第35卷 第3期
2016年9月

延安大学学报(自然科学版)
Journal of Yanan University(Natural Science Edition)

Vol. 35 No. 3
Sep. 2016

DOI: 10.13876/J.cnki.ydnse.2016.03.038

刚体定点转动角坐标问题研究

苗红梅

(延安大学 物理与电子信息学院,陕西 延安 716000)

摘 要: 作定点转动的刚体有三个自由度,确定其位置可以有多种角度约定法。文中介绍了常见的两种欧拉角,表示了对应的角速度,分析其奇异位置,其结果在实际应用中有一定的指导意义。

关键词: 刚体; 定点转动; 欧拉角,卡尔丹角

中图分类号: O313.3　**文献标识码:** A　**文章编号:** 1004-602X(2016)03-0038-03

刚体定点转动问题是生产生活中一类重要问题,其研究具有理论意义和实用价值。自由运动的刚体和定点转动的刚体都涉及到定点转动问题,如陀螺、炮弹、回转仪、轮船、飞机和星体等。描述定点转动刚体的位置,可用连体坐标系 $O-xyz$ 三个坐标轴上的单位矢量相对于空间固定坐标系 $O-\xi\eta\zeta$ 三个坐标轴单位矢量之间的方向余弦矩阵表示,也可以用角度约定法表示。

在角度约定法中,一种方法用刚体中的一个运动平面与空间三轴的夹角表示[1],即RPY法。第一个是绕刚体前进方向Roll转角,第二个是绕水平轴方向的Pitch角 θ,第三个是绕铅垂轴方向的YAW角,RPY法中的三轴是指固定坐标系的三轴 ξ、η、ζ。RPY法表示方位比较方便,但表示刚体转动的角速度和角加速度不方便; 在角度约定法中另一种更常用的方法是欧拉角方位表示法。一般教材上提到的欧拉角都是指古典欧拉角[2-5]。实际上,从连体基的三个坐标轴中按任意顺序选取3个转动轴(但不能连续选取同一轴),所对应的3个转动角都可以定义为确定定点转动刚体的广义欧拉角[6]。按照转轴的顺序及名称,总共有12中欧拉角的选法,如表1所示。文献[1]中详细分析了各种角度设定法中脊线和运动平面的位置,文献[7]分析了三轴和两轴设定法的对偶性。

在表1中,三轴设定的六种方法中,X、Y、Z 三轴从第一种开始,第一轴顺次转在最后一个位置,就可以得到三轴设定的6种取法。在三轴设定法中,只要把所有绕第一、第二和第三轴转动的角度分别叫 α、β、γ 角,则它们的规律完全一样。α、β、γ 又叫卡尔丹角,有的文献中也称为布莱恩特角或克雷洛夫角; 而在二轴设定法中,第一个转轴和第三个转轴的名称一样,只要把所有绕第一、第二和第三轴转动的角度分别叫进动角(φ)、章动角(θ)和自转角(Ψ),则所有二轴设定法中的规律也完全一样,而ZXZ型转轴设定法正是古典欧拉角的设定方法。同样,在RPY法中也有这样12种转轴设定法。本文将介绍两种有代表性的广义欧拉角的定义以及角速度的表达式,并分析其奇异位置,指导在实践中如何适当选择欧拉角。

表1 12中不同的欧拉角选择方法

序号	三轴顺序	类型	序号	三轴顺序	类型
1	XYZ	三轴设定	1	XYX	二轴设定
2	YZX	三轴设定	2	XZX	二轴设定
3	ZXY	三轴设定	3	ZXZ	二轴设定
4	XYZ	三轴设定	4	ZYZ	二轴设定
5	YZX	三轴设定	5	YZY	二轴设定
6	ZXY	三轴设定	6	YXY	二轴设定

收稿日期: 2016-04-26
基金项目: 延安大学教改项目(YDJG2015-17)
作者简介: 苗红梅(1975—),女,陕西延川人,延安大学讲师。

1　古典欧拉角、角速度及奇异位置

古典欧拉角最早由欧拉发明,所以叫欧拉角,其实就是三轴设定法中的 ZXZ 法,其具体角度定义如下。如图1所示,设 O 为定点,建立两套右手坐标系,一套为空间固定坐标系 $O-\xi\eta\zeta$,一套为刚体的连体坐标系为 $O-xyz$,刚体初始位置为 $O-x_0y_0z_0$,与 $O-\xi\eta\zeta$ 重合,Oz_0 为刚体的自转轴。

