

线接触弹性接触变形的解析算法

丁长安^{1,2}, 张 雷³, 周福章², 朱 均¹, 赵树奎²

(1. 西安交通大学 轴承与润滑理论研究所, 陕西 西安 710049;

2. 洛阳工学院 机电工程系, 河南 洛阳 471039; 3. 华中理工大学 机械工程系, 湖北 武汉 430074)

摘要: 以一般光滑弹性体接触理论为基础, 结合有限长弹性体接触的特点, 求出线接触弹性接触变形的解析公式, 并发现其解析解与数值解具有很好的一致性。所得公式可以对赫兹线接触理论加以补充。与经验公式相比, 它能够确切反映材料、载荷以及曲率半径等对接触变形的影响, 为工程中的精确计算提供了方便。

关键词: 线接触; 弹性变形; 有限长接触

中图分类号: TH117.1

文章标识码: A

文章编号: 1004-0595(2001)02-0135-04

赫兹理论以接触疲劳为主要失效形式, 对点接触情况给出了一套完整的理论解, 对线接触则仅给出了部分理论解^[1], 而未给出弹性接触变形计算公式。这一问题从赫兹 1896 年提出接触理论直到今日一直没有从理论上得到解答。早期人们侧重于寻找经验公式, 虽然有的公式已为一些工程应用所采用^[2], 但有些公式不能确切反映接触体几何特性的影响。随着计算机技术的发展, 数值分析方法已成功地用于解决有限长线接触问题^[3~6]。然而这类方法不涉及对解析解的研究。在接触问题中, 计算边界和压力分布时被积函数存在一定的奇异性, 而采用数值方法求解的过程较为复杂。为此寻求接触变形解析解, 将能够为处理此类问题提供简捷精确的计算方法。这对完善赫兹理论并进而完善一些应用学科的理论体系^[2]具有积极意义。

1 点接触及线接触问题

在处理一般光滑弹性体接触问题时, 根据接触区相对于弹性体宏观尺寸很小这一特点, 赫兹将无限大弹性半空间布希涅斯克理论用于有限大弹性体, 从而成功地解决了点接触问题^[1]。线接触是一般光滑弹性体接触问题的一个特例, 其接触区半宽与弹性体主曲率半径相比很小, 此时布希涅斯克理论自然适用。但采用这样的方法直接处理线接触问题存在困难。为此应以点接触理论为基础来求解线接触弹性接触变形。

图 1 所示为一个主曲率半径 $R_1 > R_2$ 的光滑弹

性体与一个主曲率半径为 R_2 的无限长柱体的接触示

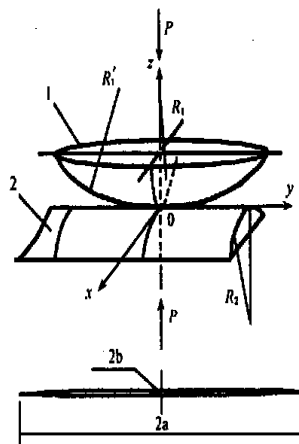


Fig 1 Schematic of contact of two elastic bodies

图 1 弹性体接触示意图

意图。在法向力 P 作用下, 弹性体变形后椭圆接触区长、短半轴分别为:

$$a = m \cdot \sqrt{3\eta P / (2 \sum \rho)} \quad (1)$$

$$b = n \cdot \sqrt{3\eta P / (2 \sum \rho)} \quad (2)$$

式中: $m = \sqrt[3]{(a/b)^2 L / \pi}$, $n = \sqrt[3]{(a/b)^2 L / \pi}$, $L = \pi/2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \theta + (b/a)^2 \sin^2 \theta} d\theta$ 为第二类全椭圆积分, $\eta =$

$(1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$, E_1 和 E_2 分别为弹性体 1 和弹性体 2 的弹性模量, ν_1 和 ν_2 为泊松比, ρ 为主曲率之和。接触区压力呈半椭圆分布, 最大接触

