

《计算模型导引》习题

李煦阳 DZ21330015

2022

1 递归函数

1.1 证明：对于固定的 k ，一元数论函数 $x + k \in \mathcal{BF}$

Proof. 借助恒等函数 P_1^1 与后继函数 S ，对任意 k ，可组合构造 $f_k(x) = x + k$.

$$f(x) = \begin{cases} P_1^1(x) & k = 0 \\ \underbrace{S \circ \dots \circ S}_{k-1} \circ P_1^1(x) & k > 0 \end{cases}$$

由于 $f_k(x) = x + k$ 可由基本函数 P_1^1 与 S 构造，所以 $x + k \in \mathcal{BF}$. \square

1.2 证明：对于任意 $k \in \mathbb{N}^+$ ， $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ，若 $f \in \mathcal{BF}$ ，则存在 h 使得 $f(\vec{x}) < \|\vec{x}\| + h$

Proof. 对 f 的构造长度 l 进行归纳，当 $l = 0$ 时，我们有 $f \in \mathcal{IF}$ ，此时取 $h = 2$ ，不等式显然恒成立.

对于 $l = n + 1$ 的情况，我们有归纳假设：存在 h_n ，对于构造长度小于等于 n 的函数，使得 $f(\vec{x}) < \|\vec{x}\| + h_n$ 成立. 假设构造序列为 f_1, \dots, f_n, f . 若 $f \in \mathcal{IF}$ ，显然 $f(\vec{x}) < \|\vec{x}\| + h_n + 1$. 若 $f = \text{Comp}_k^m[f_{i_0}, \dots, f_{i_k}]$ ，根据归纳假设有 $f(\vec{x}) < \max\{f_{i_j}(\vec{x})\} + h_n < \|\vec{x}\| + 2h_n$ ，此时我们找到了 $h_{n+1} = 2h_n$.

\square

1.3 证明： $f(x, y) = x + y \notin \mathcal{BF}$

Proof. 使用反证法，假设 $f(x, y) = x + y \in \mathcal{BF}$ ，构造 $f'(x) = f(x, x) = 2x$ ，易证 $f' \in \mathcal{BF}$. 根据1.2可知， $\exists h \forall x, f(x) = 2x < x + h$ ，该式显然不成立，反证成立.

\square

1.4 证明: $f(x, y) = x \div y \notin \mathcal{BF}$

Proof. 只需说明 $\text{pred}(x) = x \div 1 \notin \mathcal{BF}$ 即可, 因为 pred 可由 $x \div y$ 与基本函数构造出.

假设 $\text{pred} \in \mathcal{BF}$, 在其最短构造序列上做分解证明. 首先, $\text{pred} \notin \{S, Z, P\}$, 于是可设该构造序列为 f_0, \dots, f_n .

首先说明该序列中不存在对 P 的使用: 若存在, 设为 $f_i(\vec{x}) = P_i(g_1(\vec{x}), \dots, g_k(\vec{x}))$, 我们可以直接找到一个更简单的构造 $f_i(\vec{x}) = g_i(\vec{x})$ 使得序列更短.

此时思考如何使用 $\{S, Z\}$ 构造 pred . 由于两者都是一元函数, 其组合可写为 $F_0 \circ \dots \circ F_m (F_i \in \{S, Z\})$, 易知 $Z \circ \dots = Z$, 根据最短序列的假设, $\text{pred} = S^c \circ Z$ 或 $\text{pred} = S^c$, 其中 c 为某个常数.

1. $S^c \circ Z = c$, 为常数, 不满足需求.
2. $S^c = +_c$, 只会增加, 不会递减, 不满足需求.

综上, $x \div y \notin \mathcal{BF}$

□

1.5 说明 $\text{pg}(x, y) = 2^x(2y + 1) \div 1$ 为配对函数

Proof. 令 $K(z) = \text{ep}_0(z + 1), L(z) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{z+1}{2^{\text{ep}_0(z+1)}} \div 1)$. 我们注意到, $2^x(2y + 1) > 0$ 恒成立, 所以计算 pg 时 \div 可理解为 $-$; 2^x 为偶数, $2y + 1$ 为奇数.

$K(\text{pg}(x, y))$ 取 $2^x(2y + 1)$ 的 2 的指数, 即 x .

$L(\text{pg}(x, y)) = \frac{2y}{2} = y$.

