关于刚体的动量矩和动量矩定理·

刘 传 庠
(华中师范大学物理系)

在一般的普通物理力学有关刚体力学部分中,讨论过刚体绕固定轴转动的动力学问题,引入了动量矩的概念,并从牛顿第二定律出发,推导出了动量矩定理。在引入转动惯量的基础上,进一步从动量矩定理推导出了转动定律。普通物理力学不涉及刚体绕固定点的转动。因此,在转动定律中,力矩、动量矩、角速度、角加速度均表现为对轴的力学量,动量矩表示为特殊的形式 $J = I\omega$,转动定律的表达式为 $M = I\sigma$。其实,转动定律只是动量矩定理的特殊情况,只不过是动量矩定理沿固定轴的分量,上述两式必须满足一定的条件才能成立。

刚体的定点转动是理论力学研究的内容,只有从定点转动出发,引出一般的动量矩的定义和对定点的动量矩定理,将定轴转动时的转动定律,作为动量矩定理沿固定轴的分量来分析,才能加深对定轴转动下的动量矩和转动定律的理解。

1　刚体对定点的动量矩

设由 n 个质点组成的刚体,在某一时刻以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 作定点转动,取其中任一质量为 m_i 的质点 p_i,设其速度为 $\boldsymbol{v}_i$。p_i 对定点 o 的位矢为 $\boldsymbol{r}_i$(图 1),则 p_i 对 o 点的动量矩为

$$\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i$$

整个刚体对 o 点的动量矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i[\boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i[\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i)] \qquad (1)\end{aligned}$$

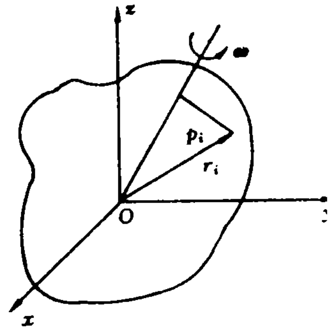

图 1

由上式看出,由于 $\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_i$ 与参照系和参照点的选择有关,所以动量矩不仅与参照系的选择有关,对于确定的参照系,动量矩还依赖于参照点的选择,这是动量矩的重要性质。与平动中动量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ 不同,在一般情况下,动量矩 $\boldsymbol{J}$ 与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向不一致,即动量矩 $\boldsymbol{J} \neq I\boldsymbol{\omega}$。

取定点 o 为坐标原点,建立直角坐标系 $o-xyz$,将 $\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$$

代入(1)式,得动量矩 $\boldsymbol{J}$ 在 x、y、z 轴方向的分量为

$$\left.\begin{aligned} J_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ J_y &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ J_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

其中,

$$\left.\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2), \\ I_{yy} &= \sum_{i=1}^{n} m_i(z_i^2 + x_i^2), \\ I_{zz} &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} I_{yz} &= I_{zy} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \\ I_{zx} &= I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i \\ I_{xy} &= I_{yx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

· 收稿日期:1999－09－18

(3) 式为轴转动惯量,(4) 式为惯量积。从(2) 式看出,刚体对定点的动量矩在各坐标轴方向的分量,决定于轴转动惯量、惯量积、角速度分量。

如果刚体绕过定点 o 的固定轴转动,我们分以下几种情况来进行讨论:

1) 如果固定轴不与 x、y、z 轴中的任一轴重合,由于角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向是沿着固定轴方向的,所以其分量 ω_x、ω_y、ω_z 都不为零。刚体在任一瞬间动量矩的分量由(2) 式决定。此时 $\boldsymbol{J} \neq I\boldsymbol{\omega}$。

2) 如果选择固定轴与 x、y、z 轴中的任一轴重合,例如固定轴与 z 轴重合,则我们有 $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \omega$,于是(2) 式变成

$$\left.\begin{aligned} J_x &= - I_{xz}\omega \\ J_y &= - I_{yz}\omega \\ J_z &= I_{zz}\omega \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(5) 式表明,即使刚体做定轴转动,而且选取固定轴与任一坐标轴重合,仍然是 $\boldsymbol{J} \neq I\boldsymbol{\omega}$。

3) 如果选择惯量主轴(或对称轴) 为坐标轴(例如 z 轴),使固定轴与这根坐标轴重合,则有

$$I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i = 0, I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i = 0$$

于是(3) 式变成

$$\left.\begin{aligned} J_x &= 0 \\ J_y &= 0 \\ J_z &= I_{zz}\omega \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

