从能量的角度讨论两体碰撞问题

王长春

（池州师范专科学校 物理系，安徽 池州 247000）

摘要：从能量角度导出了两体对心碰撞的能量损失公式，重新讨论了恢复系数的物理意义.

关键词：资用能；两体碰撞；恢复系数

中图分类号：O 313.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-0712(2005)09-0018-02

两体碰撞问题是经典力学中很典型、很主要的实际问题，因此对它的多种处理方法的研究是有实际意义的. 本文从能量方面讨论两体碰撞问题，结论简单并富有意义.

1 质点系的动能公式

为了探究这个问题，我们引入资用能的概念. 两体问题的资用能，是指把两体的质心作为参考系，每一个质点相对于参考点的动能之和.

由柯尼希定理知道，质点相对于某参考系 S 的动能 E_k，在数值上等于质点系随质心平动的动能 $E_k^{(C)}=\frac{1}{2}(\sum_i m_i)v_C^2$ 与质点组相对于质心平动参考系 S_C 的动能 $E_{kC}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_{iC}^2$ 之和.

把柯尼希定理应用于两体问题便有：m_1 和 m_2 为光滑水平面上可以看作质点的两个小球，设 v_{10} 和 v_{20} 分别表示 m_1 和 m_2 的速度，且在同一直线上，相对速度为 v_{r0}. 于是两体相对 S 系的动能是

$$E_k=E_k^{(C)}+E_{kC}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_C^2+\frac{1}{2}mv_{r0}^2 \quad (1)$$

其中 $m=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$，$v_C$ 为质心的速度. $E_k^{(C)}$ 为质心平动动能，E_{kC} 为相对质心的动能，即资用能. 资用能 E_{kC} 与参考系选择无关，只与相对速度及约化质量有关，是动能中可利用部分. 在碰撞过程中，常不计外力，因而质心的速度 v_C 不变，非弹性碰撞损失的动能将由资用能 E_{kC} 付出，对于完全非弹性碰撞，全部 E_{kC} 都将被转换掉.

2 能量损失公式的推导及应用

设光滑水平面上的两球可看作质点，质量分别为 m_1 和 m_2，碰前速度分别为 v_{10}、v_{20}，且在同一直线上. 碰后的速度分别为 v_1 和 v_2，由于在水平面上合外力为零，故由动量守恒得

$$m_1 v_{10}+m_2 v_{20}=m_1 v_1+m_2 v_2 \quad (2)$$

由牛顿的碰撞定律知，对心碰撞的两球之分离速度 v_r 与接近速度 v_{r0} 成正比，比例系数即为恢复系数 e：

$$e=\frac{v_r}{v_{r0}}=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}} \quad (3)$$

由式(2)、(3)解得：

$$v_1=v_{10}-\frac{m_2}{m_1+m_2}(1+e)v_{r0} \quad (4)$$

$$v_2=v_{20}+\frac{m_1}{m_1+m_2}(1+e)v_{r0} \quad (5)$$

用 ΔE_k 表示能量的损失，则

$$\Delta E_k=\left(\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2 v_{20}^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2+\frac{1}{2}m_2 v_2^2\right) \quad (6)$$

把式(4)、(5)代入式(6)可得

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(1-e^2)v_{r0}^2$$

即

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}mv_{r0}^2(1-e^2) \quad (7)$$

此式定量地说明了不同碰撞过程能量损失的多少，同时也说明了非弹性碰撞损失的动能是由资用能付出的.

我们对式(4)、(5)和式(7)两个结果进行以下讨论.

1）当 $\Delta E_k=0$，即 $e=1$ 时，动能不变，为完全弹性碰撞.

若 $m_1=m_2$，则 $v_1=v_{20}$，$v_2=v_{10}$，速度交换.

收稿日期：2004－12－13

作者简介：王长春(1962—)，男，安徽枞阳人，池州师范专科学校物理系副教授，主要从事大学物理教学和研究.

若 $m_1 \gg m_2$，则 $v_1 \approx v_{10}$，且 $v_2 = 2v_{10} - v_{20}$，当 $v_{20}=0$ 时，则有 $v_2 = 2v_{10}$.

