

同心鼓的控制问题

摘要

本文研究了同心鼓的力学特征与最优策略设计问题，根据动力学、接触力学等相关原理，建立了颠球模型、控制模型与修正模型，以更稳定、更省力为目标，得到游戏过程中各阶段的控制策略以及在一般情况下的应对方式。

针对问题一，我们首先确定了策略优化的方向，并将整体模型解耦为颠球模型与控制模型。在颠球模型中，我们将鼓的运动过程分为接触、分离、静止、受力加速四个阶段。在接触阶段，我们使用接触力学方法的计算鼓与球的接触时间 $t_{hit} \approx 15ms$ 、接触距离 $\Delta s < 2cm$ 。合理忽略掉接触过程的时间后，我们从能量、动量角度分析该过程，设计实验计计算了恢复系数 $e \approx 0.834$ 。我们假定人的手在拉动球的过程中仅向上运动，距离为半臂距离 $\Delta h = 10cm$ ，进而得到了鼓所受合力 $F' \approx 39.9N$ 。在控制模型中，我们找到力与鼓的运动之间关系。最终我们得到了以下的策略：颠球周期 $T = 0.606s$ ，鼓的自由下落时间 $t_1 = 0.150s$ ，鼓静止时间 $t_2 = 0.065s$ ，鼓的匀加速运动时间 $t_3 = 0.391s$ ，人使用的恒力为 $F_p = 21.80N$ ，力与水平方向夹角为 13.26° 。

针对问题二，我们将鼓的运动状态拆解为平动与转动。刚体的转动有 6 个自由度，本问题条件下，鼓不会绕铅直方向旋转。我们建立微分方程描述剩余自由度的变化。我们建立起刚体的动量矩的表达式，建立刚体绕固定点转动的欧拉动力学方程组。最后我们引入卡尔丹角的研究方法，对式子进行转换。在得到全部公式后，我们使用差分法模拟求解，最终得到九个情况的角度偏转，分别为： 0.098° ， 0.1805° ， 0.0748° ， 0.3482° ， 0.6394° ， 0.2648° ， 0.7401° ， 0.3199° ， 0.1906° 。我们进一步定性的分析了它们的合理性。

针对问题三，我们使用正态分布表示第一问模型中的拉力，模拟千次的碰撞，得到了球出射角度的分布。我们对此角度进行了统计上的分析，发现它们也近似符合正态分布。同时，我们引入了潜在危险程度函数，量化某次击球后失败的可能性，定义其与玩家移动至球的新落点所需最小移动速度与击球高度呈正相关。使玩家每次以击球后的潜在危险程度最低为目标，贪心地使得总计球数最多。我们定性的分析，策略一可以适当提高颠球高度，至 $0.625m$ 左右，以保留足够的反应时间。

针对问题四，我们首先研究了接触过程中球的横向速度与纵向速度变化，建立了倾斜碰撞模型，经过计算，我们发现在碰撞时应使鼓的倾斜角度为 0.495° 。根据第四问情景，我们让与球最近的两位玩家以及其对面玩家控制倾斜角度，建立了面向该情况的倾斜修正模型，最后提出了具体的调整方案。

最后，我们对模型优缺点进行评价，提出了改进的方案。

关键字： 刚体的多自由度运动 接触力学分析 最优控制 差分法

一、问题的背景与重述

1.1 问题的背景

“同心鼓”是一项十分考察团队协作能力的游戏。在这个游戏中，八名以上成员仅牵拉绳子末端，共同控制同心鼓颠起排球。该游戏仅关注颠球次数。颠球次数取决于控鼓的稳定性，而参与人员较多导致更多的游戏过程中不确定因素更多。因而，寻找恰当的协作策略对于渴望胜利的游戏团队具有很大价值。

1.2 问题的重述

游戏中使用的排球质量为 270 g。同心鼓鼓面直径为 40 cm，鼓身高度为 22 cm，鼓的质量为 3.6 kg。队员人数不少于 8 人，队员之间的最小距离不得小于 60 cm。项目开始时，球从鼓面中心上方 40 cm 处竖直落下，球被颠起的高度应离开鼓面 40 cm 以上，如果低于 40cm，则项目停止。项目的目标是使得连续颠球的次数尽可能多。

试根据上述实际情况，建立数学模型解决一下问题：

1. 精确控制力假设下，试讨论团队的最佳协作策略，并给出该策略下的颠球高度。
2. 建立模型，描述非精确控制下，指定参数时，鼓面在 0.1s 时的倾斜角度。
3. 考虑非理想条件对问题一策略的影响，并给出调整方法。
4. 已知球运动的倾斜情况，试在精确控制力假设下，讨论为将球调整为竖直状态，所有队员的发力时机与力度。并分析现实情况中，该调整的实施效果。

二、问题的分析

该问题中的研究对象有三类，即球、鼓、人。进一步分析该问题，我们发现，人通过绳控制鼓以控制球，但人与球之间无相互作用，因而我们将完整的物理模型解耦为颠球模型与控鼓模型。

针对问题一，我们首先考虑颠球模型。分析较成功的合作案例，我们发现，在他们颠球时，鼓与球的运动过程主要有四个状态。球与鼓的碰撞 → 球与鼓分离，共速向上 → 球在空中，鼓下落，静止 → 球在空中，鼓快速迎击排球。我们主要对这四个阶段进行动力学研究，计算各阶段球、鼓的运动参数，并根据实测数据侧面验证，进而由控鼓模型与颠球模型之间的关系，并从功率、用力时间、鼓球接触时间等多角度给出“最佳”的定义，寻找合适的颠球模型参数，得出最佳的团队协作策略。

针对问题二，鼓的每时刻受力都是确定的，问题主要在于对鼓进行动量与力矩的分析。我们应该分析鼓的动力学特征，确定鼓的运动状态的迭代方程。并结合差分分析，

可以模拟出在 0.1s 时鼓的最终运动状态与偏移角度。

针对问题三，我们可以引入潜在危险程度的概念评估击球的失败可能性。使用分布函数替换精确值对人的发力时机与用力大小进行表示，可以得出球的出射情况分布。引入球最终落点与鼓中心的偏移，结合对球出射时方差进行考量，我们得出对策略的评估，并根据它们，对策略进行调整。

针对问题四，我们可以继续从颠球模型入手，分析在预期情况下，鼓应做出的最佳调整，得出倾斜修正模型，进而得出所有队员的发力时机与力度。同样利用第三步骤的方法，我们将对力的描述转换为分布，最终得出修正策略的稳定性。

三、符号说明

符号	表示
g	重力加速度 (取 $9.8m/s$)
m_d	鼓的质量
m_b	球的质量
v_d	鼓的速度
v_b	球的速度
e	恢复系数
L	绳长
R	鼓的半径
Υ	潜在危险程度

四、问题假设

1. 完美绳假定：绳子无重量，在拉伸状态时其上拉力可以瞬间变化。
2. 零空气阻力假定：不计球、鼓所受空气阻力

五、问题一：最优策略问题

5.1 问题目标

在人的精确控制力前提下，经过综合考量，我们以下面几点作为目标设计最佳击鼓策略：

1. 规则简单，呈现周期性。简单的规则降低不确定性，且容易被玩家掌握。

2. 鼓（人）做总功小。总功小，则人可以进行更久的游戏，进而得更高的分数。
3. 人用力尽可能小。可以减少人的疲劳疲劳感，即减少玩家的化学能产出。

5.2 核心问题：运动阶段拆分与最优分析

5.2.1 鼓加速阶段

在加速阶段中，鼓除重力外受恒定合力 F ，经过指定的加速距离 h_d ，使其在碰撞点达到指定速度 v_{d1} 。

$$(F - m_d g) \cdot h_d = \frac{1}{2} m_d v_{d1}^2 \quad (1)$$

5.2.2 接触阶段

接触力学分析 接触阶段即鼓与球发生相互作用的阶段，通常这个阶段持续时间较短，并产生大量的能量交换。考虑球与鼓的弹性，在实际情况下，可能会有相对较长的接触过程。此外，我们需要测算鼓与球能量交换过程中的能量损失，用以确定鼓的最佳速度。

在球与鼓短暂接触的阶段的问题主要属于接触力学范畴。由于鼓面相对较大，且质量相对较大，排球形状较规则，且两者无粘着作用，因而可以将该问题近似视为弹性球体和弹性半空间体的接触。

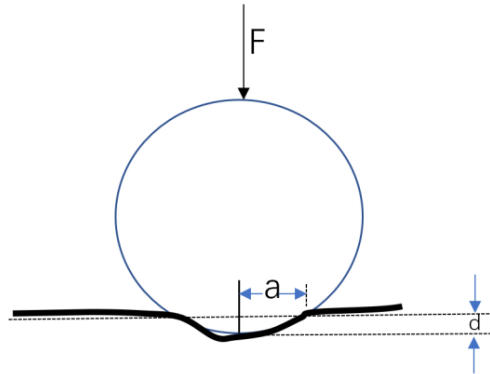


图1 球体与弹性半空间的接触

借助赫兹接触理论，可以对该问题进行求解 [1]。

赫兹接触理论中，对于一个球体在一个弹性半空间压出的深度 d 若满足， $a^2 = Rd$ ，则作用力为 $F = \frac{4}{3} E^* R^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}}$ ，令 v_1, v_2 分别为球体和平面的泊松比， E_1, E_2 分别为球体和平面的弹性模量，则

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_2^2}{E_2} \quad (2)$$

则作用力 F 为

$$F = \frac{4}{3}E^*R^{\frac{1}{2}}d^{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

