

《计算模型导引》习题

李煦阳 DZ21330015

2022

1 递归函数

1.1 证明：对于固定的 k ，一元数论函数 $x + k \in \mathcal{BF}$

Proof. 借助恒等函数 P_1^1 与后继函数 S ，对任意 k ，可组合构造 $f_k(x) = x + k$.

$$f(x) = \begin{cases} P_1^1(x) & k = 0 \\ \underbrace{S \circ \dots \circ S}_{k-1} \circ P_1^1(x) & k > 0 \end{cases}$$

由于 $f_k(x) = x + k$ 可由基本函数 P_1^1 与 S 构造，所以 $x + k \in \mathcal{BF}$. \square

1.2 证明：对于任意 $k \in \mathbb{N}^+$ ， $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ，若 $f \in \mathcal{BF}$ ，则存在 h 使得 $f(\vec{x}) < \|\vec{x}\| + h$

Proof. 对 f 的构造长度 l 进行归纳，当 $l = 0$ 时，我们有 $f \in \mathcal{IF}$ ，此时取 $h = 2$ ，不等式显然恒成立.

对于 $l = n + 1$ 的情况，我们有归纳假设：存在 h_n ，对于构造长度小于等于 n 的函数，使得 $f(\vec{x}) < \|\vec{x}\| + h_n$ 成立. 假设构造序列为 f_1, \dots, f_n, f . 若 $f \in \mathcal{IF}$ ，显然 $f(\vec{x}) < \|\vec{x}\| + h_n + 1$. 若 $f = \text{Comp}_k^m[f_{i_0}, \dots, f_{i_k}]$ ，根据归纳假设有 $f(\vec{x}) < \max\{f_{i_j}(\vec{x})\} + h_n < \|\vec{x}\| + 2h_n$ ，此时我们找到了 $h_{n+1} = 2h_n$. \square

1.3 证明： $f(x, y) = x + y \notin \mathcal{BF}$

Proof. 使用反证法，假设 $f(x, y) = x + y \in \mathcal{BF}$ ，构造 $f'(x) = f(x, x) = 2x$ ，易证 $f' \in \mathcal{BF}$. 根据1.2可知， $\exists h \forall x, f(x) = 2x < x + h$ ，该式显然不成立，反证成立. \square

1.4 证明: $f(x, y) = x \div y \notin \mathcal{BF}$

Proof. 只需说明 $\text{pred}(x) = x \div 1 \notin \mathcal{BF}$ 即可, 因为 pred 可由 $x \div y$ 与基本函数构造出.

假设 $\text{pred} \in \mathcal{BF}$, 在其最短构造序列上做分解证明. 首先, $\text{pred} \notin \{S, Z, P\}$, 于是可设该构造序列为 f_0, \dots, f_n .

首先说明该序列中不存在对 P 的使用: 若存在, 设为 $f_i(\vec{x}) = P_i(g_1(\vec{x}), \dots, g_k(\vec{x}))$, 我们可以直接找到一个更简单的构造 $f_i(\vec{x}) = g_i(\vec{x})$ 使得序列更短.

此时思考如何使用 $\{S, Z\}$ 构造 pred . 由于两者都是一元函数, 其组合可写为 $F_0 \circ \dots \circ F_m (F_i \in \{S, Z\})$, 易知 $Z \circ \dots = Z$, 根据最短序列的假设, $\text{pred} = S^c \circ Z$ 或 $\text{pred} = S^c$, 其中 c 为某个常数.

1. $S^c \circ Z = c$, 为常数, 不满足需求.
2. $S^c = +_c$, 只会增加, 不会递减, 不满足需求.

综上, $x \div y \notin \mathcal{BF}$

□

1.5 说明 $\text{pg}(x, y) = 2^x(2y + 1) \div 1$ 为配对函数

Proof. 令 $K(z) = \text{ep}_0(z + 1), L(z) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{z+1}{2^{\text{ep}_0(z+1)}} \div 1)$. 我们注意到, $2^x(2y + 1) > 0$ 恒成立, 所以计算 pg 时 \div 可理解为 $-$; 2^x 为偶数, $2y + 1$ 为奇数.