若 $m_1 \ll m_2$，则 $v_1 = 2v_{20} - v_{10}$，且 $v_2 \approx v_{20}$，当 $v_{20}=0$ 时，则有 $v_1 = -v_{10}$，即小球原速弹回.

2）当 $\Delta E_k > 0$ 时，动能减少，为非弹性碰撞.

若 $e=0$，为完全非弹性碰撞，能量损失最大.此时 $v_1 = v_2 = v_C = \dfrac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$，因此不可能再有相对于质心的动能，全部资用能转化为非机械能.

若 $0<e<1$，由式(7)知损失的能量为 $\Delta E_k = \dfrac{1}{2} m v_{r0}^2 (1-e^2)$，此式与式(1)比较便知，损失的能量是资用能的一部分，具体量多少由 $(1-e^2)$ 决定.因而，牛顿碰撞定律本质上反映了碰撞过程前后资用能的比例关系.碰撞中的动能损失式(7)可改写成资用能的减少，即

$$
\begin{aligned}
\Delta E_k &= \frac{1}{2} m_1 (v_{10} - v_C)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{20} - v_C)^2 - \\
&\quad \frac{1}{2} m_1 (v_1 - v_C)^2 - \frac{1}{2} m_2 (v_2 - v_C)^2 = \\
&\quad \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2 (1 - e^2) = \\
&\quad \frac{1}{2} m v_{r0}^2 (1 - e^2) = E_{kC0} - E_{kC}
\end{aligned}
$$

当 $\Delta E_k < 0$ 时，动能增加，来自于其他形式的能量转化，本文不作讨论.

3　恢复系数的物理意义

在两球对心碰撞中，碰撞可以分为两个阶段：第一阶段是从两球开始接触的瞬时至两球具有相同的速度，这一阶段两球相互挤压，形变不断加大直到最大，称为压缩阶段；第二阶段是从两球最大形变开始至两球刚刚分离，这一阶段两球形变逐渐恢复，形变不断减小直至两球完全分开，称为恢复阶段.从能量的角度来看，在压缩阶段中两小球形变越来越大，其动能逐步转化为形变势能，表现为系统的动能损失.设系统动能损失为 ΔE_1，则有

$$
\Delta E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{12}^2 \tag{8}
$$

式中 v_{12} 是此阶段结束时两小球所具有的共同速度.

而在恢复阶段，两小球形变逐渐减小，形变势能逐步转变为小球的动能，表现为系统动能不断增加，设这一阶段系统动能增加为 ΔE_2，则有

$$
\Delta E_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{12}^2 \tag{9}
$$

又因为碰撞过程动量守恒，有

$$
m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v_{12} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{10}
$$

由式(8)、(9)、(10)可以得到：

$$
\Delta E_1 = \frac{\frac{1}{2} m_1 m_2 (v_{10} - v_{20})^2}{m_1 + m_2} \tag{11}
$$

$$
\Delta E_2 = \frac{\frac{1}{2} m_1 m_2 (v_2 - v_1)^2}{m_1 + m_2} \tag{12}
$$

由式(3)、(11)、(12)可得

$$
e = \sqrt{\frac{\Delta E_2}{\Delta E_1}}
$$

上式说明恢复系数 e 等于恢复阶段系统的动能增加值 ΔE_2 与压缩阶段中系统的动能减小值 ΔE_1 之比的平方根.

当 $\Delta E_2 = \Delta E_1$ 时，则在碰撞前后系统的动能既没有增加，也没有减少，保持动能守恒，从形变角度来讲压缩阶段中小球所产生的形变在随后的恢复阶段中得以完全恢复，故恢复到原状的能力为 $e=1$.

当 $\Delta E_2 = 0$ 时，则表明碰撞过程中系统动能损失最大，利用形变概念可知压缩阶段中小球所产生的形变在恢复阶段中完全没有任何恢复，故恢复能力 $e=0$.