得知接触深度后，我们可以计算该作用力。并借此估计碰撞持续时间，并进一步计算碰撞过程移动距离。

$$a_{hit} \leq F/m \quad (4)$$

$$t_{hit} \approx (v_{up} - v_{down})/a_{hit} \quad (5)$$

在本题中，我们根据后续的粗略观测，设定在本实验条件下， $d \leq 0.5cm$ 。实际中，它可以被准确衡量。并且在实验中得到 $t_{hit} \approx 15ms$ ，移动距离 $x \leq 1cm$ ，即相对于完整碰撞周期，碰撞过程的细节可以忽略¹。基于此，之后的分析中，我们将弹性碰撞视为简单碰撞。

能量分析 我们从宏观角度重新分析该碰撞过程。如前所述，我们希望动力学过程保证周期性，因而要求排球的撞击前与撞击后速度相同，均为 v' 。

碰撞过程中我们忽略重力作用，可以列出以下动量守恒方程。

$$m_d v_{d1} - m_b v' = m_b v' + m_d v_{d2} \quad (6)$$

由于碰撞将产生较大的能量损失，我们列出以下修正的能量守恒方程 [2]。

$$\frac{1}{2}m_b v'^2 + \frac{1}{2}m_d v_{d1}^2 = \frac{1}{2}m_b v'^2 + \frac{1}{2}m_d v_{d2}^2 + \Delta E_{hit} \quad (7)$$

$$(8)$$

碰撞的能量损失可以由回复系数衡量，它的公式为：

$$e = \frac{v_{d2} - v'}{v_{d1} + v'} \quad (9)$$

我们可以设计实验对恢复系数进行测量，进行回归分析。在本题研究范围内，我们将粗略的认为碰撞系数是常数。

¹在本章实验部分，对该处进行了具体讨论

能量分析 我们从宏观角度重新分析该碰撞过程。如前所述，我们希望动力学过程保证周期性，因而要求排球的撞击前与撞击后速度相同，均为 v' 。

碰撞过程中我们忽略重力作用，可以列出以下动量守恒方程。

$$m_d v_{d1} - m_b v' = m_b v' + m_d v_{d2}$$

由于碰撞将产生较大的能量损失，我们列出一修正的能量守恒方程。

$$\frac{1}{2} m_b v'^2 + \frac{1}{2} m_d v_{d1}^2 = \frac{1}{2} m_b v'^2 + \frac{1}{2} m_d v_{d2}^2 + \Delta E_{hit}$$

碰撞的能量损失可以由回复系数衡量，它的公式为：

$$e = \frac{|v_{d2} - v'|}{|v_{d1} + v'|} = \frac{|v'| - |v_{d2}|}{|v_{d1}| + |v'|}$$

我们可以设计实验对恢复系数进行测量，进行回归分析。在本题研究范围内，我们将粗略的认为碰撞系数是常数。

5.2.3 球鼓分离运动阶段

球鼓分离运动阶段，我们让鼓保持自由落体运动。自由落体运动阶段，重力势能所产生动量，在转换至静止态时产生一个冲量抵消。

5.2.4 鼓静止于最低点

为描述静止状态，我们需要了解最低点距离与鼓球的碰撞点²的距离 Δh 。拉动过程中，由于可以稳定的控制拉力方向，我们认为绳线与鼓面的夹角不变。手垂直向上拉动，抬升距离以半臂长度 $\Delta s = 0.1m$ 估算。则鼓的加速距离 $h_d \approx \Delta s = 0.1m$ 。

为从碰撞点进入静止点，鼓需要在减速过程中获得的冲量可由以下公式描述。我们假设冲量到达最低点的极短时间（可认为是一瞬间）被给出。

$$I = m_d v_{lowest} \tag{10}$$

$$\frac{1}{2} m_d v_{lowest}^2 = \frac{1}{2} m_d v_{d2}^2 + mg \Delta h_d \tag{11}$$

5.3 最优控制模型

建立颠球模型后，我们进一步研究控制模型。对于整体策略中，该部分模型不影响系统所做功。但由于施力者是人，人在发力时有必要的生物能消耗。维持更高的力，会

²在接触阶段的分析中，我们说明了对碰撞过程所做简化的合理性。

使施力者耐力下降更快。因而我们从静力角度进行分析。

控制模型由 n 根绳与鼓构成。由于力的方向、大小、时机均可控，我们假定每根绳均以相同方式用力。

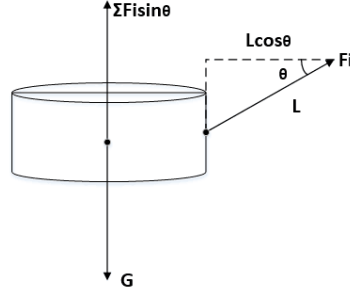


图2 鼓的受力分析

我们假定某一时刻，所有人需对鼓提供合力 F ，每根绳需对鼓提供拉力 F_i ，两者关系为以下。

$$|F| = \sum |F_i| \sin(\theta) = n \cdot |F_i| \sin(\theta) \quad (12)$$

则

$$|F_i| = \frac{|F|}{n \cdot \sin(\theta)} \quad (13)$$

在 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时， $|F_i|$ 是递增的，因而我们希望球与鼓的距离尽可能的近。不过我们需要满足题目中的约束与关于人的身高的隐性约束。我们设人的最低身高为 H_{people} ，人与鼓沿最近的距离为 s 。我们要求的满足约束的最大的 θ 。

$$|F_i| = \frac{|F|}{n \cdot \sin(\theta)} \quad (14)$$

$$L \cdot \cos(\theta) \geq s \quad (15)$$

$$L \cdot \sin(\theta) \leq H_{people} \quad (16)$$

5.4 参数估计、模型求解

为对模型的效果进行检验，我们设计实验估计、确定关键参数，并给出我们的最终策略。

5.4.1 实验测定

实验中，我们主要关注鼓与球的接触时间以及恢复系数。我们将鼓静止放在地面，使用卷尺指示竖直高度，使球分别从 $40cm$ ， $60cm$ ， $80cm$ 高度多次垂直下落。由于接触过程十分迅速，我们借助华为 960 帧慢镜头摄像机对下降动作进行拍摄，记录了球鼓接触时间、以及经过鼓上侧 $10cm$ 的时间（下行与上行）。时间以计数各动作所保持的帧数的方式衡量，最终转化为秒为单位。以下为各指标的平均值。

表 1 落球模型实验

自由落体高度	$40cm$	$60cm$	$80cm$
fn_{hit}	16	14	15
$t_{hit}(ms)$	16.7	14.6	15.6
fn_{down}	32.5	25	22.5
fn_{up}	37	30	28.5
$t_{down}(s)$	0.034	0.026	0.023
$t_{up}(s)$	0.039	0.031	0.030
$v_{up}(m/s)$	2.95	3.84	4.27
$v_{down}(m/s)$	2.59	3.2	3.37
$\Delta E(J)$	0.27	0.61	0.93
coe_{re}	0.878	0.833	0.79

由于我们做功最小，我们设下落距离为 $0.4m$ 。可得碰撞结束后球的上升速度。

$$\min v_{up} = \sqrt{2gh} \quad (17)$$

由于不计空气阻力，则球在下落、撞击前，它的速度也为 $\min v_{up} = 2.80m/s$ 。
最小运动周期为

$$T_{min} = \frac{2 \cdot \min v_{up}}{g} \approx 0.576s \quad (18)$$

可以发现，撞击过程持续时间极短，且几乎保持不变。并且相对最小运动周期不到 3%。我们认为可以将接触阶段持续时间忽略。接触过程中移动距离的估计值 $\Delta x \leq \frac{t_{hit} \cdot \min v_{up}}{2} \approx 2cm$ 。实际上我们进行了较大的放缩。因而我们可以近似认为碰撞过程不会影响球相对于鼓的上升距离。进一步，我们将最低的目标高度调高至 $h = 45cm$ ，以彻底避免可能出现的情况。此时 $v_{min} = 2.97m/s$ ， $T_{min} = 0.606s$ 。

5.4.2 模型求解

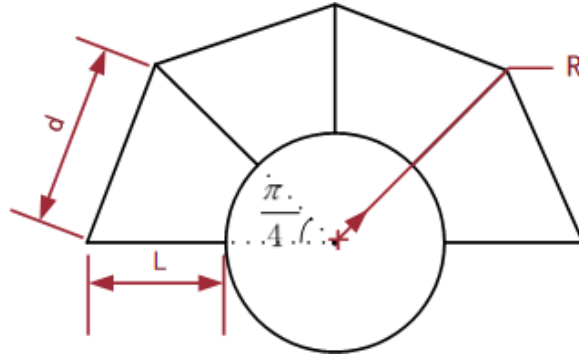


图3 桶边沿最短距离

可以求得， $s_{min} = 0.583m$ ，此时发力角度 $\theta = 69.91^\circ$ ， $E^* \approx 5.95e^5$ 。发力阶段，人的所用恒力为 $|F_p| = 5.323N$ ，接触过程中，最大的作用力约为， $F_{max} \approx 125.50N$ 。

碰撞前鼓速度 $v_{d1} = 0.512m/s$ ， $v_{d2} = 0.066m/s$ ，颠球周期 $T = 0.606s$ ，鼓的自由下落时间 $t_1 = 0.150s$ ，鼓静止时间 $t_2 = 0.065s$ ，鼓的匀加速运动时间 $t_3 = 0.391s$ ，鼓匀加速阶段所受的向上外力（加上重力）为 $|F| = 39.99N$ 。