从(6) 式可以看出,在这种情况下,动量矩的 x 轴分量和 y 轴分量为零,$J_z = I_{zz}\omega$ 代表总动量矩。也只有在这种情况下,才有 $\boldsymbol{J} = I\boldsymbol{\omega}$ 的关系。

以上分析说明,不能将定轴转动而且定轴又必须是惯量主轴时的动量矩 $I\omega$ 作为动量矩的定义,因为这种定义不能反映普遍的动量矩的含义,甚至也不能反映定轴转动的动量矩。如果固定轴不与惯量主轴重合,动量矩必须由(2) 式确定,或由动量矩的定义公式(1) 确定。

2　刚体对定点的动量矩定理

设刚体由 n 个质点组成,取其中质量为 m_i 的质点 p_i,p_i 对定点 o 的位矢为 $\boldsymbol{r}_i$,受到的内力为 $\boldsymbol{F}_i^{(i)}$,外力 $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$,由质点动量矩定理得

$$\boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{F}_i^{(i)}) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) \quad (7)$$

对刚体所有质点求和,得

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(i)}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) \quad (8)$$

由于诸内力成对地出现,它们的量值相等而方向相反,并且在同一直线上,所以这些力对定点 o 的力矩之和为零,即

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(i)}) = 0$$

又因求和与求导符号先后可对换,于是(8) 式变成

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) \quad (9)$$

式中等号左方是诸外力对定点 o 的力矩的矢量和,以 $\boldsymbol{M}$ 表示;等号右方求微商符号内,是刚体对 o 点动量矩的矢量和,以 $\boldsymbol{J}$ 表示,则(9) 式简化为

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{J}}{dt} \quad (10)$$

上式就是刚体动量矩定理的数学表达式。它表明,相对于惯性系中的固定点,作用在刚体上诸外力力矩的矢量和,等于刚体动量矩对时间的微商。

将(10) 式投影在以定点 o 为原点的三直角坐标轴上,得到动量矩定理的分量表达式:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(y_i F_{iz}^{(e)} - z_i F_{iy}^{(e)}) &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(z_i F_{ix}^{(e)} - x_i F_{iz}^{(e)}) &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i F_{iy}^{(e)} - y_i F_{ix}^{(e)}) &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

上式等号左方外力矩的分量分别用 M_x、M_y、

M_z 表示,等号右方微商符号内动量矩的分量分别用 J_x、J_y、J_z 表示,则(11)式可简化为

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{dJ_x}{dt} \\ M_y &= \frac{dJ_y}{dt} \\ M_z &= \frac{dJ_z}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

如果刚体以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕过定点 o 的 z 轴作定轴转动,则由(12)式,刚体动量矩定理沿 z 轴的分量为

$$M_z = \frac{dJ_z}{dt} \tag{13}$$

由于角速度方向沿固定轴 z,所以有 $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \omega$。将这些值代入(2)式中的第3式,得

$$J_z = I_{zz}\omega \tag{14}$$

式中 I_{zz} 为刚体绕 z 轴的轴转动惯量,且为常量。将(14)式代入(13)式得

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega} = I_{zz}\alpha \tag{15}$$

这就是普通物理力学中讨论过的转动定律。

从刚体动量矩定理推导出转动定律的过程中,一直都体现出转动定律只不过是动量矩定理沿固定轴的分量,力矩和动量矩也表现为对轴的性质,因此,不能将动量矩定理表示为矢量形式

$$\boldsymbol{M} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

也不能将转动定律用外力矩和角加速度的矢量式 $\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\alpha}$ 来表示。

3　实例解析

设质量均为 m 的两质点,连接在长为 $2l$ 的轻质杆两端。两质点以匀角速 ω 绕过杆中点的固定轴转动,杆与固定轴的夹角为 θ(图2)。试求两质点转动时的动量矩和所受的外力矩。

取杆的中点 o 为坐标原点,建立活动直角坐标系 $o-xyz$,令 z 轴与固定轴重合,x 轴在 z 轴与杆构成的平面内,y 轴在图中所示时刻垂直图面向内。随质点组转动,x 轴和 y 轴都绕 z 轴以角速 ω 转动。

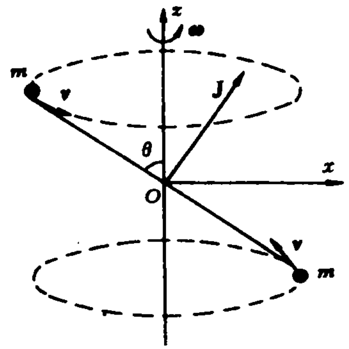

图2

因为角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向沿着 z 轴,故

$$\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \omega = \frac{v}{l\sin\theta}$$

