《计算模型导引》习题

李煦阳　DZ21330015

2022

1 递归函数

1.1 证明：对于固定的 k，一元数论函数 $x+k \in \mathcal{BF}$

Proof. 借助恒等函数 P_1^1 与后继函数 S，对任意 k，可组合构造 $f_k(x) = x+k$.

$$f(x) = \begin{cases} P_1^1(x) & k=0 \\ \underbrace{S\circ\cdots\circ S}_{k-1}\circ P_1^1(x) & k>0 \end{cases}$$

由于 $f_k(x)=x+k$ 可由基本函数 P_1^1 与 S 构造, 所以 $x+k \in \mathcal{BF}$. □

1.2 证明：对于任意 $k \in \mathbb{N}^+$，$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$，若 $f \in \mathcal{BF}$，则存在 h 使得 $f(\vec{x}) < ||\vec{x}|| + h$

Proof. 对 f 的构造长度 l 进行归纳，当 $l=0$ 时，我们有 $f \in \mathcal{IF}$，此时取 $h=2$，不等式显然恒成立.

对于 $l=n+1$ 的情况, 我们有归纳假设: 存在 h_n, 对于构造长度小于等于 n 的函数, 使得 $f(\vec{x}) < ||\vec{x}||+h_n$ 成立. 假设构造序列为 $f_1,\ldots,f_n,f$. 若 $f \in \mathcal{IF}$，显然 $f(\vec{x}) < ||\vec{x}|| + h_n + 1$. 若 $f = \mathrm{Comp}_k^m[f_{i_0},\ldots,f_{i_k}]$，根据归纳假设有 $f(\vec{x}) < max\{f_{i_j}(\vec{x})\} + h_n < ||\vec{x}|| + 2h_n$，此时我们找到了 $h_{n+1} = 2h_n$.

□

1.3 证明：$f(x,y) = x+y \notin \mathcal{BF}$

Proof. 使用反证法,假设 $f(x,y)=x+y \in \mathcal{BF}$,构造 $f'(x) = f(x,x) = 2x$, 易证 $f' \in \mathcal{BF}$. 根据1.2可知，$\exists h \forall x, f(x) = 2x < x+h$，该式显然不成立，反证成立.

□

1.4 证明：$f(x,y) = x \dot{-} y \notin \mathcal{BF}$

Proof. 只需说明 $\mathrm{pred}(x) = x \dot{-} 1 \notin \mathcal{BF}$ 即可，因为 pred 可由 $x \dot{-} y$ 与基本函数构造出.

假设 $\mathrm{pred} \in \mathcal{BF}$，在其最短构造序列上做分解证明. 首先，$\mathrm{pred} \notin \{S, Z, P\}$，于是可设该构造序列为 $f_0, \ldots, f_n$.

首先说明该序列中不存在对 P 的使用：若存在，设为
$f_i(\vec{x}) = P_i(g_1(\vec{x}), \ldots, g_k(\vec{x}))$,我们可以直接找到一个更简单的构造 $f_i(\vec{x}) = g_i(\vec{x})$ 使得序列更短.

此时思考如何使用 $\{S, Z\}$ 构造 pred. 由于两者都是一元函数，其组合可写为 $F_0 \circ \cdots \circ F_m (F_i \in \{S, Z\})$，易知 $Z \circ \cdots = Z$，根据最短序列的假设，$\mathrm{pred} = S^c \circ Z$ 或 $\mathrm{pred} = S^c$，其中 c 为某个常数.

1. $S^c \circ Z = c$，为常数，不满足需求.
2. $S^c = +_c$，只会增加，不会递减，不满足需求.

综上，$x \dot{-} y \notin \mathcal{BF}$

□

1.5 说明 $\mathrm{pg}(x,y) = 2^x(2y+1) \dot{-} 1$ 为配对函数

Proof. 令 $K(z) = \mathrm{ep}_0(z+1), L(z) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{z+1}{2^{\mathrm{ep}_0(z+1)}} \dot{-} 1)$. 我们注意到，$2^x(2y+1) > 0$ 恒成立，所以计算 pg 时 $\dot{-}$ 可理解为 $-$；2^x 为偶数，$2y+1$ 为奇数.