其他情况介于这二者之间，即 $0<e<1$.这就是从能量的角度所得出的恢复系数的物理意义，其含义简单明了.

参考文献：

[1]　孙安媛，黄沛天.也谈完全非弹性碰撞和恢复系数[J].大学物理，2001，20(3)：9～11.

[2]　史可信.力学[M].北京：科学出版社，2003.117～120.

[3]　田清钧.基础力学[M].北京：国防工业出版社，2001.97～105.

[4]　漆安慎，杜婵英.普通物理学教程　力学[M].北京：高等教育出版社，1997.180～188.

（下转 22 页）

从 q_4 和 q_5 互为镜象电荷来看,其处理的方法并不同于 q_2 和 q_7,q_3 和 q_6,因为 $q_4 \neq -q_5$,而是 $q_4 = -\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}q_5$. 可见在取镜象电荷的处理过程中,文献[1]的做法有欠妥之处. 本文从唯一性定理出发,给出了一种正确处理方法.

因导体界面为无限大,且左边电场为零,故导体左边电场,我们用虚线把边界补齐(如图4所示),而并不改变所求区域的电场分布;对于 xz 平面以上的电场来说,电势可由原来电荷和如上放置的7个镜象电荷产生的电势叠加而得(在 $z=0$ 平面上,半径为 a,$x_0^2+y_0^2=d^2$):

$$q:(x_0 y_0)$$
$$q_1:(x_0,-y_0)$$
$$q_2:\left((\frac{a}{d})^2x_0,-(\frac{a}{d})^2y_0\right)$$
$$q_3:\left(-(\frac{a}{d})^2x_0,-(\frac{a}{d})^2y_0\right)$$
$$q_4:(-x_0,-y_0)$$
$$q_5:(-x_0,y_0)$$
$$q_6:\left(-(\frac{a}{d})^2x_0,(\frac{a}{d})^2y_0\right)$$
$$q_7:\left((\frac{a}{d})^2x_0,(\frac{a}{d})^2y_0\right)$$

$$q_1=q',q_2=-\frac{a}{d}q',q_3=\frac{a}{d}q',q_4=-q'$$

$$q_5=-q,q_6=\frac{a}{d}q,q_7=-\frac{a}{d}q \qquad (2)$$

其中 $q'=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}q$

$$\varphi=\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

式中 r_i 为电荷 q_i 至场点的距离,r 为 q 至场点的距离.

比较式(1)、(2)可以看出,两者的区别仅在于 q_2、q_3 相差一个系数 $\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}$. 而式(2)中的 q_2 与 q_7,q_3 与 q_4 满足边值关系[3]. 故根据唯一性定理,在镜象处理中应采用本文的处理方法.

根据唯一性定理,在用镜象法处理静电问题时,必须严格注意满足边界条件,并且不能改变所求区域的电荷分布,否则镜象电荷就不可能完全等效替代导体或介质边界.

参考文献:

[1] 蔡圣善. 经典电动力学[M]. 上海:复旦大学出版社,1978. 121~130,603~604.

[2] 徐辅新,王明智. 硕士研究生入学考试解题指南[M]. 安徽:安徽教育出版社,1986. 77.

[3] [美]斯迈思 W R. 静电学和电动力学(上册)[M]. 北京:科学出版社,1980. 170~180.

Image problems in the presence of both a conductor and a dielectric

JIN Hui-xia, XIANG Jing

(Department of Physics and Electronic Engineering, Hunan City College, Yiyang, Hunan 413049, China)

Astract: Image problems in the presence of both a conductor and a dielectric are considered. Shortcomings in some books, we are pointed out and made some necessary corrections.

Key words: image; conductor; dielectric

(上接19页)

A discussion of collision of two bodies from the viewpoint of energy

WANG Chang-chun

(Department of Physics, Chizhou Teachers college, Chizhou, Anhui 247000, China)

Abstract: The formula of loss of energy for central collision of two bodise is deduced from the viewpoint of energy, and phyiscal meaning of the coefficient of restitution is discussed again from this viewpoint.

Key words: energy of available resources; collision of two bodies; coefficient of restitution