可以画出该情况下，球、鼓位移、力与时间的关系，如下图，

虽然可以发现，用力很小，但是我们计算此时鼓底与手的距离，发现 $\Delta H \approx 1.70m$ ，这是不切实际的。我们又额外计算了两种情况， $\Delta H = 0.5m$ 时，人在加速阶段提供的力量为 $F_p = 21.80N$ ，在 $\Delta H = 0.22m$ 时，力量为 $F_p = 77.26N$ （比较符合第二问的条件）。

此外，我们考虑寻找静止时间等于人的平均反应时间（0.2s）的掷球高度。我们发现高度为 0.625m 时，玩家有足够的反应时间。

综上，我们的策略是，发力阶段，每个人以 21.80N 的力，沿与水平方向 13.26° 的角度向上提绳，发力时长 0.391s，撞击后手不发力，保持 0.150s，之后给球一个冲量使其保持静止。再等待 0.065s 后，开始下一个周期。

由于开始下落的高度为 0.4m，我们不针对它做额外的修正。经过 3 个周期左右，球的高度将自然接近 0.45m。

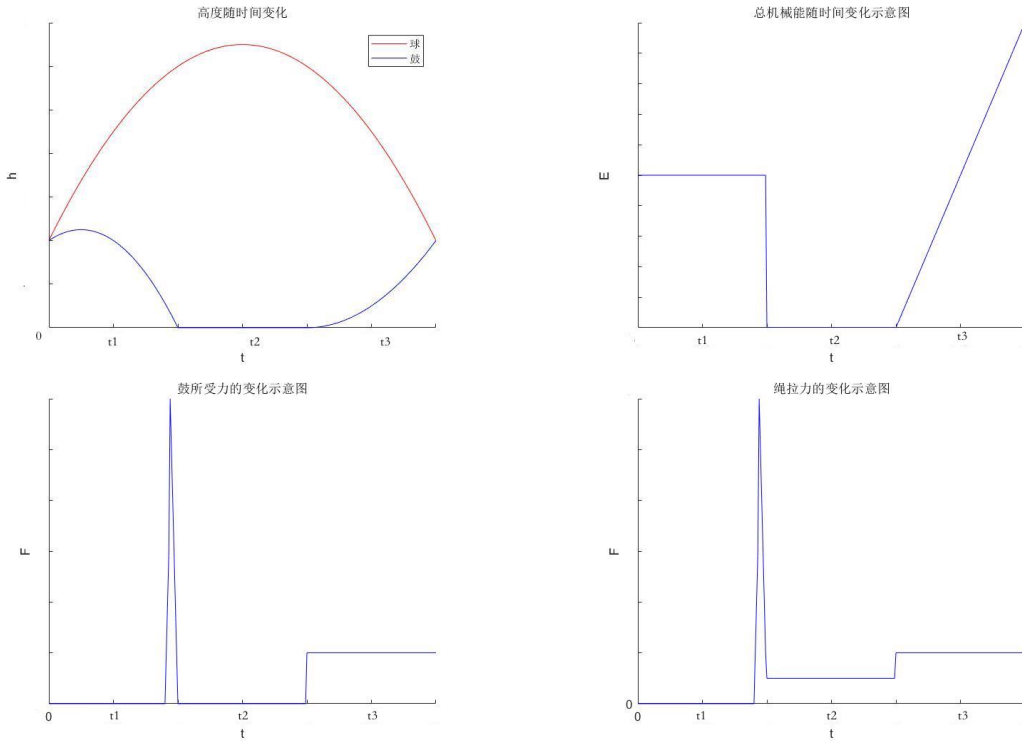


图4 球、鼓位移、力与时间的关系

六、问题二：多力在不同条件作用下鼓的运动状态分析

在问题一中，我们给出了理想情况下的策略。但在实际情况中，玩家的力度、时间与角度均难以保证达到预期。为更好地描述实际情况，本问题将对探讨刚体转动的规律与每个绳子对它造成的影响效果。

这个问题属于刚体的多自由度转动问题。鼓在看成绳子拉拽的时候可以看成是一个刚体，刚体在空间中运动有6个自由度，沿 x, y, z 三个方向。刚体的任何运动都可以分解为基点的平动及绕基点的定点转动，选择不同的基点，平动角速度就不一样，而转动角速度与基点的选择无关，不管选择刚体上的哪一点，角速度的方向及大小都不变 (刚体角速度的绝对性)。

我们将鼓的运动看成刚体的自由运动，分解为刚体的平动和绕点转动。

我们假设各个力的大小和方向都不变即在短时间 ($0.2s$) 内，每个力都为恒力。对于受力分解如图，8个力 $F_i (i=1, 2...8)$ 初始角度为 θ 。

$$\sin\theta = \frac{11}{170} \quad (19)$$

F_0 为初始力，满足：

$$8F_0 \sin\theta = mg \quad (20)$$

解得 $F_0 = 68.155N$ 。

现在不考虑鼓的位移造成的力的方向变化，进行粗略估计。对于鼓的质心由牛顿运动定律：

$$\begin{cases} \sum F_i \cos\theta \cos(\frac{2i\pi}{n}) = ma_x \\ \sum F_i \cos\theta \sin(\frac{2i\pi}{n}) = ma_y \\ \sum F_i \sin\theta - mg = ma_z \end{cases} \quad (21)$$

带入第一组数据，求得：

$$\begin{cases} S_x = 1.39cm \\ S_y = 0 \\ S_z = 0.941cm \end{cases} \quad (22)$$

可以发现，在 $0.1s$ 内鼓移动距离相对较小。由于 θ 极小，我们作出假设，实际情况下绳的方向和鼓平面夹角的变化会导致鼓的移动距离可以不计。

将鼓看做质量均匀分布的空心圆柱，以圆柱的几何中心为旋转基点，也设为坐标轴原点 O ，鼓可以看做刚体，由刚体的对点 O 的角动量定理，设圆柱上各点到 O 的距离为 r_i ，速度为 v_i 质量为 m_i ，则一点对 O 点的动量矩为：

$$J_i = r_i m_i v_i \quad (23)$$

整个刚体对 O 的动量矩为：

$$J = \sum (r_i m_i v_i) \quad (24)$$

设每点的坐标为 (x_i, y_i, z_i)

鼓转动的角速度为 \mathbf{w} ，其中 \mathbf{w} 在分解成绕三个坐标轴的分量后的大小为 w_x, w_y, w_z 。

将 v_i 和 r_i 带入上式

得

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \quad (25)$$

其中

$$\begin{cases} I_{xx} = \rho \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \int_{r_0}^{r_1} (\sin^2 \theta r^2 + l^2) dr dl d\theta \\ I_{yy} = \rho \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \int_{r_0}^{r_1} (\cos^2 \theta r^2 + l^2) dr dl d\theta \\ I_{zz} = \rho \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \int_{r_0}^{r_1} r^2 dr dl d\theta \\ I_{xy} = I_{yx} = \rho \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \int_{r_0}^{r_1} \sin \theta \cos \theta r^2 dr dl d\theta = 0 \\ I_{zy} = I_{yz} = \rho \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \int_{r_0}^{r_1} \sin \theta l dr dl d\theta = 0 \\ I_{xz} = I_{zx} = \rho \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \int_{r_0}^{r_1} \cos \theta l dr dl d\theta = 0 \end{cases} \quad (26)$$

r_1 到 r_0 为圆柱体的实心区域。

建立刚体绕固定点转动的欧拉动力学方程组:

$$\begin{cases} I_{xx} dw_x/dt + (I_{zz} - I_{yy}) w_y w_z = M_x \\ I_{yy} dw_y/dt + (I_{xx} - I_{zz}) w_z w_x = M_y \\ I_{zz} dw_z/dt + (I_{yy} - I_{xx}) w_x w_y = M_z \end{cases} \quad (27)$$

我们利用卡尔丹角进行找到坐标与角度间的关系。现给出卡尔丹角的定义 [3]。

卡尔丹角: 建立一套为空间固定坐标系 $O_{\xi\eta\zeta}$, 一套为刚体的连体坐标系 O_{xyz} , 刚体初始位置为 $O_{x_0y_0z_0}$, 并与 $O_{\xi\eta\zeta}$ 重合, O_{z_0} 为刚体的自转轴。先让刚体绕 O_{x_0} 轴转动角 α , 刚体到达 $O_{x_1y_1z_1\alpha}$ 称为纵倾角; 再让刚体绕 O_{y_1} 转动角, 刚体到达 $O_{x_2y_2z_2}$ 位置, 称为横倾角; 最后刚体绕 O_{z_2} 转动, 刚体到达 $O_{x_3y_3z_3}$ 位置, 角称为偏航角。

则有

$$w = \frac{d\alpha \cdot \vec{i}}{dt} + \frac{d\beta \cdot \vec{j}}{dt} + \frac{d\gamma \cdot \vec{k}}{dt} \quad (28)$$

把 w 表示在与刚体固定的连体坐标系中

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ \sin\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \\ d\gamma/dt \end{bmatrix} \quad (29)$$

将 (29) 带入 (27) 中，由旋转矩阵，绕 X 轴旋转矩阵

$$\begin{bmatrix} R_x(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (30)$$

绕 Y 轴旋转矩阵

$$\begin{bmatrix} R_y(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (31)$$

