插值基函数组

1, $(x-x_0),\cdots,\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$

差商

- $f[x_i]=f_i\ \ y=f(x)|_{x=x_i}$的零阶差商
- $f[x_i.x_{i+1}]=\frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}\ y=f(x)$ 在x_i,x_{i+1}处一阶差商
- $f[x_i.x_{i+1},x_{i+2}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}$ 二阶差商

> $$N_n(x)=N_{n-1}+f[x_0,x_1,\cdots,x_n]\prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)$$

插值余项

$R_n(x)=f(x)-p_n(x)$ 为插值多项式的插值余项/误差

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{n+1}(\zeta)}{(n+1)!}\omega(x)\ \zeta\in[a,b]$$

线性插值多项式余项	抛物线插值多项式余项
$R_1(x)=\frac{f''(\zeta)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$	$R_2(x)=\frac{f'''(\zeta)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

Hermite插值

两个互异点通过微商值构造不超过3次的插值多项式

基函数	x_0	x_1	x_0	x_1
$h_0(x)$	1			
$h_1(x)$		1		
$H_0(x)$			1	
$H_1(x)$				1

$$H(x)=y_0h_0(x)+y_1h_1(x)+m_0H_0(x)+m_1H_1(x)$$

根据函数值和微商值 可假设 $h_0(x)=(a+bx)(x-x_1)^2$

$$h_0(x)=(1+2l_1(x))l_0^2(x)$$
$$h_1(x)=(1+2l_0(x))l_1^2(x)$$

根据函数值和微商值 可假设 $H_0(x)=a(x-x_0)(x-x_1)^2$

$$H_0(x)=(x-x_0)l_0^2(x)$$
$$H_1(x)=(x-x_1)l_1^2(x)$$

最小二乘法

拟合评价准则

- 残差最大绝对值 $\max_{1\le i\le n}|e_i|$ 最小
- 残差绝对值之和$\sum_{i=1}^{n}|e_i|$最小
- 残差平方和 $\sum_{i=1}^{n}e_i^2$ 最小(最小二乘法)

> $A^TAx=A^Tb$ 为 $Ax=b$ 的法方程组或正则方程组(normal equation)

数据线性化

原函数	线性化	数据变动
$y=c_1e^{c_2t}$	$Y=\ln c_1+c_2t$	$(t_i,y_i)\Rightarrow(t_i,\ln y_i)$
$y=c_1t^{c_2}$	$Y=\ln c_1+c_2\ln t$	$(t_i,y_i)\Rightarrow(\ln t_i,\ln y_i)$

数值积分

插值性求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}\approx\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\cdot\int_a^b l_k(x)\mathrm{dx}$$

误差 $-\frac{h^3}{12}f''(c)$

等距节点插值

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}\approx(b-a)\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\cdot c_k^{(n)}$$

Newton-Cotes公式 $c_k^{(n)}$ 为Newton-Cotes系数

梯形公式

n=1 $c_0^{(1)}=c_1^{(1)}=\frac{1}{2}$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}\approx T=(b-a)[\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)]$$

Simpson公式

n=2 $c_0^{(2)}=c_2^{(2)}=\frac{1}{6}$ $c_1^{(2)}=\frac{4}{6}$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}\approx S=(b-a)[\frac{1}{6}f(a)+\frac{4}{6}f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{6}f(b)]$$

代数精度

$f(x) = x^i$

满足 $\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot A_k$ 的最大 i 为代数精度次数

截断误差

> 方法与 **插值余项** 相同

$$R = \begin{cases} -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), & \text{梯形公式余项} R_T \\ -\frac{1}{2880}(b-a)^5 f^{(4)}(\eta), & \text{Simpson余项} R_S \end{cases}$$

复合求积

梯形公式

区间n等分

$$T_n = \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)]$$

$$R_{T_n} = -\frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\eta)$$

Simpson

区间n等分后会取2n个值

即如果只有8个值 Simpson公式只能4等分 梯形公式可以8等分

$$S_n = \frac{h}{6}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2}) + f(b)]$$

$$R_{S_n} - \frac{b-a}{2880} \cdot h^4 \cdot f^{(4)}(\eta)$$