$K(pg(x,y))$ 取 $2^x(2y+1)$ 的 2 的指数，即 x.

$L(pg(x,y)) = \frac{2y}{2} = y$.

$\mathrm{pg}(K(z), L(z)) = 2^{\mathrm{ep}_0(z+1)} \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{z+1}{2^{\mathrm{ep}_0(z+1)}} \dot{-} 1) + 1) - 1 = z + 1 - 1 = z$

注：$2_i^{\mathrm{ep}}(n)$ 必然被 n 整除. 为了使配对函数组满足双射，需要避免计算出现不确定性，如取整.

□

1.6 设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，证明：$f$ 可以作为配对函数的左函数当且仅当 $\forall i\in\mathbb{N}, |\{z\in\mathbb{N}: f(z)=i\}|=\aleph_0$

Proof. 设 $Z_{x=i}=\{z\in\mathbb{N}: f(z)=i\}$. 若存在配对函数，设为 $\mathrm{pg}(x,y)$，右函数设为 $g(z)$.

$\Rightarrow$ 根据可数选择公理，只需证明 $\forall i, Z_{x=i}$ 是无限的. 假设对于某个 i，$Z_{x=i}$ 有限，取 $Y_{x=i}=\{j|g(z)=j\wedge z\in Z_{x=i}\}$，可知 $Y_{x=i}$ 也是有限的. 取任意 $y\in\mathbb{N}-Y_{x=i}$，根据配对函数定义，$f(pg(i,y))=i$，这意味着 $pg(i,y)=z\in Z_{x=i}$，这意味着 $y\in Y_{x=i}$，矛盾.

$\Leftarrow$ 此时，对于任意的 i，$Z_{x=i}$ 可以与 $\mathbb{N}$ 建立一个双射 $h_{x=i}:\mathbb{N}\to Z_{x=i}$，其逆为 $h^{-1}_{x=i}$. 此时定义 g 如下：

$$g(z)=\begin{cases} h^{-1}_{x=i}(z) & z\in Z_{x=i}, \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

令 $\mathrm{pg}(x,y)=h_{x=x}(y)$，显然，$\forall x,y.\ f(pg(x,y))=x\wedge g(pg(x,y))=y$，满足配对函数定义.

□

1.7 证明：所有的初等函数，都可以由本原函数与复合和算子 $\prod_{i=n}^{m}[\cdot]$ 生成，其中，

$$\prod_{i=n}^{m}[f(i)]=\begin{cases} f(n)\cdot f(n+1)\cdot\cdots\cdot f(m) & m\geq n, \\ 1 & m<n\end{cases}$$

Proof. 乘法不能直接退化为加法. 我们尝试放大 $\prod_{i=n}^{m}[\cdot]$ 的分支计算能力，构造以下函数. 其中，0 可理解为布尔运算的 true，1 理解为 false，N 可以理解为 $\neg$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{pow}(x,k) &= \prod_{i=1}^{k} x \\
N(x) &= \prod_{i=1}^{x} Z(i) \\
\mathrm{leq}(x,y) &= \prod_{i=x}^{y} Z(i) \\
\mathrm{geq}(x,y) &= \prod_{i=y}^{x} Z(i) \\
\mathrm{and}(x,y) &= \mathrm{pow}(x, N(y)) \quad (x,y \in \{0,1\}) \\
\mathrm{eq}(x,y) &= \mathrm{and}(\mathrm{leq}(x,y), \mathrm{geq}(x,y))
\end{aligned}
$$

利用 eq 可以构造求解某范围内函数所有零点的积的函数 h（若没有零点，返回 1）. 若我们准确知道函数 f 具有唯一零点，那么 h 便可以准确求得该零点.

