Problem 1:
Algorytm genetyczny dla wyznaczania maksymalnego zbioru niezależnego

1 Definicje

Zbiorem niezależnym w grafie $G = (V, E)$ nazywamy taki zbiór węzłów $V' \subset V$, że żadne dwa należące do niego węzły nie są połączone krawędzią, tzn.

$$(\forall u, v \in V)[(u, v \in V') \to (u, v) \notin E]$$

Zbiór V' o maksymalnej mocy to *maksymalny* zbiór niezależny.

Wiadomo, że jeżeli V' jest maksymalnym zbiorem niezależnym w G, to zbiór $V \backslash V'$ wyznacza maksymalna klikę w grafie $G^c = (V, E^c)$, nazywanym dopełnieniem grafu G. Inaczej E^c zawiera te wszystkie krawędzie, które nie należą do E, tzn.

$$E^c = \{(u, v) \colon (u, v \in V) \wedge (u, v) \notin E\}$$

Chcemy znaleźć maksymalny zbiór niezależny w danym grafie G.

2 Reprezentacja

Niech chromosom (potencjalne rozwiązanie) będzie n-wymiarowym wektorem $\mathbf{x}$ (n jest równe liczbie węzłów, $n = |V|$), przy czym jego i-ty element x_i przyjmuje wartość 0 gdy i-ty węzeł nie należy do V', a $x_i = 1$ gdy $v_i \in V'$.

Niech $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ będzie macierzą incydencji grafu G, tzn.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } (v_i, v_j) \notin E \\ 1 & \text{gdy } (v_i, v_j) \in E \end{cases}$$

Jakość $f(\mathbf{x})$ chromosomu $\mathbf{x}$ obliczamy stosując formułę

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n \sum_{i>j} a_{ij} x_i x_j$$

Drugi człon tej sumy to kara za naruszenie warunków zadania.

3 Pytania

Zaimplementować algorytm genetyczny wyznaczający dla danego grafu G maksymalny zbiór niezależny. Zastosować:

(a) selekcje turniejową;

(b) mutacje punktową z prawdopodobieństwem $p_m = 1/n$

(c) krzyżowanie 1-punktowe z prawdopodobieństwem $p_c = 0.6$.

Przyjąć rozmiar populacji $\mu = \lfloor n/4 \rfloor$.

Dla danego problemu G przedstawić ewolucję najlepszego rozwiązania w populacji uśrednioną po 30 powtórzeniach. Wyznaczyć także średnie dostosowanie w populacji (uśrednić je po 30 powtórzeniach). Oprócz średniej podać także odchylenie standardowe.

Pytania dodatkowe:

(a) Porównać wyniki zwiększając rozmiar populacji do $\mu = \lfloor n/2 \rfloor$.
(b) Sprawdzić, czy wyniki ulegną zmianie jeżeli krzyżowanie 1-punktowe zastąpimy 2-punktowym. Co będzie jeżeli w ogóle zrezygnujemy z krzyżowania?
(c) Czy wyniki zmienia się, jeżeli selekcję turniejową zastąpimy selekcją rangową?
(d) Czy można ten, tzn. genetyczny, algorytm usprawnić?
(e) Porównać skuteczność algorytmu genetycznego z innym (znanym) algorytmem wyznaczania maksymalnego zbioru niezależnego.
(f) Zastanowić się nad sensownością rozwiązywania takich zadań (tzn. podać praktyczne zastosowania rozwiązywanego problemu).

UWAGA 1: Program powinien być zaopatrzony w komentarze dotyczące roli ewentualnych klas, używanych w nich poszczególnych metod, oraz przeznaczenia użytych zmiennych. □

UWAGA 2: Można skorzystać z pracy:

Th. Bäck, S. Khuri: An evolutionary heuristic for the maximum independent set problem. In: *Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation*, IEEE Press 1994, 531-535 `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.54.6248`.
Jeżeli ktoś zna inne prace, proszę je wymienić.

Interesujące dane znajdują się na stronie `http://www.nlsde.buaa.edu.cn/~kexu/benchmarks/graph-benchmarks.htm`