绕 Z 轴旋转矩阵

$$\begin{bmatrix} R_z(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

由于所有力沿鼓面的水平分力都过质心，不会有自转的倾向，所以转轴只会在鼓面上，也就是 xy 平面上，设转轴与 y 轴夹角为 $\theta \in (0, 90^\circ)$

现将转轴绕 z 轴旋转至于 y 轴重合，再绕 y 轴旋转

则绕着 xy 平面上任一直线旋转的矩阵：

$$M = R_z(-\theta)R_y(\beta)R_z(\theta) \quad (33)$$

可知除了第 8 组数据，鼓都绕着一个轴旋转，因此可以通过旋转变换使鼓绕 y 轴旋转。

鼓面初始法向量为 $N = (0, 0, 1)$ 。

旋转了 β 角度后：

$$N^* = NR_z(-\theta)R_y(\beta)R_z(\theta) \quad (34)$$

由于对称可只取关于 y 轴的方程，由于 $w_z = 0$ 。

$$\begin{cases} I_{yy}dw_y/dt = M_y \\ M_y = \sum F_i \cdot r \cdot \sin\theta_i \cdot \cos(\frac{2i\pi}{n}) \\ \sin\theta_i = \frac{1}{[1 + (11/170)^2]^{1/2}} N^* \begin{bmatrix} \cos(\frac{2i\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2i\pi}{n}) \\ \frac{11}{170} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (35)$$

化简为一个关于 β 的二阶微分方程，通过迭代求出 β 的变化，对于第八组数据，由于转动轴发生了变化，转动轴不在 xy 平面上，带回 (27) 通过差分法求得

表 2 问题二计算结果

序号	1	2	3	4	5
倾斜角度 (角度制)	0.0980	0.1805	0.0748	0.3483	0.6394
序号	5	6	7	8	9
倾斜角度 (角度制)	0.2648	0.7401	0.3199	0.1906	

可以发现，发力时机控制的失误带来的误差更明显，对称的的失误可以在某种程度上相互弥补，在实际情况中可能会在抬升期间发生多次转动。我们认为，相似属性的人应尽量保持对称的站位，参赛成员应更多的关注发力的时机，以减少失误的可能影响。

七、 问题三：实际情况下击球的模型

7.1 问题分析

在问题三中，题目要求对实际情况下的同心鼓问题做考量。在现实情况中，问题一的假设条件不再成立，体现在：

1. 人很难精准自己的发力大小、方向与时机，并容易出现失误等情况
2. 不同玩家身高、力量、反应时间不同，难以达到完美合作
3. 随着击球次数的增加，人的体力、控制力、注意力逐渐减小

同时，需要注意到的问题有：

1. 不同于第一问的理想模型，球的角度会在击球瞬间产生改变，玩家需要移动从而使得鼓达到球的新落点

2. 玩家由于站位的不同，向各个方向的移动难度不同，产生移动后的一定位移差，造成鼓的倾斜

3. 由于鼓随玩家移动的惯性，鼓在达到新落点后不能保持完全的水平静止状态，而是沿着质心在本次接球的移动方向上震荡

4. 人的注意力、控制力随时间和消耗而递减，整体呈非线性负相关，但由于疲劳度的不可逆转性和简化模型，我们忽略疲劳度在决策中产生的影响。

根据以上原因得出，在现实情况下，我们需要调整第一问的击球策略，首要目标不再是人击球过程的做功更小。

而在现实情况中，要求玩家能根据球的下落角度和速度计算出最为恰当的回击策略显然是不切实际的，玩家无法实时准确计算，即使计算出力的大小方向也无法做到精准输出。所以，模型应当更加切合现实意义。所以对于本问题，我们给出一个击球策略的评估指标，对宏观策略做定性分析。

7.2 模型的建立

7.2.1 预期力大小方向与实际情况的正态分布关系模型

对于每次击球，玩家希望的理想结果是球可以垂直起落，但根据 7.1 中的因素 1，人无法精确控制自己的力量大小方向与发力时机，同时存在失误等情况，所以每次都为垂直起落的理想状态是难以达到的，我们首先建立玩家预期发力效果与实际发力效果的模型。

以发力大小举例，为了量化力量参数，我们近似的认为实际产生的力是以预期力为均值，呈正态分布。而正态分布的方差因不同人的控制能力而异。

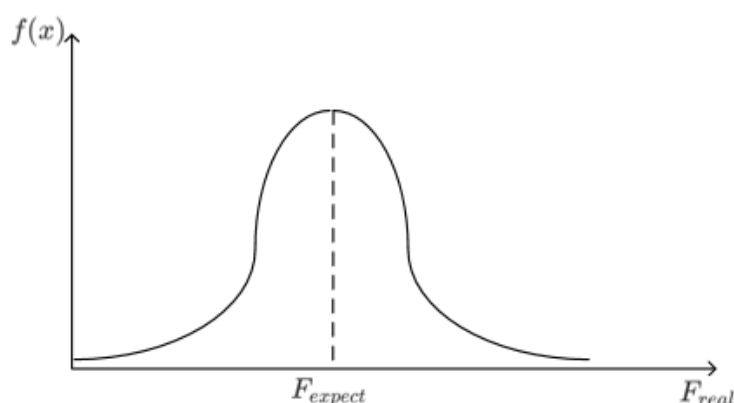


图 5 实际力大小的分布模型

以第二问的前提条件为例（绳长、绳前后端高度差等参数一致）进行两次实验，要

求 8 个人发力时机完全相同；预期力的大小相同，但实际产生的力呈随机正态分布，并对比预期力在 80N 和 100N 两种情况，即

$$F_{real1} \sim N(80, \delta^2) \quad (36)$$

$$F_{real2} \sim N(100, \delta^2) \quad (37)$$

我们假设该正态分布的方差 $\delta = 5N$ ，利用蒙特卡罗随机模拟正态分布的力量大小数据，计算 0.5s 后大鼓与平面的偏移角度分布，如下图，

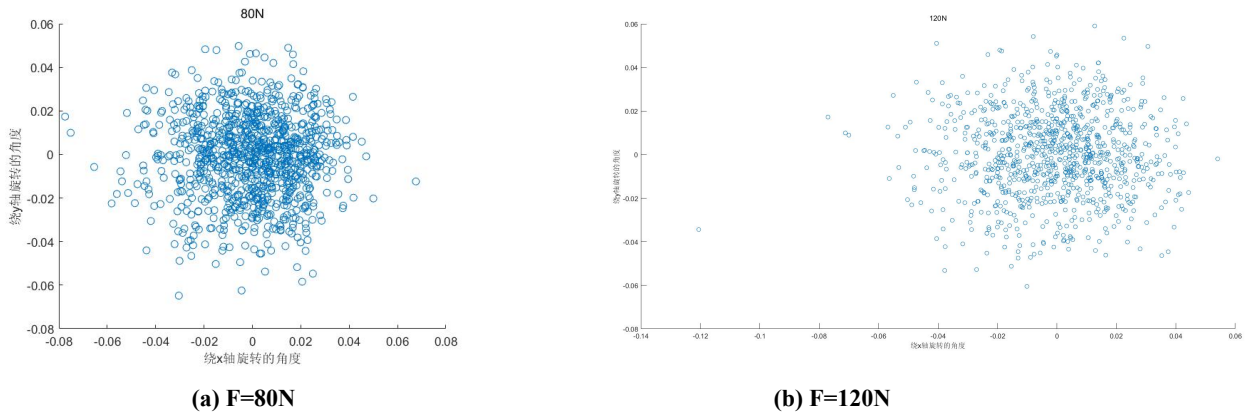


图 6 随机模拟 1000 次力量大小的角度分布

鼓在 80N 和 120N 两种情况，实际产生的鼓的偏角大小分布产生一定差异。同理可知力道的大小时机和发力时间会对击球的效果分布产生不同程度的影响。

7.2.2 单次击球后的潜在危险程度

潜在危险程度定义 潜在危险程度 Υ 定义为本次击球后，预测下一球不能被接到的评估函数。 Υ 越大，下一次击球的成功率越低。若本次击球位置与在同一水平面的落点相距为 ΔX ，击球间隔时间为 ΔT ，以下因素我们认为与危险程度直接相关。

1. 球的跳动方向与速度。球的方向与速度直接决定着球的落点，对于落点较远的球，人需要移动较远的距离来接到球。
2. 球在空中停留时间。显然，若球并非垂直起落，人必然需要一定时间使鼓移动到球的新落点。这一部分时间包括人的反应时间、决策时间与执行时间，这一部分时间间接改变着人达到新落点所需的最低速度，从而影响本次击球的成功率。
3. 球碰撞后延竖直向上的分量过小，使得击球高度 $< 40cm$ 造成失败。

表达式定义 由此，我们定义危险程度函数为

$$\Upsilon = \begin{cases} \alpha \cdot \frac{\Delta X}{\Delta T - T_s} + \beta \cdot \Delta H & \Delta H \geq 40cm \\ \infty & \Delta H < 40cm \end{cases} \quad (38)$$

其中， T_s 为人类平均反应与决策时间， α 为接球最小移动速度的影响因子， β 为上升高度影响因子， ΔH 为本次因为球上升高度。

我们认为危险程度与玩家移动至下次落点所需最低移动速度呈正相关。该相关性具体体现在速度移动较快时，鼓的不稳定性大大提高，击球难以控制鼓的稳定性达到理想回击角度；玩家后退难度与前进难度的不同，故在玩家移动时，鼓移动方向上对面的两人后退与前进速度不同，造成位移的不对等程度增大；同时，速度越大，越难以改变方向，因鼓的不稳定性提升，球向各个方向弹出的夹角范围也显著提升，玩家向移动速度相反的方向再次接球的难度较高。