$$
h(n)[f(x)] = \prod_{i=0}^{n} i^{N(\mathrm{eq}(f(i),0))}
$$

令 $f(i) = 2^i - n$，取 $\log(x) = \prod_{i=0}^{n} i^{N(\mathrm{eq}(2^i - n, 0))}$，由于 $\log(x)$ 若存在解，该解一定在 $[0,x]$ 间，所以该定义可以准确求解 2^k 得对数. 现在可利用该函数将乘法退化为加法.

$$
\sum_{i=n}^{m} f(i,\vec{x}) = \log(\prod_{i=n}^{m} 2^{f(i,\vec{x})})
$$

于是可以构造其他基本初等函数（注意到 $\sum_{i=m}^{n}[\cdot] = 0\ if\, m > n$）:

$$
\begin{aligned}
x \times y &= \sum_{i=1}^{x} y \\
x + y &= \log(2^x \times 2^y) \\
x \dot{-} y &= (\sum_{i=x+1}^{y} 1 + \sum_{i=y+1}^{x} 1)
\end{aligned}
$$

□

1.8 设

$$
M(x) = \begin{cases} M(M(x+11)) & x \leq 100, \\ x - 10 & x > 100. \end{cases}
$$

试证明:

$$
M(x) = \begin{cases} 91 & x \leq 100, \\ x - 10 & x > 100. \end{cases}
$$

Proof. 分类情况讨论，首先可知 $M(101) = 91$.

$90 \leq x \leq 100 \quad M(x) = M(x+1) = \cdots = M(101) = 91.$

$0 \leq x \leq 90 \quad \exists k, n.\ 91 \leq x + 11k \leq 101 \wedge M(x) = M^n \circ M(x+11k) = M^n(91) = 91$（注：易证 $\forall n.\ M^n(91) = 91.$）. □

1.9 证明：$\min x \leq n.[f(x, \vec{y})] = n - \max x \leq n.[f(n-x, \vec{y})]$.

Proof. 若 $f(x, \vec{y})$ 关于 x 在范围内不存在零点，等式 $n = n - 0$ 显然成立.

若 $f(x, \vec{y})$ 存在零点，我们设最小零点为 m，最大零点为 M. 可知对于任意 $a < m$，$f(a, \vec{y}) \neq 0$. 我们尝试说明 $x = n - m$ 是 $f(n-x, \vec{y})$ 的最大零点.

1. 由于 $f(n-(n-m),\vec{y})=f(m,y)=0$，$x=n-m$ 是零点.
2. 假设 $x=(n-m)$ 不是最大零点，那么 $\exists k>0.\ x'=n-m+k\wedge f(n-x',\vec{y})=0$. 化简得 $f(n-x',\vec{y})=f(n-n+m-k,\vec{y})=f(m-k,\vec{y})=0$.
   (a) 若 $m=0$，则与 $n-m$ 为不是最大零点矛盾
   (b) 若 $m>0$，则 $\exists m'=m-k, m'<m\wedge f(m,\vec{y})=0$，与 m 为最小零点矛盾.

综上，得证. 对称形式用相似方法亦可证.

$\square$

1.10 证明：$\mathcal{EF}$ 对有界 max-算子封闭

Proof.

$$\sum_{i=0}^{n}[N(\prod_{j=0}^{i}[N^2(f(n-j,\vec{y}))])]=\begin{cases}\max x\le n.[f(x,\vec{y})]+1 & \exists x.\ f(x,\vec{y})=0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

所以，

$$\max x\le n.[f(x,\vec{y})]=\sum_{i=0}^{n}[N(\prod_{j=0}^{i}[N^2(f(n-j,\vec{y}))])]\dot{-}1$$

于是对于任意 $f\in\mathcal{EF}$，$\max x\le n.[f(x,\vec{y})]\in\mathcal{EF}$，所以 $\mathcal{EF}$ 对该算子封闭.