由于 x 轴和 z 轴不是惯量主轴(非对称轴),惯量积不为零。由(2)式得

$$\left.\begin{aligned} J_x &= -I_{xz}\omega_z = -I_{xz}\omega \\ J_y &= -I_{yz}\omega_z = -I_{yz}\omega \\ J_z &= I_{zz}\omega_z = I_{zz}\omega \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

由于选取了固定在质点组上并随质点组转动的坐标系,惯量系数均为常数。上式中的惯量积和轴转动惯量分别为

$$\begin{aligned} I_{xz} &= \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [m(-l\sin\theta)(l\cos\theta) \\ &\quad + m(l\sin\theta)(-l\cos\theta)] \\ &= -2ml^2\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [m(0)(l\cos\theta) + m(0)(-l\cos\theta)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \\ &= m(-l\sin\theta)^2 + m(l\sin\theta)^2 \\ &= 2ml^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

将惯量积和轴转动惯量代入(16)式,得

$$J_x = 2ml^2\sin\theta\cos\theta\omega$$

电动机空载电流及其故障判断*

董军生
(江汉大学物理系)

异步电机出厂前都要做空载试验,空载试验所测试的参数主要有空载电流 I_o 和机械损耗 P_m。试验电路如图 1 所示:

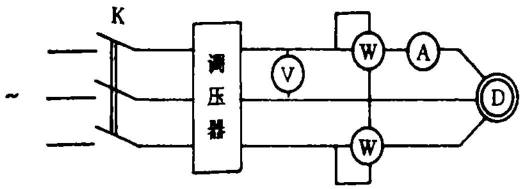

图 1

试验时,电动机和转轴不加任何负载,即电动机处于空载运行,把定子绕组接到频率额定的三相对称电源上,当电源电压为额定时,让电动机运行一段时间,使其机械损耗达到额定值,用调压器改变加在定子绕组上的电压,使其从 $(1.1-1.3)U_N$ 开始,逐渐降低电压,直到电动机转速发生明显变化为止。记录电动机端电压 U_1、空载电流 I_o、空载功率 P_o 和转速 n,并画成曲线图,如图 2 所示,即异步电动机的空载特性。

本人通过多年工作实践,谈谈如何从空载电流的异常来分析、判断电动机的故障问题。

大家知道电动机在空载运行时,其空载电流近似等于励磁电流,且空载电流

$$I_o \approx I_m = \frac{2PF_{o1}}{0.9m_1K_{w1}W_1} = \frac{2P(F_{\delta1}+F_{fe})}{0.9m_1K_{w1}W_1} \qquad (1)$$

式中 $K_{w1}=K_{q1}K_{y1}$

而 $K_{q1}=\dfrac{E_{q1}(q\text{ 个分布线圈的合成电势})}{qE_c(q\text{ 个集中线圈合成电势})}$

$$K_{y1}=\frac{E_t(y_1<\tau)}{E_t(y_1=\tau)}=\sin\left(\frac{y_1}{\tau}\times 90^\circ\right)$$

$$J_y = 0$$

$$J_z = 2ml^2\sin^2\theta\omega$$

则动量矩的量值为

$$J=\sqrt{J_x^2+J_y^2+J_z^2}=2ml^2\sin\theta\omega$$

动量矩矢量式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= J_x\boldsymbol{i}+J_y\boldsymbol{j}+J_z\boldsymbol{k}\\ &= 2ml^2\sin\theta\omega(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{k})\\ &= J(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{k})\end{aligned} \qquad (17)$$

从上式看出,动量矩 $\boldsymbol{J}$ 位于 $o-xz$ 平面内,与 x 轴的夹角为 θ。随质点组转动,矢量 $\boldsymbol{J}$ 以角速度 ω 扫出一个圆锥面。

考虑到 J、θ、$\boldsymbol{k}$ 都不随时间变化,只有 x 轴上的单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 的方向不断地变化,所以将(17)式代入动量矩定理的表达式(10),得外力矩

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \frac{d\boldsymbol{J}}{dt}=\frac{d}{dt}[J(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{k})]\\ &= J\cos\theta\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=J\cos\theta\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}\\ &= 2ml^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{J}\end{aligned}$$

上式表明,外力矩的方向沿着 y 轴。

参考文献

1　赵景员、王淑贤. 力学. 人民教育出版社,1981. 295 - 299

2　周衍柏. 理论力学教程. 高等教育出版社,1994. 176 - 181

3　蔡伯濂. 大学物理力学教学研究. 北京大学出版社,1982. 59 - 66

* 收稿日期:1999 - 07 - 08