高度与危险程度的相关性体现在，在击球高度较高时，玩家更难以判断落点，不同玩家也因为预测落点位置的差别，造成合作失误的情况，甚至出现因观察角度的不同，反方向运动情况。

将上述式子中 $\Delta X, \Delta T, \Delta H$ 转换成有击球速度大小 v ，与速度的垂直方向夹角 θ 表示

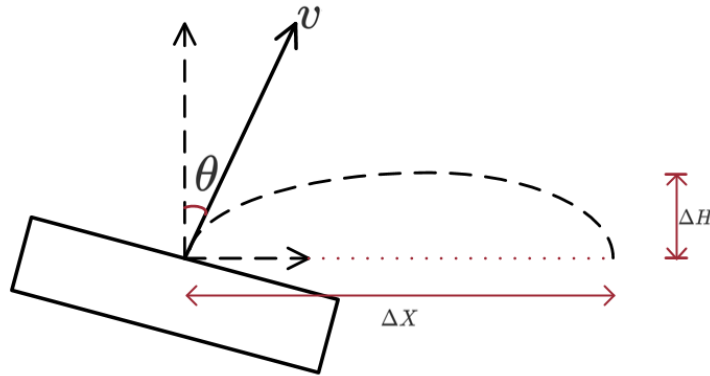


图7 球的斜抛模型

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{v \cos \theta}{g} \\ \Delta H = \frac{v^2 \cos^2 \theta}{2g} \\ \Delta X = \frac{v^2 \cos \theta \sin \theta}{g} \end{cases} \quad (39)$$

则 Υ 可表示为

$$\Upsilon = \begin{cases} \alpha \cdot \frac{v^2 \cos \theta \sin \theta}{v \cos \theta - gT_s} + \beta \cdot \frac{v^2 \cos^2 \theta}{2g} & \frac{v^2 \cos^2 \theta}{2g} \geq 40cm \\ \infty & \frac{v^2 \cos^2 \theta}{2g} < 40cm \end{cases} \quad (40)$$

对于 α, β 两个因素的影响因子的确定，可以采用预估法或统计的方法得到。

统计法求解影响因子：这是典型二分类模型，自变量有两个纬度，我们可以采用机器学习的方法。在条件的允许的情况下，可以控制变量对不同人群的游戏多次进行采用，直接测量或间接测算出球击出后的移动速度大小和方向，作为输入，以接下来一次是否成功击中为输出，建立二分类模型。感知机、多层神经网络、逻辑回归、SVM 支持向量机等方法，确定影响因子。

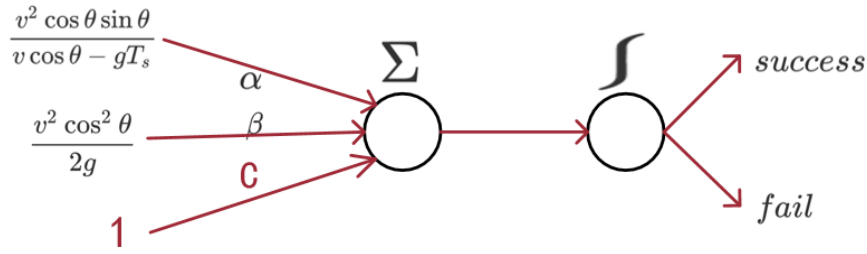


图 8 危险程度影响因子逻辑回归统计模型

其中 C 为常数。

所以，对于本问题，我们以击球次数最大化为总体目标，采用贪心的思想，每次击球的首要目标是使得潜在危险程度的期望降到最低，从而达到全局最优。

7.3 模型分析与评估

本问首先分析了实际情况与理想情况的差别因素，得到第一问的策略应当被改进的结论。并引入单次击球后的危险程度模型与实际力的正态分布模型，以危险程度最小为单次击球目标，从而使总计球数最多。

由于实际情况较为复杂，为了提升危险程度影响函数的准确性，可以进一步采用非线性模型。

八、问题四：倾斜下落的修正模型

本问题中，我们需要对斜向球角度进行修正，因而我们需要首先对倾斜碰撞的动力学特征进行分析。

8.1 模型的建立

8.1.1 倾斜碰撞模型

我们在首先在二维竖直平面考虑该过程。碰撞过程中，球相对于鼓面有法向的冲击与切向的位移。法向上速度的改变遵循问题一颠球模型中能量损失的规律；切向上速度受到滚动摩擦的限制。

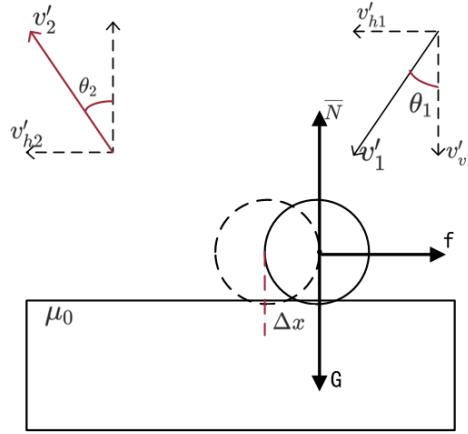


图9 摩擦接触时的受力分析

根据以上图示，可以列出下列公式。

$$\begin{cases} v'_{b1} = v'_b \cdot \cos(\theta) \\ e = \frac{v_{bv2}}{v_{bv1}} \\ v'_{bh1} = v'_b \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad (41)$$

根据水平方向的机械能守恒，列出一下公式。其中 $\Delta x'$ 为球鼓滚动过程平移的距离， f 为滚动摩擦。

$$\frac{1}{2}m_d v'^2_{bh2} = \frac{1}{2}m_d v'^2_{bh1} - f \cdot \Delta x' \quad (42)$$

滚动摩擦的效应使用一下公式近似估算，其中 \bar{N} 为平均压力， μ' 为滚动摩擦系数。

$$f = \mu' \bar{N} \quad (43)$$

平均的压力通过以下公式估算。其中， \bar{F} 为接触阶段的平均压力。

$$\bar{N} \approx \bar{F} + G \cos(\theta) = \frac{m'_d v_{dh1} - m'_d v_{dh2}}{\Delta t} + m_d g \cos(\theta) \quad (44)$$

滚动距离估算公式如下，后续模型求解过程中我们使用不等式右端的下界估算 $\Delta x'$ 。

$$\Delta x' \leq v'_{bh1} \cdot \Delta t \quad (45)$$

8.1.2 二维倾斜修正模型

对于本问题，碰撞示意图如下。

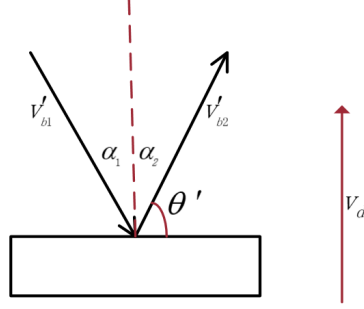


图 10 水平鼓碰撞示意图

我们希望找到在撞击时，鼓与铅直方向的角度 θ' ，使得此时的 v'_{b2} 方向竖直向上。由于撞击时间很短 ($\Delta t \approx 0.015s$)，其间产生的压力很大 ($\bar{F} \approx 100N$)，我们决定忽略重力产生的作用。于是，可以将坐标系进行转换，各变量的变换关系如图所示。

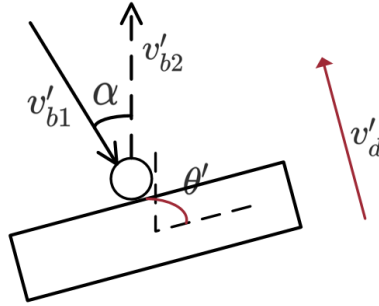


图 11 倾斜鼓碰撞示意图

我们希望在碰撞后，上升的高度尽量满足 $60cm$ 。我们考虑此时鼓应满足的上升速度 v'_d 。由于鼓与水平面倾斜角度极小，所以我们使用问题一中颠球模型近似求解，即参数 $h = 0.6m$ ，通过计算 v'_{b2} ，可求得 v'_d 。

$$v'_{b2} \approx \sqrt{2gh} \quad (46)$$

因而现在我们只需在以下约束下求解 θ 。其中 α_1 是入射角， α_2 是出射角。

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha = 1^\circ \quad (47)$$

8.2 模型求解

8.2.1 倾斜角度计算

我们以 0.001° 为步长，寻找最优的入射角度。最终我们找到，当入射角度为 0.505° 时，出射角度为 0.496° 度，可以认为合角度为 1° 。此时鼓与平面的夹角为 0.496° 。

v 我们假设鼓与地面平行。我们发现，如果鼓不为球提供动力，球的出射角度将越来越低，因为相对摩擦而言，法向的能量损失更大。如果给鼓提供相同的力，使它的入射速度与出射速度保持不变，倾斜角度将减少，倾斜度会因为摩擦自动被修正，不过速度很慢。