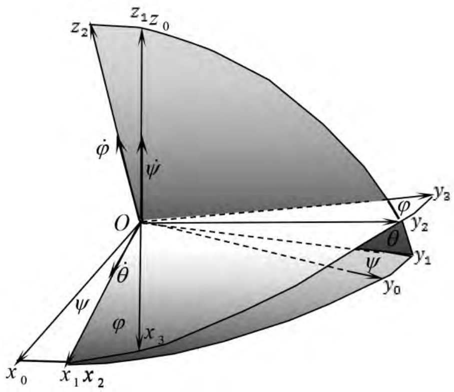

图1　古典欧拉角

先让刚体绕 $O\zeta(Oz_0)$ 轴转动 φ 角,刚体到达 $O-x_1y_1z_1$,φ 称为进动角;再让刚体绕 Ox_1 转动 θ 角,刚体到达 $O-x_2y_2z_2$ 位置,θ 称为章动角;最后刚体绕 Oz_2 转动 Ψ,刚体到达 $O-x_3y_3z_3$ 位置,Ψ 角称为自转角。实际上,刚体从初始位置转到终了位置可以绕某轴一次性转动完成,为了明确各角度的意义,把绕连体坐标系的三个轴转过的角度分别叫进动角、章动角和自转角。在下列范围内改变 φ、θ、Ψ 的数值,可得刚体所有可能的位置:

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\Psi\leqslant2\pi \tag{1}$$

由此可以得出刚体转动的角速度为

$$\omega=\dot{\varphi}k_0+\dot{\theta}i_1+\dot{\Psi}k_2 \tag{2}$$

把 ω 表示在连体坐标系中有

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\Psi+\dot{\theta}\cos\Psi \tag{3-1}$$

$$\omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\Psi-\dot{\theta}\sin\Psi \tag{3-2}$$

$$\omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\Psi} \tag{3-3}$$

(3-1)至(3-3)也可以表示成如下的式子

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\sin\Psi & \cos\Psi & 0\\\sin\theta\cos\Psi & -\sin\Psi & 0\\\cos\theta & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\\dot{\theta}\\\dot{\psi}\end{bmatrix} \tag{4}$$

由(4)式可得

$$\dot{\varphi}=(\omega_x\sin\Psi+\omega_y\cos\Psi)\,csc\theta \tag{5-1}$$

$$\dot{\theta}=\omega_x\cos\varphi-\omega_y\sin\varphi \tag{5-2}$$

$$\dot{\Psi}=-(\omega_x\sin\Psi+\omega_y\cos\Psi)+\omega_z \tag{5-3}$$

ω_x,ω_y,ω_z 的变化规律可由安装在飞行器中的陀螺仪表读出,对(5-1)至(5-3)作数值积分可得出 φ、θ、Ψ。但由(5-1)知,在 $\theta=n\pi(n=0,1,2\cdots)$ 位置附近,方程的右项将无限增大,使数值积分无法进行,因此 $\theta=n\pi(n=0,1,2\cdots)$ 成为欧拉角的奇异位置。在奇异位置处,由于 $O\zeta$ 与 Oz_0 轴重合,角度坐标 φ 和 Ψ 已无法区分,所以对于章动角可能很大的物体,如战斗机、炮弹和导弹,在描述它的位置和姿态时不适宜选择 ZXZ 型欧拉角。

2　卡尔丹角、角速度及奇异位置

卡尔丹角是三轴设定法中的 XYZ 型欧拉角,一般用于计量轮船和飞机的姿态。如图2所示,设 O 为定点,建立两套右手坐标系,一套为空间固定坐标系 $O-\xi\eta\zeta$,一套为刚体的连体坐标系 $O-xyz$,刚体初始位置为 $O-x_0y_0z_0$,并与 $O-\xi\eta\zeta$ 重合,Oz_0 为刚体的自转轴。

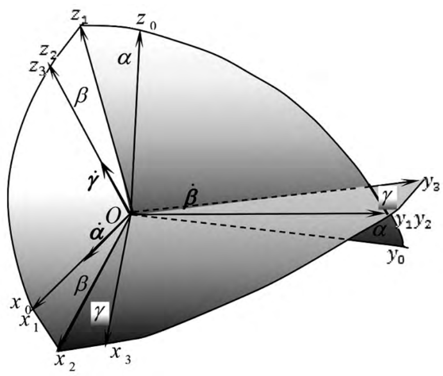

图2　卡尔丹角

先让刚体绕 Ox_0 轴转动角 α,刚体到达 $O-x_1y_1z_1$,α 称为纵倾角;再让刚体绕 Oy_1 转动角 β,刚体到达 $O-x_2y_2z_2$ 位置,β 称为横倾角;最后刚体绕 Oz_2 转动 γ,刚体到达 $O-x_3y_3z_3$ 位置,γ 角称为偏航角。同样,刚体从初始位置到终了位置可以绕某轴一次性转动完成。在轮船和民航中,把 α、β、γ 角分别叫纵倾角、横倾角和自转角,而在描述子弹姿态中,分别叫俯仰角、滚转角和偏航角。在下列范围内改变 α、β、γ 的数值,可得刚体所有可能的位置:

$$0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant2\pi,0\leqslant\gamma\leqslant2\pi \tag{6}$$