$\text{pg}(K(z), L(z)) = 2^{\text{ep}_0(z+1)} \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{z+1}{2^{\text{ep}_0(z+1)}} \div 1) + 1) - 1 = z + 1 - 1 = z$

注: $2_i^{\text{ep}}(n)$ 必然被 n 整除. 为了使配对函数组满足双射, 需要避免计算出现不确定性, 如取整.

□

1.6 设 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 证明: f 可以作为配对函数的左函数当且仅当

$$\forall i \in \mathbb{N}, |\{z \in \mathbb{N} : f(z) = i\}| = \aleph_0$$

Proof. 设 $Z_{x=i} = \{z \in \mathbb{N} : f(z) = i\}$. 若存在配对函数, 设为 $pg(x, y)$, 右函数设为 $g(z)$.

\Rightarrow 根据可数选择公理, 只需证明 $\forall i, Z_{x=i}$ 是无限的. 假设对于某个 i , $Z_{x=i}$ 有限, 取 $Y_{x=i} = \{j | g(z) = j \wedge z \in Z_{x=i}\}$, 可知 $Y_{x=i}$ 也是有限的. 取任意 $y \in \mathbb{N} - Y_{x=i}$, 根据配对函数定义, $f(pg(i, y)) = i$, 这意味着 $pg(i, y) = z \in Z_{x=i}$, 这意味着 $y \in Y_{x=i}$, 矛盾.

\Leftarrow 此时, 对于任意的 i , $Z_{x=i}$ 可以与 \mathbb{N} 建立一个双射 $h_{x=i}: \mathbb{N} \rightarrow Z_{x=i}$, 其逆为 $h_{x=i}^{-1}$. 此时定义 g 如下:

$$g(z) = \begin{cases} h_{x=i}^{-1}(z) & z \in Z_{x=i}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $pg(x, y) = h_{x=x}(y)$, 显然, $\forall x, y. f(pg(x, y)) = x \wedge g(pg(x, y)) = y$, 满足配对函数定义.

□

1.7 证明: 所有的初等函数, 都可以由本原函数与复合和算子 $\prod_{i=n}^m [\cdot]$ 生成, 其中,

$$\prod_{i=n}^m [f(i)] = \begin{cases} f(n) \cdot f(n+1) \cdots f(m) & m \geq n, \\ 1 & m < n \end{cases}$$

Proof. 乘法不能直接退化为加法. 我们尝试放大 $\prod_{i=n}^m [\cdot]$ 的分支计算能力, 构造以下函数. 其中, 0 可理解为布尔运算的 true, 1 理解为 false, N 可以理解为 \neg .

$$\text{pow}(x, k) = \prod_{i=1}^k x$$

$$N(x) = \prod_{i=1}^x Z(i)$$

$$\text{leq}(x, y) = \prod_{i=x}^y Z(i)$$

$$\text{geq}(x, y) = \prod_{i=y}^x Z(i)$$

$$\text{and}(x, y) = \text{pow}(x, N(y)) \quad (x, y \in \{0, 1\})$$

$$\text{eq}(x, y) = \text{and}(\text{leq}(x, y), \text{geq}(x, y))$$

利用 eq 可以构造求解某范围内函数所有零点的积的函数 h （若没有零点，返回 1）。若我们准确知道函数 f 具有唯一零点，那么 h 便可以准确求得该零点。

$$h(n)[f(x)] = \prod_{i=0}^n i^{N(\text{eq}(f(i), 0))}$$

令 $f(i) = 2^i - n$ ，取 $\log(x) = \prod_{i=0}^n i^{N(\text{eq}(2^i - n, 0))}$ ，由于 $\log(x)$ 若存在解，该解一定在 $[0, x]$ 间，所以该定义可以准确求解 2^k 得对数。现在可利用该函数将乘法退化为加法。

$$\sum_{i=n}^m f(i, \vec{x}) = \log\left(\prod_{i=n}^m 2^{f(i, \vec{x})}\right)$$

于是可以构造其他基本初等函数（注意到 $\sum_{i=m}^n [\cdot] = 0$ if $m > n$ ）：

$$x \times y = \sum_{i=1}^x y$$

$$x + y = \log(2^x \times 2^y)$$

$$x \dot{-} y = \left(\sum_{i=x+1}^y 1 + \sum_{i=y+1}^x 1 \right)$$

□

1.8 设

$$M(x) = \begin{cases} M(M(x+11)) & x \leq 100, \\ x-10 & x > 100. \end{cases}$$

试证明：

$$M(x) = \begin{cases} 91 & x \leq 100, \\ x-10 & x > 100. \end{cases}$$

Proof. 分类情况讨论，首先可知 $M(101) = 91$.

$$90 \leq x \leq 100 \quad M(x) = M(x+1) = \cdots = M(101) = 91.$$

$$0 \leq x \leq 90 \quad \exists k, n. 91 \leq x + 11k \leq 101 \wedge M(x) = M^n \circ M(x + 11k) = M^n(91) = 91 \quad (\text{注：易证 } \forall n. M^n(91) = 91.) \quad \square$$

1.9 证明： $\min x \leq n.[f(x, \vec{y})] = n - \max x \leq n.[f(n-x, \vec{y})]$.