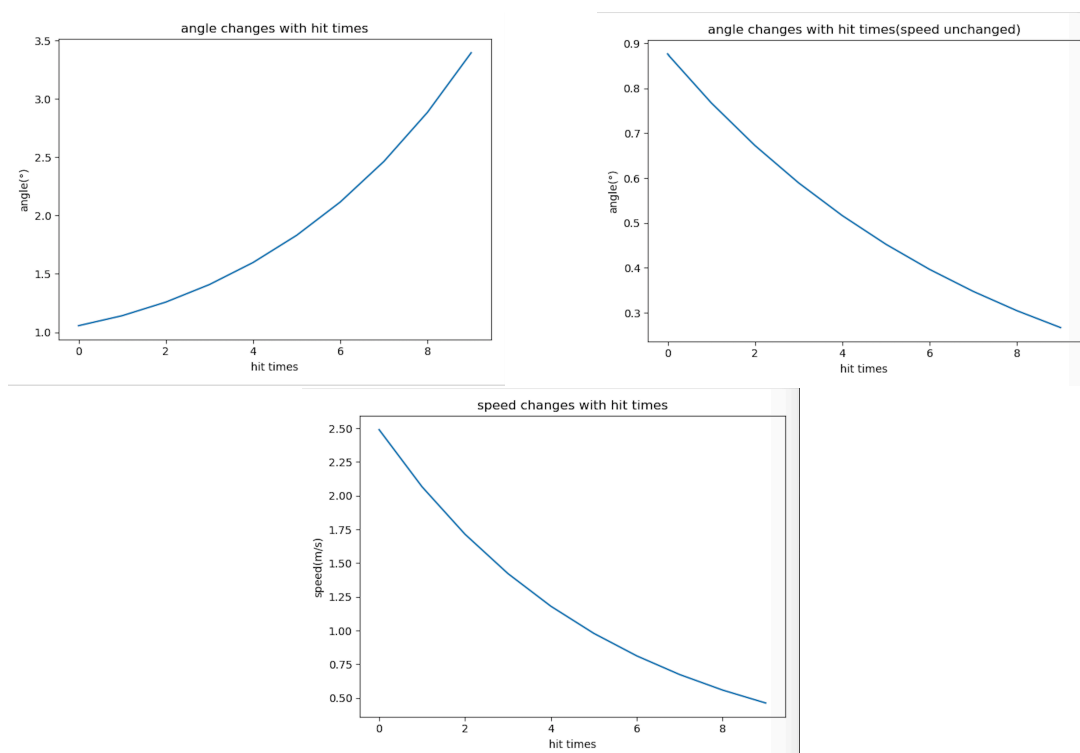


图 12 球倾角与速度随碰撞次数的变化

根据本题的条件，人数为十人，且球的出射方向在两人见三分之一的方向。我们预期使鼓的法向量与球出射轨迹保持共面，我们以此为目标设计策略。

$$\left\{ \begin{array}{l} 10F_0 \sin \theta = mg \\ \sin \theta = \frac{H}{L} \\ \frac{F_1}{\sin 24^\circ} = \frac{F_2}{\sin 12^\circ} \\ \frac{F_6}{\sin 24^\circ} = \frac{F_7}{\sin 12^\circ} \\ F_{all} \cdot r \cdot \cos \beta = I_{yy} \cdot \frac{w_\beta}{dt} \\ \sum F_i \sin \theta - mg = ma \\ a_1 t + a_2 t = v \\ \frac{1}{2} a_1 t^2 + a_1 t^2 + \frac{1}{2} a_2 t^2 = s \\ \beta = 0.49573 \end{array} \right. \quad (48)$$

由于倾斜方向在水平面的投影指向某两位队员之间,且夹角之比为 1:2,我们将投影方向角度更小的玩家编号 1,角度更大的玩家编号 2,并按照该顺序依次标号。

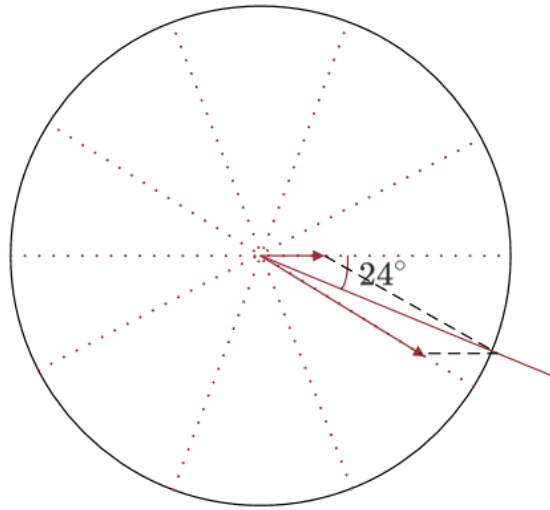


图 13 问题四受力分析

最终我们得到一组用力方案:

初始时,每个人依次的用力为 104N,53.16N,70.56N,70.56N,70.56N,70.56N, 70N,35.78N, 70.56N,70.56N;

在 0.2s 后,每个人的用力方案改换为 92.65N,92.65N,92.65N,92.65N,92.65N,

92.65N,92.65N,92.65N,92.65N,92.65N。在 0.18s 后的,鼓的角度与水平面的角度为 0.495 度。

8.3 合作策略评估与实际情况的考量

该合作策略利用了对称性，并使策略尽可能简单，仅涉及必要的四个人，这在某种程度上降低了可能的失误。我们进而分析实际情况中，人的失误对该策略可能造成的影响。

在实际情况中，力的大小和方向呈现正态分布，进而导致出射角也呈现正态分布。若力量不够均匀，游戏中对球的偏角衡量不够准确，可能会导致球更大的偏移，从而导致更难接球。但相对于不做任何策略，我们认为按倾斜修正模型进行调整，可以达到更好的效果。

九、模型的评价与改进

9.1 模型的评价

模型的优点

1. 本文采用动力学原理对游戏中同心鼓的动作状态进行描述，建立了刚体的多自由度运动模型，具有严谨的推导过程，且模型具有普适性。并启发式的团队协作策略。
2. 基于接触力学、动力学原理，并设计实测实验对问题进行了合理的简化。
3. 使用差分迭代法、蒙特卡洛法进行模拟。在模型仿真过程中，可以方便的对模型参数进行调整、修改或补充，因而能够更好的进行模型调试，为进一步研究方案的完善提供了方便。

模型的缺点

1. 模型进行了一定的简化，结果存在一定误差。
2. 采用迭代法、概率法计算，结果不够精确。

9.2 模型的改进

减少对模型自由度的简化，考虑更多的微小因素，以建立更准确复杂的模型。

十、模型的应用与推广

本文主要对刚体的多自由度运动问题进行了研究。面对同心鼓游戏，我们揭示了其过程中的物理规律并给出了建议的合作策略，对于游戏玩家有很大帮助，提升它们的游戏性。此外，刚体的约束性多自由运动模型具有广泛的应用，可以应用于工业制造、航天学、航海学等大量领域，具有很强的推广性。

参考文献

- [1] 接触力学与摩擦力的原理及其应用/（德）瓦伦丁 L. 波波夫著；李强，雒建斌译，—2 版，—北京：清华大学出版社，2019
- [2] 王长春. 从能量的角度讨论两体碰撞问题 [J]. 大学物理,2005(09):18-19+22.
- [3] 苗红梅. 刚体定点转动角坐标问题研究 [J]. 延安大学学报 (自然科学版),2016,35(03):38-40.

附录 A 代码附录-问题一

```
# calc.py
from math import pi
import math
# print((1/3 * (0.2) ** 3 - 1/3 * 0.1 ** 3 * 0.22) * 2 * pi * 0.658)

g = 9.8
md = 3.6
mb = 0.27
R = 0.2
e = 0.834
heightd = 0.22

def calc_T_vd1_vd2_by_h(h):
    v = (2 * g * h)**0.5
    T = 2 * v / g

    vd1 = (0.166 * v + 0.4455) / 1.834
    vd2 = calc_vd2(vd1)
    return T, vd1, vd2

def calc_vd2(vd1): # 根据恢复系数
    vd2 = vd1 - 0.4455
    return vd2

def calc_vd1(vd2):
    vd1 = vd2 + 0.4455
    return vd1

def calc_t1(vd2, hd):
    t1 = (vd2 + (vd2**2 + 2*g*hd)**0.5)/g
    return t1

def calc_F_t3(vd1, hd):
    F = 1/2*md*(vd1**2)/hd + md*g
    ad = (F-md*g)/md
    t3 = vd1 / ad
    return F, t3

def calc_params_by_h_hd(h, hd, L, n, mind):
```

```

T, vd1, vd2 = calc_T_vd1_vd2_by_h(h)
# vd1 = calc_vd1(vd2)
t1 = calc_t1(vd2, hd)
F, t3 = calc_F_t3(vd1, hd)

# s, theta = calc_shortest_s_theta(L, n, mind)
theta = 76.74 * pi / 180
# theta = (90 - 3.709965892066852) * pi / 180
# print('theta:', theta)
# calc_Fp_by_theta(F, 8, theta)
calc_drum_hand_dist(L, theta)
Fp = calc_Fp_by_theta(F, n, theta)

print('-----')
print('vd1(碰撞前鼓速度):', vd1)
print('vd2(碰撞后鼓速度):', vd2)
print('T:(周期时长)', T)
print('t1(自由下落时间):', t1)
print('t2(停止时间):', T-t1-t3)
print('t3(加速时间):', t3)
print('F:', F)
print('-----')

def calc_shortest_s_theta(L, n, mind):
    s = mind/2/math.sin(pi/n) - R
    print("%d个人、人间距最短为%fm时，人与鼓沿最短距离为%fm" %(n, mind, s))

    theta = math.asin(s / L)
    print("此时发力角度theta = %f度" %(theta *180 / pi))
    # print("手距离鼓下平面高度为%f米" %(calc_drum_hand_dist(L, theta)))
    return s, theta

def calc_drum_hand_dist(L, theta): # 弧度制
    h = L * math.cos(theta) + heightd/2
    print('%f长度的绳子，与竖直方向呈%f的角度时，鼓底与手的距离为%f米' %(L, theta*180/pi, h))
    return h

def calc_Fp_by_theta(F, n, theta): # 弧度制
    Fp = F / n / math.cos(theta)
    print('Fp:%f(N)' %Fp)
    return Fp

def calc_E(E1, E2, u1, u2):