$\square$

1.11 Euler 函数 $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$\varphi(n)=|\{x\mid 0<x\le n\wedge \gcd(x,n)=1\}|,$$

证明 $\varphi\in\mathcal{EF}$.

Proof.

$$\varphi(n)=\sum_{m=1}^{n}\prod_{j=0}^{n}(N(\mathrm{ep}(j,n)=0\vee \mathrm{ep}(j,m)=0))$$

$\square$

1.12 令 $h(x)$ 计算 x 的最大素因子下标，证明 $h \in \mathcal{EF}$.

Proof.

$$h(x) = \max n \leq x.[\mathrm{ep}(n, x) \neq 0].$$

□

1.13 对于斐波那契函数 f，证明 (1) $f \in \mathcal{PRF}$ (2) $f \in \mathcal{EF}$.

Proof. 寻找原始递归的构造时，需要借助配对函数，使返回值可以包含多个值，用以传递前两层的结果。

我们令 $\{\mathrm{pg}, K, L\}$ 为 $\mathcal{PRF}$ 的一个配对函数，构造 F：

$$\begin{aligned} F(0) &= \mathrm{pg}(1, 0) \\ F(x+1) &= \mathrm{pg}(K(F(x)) + L(F(x)), K(F(x))) \end{aligned}.$$

此时，$f(x) = K(F(x)), f(x \dot{-} 1) = L(F(x))$. 因而 $f \in \mathcal{PRF}$.

了解到斐波那契递归对应的原始问题：$f(x)$ 计算了长度为 $x - 1$ 的不包含连续 1 的二进制串数量.（两个子问题：串首位为 0 或首位为 10）.

该问题可以用初等函数以遍历形式表达，以说明 $f \in \mathcal{EF}$：

$$f(n) = \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} N\left[\sum_{i=0}^{n-2} \mathrm{neq}\left(\frac{\mathrm{rs}(i, 2^j)}{2^{j-1}}\right) \mathrm{neq}\left(\frac{\mathrm{rs}(i, 2^{j+1})}{2^j}\right)\right]$$

该函数对范围内满足检查的自然数进行计数：检查每个自然数的每相邻两位不存在同时等于 1 的情况. □

1.14 证明 $Q(x, y, z, v) \equiv p(\langle x, y, z \rangle) \mid v$ 是初等函数.

Proof. 由于 $p \in \mathcal{EF}$，且 $\langle x, y, z \rangle = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \in \mathcal{EF}$，
$x \mid y = \mathrm{eq}(\mathrm{rs}(y, x), 0) \in \mathcal{EF}$. 所以 $Q \in \mathcal{EF}$. □

1.15 证明 $f \in \mathcal{PRF}$，f 定义为

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f(1) &= 4 \\
f(2) &= 6 \\
f(x+3) &= f(x) + (f(x+1))^2 + (f(x+2))^3
\end{aligned}
.
$$

Proof. 与1.13类似，如下定义 F：

$$
\begin{aligned}
F(0) &= \langle 1, 4, 6 \rangle \\
F(x+1) &= \langle \mathrm{ep}_1(F(x)), \mathrm{ep}_2(F(x)), \mathrm{ep}_0(F(x)) + \mathrm{ep}_1^2(F(x)) + \mathrm{ep}_2^3(F(x)) \rangle
\end{aligned}
.
$$

于是 $f(x) = \mathrm{ep}_0(F(x))$.

□

1.16 设 $f(n) = n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}$，证明 $f \in \mathcal{PRF} - \mathcal{EF}$.

Proof. 首先证 $f \in \mathcal{PRF}$. 构造递归函数 g，$g(n,0) = 0, g(n,x+1) = n^{g(n,x)}$，显然 $f(n) = g(n,n)$，由于 $g \in \mathcal{PRF}$，所以 $f \in \mathcal{PRF}$.