Proof. 若 $f(x, \vec{y})$ 关于 x 在范围内不存在零点，等式 $n = n - 0$ 显然成立.

若 $f(x, \vec{y})$ 存在零点，我们设最小零点为 m ，最大零点为 M . 可知对于任意 $a < m$, $f(a, \vec{y}) \neq 0$. 我们尝试说明 $x = n - m$ 是 $f(n-x, \vec{y})$ 的最大零点.

1. 由于 $f(n - (n - m), \vec{y}) = f(m, y) = 0$, $x = n - m$ 是零点.
2. 假设 $x = (n - m)$ 不是最大零点, 那么 $\exists k > 0. x' = n - m + k \wedge f(n - x', \vec{y}) = 0$. 化简得 $f(n - x', \vec{y}) = f(n - n + m - k, \vec{y}) = f(m - k, \vec{y}) = 0$.
 - (a) 若 $m = 0$, 则与 $n - m$ 为不是最大零点矛盾
 - (b) 若 $m > 0$, 则 $\exists m' = m - k, m' < m \wedge f(m', \vec{y}) = 0$, 与 m 为最小零点矛盾.

综上, 得证. 对称形式用相似方法亦可证.

□

1.10 证明: \mathcal{EF} 对有界 max-算子封闭

Proof.

$$\sum_{i=0}^n [N(\prod_{j=0}^i [N^2(f(n-j, \vec{y}))])] = \begin{cases} \max x \leq n.[f(x, \vec{y})] + 1 & \exists x. f(x, \vec{y}) = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

所以,

$$\max x \leq n.[f(x, \vec{y})] = \sum_{i=0}^n [N(\prod_{j=0}^i [N^2(f(n-j, \vec{y}))])] \div 1$$

于是对于任意 $f \in \mathcal{EF}$, $\max x \leq n.[f(x, \vec{y})] \in \mathcal{EF}$, 所以 \mathcal{EF} 对该算子封闭.

□

1.11 Euler 函数 $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 定义为

$$\varphi(n) = |\{x \mid 0 < x \leq n \wedge \gcd(x, n) = 1\}|,$$

证明 $\varphi \in \mathcal{EF}$.

Proof.

$$\varphi(n) = \sum_{m=1}^n \prod_{j=0}^n (N(\text{ep}(j, n) = 0 \vee \text{ep}(j, m) = 0))$$

□

1.12 令 $h(x)$ 计算 x 的最大素因子下标, 证明 $h \in \mathcal{EF}$.

Proof.

$$h(x) = \max n \leq x. [\text{ep}(n, x) \neq 0].$$

□

1.13 对于斐波那契函数 f , 证明 (1) $f \in \mathcal{PRF}$ (2) $f \in \mathcal{EF}$.

Proof. 寻找原始递归的构造时, 需要借助配对函数, 使返回值可以包含多个值, 用以传递前两层的结果。

我们令 $\{\text{pg}, K, L\}$ 为 \mathcal{PRF} 的一个配对函数, 构造 F :

$$F(0) = \text{pg}(1, 0)$$

$$F(x+1) = \text{pg}(K(F(x)) + L(F(x)), K(F(x)))$$

此时, $f(x) = K(F(x)), f(x \div 1) = L(F(x))$. 因而 $f \in \mathcal{PRF}$.

了解到斐波那契递归对应的原始问题: $f(x)$ 计算了长度为 $x-1$ 的不包含连续 1 的二进制串数量. (两个子问题: 串首位为 0 或首位为 10).

该问题可以用初等函数以遍历形式表达, 以说明 $f \in \mathcal{EF}$:

$$f(n) = \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} N \left[\sum_{i=0}^{n-2} \text{neq} \left(\frac{\text{rs}(i, 2^j)}{2^{j-1}} \right) \text{neq} \left(\frac{\text{rs}(i, 2^{j+1})}{2^j} \right) \right]$$

该函数对范围内满足检查的自然数进行计数: 检查每个自然数的每相邻两位不存在同时等于 1 的情况. □

1.14 证明 $Q(x, y, z, v) \equiv p(\langle x, y, z \rangle) \mid v$ 是初等函数.