$K(\text{pg}(x, y))$ 取 $2^x(2y + 1)$ 的 2 的指数, 即 x .

$$L(\text{pg}(x, y)) = \frac{2y}{2} = y.$$

$$\text{pg}(K(z), L(z)) = 2^{\text{ep}_0(z+1)} \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{z+1}{2^{\text{ep}_0(z+1)}} \div 1) + 1) - 1 = z + 1 - 1 = z$$

注: $2_i^{\text{ep}}(n)$ 必然被 n 整除. 为了使配对函数组满足双射, 需要避免计算出现不确定性, 如取整.

□

1.6 设 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 证明: f 可以作为配对函数的左函数当且仅当

$$\forall i \in \mathbb{N}, |\{z \in \mathbb{N} : f(z) = i\}| = \aleph_0$$

Proof. 设 $Z_{x=i} = \{z \in \mathbb{N} : f(z) = i\}$. 若存在配对函数, 设为 $pg(x, y)$, 右函数设为 $g(z)$.

\Rightarrow 根据可数选择公理, 只需证明 $\forall i, Z_{x=i}$ 是无限的. 假设对于某个 i , $Z_{x=i}$ 有限, 取 $Y_{x=i} = \{j | g(z) = j \wedge z \in Z_{x=i}\}$, 可知 $Y_{x=i}$ 也是有限的. 取任意 $y \in \mathbb{N} - Y_{x=i}$, 根据配对函数定义, $f(pg(i, y)) = i$, 这意味着 $pg(i, y) = z \in Z_{x=i}$, 这意味着 $y \in Y_{x=i}$, 矛盾.

\Leftarrow 此时, 对于任意的 i , $Z_{x=i}$ 可以与 \mathbb{N} 建立一个双射 $h_{x=i}: \mathbb{N} \rightarrow Z_{x=i}$, 其逆为 $h_{x=i}^{-1}$. 此时定义 g 如下:

$$g(z) = \begin{cases} h_{x=i}^{-1}(z) & z \in Z_{x=i}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $pg(x, y) = h_{x=x}(y)$, 显然, $\forall x, y. f(pg(x, y)) = x \wedge g(pg(x, y)) = y$, 满足配对函数定义. □

1.7 证明: 所有的初等函数, 都可以由本原函数与复合和算子 $\prod_{i=n}^m [\cdot]$ 生成, 其中,

$$\prod_{i=n}^m [f(i)] = \begin{cases} f(n) \cdot f(n+1) \cdots f(m) & m \geq n, \\ 1 & m < n \end{cases}$$

Proof. 乘法不能直接退化为加法. 我们尝试放大 $\prod_{i=n}^m [\cdot]$ 的分支计算能力, 构造以下函数. 其中, 0 可理解为布尔运算的 true, 1 理解为 false, N 可以理解为 \neg .

$$\text{pow}(x, k) = \prod_{i=1}^k x$$

$$N(x) = \prod_{i=1}^x Z(i)$$

$$\text{leq}(x, y) = \prod_{i=x}^y Z(i)$$

$$\text{geq}(x, y) = \prod_{i=y}^x Z(i)$$

$$\text{and}(x, y) = \text{pow}(x, N(y)) \quad (x, y \in \{0, 1\})$$

$$\text{eq}(x, y) = \text{and}(\text{leq}(x, y), \text{geq}(x, y))$$

利用 eq 可以构造求解某范围内函数所有零点的积的函数 h （若没有零点，返回 1）。若我们准确知道函数 f 具有唯一零点，那么 h 便可以准确求得该零点。

$$h(n)[f(x)] = \prod_{i=0}^n i^{N(\text{eq}(f(i), 0))}$$

令 $f(i) = 2^i - n$ ，取 $\log(x) = \prod_{i=0}^n i^{N(\text{eq}(2^i - n, 0))}$ ，由于 $\log(x)$ 若存在解，该解一定在 $[0, x]$ 间，所以该定义可以准确求解 2^k 得对数。现在可利用该函数将乘法退化为加法。

$$\sum_{i=n}^m f(i, \vec{x}) = \log\left(\prod_{i=n}^m 2^{f(i, \vec{x})}\right)$$