压力为:

$$p_0 = 3P / (2\pi ab). \quad (3)$$

当 $R_1 \gg R_1'$ 时, 接触区将是一个狭长的区域, 此时的接触状态与线接触状态接近(当 $R_1' \rightarrow \infty$ 时, 两弹性体的接触最终转变为线接触), 若采用线接触, 以下接触区半宽

$$b_1 = \sqrt{4\eta q / [\pi(\sum \rho)_1]}. \quad (4)$$

来计算短半轴 b , 则可得到对应的线接触单位长度法向力:

$$q = \pi m^2 (\sum \rho)_1 [3\eta p / (2\sum \rho)]^{2/3} / (4\eta).$$

在线接触情况下, 接触区压力呈半椭圆分布, 最大接触压力 $p_1 = 2q / (\pi b_1)$, 将 q 代入该式并与式(3)比较可得:

$$p_1 / p_0 = (\pi/2) [(\sum \rho)_1 / \sum \rho] m n^2.$$

由图 1 得:

$$\lim_{R_1' \rightarrow \infty} (\sum \rho)_1 / \sum \rho = \lim_{R_1' \rightarrow \infty} (1/R) / (1/R + 1/R_1') = 1.$$

式中: $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ 为当量曲率 当 $R_1' \rightarrow \infty$ 时, $b/a \rightarrow 0$, 由 m 和 n 的表达式得:

$$\lim_{b/a \rightarrow 0} m n^2 = 2/\pi$$

所以 $\lim_{b/a \rightarrow 0} p_1 / p_0 = 1$, 即在极限情况下存在如下单位长度法向力关系:

$$P / (2a) = 2q/3 \quad (5)$$

这一极限关系是解决线问题的基本关系式

2 接触变形

工程应用中的弹性体线接触为有限长线接触 对于有限长线接触, 在紧靠接触区端部一个很小的区段上存在着应力集中^[4]. 按照一般光滑弹性体接触理论中的定义, 法向接触变形在量值上等于两弹性体在法向力作用下, 接触区中心处的法向相对弹性位移 计算这一参数时, 根据圣维南原理^[1], 可以略去这种边缘效应

当弹性体为有限长时, $q = P/l$ (l 为接触长度), 将其代入式(5)可得到与有限长线接触相对应的计算参数:

$$\epsilon = b/a = 4b / (3l). \quad (6)$$

式中: 当 $l \rightarrow \infty$ 时, $\epsilon \rightarrow 0$, 回到前述无限长线接触状态; 当 l 为有限长时, ϵ 是一个很小的量(对于一般的工程应用, b/l 约为 10^{-3} 数量级), 代表有限长线接触

一般光滑弹性体接触理论中的法向接触变形公式^[1]为:

$$\delta = \eta p_0 K. \quad (7)$$

式中: K 为第一类全椭圆积分, 其表达式为:

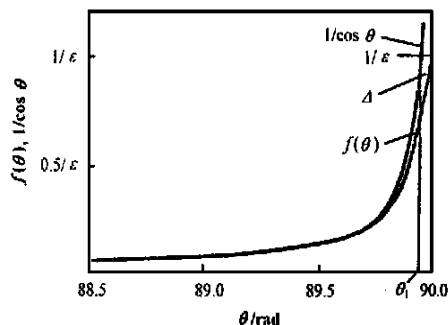
$$K = \int_0^{\pi/2} d\theta / \sqrt{\cos^2 \theta + \epsilon^2 \sin^2 \theta} \quad (8)$$

将式(6)代入上式求得 K , 即可由式(7)得到有限长线接触的接触变形

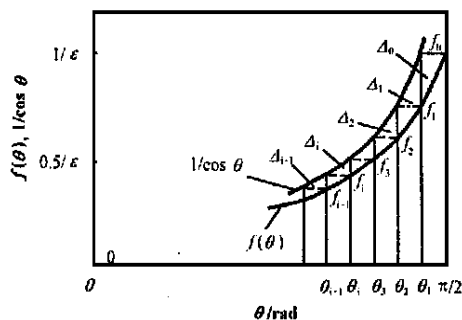
式(8)通常不能直接积分, 但当 ϵ 较小时, 能够寻找到有效的替代算法 为了便于分析, 将式(8)中的被积函数记为 $f(\theta)$, 即:

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + \epsilon^2 \sin^2 \theta}}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

图 2(a) 所示为当 ϵ 很小时, $f(\theta)$ 在 $[0, \pi/2]$ 区间



(a) Variation of $f(\theta)$ and $1/\cos\theta$ with θ



(b) Division of the area Δ

Fig 2 $f(\theta)$ and $1/\cos\theta$

图 2 函数 $f(\theta)$ 和 $1/\cos\theta$

内的变化情况(图中取 $\epsilon = 10^{-3}$), 积分 K 为 $f(\theta)$ 与横坐标轴围成的面积 图中除了 $f(\theta)$ 还示出了另一函数 $1/\cos\theta$ 由图可见, 在积分区间的绝大部分区段, $f(\theta)$ 等同于 $1/\cos\theta$ 仅在 θ 接近 $\pi/2$ 时 $f(\theta)$ 和 $1/\cos\theta$ 才出现较大偏差 利用两种函数这种非常近似的特性, 积分 K 可以采用如下形式求解:

$$K = \int_0^{\theta_1} d\theta / \cos\theta + (\pi/2 - \theta_1) / \epsilon \Delta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + (\pi/2 - \theta_1) / \epsilon \Delta \quad (9)$$