Proof. 由于 $p \in \mathcal{EF}$, 且 $\langle x, y, z \rangle = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \in \mathcal{EF}$,

$x \mid y = \text{eq}(\text{rs}(y, x), 0) \in \mathcal{EF}$. 所以 $Q \in \mathcal{EF}$. □

1.15 证明 $f \in \mathcal{PRF}$, f 定义为

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 4$$

$$f(2) = 6$$

$$f(x+3) = f(x) + (f(x+1))^2 + (f(x+2))^3$$

Proof. 与1.13类似, 如下定义 F :

$$F(0) = \langle 1, 4, 6 \rangle$$

$$F(x+1) = \langle \text{ep}_1(F(x)), \text{ep}_2(F(x)), \text{ep}_0(F(x)) + \text{ep}_1^2(F(x)) + \text{ep}_2^3(F(x)) \rangle$$

$$\text{于是 } f(x) = \text{ep}_0(F(x)).$$

□

1.16 设 $f(n) = n^{\dots^n}$, 证明 $f \in \mathcal{PRF} - \mathcal{EF}$.

Proof. 首先证 $f \in \mathcal{PRF}$. 构造递归函数 g , $g(n, 0) = 0, g(n, x+1) = n^{g(n, x)}$, 显然 $f(n) = g(n, n)$, 由于 $g \in \mathcal{PRF}$, 所以 $f \in \mathcal{PRF}$.

然后反证 $f \notin \mathcal{EF}$. 若 $f \in \mathcal{EF}$, 我们能找到 k , 使得对于任意 n , 控制函数 $G(k, n) > f(n)$ 恒成立. 但显然, $f(k+2) = (k+2)^{\dots^{k+2}} > G(k, k+2) = 2^{\dots^{k+2}}$ (幂级的长度和每一个幂级的数字, 前者都更大). 所以 $f \notin \mathcal{EF}$.

□

1.17 设 $g \in \mathcal{PRF}$, 证明 $f \in \mathcal{PRF}$

$$f(x, 0) = g(x)$$

$$f(x, y+1) = f(f(\dots f(f(x, y), y-1), \dots), 0)$$

Proof. 易见, $f(x, y) = g^{2^{(y-1)}}(x)$. 此时可以构造原始递归式计算 $g^n(x)$.

$$G(x, 0) = g(0)$$

$$G(x, y + 1) = g(G(x, y))$$

显然 $f(x, y) \in \mathcal{PRF}$.

□

1.18 若 $f, g \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 只在有限作用域的函数值不同,

证明 $f \in \mathcal{GRF} \iff g \in \mathcal{GRF}$.

Proof. 设这个作用域为 $S = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$, 根据题意, 有 $\forall x \in \mathbb{N} - S, f(x) = g(x)$.

此时可基于 f 在 \mathcal{GRF} 构造 $G = g$, 它在 $x \in S$ 时取 $G(x) = g(x)$, 在 $x \in \mathbb{N} - S$ 时取 $G(x) = f(x)$.

$$G(x) = \sum_{i=0}^k g(s_i) \cdot N(\text{eq}(s_i, x)) + N\left(\sum_{i=0}^k N(\text{eq}(s_i, x))\right) f(x).$$

对于前半表达式, 由于 S 有限, 它属于 \mathcal{GRF} . 后者保持 $f \in \mathcal{GRF}$. 所以 $F \in \mathcal{GRF}$. 对称证明类似.

□

1.19 证明 $\left\lfloor \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)n \right\rfloor \in \mathcal{EF}$.

Proof.

$$f(n) = \max_z z \leq n. [(2z - n)^2 - 5n^2]$$

显然 $f \in \mathcal{EF}$.

□

1.20 证明 $\text{Ack}(4, n) \in \mathcal{PRF} - \mathcal{RF}$.

Proof. $f(n) = \text{Ack}(4, n)$, 我们可以为 f 写递归式:

$$f(0) = \text{Ack}(4, 0) = 13$$

$$f(n+1) = \text{Ack}(4, n+1) = \text{Ack}(3, f(n)) = 2^{f(n)+3} \dot{-} 3$$

所以 $f \in \mathcal{PRF}$.