```

```

E = 1/((1-u1**2)/E1 + (1-u2**2)/E2)
print('E:', E)
return E

def calc_N(E): # TODO:计算接触状态的平均压力：动量角度 与 接触力学角度
    # E = calc_E()
    d = 0.005
    F = 4/3 * E * R **0.5 * d**1.5
    print('最大的力: ', F, 'N')
    pass

if __name__ == '__main__':
    print('假设两弹性体的弹性模量大约在1e6Pa的量级，泊松比为0.4')
    E = calc_E(1e6, 1e6, 0.4, 0.4)
    calc_N(E)
    # h = 0.625
    # h = 0.60
    h = 0.45
    hd = 0.10
    L = 2
    n = 10
    mind = 0.6
    calc_params_by_h_hd(h, hd, L, n, mind)
    # calc_shortest_s_theta(1.7, 8, 0.6)

    # for theta in range(50, 90):
    # theta = 76.74
    # calc_drum_hand_dist(L, theta * pi / 180)

```

```

# fn_process
from math import sqrt
'''
40cm -> 2.954 m/s -> ratio: 1/1.13
60cm -> 3.84 m/s -> ratio: 1/1.2
80cm -> 4.267 m/s -> ratio: 1.27
合理考虑，弹力越大，形变越大，能量损失越大
【速度误差？算在测量误差里吧。】
'''

gap = 1/960
h = 0.1
m = 0.27

```

```

def delta_e(v1, v2):
    print('下降速度: ', v1)
    print('上升速度: ', v2)
    e1 = m * v1 ** 2 / 2
    e2 = m * v2 ** 2 / 2
    print('能量比: ', v1 / v2)
    print('吸收效率: ', v2 / v1)
    return m * (v1**2 - v2**2)/2

'''
40
'''
t_40_down = 32.5 * gap
v_40_down = h / t_40_down

t_40_up = 37 * gap
v_40_up = h / t_40_up
print('-----分界线-----')
print('下落高度: 40cm')
print('下落平均帧数: 32.5')
print('下落平均时间: ', t_40_down)
print('上升平均帧数: 37')
print('下落平均时间: ', t_40_up)

e40 = delta_e(v_40_down, v_40_up)
print('e40:', e40)

v = sqrt(2 * 9.8 * 0.35)
print('理论下行速度: ', v)

'''
60
'''
t_60_down = 25 * gap
v_60_down = h / t_60_down

t_60_up = 30 * gap
v_60_up = h / t_60_up
print('-----分界线-----')

print('下落高度: 60cm')
print('下落平均帧数: 25')
print('下落平均时间: ', t_60_down)
print('上升平均帧数: 30')
print('下落平均时间: ', t_60_up)

```

```

e60 = delta_e(v_60_down, v_60_up)
print('e60:', e60)

v = sqrt(2 * 9.8 * 0.55) # 因为测量下行速度为最后10cm的平均速度，因而去掉最后5cm
print('理论下行速度: ', v)

'''
80
'''
t_80_down = 22.5 * gap
v_80_down = h / t_80_down

t_80_up = 28.5 * gap
v_80_up = h / t_80_up
print('-----分界线-----')

print('下落高度: 80cm')
print('下落平均帧数: 22.5')
print('下落平均时间: ', t_80_down)
print('上升平均帧数: 28.5')
print('下落平均时间: ', t_80_up)

e80 = delta_e(v_80_down, v_80_up)
print('e80:', e80)

v = sqrt(2 * 9.8 * 0.75)
print('理论下行速度: ', v)

```

```

from math import sqrt
'''
接触力、接触时间、接触做功
'''

E1 = 140 * 1e6 # 弹性模量假设, Pa
E2 = 140 * 1e6
v1 = 0.4 # 泊松比假设, 无量纲
v2 = 0.4
R = 0.1 # 排球半径约为 0.1m
d = 0.005 # 凹陷深度, 5mm

_E = 1 / ((1-v1**2)/E1 + (1-v2**2)/E2)

F = 4/3 * _E * sqrt(R) * (d ** 1.5)

print('_E=', _E)

```

```

print('受力大小=', F)

####

print('#####')

g = 9.8
h = 0.4 # 下落高度
t = sqrt(h * 2 / g)
v = g * t
print('下落时间:', t, '撞击时速度: ', v)
print('假设周期性运动, 接触时间不计, 球体再次向上运动时速度等于下落速度')
m_ball = 0.27
mv = m_ball * 2 * v # 只有大小, 方向向上
print('排球受到的冲量:', mv)
t_strike = 0.05 # 假设测量到撞击时间为0.05s
print('接触时间:', t_strike)
print('接触过程中的平均力:', mv / t_strike)

#### 鼓球撞击的能量损失

#### 鼓的速度

'''
最佳策略: (只考虑鼓球模型) 更省力的颠球方式【鼓在上升期自由下落】
'''

v_drum_up = 0.2 # 假设鼓撞击结束后, 上升速度是0.2m/s
t_hori = 2 * v_drum_up / g
print(t_hori)

```

附录 B 代码附录-问题二

```

format shortE
clear F;
f=68.155;

F(:, :, 1) = [f, f, f, f, f, f, f, f;
              f, f, f, f, f, f, f, f;
              f, f, f, f, f, f, f, f;
              80, f, f, f, f, f, f, f;
              80, 80, f, f, f, f, f, f;
              80, f, f, 80, f, f, f, f;
              90, f, f, f, f, f, f, f;
              f, 80, f, f, 80, f, f, f;

```

```

        f,f,f,f,80,f,f,80;];
F(:, :, 2)=[90,80,80,80,80,80,80,80;
    90,90,80,80,80,80,80,80;
    90,80,80,90,80,80,80,80;
    80,80,80,80,80,80,80,80;
    80,80,80,80,80,80,80,80;
    80,80,80,80,80,80,80,80;
    90,80,80,80,80,80,80,80;
    90,80,80,90,80,80,80,80;
    90,80,80,90,80,80,80,80];

h=0.11;
r=0.1;R=0.2;m=3.6;
Iyy=(R^2+r^2+R*r+2*h^2)*m/3/(R+r);
Ixx=Iyy;
Izz=2/3*(R^2+r^2+R*r)*h^2*m/(R+r);
n=8;theta=[0,pi/8,3*pi/8,0,pi/8,3*pi/8,0,0,3*pi/8];

db=zeros(1,9);d2b=zeros(1,9);b=zeros(1,9);
for i=1:9
    for j=1:20000
        if j<10000
            k=1;
        else
            k=2;
        end
        N=[-sin(b(i))*cos(theta(i)),-sin(theta(i))*sin(b(i)),cos(b(i))];
        M=0;
        for p=1:8
            mysin=(N(1)*cos((p-1)*2*pi/n)+N(2)*sin((p-1)*2*pi/n)+N(3)*11/170)/(1+121/170^2);
            M=M+F(i,p,k)*mysin*0.2*cos((p-1)*2*pi/n);
        end
        tempd2b=d2b(i);
        d2b(i)=M/Iyy;
        temp=db(i);
        db(i)=db(i)+(tempd2b+d2b(i))/2*1e-5;
        b(i)=b(i)+(db(i)+temp)/2*1e-5;
    end
end
for i=1:9
    b(i)=b(i)*180/pi;
end

```

```

format shortE
F(:, :, 2)=[ 90,80,80,80,80,80,80,80;
    90,90,80,80,80,80,80,80;

```

```

90,80,80,90,80,80,80,80;
80,80,80,80,80,80,80,80;
80,80,80,80,80,80,80,80;
80,80,80,80,80,80,80,80;
90,80,80,80,80,80,80,80;
90,80,80,90,80,80,80,80;
90,80,80,90,80,80,80,80;];
f=68.155;
F(:, :, 1) = [f,f,f,f,f,f,f,f;
              f,f,f,f,f,f,f,f;
              f,f,f,f,f,f,f,f;
              80,f,f,f,f,f,f,f;
              80,80,f,f,f,f,f,f;
              80,f,f,80,f,f,f,f;
              90,f,f,f,f,f,f,f;
              f,80,f,f,80,f,f,f;
              f,f,f,f,80,f,f,80;];

h=0.11;
r=0.1;R=0.2;m=3.6;
Iyy=(R^2+r^2+R*r+2*h^2)*m/3/(R+r);
Ixx=Iyy;
Izz=2/3*(R^2+r^2+R*r)*h^2*m/(R+r);
n=8;
a=zeros(9);b=zeros(9);da=zeros(9);db=zeros(9);d2a=zeros(9);d2b=zeros(9);c=zeros(9);dc=zeros(9);
for i=1:9

for k=1:20000
    if k<=10000
        j=1;
    else
        j=2;
    end
    Mx=0;My=0;
    for m=1:n
        Mx=Mx+m*sin(a(i),b(i),m,n)*sin((m-1)*2*pi/n)*F(i,m,j)*0.2;
        My=My+m*sin(a(i),b(i),m,n)*cos((m-1)*2*pi/n)*F(i,m,j)*0.2;
    end
    d2b(i)=(Mx*sin(c(i))+My*cos(c(i))-2*(Iyy-Izz)*(-da(i)*cos(b(i)))*(da(i)*sin(b(i))+dc(i)))/Ixx+da(i)*dc(i);
    d2a(i)=(Mx*cos(c(i))+My*sin(c(i))+(Iyy-Izz)*(db(i))*(da(i)*sin(b(i))+dc(i)))/Iyy+da(i)*dc(i)*cos(b(i))+
        /cos(b(i));
    temda=da(i);temdb=db(i);
    da(i)=da(i)+d2a(i)*1e-5;
    db(i)=db(i)+d2b(i)*1e-5;
    a(i)=a(i)+(da(i)+temda)/2*1e-5;
    b(i)=b(i)+(temdb+db(i))/2*1e-5;
end

