具有重复路径的有向 TSP 问题

中南大学 土木建筑学院　　潘庆祥　徐自然

摘 要：本文通过建立具有重复路径的 TSP 模型和有向图的 TSP 模型，解决了具有重复路径的有向 TSP 问题。最后，利用一个算例来验证了算法的正确性。

关键词：重复路径 有向 TSP 问题 算法设计

1. 引言

旅行商问题（ TSP) 是数学领域中著名问题之一。假设有一个旅行商人要拜访 N 个城市，他必须选择所要走的路径，路径的限制是每个城市只能拜访一次，而且最后要回到原来出发的城市。路径的选择目标是求得的路径路程为所有路径之中的最小值。即 TSP 问题就是历经所有城市求最短路径问题。然而，TSP 问题和现实生活中的情况大有不同。实际情况中，一般要求拜访 N 个城市，在允许同一城市拜访多次的情况下，求出其最短路径即可。另外，现实生活中，城市间的距离是有向的。为此，解决具有重复路径的有向 TSP 问题有更加重要的实际意义。

2. 具有重复路径的 TSP 问题

为了解决具有重复路径的有向 TSP 问题，可以将问题分解为重复路径的 TSP 问题和有向图的 TSP 问题。首先解决重复路径的 TSP 问题，在此基础上再解决有向图的 TSP 问题。为解决重复路径的 TSP 问题引入文献 [1] 中的定理。

定理：连通图 G 中， 在允许走回头路的前提下， 要使 TSP 回路的长度最短， 则旅行商从顶点 v1 到 v2 时， 所经过的通路必是 v1 与 v2 间的最短路径。

证明：假设顶点 v1 与 v2 间存在多条通路 (包括那些经过其他顶点的间接路径)，若旅行商在从 v1 到 v2 时不经过 v1 与 v2 间的最短路径 Pmin ，而是经过路径 P （P ≥ Pmin)，显然，使用 Pmin 代替通路 P ，得到的新旅行路线必然是图中两个顶点间最短路径组成。

由上述的定理，可以通过求得任意两点间的最短距离，重新组成一个任意两点间的最短距离矩阵来解决重复路径的 TSP 问题。由此，具有重复路径的有向 TSP 问题即可转化为有向图的 TSP 问题。

3. 有向图的 TSP 问题

上面讨论了在允许走回头路的条件下， 旅行商访问所有城市的问题。下面建立了有向图的 TSP 问题的模型。

设城市的个数为 n ， d_{ij} 是两个城市 i 与 j 之间的距离， x_{ij} =0 或 1（1 表示走过城市 i 到城市 j 的路，0 表示没有选择走这条路）。则有

$$\min \sum_{i \neq j} d_{ij} x_{ij}$$

s.t. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$ （每个点只有一条边出去）

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n,$ （每个点只有一条边进去）

$\sum_{i,j \in s} x_{ij} \le |s| - 1, \quad 2 \le |s| \le n-1, \quad s \subset \{1,2,\ldots,n\}$ （除起点和终点外，各边不构成圈）

4. 算例

某运输公司为 10 个客户配送货物，假定提货点就在客户 1 所在的位置，从第 i 个客户到第 j 个客户的路线距离（单位公里）用下面矩阵中的 (i, j) $(i, j = 1, \cdots, 10)$ 位置上的数表示（其中 ∞ 表示两个客户之间无直接的路线到达）。

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc}
0 & 50 & \infty & 40 & 25 & \infty & 30 & \infty & 50 & \infty \\
50 & 0 & 30 & \infty & 35 & 50 & \infty & 60 & \infty & \infty \\
\infty & 30 & 0 & 15 & \infty & 30 & 50 & 25 & \infty & 60 \\
40 & \infty & 15 & 0 & 45 & 30 & 55 & 20 & 40 & 65 \\
25 & 15 & \infty & 45 & 0 & 60 & 10 & 30 & \infty & 55 \\
\infty & 50 & 30 & 30 & 60 & 0 & 25 & 55 & 35 & \infty \\
30 & \infty & 50 & \infty & 10 & 25 & 0 & 30 & 45 & 60 \\
\infty & 60 & 25 & 20 & 30 & 55 & 30 & 0 & 10 & \infty \\
20 & \infty & \infty & 40 & \infty & 15 & 25 & 45 & 0 & 20 \\
35 & 20 & 10 & 45 & 20 & \infty & 60 & \infty & 30 & 0
\end{array}\right]
\end{array}$$

经过转换后，得到最短距离矩阵如下 :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc}
0 & 40 & 55 & 40 & 25 & 55 & 30 & 55 & 50 & 70 \\
50 & 0 & 30 & 45 & 35 & 50 & 45 & 55 & 65 & 85 \\
55 & 30 & 0 & 15 & 55 & 30 & 50 & 25 & 35 & 55 \\
40 & 45 & 15 & 0 & 45 & 30 & 50 & 20 & 30 & 50 \\
25 & 15 & 45 & 45 & 0 & 35 & 10 & 30 & 40 & 55 \\
55 & 50 & 30 & 30 & 35 & 0 & 25 & 50 & 35 & 55 \\
30 & 25 & 50 & 50 & 10 & 25 & 0 & 30 & 40 & 60 \\
30 & 45 & 25 & 20 & 30 & 25 & 30 & 0 & 10 & 30 \\
20 & 40 & 30 & 40 & 35 & 15 & 25 & 45 & 0 & 20 \\
35 & 20 & 10 & 25 & 20 & 40 & 30 & 35 & 30 & 0
\end{array}\right]
\end{array}$$

接下去再利用有向图的 TSP 问题的模型对最短距离矩阵进行计算。编程求解得最优解为 225，具体的行进路线为：

1—5—7—6—3—4—8—9—10—2—1

5. 结论

通过分别建立具有重复路径的 TSP 模型和有向图的 TSP 模型，解决了具有重复路径的有向 TSP 问题。由于有重复路径的有向 TSP 问题考虑了有向和允许走回头路这两点，因此该模型具有重要的实际意义，可以广泛应用于货物运输，邮件分发等实际问题。该问题的算法比较复杂，可以采用遗传算法、模拟退火算法等智能算法解决。

参考文献：

[1] 李鸿培，王新梅． 具有局部重复路径的多路旅行商问题的研究 [J]． 西安公路交通大学学报， 20(2)， 2000:84-89.

[2] 谢金星，薛毅． 优化建模与 LINDO/LINGO 软件 [M]. 北京： 清华大学出版社，2005.