假设 $f \in \mathcal{EF}$, 则存在 k 使得 $f(n) < G(k, n)$. 但 $f(n) = \underbrace{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}_{n+3} - 3$, 增长率显然 f 一定比控制函数更快, 进而 $f \notin \mathcal{EF}$. □

1.21 设 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ **是双射函数, 证明** $f \in \mathcal{GRF} \Leftrightarrow f^{-1} \in \mathcal{GRF}$.

Proof. 双射意味着 $\forall x_1, x_2, y, f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y \Rightarrow x_1 = x_2$. 也即, $f^{-1}(y) = \mu x. [f(x) \dot{-} y]$.

显然命题成立. □

1.22 设 $p(x)$ **为整系数多项式, 令** $f(a)$ **定义为** $p(x) - a$ **对于** x **的最小非负整数根, 证明** $f \in \mathcal{RF}$.

Proof.

$$f(a) = \mu x. [p(x) \dot{-} a]$$

显然 $f \in \mathcal{RF}$. □

1.23 设

$$f(x, y) = \begin{cases} x/y & y \neq 0 \wedge y \mid x, \\ \perp & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明 $f \in \mathcal{RF}$.

Proof. $f(x, y) = \mu z. [(zy \dot{-} x)(N(y))]$. □

3 λ -演算

3.1 证明括号引理：对于任何 $M \in \Lambda$ ， M 的左右括号个数相同.

Proof. 采用结构归纳：

1. 对于 $x \in \nabla$ ，显然左右括号数相同.
2. 对于 $(\Lambda_1 \Lambda_2)$ ，显然新增左右括号数相同，根据归纳假设， Λ_1 与 Λ_2 左右括号数相同，所以该情况满足.
3. 对于 $(\lambda \nabla \Lambda)$ ，道理相同.

□

3.2 试求 $SSSS$ 的 β -nf.

Proof. 草纸上演算得： $\lambda ab.ab(\lambda c.bc(abc))$

□

3.3 证明： $(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)$ 没有 β -nf.

Proof. 对于 $n > 1$ ，易证 $(\lambda x.xxx)^n \rightarrow_\beta (\lambda x.xxx)^{n+1}$. $(\lambda x.xxx)^{n+1}$ 永远含有一个可规约子项，最左侧的 $(\lambda x.xxx)^2$. 所以 $(\lambda x.xxx)^2$ 没有 β -nf. □

3.4 设 $F \in \Lambda$ 呈形 $\lambda x.M$ ，证明：(1) $\lambda z.Fz =_\beta F$ ；(2) $\lambda z.yz \neq_\beta y$.

Proof. 1. $\lambda z.(\lambda x.M)z =_\beta \lambda z.M[x := z] =_\alpha \lambda x.M$

2. 显然 $\lambda z.yz \neq y$ ，根据合流性， $\lambda z.yz \neq_\beta y$

□

3.5 证明二元不动点定理：对于任意 $F, G \in \Lambda$ ，存在 $X, Y \in \Lambda$ ，满足 $FX Y = X, GXY = Y$.

Proof. 设解向量 $A = [X, Y]$ ，

等式组等价于等式 $(\lambda z.[F(z)_1^2(z)_2^2, G(z)_1^2(z)_2^2])A = A$. 等式组的解等价于求该等式的解. 由一元不动点定理可知该等式存在不动点 A ，所以等式组也存在解 X, Y . □

3.6 证明：对任何 $M, N \in \Lambda^\circ$ ，方程 $xN = Mx$ 对于 x 有解。

Proof. 令 x 呈形 $\lambda a.T$. 原式化为 $T = M(\lambda a.T) = (\lambda t.M(\lambda a.t))T$. 根据一元不动点定理，存在不动点 $T = \Theta(\lambda t.M(\lambda a.t))$. 进而 x 也有解 $\lambda a.\Theta(\lambda t.M(\lambda a.t))$. \square

3.7 证明：对任何 P, Q ，若 $P \rightarrow_\beta Q$ ，则存在 $n \geq 0$ 以及 $P_0, \dots, P_n \in \Lambda$ ，满足 (1) $P \equiv P_0$; (2) $Q \equiv P_n$; (3) 对于任何 $i < n$ ， $P_i \rightarrow_\beta P_{i+1}$.