```



```

end
angle=zeros(1,9);
for i=1:9
    angle(i)=to_angle(a(i),b(i));
end

```

附录 C 代码附录-问题三

```

format shortE
n=8;%力的总数量
%力的序号第i个力是在(cos((i-1)*2*pi/n),sin((m-1)*2*pi/n))方向上,即从x正半轴出发,逆时针旋转.
f=68.155;
F0= [f,f,f,f,f,f,f,f];
h=0.11;
r=0.1;R=0.2;m=3.6;
Iyy=(R^2+r^2+R*r+2*h^2)*m/3/(R+r);
Ixx=Iyy;
Izz=2/3*(R^2+r^2+R*r)*h^2*m/(R+r);
num=1000;
a=zeros(1,num);b=zeros(1,num);da=zeros(1,num);db=zeros(1,num);d2a=zeros(1,num);d2b=zeros(1,num);c=0;dc=0;

for i=1:num
    F(:, :, i)=normrnd(80,5^0.5,[1,n]);
for k=1:5000
    Mx=0;My=0;
    for m=1:n
        Mx=Mx+mysin1(a(i),b(i),m,n)*sin((m-1)*2*pi/n)*F(1,m,i)*0.2;
        My=My+mysin1(a(i),b(i),m,n)*cos((m-1)*2*pi/n)*F(1,m,i)*0.2;
    end
    d2b(i)=(My-2*(Iyy-Izz)*(-da(i)*cos(b(i)))*(da(i)*sin(b(i)))) /Ixx;
    d2a(i)=(Mx+(Iyy-Izz)*(db(i))*(da(i)*sin(b(i))))/Iyy+da(i)*db(i)*sin(b(i)) /cos(b(i));
    temda=da(i);temdb=db(i);
    da(i)=da(i)+d2a(i)*1e-4;
    db(i)=db(i)+d2b(i)*1e-4;
    a(i)=a(i)+(da(i)+temda)/2*1e-4;
    b(i)=b(i)+(temdb+db(i))/2*1e-4;
end
end
angle=zeros(1,num);
for i=1:num
    angle(i)=to_angle(a(i),b(i));
end

```

附录 D 代码附录-问题四

```
# print(-0.2124, 0.297 * 2 * -0.2124 + 2.118 - 1, 0.297 ** 2 * -0.2124 + 2.118 * 0.297 +
0.0433 + 0.297)

from math import pi
import math
# print((1/3 * (0.2) ** 3 - 1/3 * 0.1 ** 3 * 0.22) * 2 * pi * 0.658)

g = 9.8
md = 3.6
mb = 0.27
R = 0.2
e = 0.834
heightd = 0.22

def calc_T_vd1_vd2_by_h(h):
    v = (2 * g * h)**0.5
    T = 2 * v / g

    vd1 = (0.166 * v + 0.4455) / 1.834
    vd2 = calc_vd2(vd1)
    return T, vd1, vd2

def calc_vd2(vd1): # 根据恢复系数
    vd2 = vd1 - 0.4455
    return vd2

def calc_vd1(vd2):
    vd1 = vd2 + 0.4455
    return vd1

def calc_t1(vd2, hd):
    t1 = (vd2 + (vd2**2 + 2*g*hd)**0.5)/g
    return t1

def calc_F_t3(vd1, hd):
    F = 1/2*md*(vd1**2)/hd + md*g
    ad = (F-md*g)/md
    t3 = vd1 / ad
    return F, t3
```

```

def calc_params_by_h_hd(h, hd, L, n, mind):
    T, vd1, vd2 = calc_T_vd1_vd2_by_h(h)
    # vd1 = calc_vd1(vd2)
    t1 = calc_t1(vd2, hd)
    F, t3 = calc_F_t3(vd1, hd)

    # s, theta = calc_shortest_s_theta(L, n, mind)
    # theta = 76.74 * pi / 180
    theta = (90 - 3.709965892066852) * pi / 180
    # print('theta:', theta)
    # calc_Fp_by_theta(F, 8, theta)
    calc_drum_hand_dist(L, theta)
    Fp = calc_Fp_by_theta(F, n, theta)

    print('-----')
    print('vd1(碰撞前鼓速度):', vd1)
    print('vd2(碰撞后鼓速度):', vd2)
    print('T:(周期时长)', T)
    print('t1(自由下落时间):', t1)
    print('t2(停止时间):', T-t1-t3)
    print('t3(加速时间):', t3)
    print('F:', F)
    print('-----')

def calc_shortest_s_theta(L, n, mind):
    s = mind/2/math.sin(pi/n) - R
    print("%d个人、人间距最短为%fm时，人与鼓沿最短距离为%fm" %(n, mind, s))

    theta = math.asin(s / L)
    print("此时发力角度theta = %f度" %(theta * 180 / pi))
    # print("手距离鼓下平面高度为%f米" %(calc_drum_hand_dist(L, theta)))
    return s, theta

def calc_drum_hand_dist(L, theta): # 弧度制
    h = L * math.cos(theta) + heightd/2
    print('%f长度的绳子，与竖直方向呈%f的角度时，鼓底与手的距离为%f米' %(L, theta*180/pi, h))
    return h

def calc_Fp_by_theta(F, n, theta): # 弧度制
    Fp = F / n / math.cos(theta)
    print('Fp:%f(N)'%Fp)
    return Fp

```

```

def calc_E(E1, E2, u1, u2):
    E = 1/((1-u1**2)/E1 + (1-u2**2)/E2)
    print('E:', E)
    return E

def calc_N(E): # TODO:计算接触状态的平均压力: 动量角度 与 接触力学角度
    # E = calc_E()
    d = 0.005
    F = 4/3 * E * R **0.5 * d**1.5
    print('最大的力: ', F, 'N')
    pass

if __name__ == '__main__':
    print('假设两弹性体的弹性模量大约在1e6Pa的量级, 泊松比为0.4')
    E = calc_E(1e6, 1e6, 0.4, 0.4)
    calc_N(E)
    h = 0.60
    # h = 0.60
    hd = 0.10
    L = 2
    n = 10
    mind = 0.6
    calc_params_by_h_hd(h, hd, L, n, mind)
    # calc_shortest_s_theta(1.7, 8, 0.6)

    # for theta in range(50, 90):
    # theta = 76.74
    # calc_drum_hand_dist(L, theta * pi / 180)

```

```

from math import sin, atan
from math import sinh
from math import sqrt
from math import pi
from math import atanh
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# plt.rcParams['font.sans-serif']=['SimHei'] #用来正常显示中文标签

'''
水平方向减速不能忽略
# '''

g = 9.8

```

```

h = 0.6
m = 0.27

def hit_again(v, theta1):
    print('v=', v)
    vh = v * sin(theta1 * pi / 180)
    print('vh=', vh)
    dt = 0.0167
    dx = vh * dt
    print('dx=', dx)

    vv1 = v * sin((90 - theta1) * pi / 180)

    u = 0.02
    N = 100 * (v / 3) # 碰撞最深处压力大约为100N TODO?
    f = u * N
    print('f=', f)

    # vh2 = vh
    vh2 = (vh * m - f * dx) / m

    print('vh2=', vh2)

    print(vh2 / vh)

    '''
    竖直方向减速
    '''
    vv2 = 0.83 * v * sin((90 - theta1) * pi / 180) # 0.83 为估计的恢复系数

    vv2 = 3
    print('vv2=', vv2)

    # theta1 = atan(vh / vv1) * 180 / pi
    theta2 = atan(vh2 / vv2) * 180 / pi

    print('theta1=', theta1)
    print('theta2=', theta2)

    v2 = sqrt(vv2 ** 2 + vh2 ** 2)
    print('v2=', v2)
    print('-----')

    return vv2, theta2

if __name__ == '__main__':

```

```

'''
不断撞击，角度测试
'''

vv = 3
theta = 1

vv_lst = list()
theta_lst = list()

for i in range(10):
    # vv = 3
    vv, theta = hit_again(vv, theta)
    vv_lst.append(vv)
    theta_lst.append(theta)

plt.plot(range(10), vv_lst)
plt.title('speed changes with hit times')
plt.ylabel('speed(m/s)')
plt.xlabel('hit times')
plt.show()

plt.plot(range(10), theta_lst)
plt.title('angle changes with hit times(speed unchanged)')
plt.ylabel('angle(°)')
plt.xlabel('hit times')
plt.show()

'''
做第四题，找theta
'''

# h = 0.6
# vv = sqrt(2*g*h)
#
# for a1 in np.arange(0.01, 1, 0.001):
#     vv = sqrt(2*g*h)
#     v2, a2 = hit_again(vv, a1)
#     if abs(a1 + a2 - 1) < 1e-3:
#         print(a1, a2)
#         break

```

%%% 有代码吗？