然后反证 $f \notin \mathcal{EF}$. 若 $f \in \mathcal{EF}$，我们能找到 k，使得对于任意 n，控制函数 $G(k,n) > f(n)$ 恒成立. 但显然，$f(k+2) = (k+2)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k+2}}}} > G(k,k+2) = 2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k+2}}}}$（幂级的长度和每一个幂级的数字，前者都更大）. 所以 $f \notin \mathcal{EF}$.

□

1.17 设 $g \in \mathcal{PRF}$，证明 $f \in \mathcal{PRF}$

$$
\begin{aligned}
f(x,0) &= g(x) \\
f(x,y+1) &= f(f(\ldots f(f(x,y),y-1),\ldots),0)
\end{aligned}
$$

.

Proof. 易见，$f(x,y) = g^{2^{(y \dot{-} 1)}}$. 此时可以构造原始递归式计算 $g^n(x)$.

$$G(x,0) = g(0)$$
$$G(x,y+1) = g(G(x,y))$$

显然 $f(x,y) \in \mathcal{PRF}$.

□

1.18 若 $f,g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 只在有限作用域的函数值不同，证明 $f \in \mathcal{GRF} \iff g \in \mathcal{GRF}$.

Proof. 设这个作用域为 $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$，根据题意，有 $\forall x \in \mathbb{N} - S$, $f(x) = g(x)$.

此时可基于 f 在 $\mathcal{GRF}$ 构造 $G = g$，它在 $x \in S$ 时取 $G(x) = g(x)$，在 $x \in \mathbb{N} - S$ 时取 $G(x) = f(x)$.

$$G(x) = \sum_{i=0}^{k} g(s_i) \cdot N(\mathrm{eq}(s_i, x)) + N\left(\sum_{i=0}^{k} N\left(\mathrm{eq}(s_i, x)\right)\right) f(x).$$

对于前半表达式，由于 S 有限，它属于 $\mathcal{GRF}$. 后者保持 $f \in \mathcal{GRF}$. 所以 $F \in \mathcal{GRF}$. 对称证明类似.

□

1.19 证明 $\left\lfloor \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) n \right\rfloor \in \mathcal{EF}$.

Proof.

$$f(n) = \max_z z \leq n.\ [(2z-n)^2 - 5n^2]$$

显然 $f \in \mathcal{EF}$.

□

1.20 证明 $\mathrm{Ack}(4,n) \in \mathcal{PRF} - \mathcal{RF}$.

Proof. $f(n) = \mathrm{Ack}(4,n)$，我们可以为 f 写递归式：

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \mathrm{Ack}(4,0) = 13 \\
f(n+1) &= \mathrm{Ack}(4,n+1) = \mathrm{Ack}(3,f(n)) = 2^{f(n)+3} \dot{-} 3
\end{aligned}
$$

所以 $f \in \mathcal{PRF}$.

假设 $f \in \mathcal{EF}$，则存在 k 使得 $f(n) < G(k,n)$. 但 $f(n) = \underbrace{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}_{n+3} - 3$，增长率显然 f 一定比控制函数更快，进而 $f \notin \mathcal{EF}$.

□

1.21 设 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是双射函数，证明 $f \in \mathcal{GRF} \Leftrightarrow f^{-1} \in \mathcal{GRF}$.

Proof. 双射意味着 $\forall x_1, x_2, y$，$f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y \Rightarrow x_1 = x_2$. 也即，$f^{-1}(y) = \mu x.\ [f(x) \doteq y]$.

显然命题成立.

□

1.22 设 $p(x)$ 为整系数多项式，令 $f(a)$ 定义为 $p(x) - a$ 对于 x 的最小非负整数根，证明 $f \in \mathcal{RF}$.

Proof.

$$f(a) = \mu x.\ [p(x) \doteq a]$$

显然 $f \in \mathcal{RF}$.

□

1.23 设

$$
f(x,y) = \begin{cases} x/y & y \neq 0 \wedge y \mid x, \\ \perp & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

证明 $f \in \mathcal{RF}$.

Proof. $f(x,y) = \mu z.\ [(zy \doteq x)(N(y))]$.

□