Proof. 对 \rightarrow_β 做结构归纳：

1. 若 $P \equiv Q$ ，显然具有单步规约序列（序列长度为 1， $n = 0$ ）.
2. 若 $P \rightarrow_\beta R \wedge R \rightarrow_\beta Q$ ，根据归纳假设， $P \rightarrow_\beta R$ 具有 $n = k_1$ 的单步规约序列， $R \rightarrow_\beta Q$ 具有 $n = k_2$ 的单步规约序列. 将两个序列合并，得到 $n = k_1 + k_2 - 1$ 的单步规约序列.

\square

3.8 证明：对任何 P, Q ，若 $P \rightarrow_\beta Q$ ，则 $\lambda z.P \rightarrow_\beta \lambda z.Q$.

Proof. 根据合拍性，该命题是显然的. \square

3.9 证明：对任何 $P, Q \in \Lambda$ ，若 $P =_\beta Q$ ，则存在 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $P_0, \dots, P_n \in \Lambda$ ，满足 (1) $P \equiv P_0$; (2) $Q \equiv P_n$; (3) 对任何 $i < n$ ， $P_i \rightarrow_\beta P_{i+1}$ 或 $P_{i+1} \rightarrow_\beta P_i$.

Proof. 根据定理 3.20，有 $T \in \Lambda$ ， $P \rightarrow_\beta T \wedge Q \rightarrow_\beta T$. 根据 3.7，可构造序列 $P \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta T \leftarrow_\beta \dots \leftarrow_\beta Q$. \square

3.10 证明定理 3.12：对于任意 $M, N \in \Lambda$,

$$M =_\beta N \Leftrightarrow \lambda\beta \vdash M = N$$

Proof.

\Rightarrow 已知 $M =_{\beta} N$, 证 $\lambda\beta \vdash M = N$.

1. 对于 $M \rightarrow_{\beta} N$ 条件:

(a) $M \rightarrow_{\beta} N$ 对应于规则 β .

(b) 自反性对应于公理 ρ .

(c) 传递性对应于规则 τ .

2. 对称性对应于规则 σ .

3. 合拍性对应于规则 μ, ν, ξ .

\Leftarrow 已知 $\lambda\beta \vdash M = N$, 证 $M =_{\beta} N$. 规则可以显然地对应到关系中.

1. 公理 α 对应于自反闭包.

2. 公理 β 对应于关系 *beta*.

3. 规则 σ 对应于对称闭包.

4. 规则 τ 对应于传递闭包.

5. 规则 μ, ν, ξ 分别对应于合拍关系的一个条件.

□

3.11 证明定理 3.13: 对于任意 $M, N \in \Lambda$,

$$M =_{\beta, \eta} N \Leftrightarrow \lambda\beta\eta \vdash M = N$$

Proof. 只需要在3.10基础上说明公理 η 与 η 关系的对应即可. 而这个对应是显然的.

□

3.12 证明若 $M =_\beta N$ ，则存在 T 使 $M \rightarrow_\beta T$ 且 $N \rightarrow_\beta T$.

Proof. 已知

$$(M, N) \in \bigcup_{k=0} (\rightarrow_\beta \cup \leftarrow_\beta)^k.$$

我们对 k 做归纳, $k = 0$ 时 ($M \equiv N$) 命题显然成立.

$k = n + 1$ 时, 我们有 P 满足 $(P, N) \in (\rightarrow_\beta \cup \leftarrow_\beta)^n$, $M \rightarrow_\beta P$ 或 $M \leftarrow_\beta P$. 根据归纳假设, 存在 T_0 使得 $P \rightarrow_\beta T_0 \wedge N \rightarrow_\beta T_0$.

1. $M \rightarrow_\beta P$. 根据传递性, T_0 也可作为 M 与 N 的 β -规约汇点.
2. $M \leftarrow_\beta P$. 根据合流性, P 作为源点, M, T_0 作为分支点, 可以找到 T_1 满足 $M \rightarrow_\beta T_1 \wedge T_0 \rightarrow_\beta T_1$. 根据传递性, T_1 可以作为 M 与 N 的 β -规约汇点.

□

3.13 证明若在系统 $\lambda\beta$ 中加入下述公理 (A) $\lambda xy.x = \lambda xy.y$, 则对任何 $M, N \in \Lambda$, $\lambda\beta + (A) \vdash M = N$.

Proof. 根据合拍规则,

$$\begin{aligned} & \lambda\beta + (A) \vdash \lambda xy.x = \lambda xy.y \\ \Rightarrow & \lambda\beta + (A) \vdash (\lambda xy.x)MN = (\lambda xy.y)MN \\ \Rightarrow & \lambda\beta + (A) \vdash M = N \end{aligned}$$

□

3.14 证明命题 3.14: 设 R 是 Λ 上的二元关系, $M \in \text{NF}_R$, 则 (1) 不存在 $N \in \Lambda$ 使得 $M \rightarrow_R N$; (2) $M \rightarrow_R N \Rightarrow M \equiv N$.