由此可以得出刚体转动的角速度为

$$\omega=\dot{\alpha}i_0+\dot{\beta}j_1+\dot{\gamma}k_2 \tag{7}$$

把 ω 表示在与刚体固定的连体坐标系中有

$$\omega_x = \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma \quad (8-1)$$

$$\omega_y = -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma \quad (8-2)$$

$$\omega_z = \dot{\alpha}\sin\beta + \gamma \quad (8-3)$$

(8-1)至(8-3)也可以表示成如下的式子

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\beta\cos\gamma & \sin\gamma & 0\\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ \sin\beta & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{bmatrix} \quad (9)$$

由(9)式可得

$$\dot{\alpha} = (\omega_x\cos\gamma - \omega_y\sin\gamma)/\cos\beta \quad (10-1)$$

$$\dot{\beta} = \omega_x\sin\gamma + \omega_y\cos\gamma \quad (10-2)$$

$$\dot{\gamma} = (-\omega_x\cos\gamma + \omega_y\sin\gamma)\tan\beta + \omega_z \quad (10-3)$$

ω_x,ω_y,ω_z 的变化规律可由安装在飞行器中的陀螺仪表提供，对微分方程(10-1)和(10-3)作数值积分可得出 α、β、γ。但在 $\beta = \frac{\pi}{2} + n\pi$($n = 0, 1, 2\cdots$)位置附近，(10-1)和(10-3)的右边将趋于无穷大，使数值积分无法进行，因此，$\beta = \frac{\pi}{2} + n\pi$($n = 0, 1, 2\cdots$)，成为 β 的奇异位置。在奇异位置处，由于 OZ 与 OX 轴重合，纵倾角 α 和偏航角 γ 已无法区分。在轮船和民航飞机的运动中，一般不可能有大角度的横倾和纵倾，所以描述轮船和民航飞机的运动可以选择卡尔丹角。

综合上述两种方法，当刚体的章动角 θ 有可能接近 π 时，不宜选古典欧拉角描述定点转动刚体和自由运动刚体的姿态；当横倾角 β 有可能接近 $\frac{\pi}{2}$ 时，不宜选择卡尔丹角描述定点转动刚体和自由运动刚体的姿态和运动。

3 结语

本文介绍了确定定点转动刚体位置的方法，并对角度约定法进行了详细阐述，重点对欧拉角的设定方法、角速度在连体坐标系中的表达式进行了推导。同时，对其反问题用角速度表示欧拉角进行了推证，最后分析了用数值积分方法计算刚体各个欧拉角时的奇异位置，对不同类定点转动刚体的欧拉角选择提出指导。

参考文献:

[1] 黄真，李艳文，高峰. 空间运动构件姿态的欧拉角表示[J]. 燕山大学学报，2002，26(3):189-192.

[2] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社，2009.

[3] 张建树，孙秀泉，张正军. 理论力学[M]. 北京: 科学出版社，2005.

[4] 陈世民. 理论力学简明教程[M]. 北京: 高等教育出版社，2008.

[5] 卢圣治. 理论力学基本教程[M]. 北京: 北京师范大学出版社，2004.

[6] 刘延柱. 高等动力学[M]. 北京: 高等教育出版社，2001.

[7] 赵晓颖，立书，么彩莲. 欧拉角参数表示下姿态的二阶运动奇异性[J]. 科学技术与工程，2012，12(3):634-637.

[责任编辑 贺小林]

Study on the Angular Coordinate of a Fixed-point Rotating Rigid Body

MIAO Hong-mei

(College of Physics and Electronic Information, Yan´an University, Yan´an 716000, China)

Abstract: A rigid body has three freedoms when it rotates with a fixed point. There are many appointment angular methods to determine its position. Two sets of Euler angles are introduced, and the corresponding angular velocity are expressed, and the strange positions of the rigid body are analyzed. The results has guided value in application.

Key words: rigid body; rotating with fixed point; Euler angles; Cardan angles