于是可以构造其他基本初等函数（注意到 $\sum_{i=m}^n [\cdot] = 0$ if $m > n$ ）：

$$x \times y = \sum_{i=1}^x y$$

$$x + y = \log(2^x \times 2^y)$$

$$x \dot{-} y = \left(\sum_{i=x+1}^y 1 + \sum_{i=y+1}^x 1 \right)$$

□

1.8 设

$$M(x) = \begin{cases} M(M(x+11)) & x \leq 100, \\ x-10 & x > 100. \end{cases}$$

试证明：

$$M(x) = \begin{cases} 91 & x \leq 100, \\ x-10 & x > 100. \end{cases}$$

Proof. 分类情况讨论，首先可知 $M(101) = 91$.

$$90 \leq x \leq 100 \quad M(x) = M(x+1) = \cdots = M(101) = 91.$$

$$0 \leq x \leq 90 \quad \exists k, n. 91 \leq x + 11k \leq 101 \wedge M(x) = M^n \circ M(x + 11k) = M^n(91) = 91 \quad (\text{注：易证 } \forall n. M^n(91) = 91.) \quad \square$$

1.9 证明： $\min x \leq n.[f(x, \vec{y})] = n - \max x \leq n.[f(n-x, \vec{y})]$.

Proof. 若 $f(x, \vec{y})$ 关于 x 在范围内不存在零点，等式 $n = n - 0$ 显然成立.

若 $f(x, \vec{y})$ 存在零点，我们设最小零点为 m ，最大零点为 M . 可知对于任意 $a < m$, $f(a, \vec{y}) \neq 0$. 我们尝试说明 $x = n - m$ 是 $f(n-x, \vec{y})$ 的最大零点.

1. 由于 $f(n - (n - m), \vec{y}) = f(m, y) = 0$, $x = n - m$ 是零点.
2. 假设 $x = (n - m)$ 不是最大零点, 那么 $\exists k > 0. x' = n - m + k \wedge f(n - x', \vec{y}) = 0$. 化简得 $f(n - x', \vec{y}) = f(n - n + m - k, \vec{y}) = f(m - k, \vec{y}) = 0$.
 - (a) 若 $m = 0$, 则与 $n - m$ 为不是最大零点矛盾
 - (b) 若 $m > 0$, 则 $\exists m' = m - k, m' < m \wedge f(m', \vec{y}) = 0$, 与 m 为最小零点矛盾.

综上, 得证. 对称形式用相似方法亦可证.

□

1.10 证明: \mathcal{EF} 对有界 max-算子封闭

Proof.

$$\sum_{i=0}^n [N(\prod_{j=0}^i [N^2(f(n-j, \vec{y}))])] = \begin{cases} \max x \leq n.[f(x, \vec{y})] + 1 & \exists x. f(x, \vec{y}) = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

所以,

$$\max x \leq n.[f(x, \vec{y})] = \sum_{i=0}^n [N(\prod_{j=0}^i [N^2(f(n-j, \vec{y}))])] \div 1$$

于是对于任意 $f \in \mathcal{EF}$, $\max x \leq n.[f(x, \vec{y})] \in \mathcal{EF}$, 所以 \mathcal{EF} 对该算子封闭.

□

1.11 Euler 函数 $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 定义为

$$\varphi(n) = |\{x \mid 0 < x \leq n \wedge \gcd(x, n) = 1\}|,$$

证明 $\varphi \in \mathcal{EF}$.

Proof.

$$\varphi(n) = \sum_{m=1}^n \prod_{j=0}^n (N(\text{ep}(j, n) = 0 \vee \text{ep}(j, m) = 0))$$

□

1.12 令 $h(x)$ 计算 x 的最大素因子下标, 证明 $h \in \mathcal{EF}$.