Proof.

1. 根据 R 范式定义, M 不存在 R 可约子项, 所以 M 必然无法进行一步规约.

2. 若 $M \neq N$, 则必然存在一个长度大于 1 的 R 规约序列, 这意味着 M 必然可以进行一步规约, 与 (1) 矛盾.

□

3.16 试找出 $A \in \Lambda^\circ$ 使 A λ -定义函数 $f(m, n) = m + n$.

Proof.

$$\begin{aligned} \lceil m + n \rceil &= \lambda f x. f^m(f^n x) \\ &= \lambda f x. ((\lambda x. f^m x)(f^n x)) \\ &= \lambda f x. ((\lceil m \rceil f)(\lceil n \rceil f x)) \end{aligned}$$

取 $A = \lambda m n f x. ((m f)(n f x))$.

□

3.17 试找出 $F \in \Lambda^\circ$ 使 F λ -定义函数 $f(m) = 3m$.

Proof.

$$\begin{aligned} \lceil 3m \rceil &= \lambda f x. f^{3m} x \\ &= \lambda f x. ((\lambda f x. f^m x)(\lambda x. f^3 x)) \\ &= \lambda f x. (\lceil m \rceil (\lceil 3 \rceil f)) \end{aligned}$$

取 $A = \lambda m f x. (m(\lceil 3 \rceil f))$.

□

3.18 令 $D \equiv \lambda x y z. z(Ky)x$, 证明: 对于任意的 $X, Y \in \Lambda$,

$$DXY[0] = X,$$

$$DXY[n+1] = Y.$$

这里 $K \equiv \lambda x y. x$, $\lceil n \rceil \equiv \lambda f x. f^n x$.

Proof. 对于一般的 m , $DXY[m] = \lceil m \rceil (\lambda y. Y)X$.

1. $m = 0$ 时, $(\lambda f x. x)(\lambda y. Y)x = X$.
2. $m > 0$ 时 (即 $\exists n, m = n + 1$), $(\lambda f x. f^m x)(\lambda y. Y)x = (\lambda y. Y)^m x = Y$.

□

3.19 设 $\text{Exp} \equiv \lambda xy. yz$,

证明对于任意 $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$, $\text{Exp}[n][m] = [n^m]$

Proof.

$$\begin{aligned} [m][n] &= (\lambda fx. f^m x)(\lambda fx. f^n x) \\ &= (\lambda x. (\lambda fx. f^n x)^m x) \\ &= (\lambda x. (\lambda fx. f^{(n^m)} x)) \\ &= [n^m] \end{aligned}$$

□

3.20 构造 $F \in \Lambda^\circ$ 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $F[n] =_\beta [2^n]$.

Proof. 根据3.19, 可取 $F = \lambda nfx. n[2]x$.

□

3.21 设 $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f = \text{Itw}[g]$, 即

$$f(0) = 0,$$

$$f(n+1) = g(f(n)),$$

且 $G \in \Lambda^\circ$ λ -定义了函数 g . 试求 $F \in \Lambda^\circ$ 使得 F λ -定义函数 f .

Proof. 需要 F 满足:

$$F[0] = [0],$$

$$F[n+1] = G(F[n]).$$

等价于不动点方程:

$$\begin{aligned} F &= \lambda n. D \ n \ [0] \ (G(F(\text{pred } n))) \\ &= (\lambda zn. D \ n \ [0] \ (G(z(\text{pred } n))))F \end{aligned}$$

根据不动点定理, 可取 $F \equiv \Theta(\lambda zn. D \ n \ [0] \ (G(z(\text{pred } n))))$.

□

3.22 证明引理 3.39.

Proof.