式中: 第一项表示用 $1/\cos\theta$ 代替原被积函数的积分, 如图积分上限 $\theta_1 = \arccos\epsilon$ 第二项表示直线 $1/\epsilon$ 在 $[\theta_1, \pi/2]$ 上的积分; 第三项表示曲线 $1/\cos\theta$ $f(\theta)$ 和直线 $1/\epsilon$ 所围面积 由 Hospital 法则^[7]得:

$$(\pi/2 - \theta)/\epsilon = (\pi/2 - \arccos \epsilon)/\epsilon = 1 \quad (10)$$

为了求解面积 Δ , 将图 2 中的 Δ 这一小区域放大为图 2(b) 所示的示意图 图中,

$$f_0 = f(\pi/2) = 1/\epsilon$$

$$f_1 = f(\theta) = 1/(\sqrt{2\epsilon}), \quad \cos \theta = 1/f_1 = \sqrt{2\epsilon}$$

$$f_2 = f(\theta) = 1/(\sqrt{3\epsilon}), \quad \cos \theta = 1/f_2 = \sqrt{3\epsilon}$$

$$f_i = f(\theta) = 1/(\sqrt{i+1\epsilon}), \quad \cos \theta_{i+1} = 1/f_{i+1} = \sqrt{i+1\epsilon}$$

$$f_n = 1 = 1/(\sqrt{n+1\epsilon}). \quad (11)$$

由式(11)得到 $n = 1/\epsilon - 1$, 该参数用于计算参与计算 Δ_i 的个数, 其值很大. 在以下由式(12)计算 Δ 的过程中, 当 Δ_i 的个数远小于 n 时, 级数就已收敛于计算值 图 2(b) 中,

$$\Delta_0 = (f_0 - f_1)(\pi/2 - \theta)/2$$

$$= (1 - 1/\sqrt{2})(\pi/2 - \arccos \epsilon)/(2\epsilon)$$

$$= (1 - 1/\sqrt{2})/2$$

$$\Delta_1 = (f_0 - f_2)(\theta - \theta)/2$$

$$= (1 - 1/\sqrt{3})(\arccos \epsilon - \arccos \sqrt{2\epsilon})/(2\epsilon)$$

$$= (1 - 1/\sqrt{3})(\sqrt{2} - 1)/2$$

$$\Delta_2 = (f_1 - f_3)(\theta - \theta)/2$$

$$= (1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{4})(\sqrt{3} - \sqrt{2})/2$$

$$\Delta_i = (f_{i-1} - f_{i+1})(\theta - \theta_{i+1})/2$$

$$= (1/\sqrt{i-1} - 1/\sqrt{i+2})(\sqrt{i+1} - \sqrt{i})/2$$

$$\Delta = \sum_{i=0}^n \Delta_i = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{i+2}} \right) \right]$$

$$(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) = 0.34190 \quad (12).$$

以上递推算算法中, 略去的是 ϵ 的高阶小量, 由于 ϵ 本身就是一个很小的量, 因而 Δ 的计算精度较高. 例如当 $\epsilon = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ 时, 计入 ϵ 高阶小量后 Δ 的精确值分别为 0.34190, 0.34190, 0.34176; 当 $\epsilon = 10^{-2}$ 时, 相对计算误差为 0.04%; 即使 ϵ 取 0.1, 相对误差也只有 2.4%. 将式(10)和(12)代入式(9)得:

$$K = \ln(1/\epsilon + \sqrt{1 - \epsilon^2}/\epsilon) + 0.6581 = \ln(3.862/\epsilon).$$

将 K 代入式(7), 整理后得到有限长线接触弹性接触变形计算公式:

$$\delta = \frac{\eta p}{\pi l} \ln \frac{6.591^3 (R_1 \pm R_2)}{\eta p R_1 R_2}. \quad (13)$$

式中: 若弹性体两曲面外凸, ' \pm ' 取 '+', 反之取 '-'. 鉴于工程应用中的线接触均为有限长线接触, 故从该意义出发可视式(13)为一般的线接触弹性接触变形计算公式.