Proof.

$$h(x) = \max n \leq x. [\text{ep}(n, x) \neq 0].$$

□

1.13 对于斐波那契函数 f , 证明 (1) $f \in \mathcal{PRF}$ (2) $f \in \mathcal{EF}$.

Proof. 寻找原始递归的构造时, 需要借助配对函数, 使返回值可以包含多个值, 用以传递前两层的结果。

我们令 $\{\text{pg}, K, L\}$ 为 \mathcal{PRF} 的一个配对函数, 构造 F :

$$F(0) = \text{pg}(1, 0)$$

$$F(x+1) = \text{pg}(K(F(x)) + L(F(x)), K(F(x)))$$

此时, $f(x) = K(F(x)), f(x \div 1) = L(F(x))$. 因而 $f \in \mathcal{PRF}$.

了解到斐波那契递归对应的原始问题: $f(x)$ 计算了长度为 $x-1$ 的不包含连续 1 的二进制串数量. (两个子问题: 串首位为 0 或首位为 10).

该问题可以用初等函数以遍历形式表达, 以说明 $f \in \mathcal{EF}$:

$$f(n) = \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} N \left[\sum_{i=0}^{n-2} \text{neq} \left(\frac{\text{rs}(i, 2^j)}{2^{j-1}} \right) \text{neq} \left(\frac{\text{rs}(i, 2^{j+1})}{2^j} \right) \right]$$

该函数对范围内满足检查的自然数进行计数: 检查每个自然数的每相邻两位不存在同时等于 1 的情况. □

1.14 证明 $Q(x, y, z, v) \equiv p(\langle x, y, z \rangle) \mid v$ 是初等函数.

Proof. 由于 $p \in \mathcal{EF}$, 且 $\langle x, y, z \rangle = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \in \mathcal{EF}$,

$x \mid y = \text{eq}(\text{rs}(y, x), 0) \in \mathcal{EF}$. 所以 $Q \in \mathcal{EF}$. □

1.15 证明 $f \in \mathcal{PRF}$, f 定义为

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 4$$

$$f(2) = 6$$

$$f(x+3) = f(x) + (f(x+1))^2 + (f(x+2))^3$$

Proof. 与1.13类似, 如下定义 F :

$$F(0) = \langle 1, 4, 6 \rangle$$

$$F(x+1) = \langle \text{ep}_1(F(x)), \text{ep}_2(F(x)), \text{ep}_0(F(x)) + \text{ep}_1^2(F(x)) + \text{ep}_2^3(F(x)) \rangle$$

$$\text{于是 } f(x) = \text{ep}_0(F(x)).$$

□

1.16 设 $f(n) = n^{\cdot n}$, 证明 $f \in \mathcal{PRF} - \mathcal{EF}$.

Proof. 首先证 $f \in \mathcal{PRF}$. 构造递归函数 g , $g(n, 0) = 0, g(n, x+1) = n^{g(n, x)}$, 显然 $f(n) = g(n, n)$, 由于 $g \in \mathcal{PRF}$, 所以 $f \in \mathcal{PRF}$.

然后反证 $f \notin \mathcal{EF}$. 若 $f \in \mathcal{EF}$, 我们能找到 k , 使得对于任意 n , 控制函数 $G(k, n) > f(n)$ 恒成立. 但显然, $f(k+2) = (k+2)^{\cdot k+2} > G(k, k+2) = 2^{\cdot k+2}$ (幂级的长度和每一个幂级的数字, 前者都更大). 所以 $f \notin \mathcal{EF}$.

□

1.17 设 $g \in \mathcal{PRF}$, 证明 $f \in \mathcal{PRF}$

$$f(x, 0) = g(x)$$

$$f(x, y+1) = f(f(\dots f(f(x, y), y-1), \dots), 0)$$

Proof.

□

1.18 若 $f, g \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 只在有限作用域的函数值不同,
证明 $f \in \mathcal{GRF} \iff g \in \mathcal{GRF}$.

Proof.

□

1.19 证明 $\left\lfloor \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)n \right\rfloor \in \mathcal{EF}$.

Proof.

□

1.20 Ack.

Proof.

□