1. $\forall n \in \mathbb{N}. \text{var}(n) = \#(v^{(n)}) = [0, n]$ 显然是递归函数.
2. $\forall M, N \in \Lambda. \text{app}(\#M, \#N) = \#(MN) = [1, [\#M, \#N]]$ 显然是递归函数.
3. $\forall x \in \nabla, M \in \Lambda. \text{abs}(\#x, \#M) = \#(\lambda x. M) = [2, [\#x, \#M]]$ 显然是递归函数.
4. 对于 $\#[n]$, 尝试找到它的递归式:

$$\begin{aligned}
\#[n+1] &= \#(\lambda f x. f^{n+1} x) \\
&= [2, [\#f, \#(\lambda x. f^{n+1} x)]] \\
&= [2, [\#f, [2, [\#x, \#f^{n+1} x]]]] \\
&= [2, [\#f, [2, [\#x, [1, [\#f, \#f^n x]]]]]] \\
&= [2, [\#f, [2, [\#x, [1, [\#f, (\pi_2)^4(\#[n])]]]]]]
\end{aligned}$$

取 $h(z) = [2, [\#f, [2, [\#x, [1, [\#f, (\pi_2)^4(z)]]]]]]$, 则令:

$$\begin{aligned}
\text{num}(0) &= \#[0] \\
\text{num}(n+1) &= h(\text{num}(n)).
\end{aligned}$$

显然 $\text{num}(n) = \#[n]$ 且 $\text{num} \in \mathcal{PRF}$.

□

3.23 $f(n) = \underbrace{n \cdots^n}_n$, 试构造 $F \in \Lambda^\circ$ 使 $F[n] = [f(n)]$ 对 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立.

Proof.

$$F[n] = \left[\underbrace{n \cdots^n}_n \right] = \underbrace{[n] \cdots [n]}_n \quad n > 0$$

令 $CO_n = \lambda x. \underbrace{x \dots x}_n$, 注意 $\#x$ 为某常数 c , 现尝试说明 $f(n) = \#CO_n \in \mathcal{PRF}$:

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0 \\
 f(n+1) &= [2, [\#x, \underbrace{\#x \dots x}_{n+1}]] \\
 &= [2, [\#x, [\#x, [\underbrace{\#x \dots x}_n]]]] \\
 &= [2, [\#x, [\#x, [(\pi_2)^2(f(n))]]]]
 \end{aligned}$$

显然 $f \in \mathcal{PRF}$. 根据递归函数的 λ -可定义性, 有 $F'[n] = \lceil CO_n \rceil$. 利用枚举子, 有 $E(F'[n])[n] = CO_n[n]$, 取 $F = \lambda n. E(F'n)n$ 即可.

□

3.24 构造 $H \in \Lambda^\circ$, 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in \Lambda$, 有

$$H[n]x_1 \dots x_n =_\beta [x_1, \dots, x_n].$$

Proof. 1. $l(n) = \#L_n \in \mathcal{GRF}$. 如下, $h \in \mathcal{PRF}$, 所以 $l \in \mathcal{PRF}$.

$$l(n) = [2, [\#3, \#zx_1 \dots x_n]] = [2, [1, h(n)]]$$

$$h(n) = \#zx_1 \dots x_n$$

$$h(1) = \#zx_1 = [1, [1, \#x_1]] = [1, [1, [0, 1]]]$$

$$h(n+1) = [2, [1, h(n), \#x_{n+1}]] = [2, [h(n), [0, n+1]]]$$

2. $g(n) = \#M_n = \lambda x_1 \dots x_n. [x_1, \dots, x_n] \in \mathcal{PRF}$.

$$g(n) = [2, [\#x_1, [2, \dots [2, [\#x_n, l(n)] \dots]]]]$$

$$\text{let } f(i, y) = [2, [[0, i, y]]] \in \mathcal{PRF}$$

$$g(n) = f(1, f(2, \dots f(n-1, f(n, l(n))) \dots)) \in \mathcal{PRF}.$$

3. 有 G λ -定义 g . 取 $H \equiv \lambda z.E(Gz)$, 得

$$H[n]x_1 \dots x_n =_{\beta} \lambda z.E(Gz)x_1 \dots x_n =_{\beta} [x_1, \dots, x_n].$$

□

3.25 证明：存在 $H_2 \in \Lambda^\circ$, 使得对于任意 $F \in \Lambda$, 有

$$H_2[n] =_{\beta} F[H_2[F]].$$

Proof. 即求第二不动点组合子.

令 $W \equiv \lambda xy.Ey (\text{App} (\text{App } x (\text{Num } x)) (\text{Num } y))$, $\Theta_2 = W[W]$. 其中 E 为枚举子.

$$\begin{aligned} \Theta_2[F] &= W[W][F] \\ &= E[F] (\text{App} (\text{App } [W] (\text{Num}[W])) (\text{Num } [F])) \\ &= F \text{ App } [W[W]][[F]] \\ &= F[\Theta_2[F]] \end{aligned}$$

□