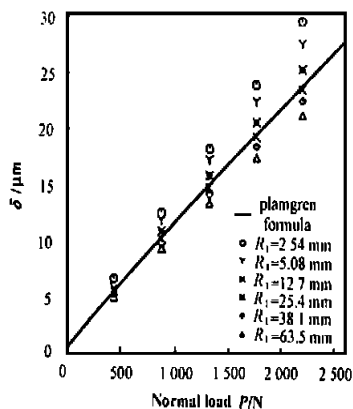
3 对接触变形公式的检验

工程应用中通常采用 Palmgren 公式^[12]计算线接触弹性接触变形:

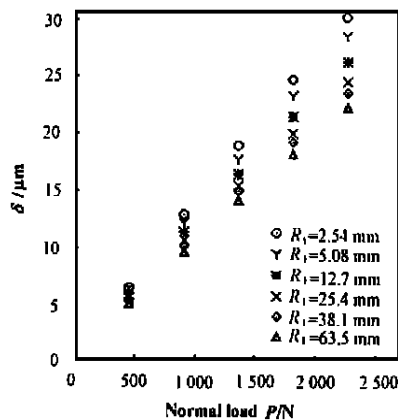
$$\delta = 1.36(\eta p)^{0.9}/l^{0.8}. \quad (14)$$

该式与弹性体曲率半径无关. 马家驹^[4]在用数值方法分析有限长弹性体接触问题时, 曾对该公式进行过检验, 发现曲率半径对弹性接触变形有影响, 当曲率半径约为 25.4 mm 时, 接触变形大体服从式(14), 该文采用的数值分析方法计算精度较高, 可以用来检验式(13).

图 3(a) 为马家驹检验经验公式(14)时给出的计算结果, 图 3(b) 为由式(13)所得到的计算结果, 计算对象为 $l = 25.4$ mm 的滚子与钢板接触. 计算参数为:



(a) The result of δ from reference



(b) Calculation of δ by formula (13)

Fig 3 Elastic contact deformation δ

图 3 弹性接触变形 δ

$E_1 = E_2 = 2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\nu_1 = \nu_2$, $P = 4444.5 \sim 22226.4 \text{ N}$. 比较图 3(a 和 b)可以看出, 式(13)的计算结果与马家驹计算结果几乎完全一样, 最大相对计算误差不到 5%. 两种方法所得结果的一致性表明, 在工程应用中采用式(13)计算线接触弹性接触变形将优于采用经验公式

4 结论

基于一般弹性体接触理论, 根据有限长弹性体接触的特点得到了线接触弹性接触变形的解析公式. 与经验公式相比, 解析公式确切反映了接触变形与材料、接触几何和接触载荷之间的关系, 为工程界的精确计算提供了方便.

参考文献:

[1] 钱伟长, 叶开源. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1980.

- [2] Harris T A. Rolling Bearing Analysis[M]. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1991.
- [3] Hartnett M J, Kannel J W. Contact Stresses between Elastic Cylinders: A Comprehensive Theoretical and Experimental Approach [J]. Journal of Lubrication Technology, Transactions of ASME, 1981, 103: 40~45.
- [4] 马家驹. 三维有限长弹性接触问题的数值解[C]. 河南省摩擦学会成立大会论文, 洛阳轴承研究所, 1984.
- [5] 习俊通, 梅雪松, 吴序堂. 面向对象的接触问题的有限元分析[J]. 机械强度, 1999 (3): 39~41.
- [6] 肖勇刚, 罗云飞. 弹性摩擦接触问题数值解分析[J]. 长沙交通学院学报, 1999 (6): 13~16.
- [7] 欧阳光中, 姚云龙. 数学分析[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1993.

Theoretical Formula for Calculation of Line-contact Elastic Contact Deformation

DING Chang-an^{1,2}, ZHANG Lei³, ZHOU Fu-zhang², ZHU Jun¹, ZHAO Shu-kui²

(1. Institute of Bearing and Lubrication Theory, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. Department of Mechatronic Engineering, Luoyang Institute of Technology, Luoyang 471039, China;

3. Department of Mechanical Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Based upon the theory on general smooth elastic contact, the finite length line contact problem was analyzed and the theoretical formula of elastic line contact deformation derived. It has been found that the analytical solution is consistent with the numerical one. As compared with the empirical formulae, the formula derived reveals the effect of material characteristics, load and radius of curvature on the elastic line contact deformation more accurately. Thus Hertz line contact theory could be improved by applying the derived formula, while the line contact problem in practice be calculated more conveniently.

Key words: line contact; elastic deformation; finite length contact