《计算模型导引》习题

李煦阳　DZ21330015

2022

目录

1 递归函数

1.1 证明：对于固定的 k，一元数论函数 $x+k \in \mathcal{BF}$

Proof. 借助恒等函数 P_1^1 与后继函数 S，对任意 k，可组合构造 $f_k(x) = x+k$.

$$f(x) = \begin{cases} P_1^1(x) & k = 0 \\ \underbrace{S \circ \cdots \circ S}_{k-1} \circ P_1^1(x) & k > 0 \end{cases}$$

由于 $f_k(x) = x+k$ 可由基本函数 P_1^1 与 S 构造, 所以 $x+k \in \mathcal{BF}$. □

1.2 证明：对于任意 $k \in \mathbb{N}^+$，$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$，若 $f \in \mathcal{BF}$，则存在 h 使得 $f(\vec{x}) < ||\vec{x}|| + h$

Proof. 对 f 的构造长度 l 进行归纳，当 $l = 0$ 时，我们有 $f \in \mathcal{IF}$，此时取 $h = 2$，不等式显然恒成立.

对于 $l = n+1$ 的情况, 我们有归纳假设: 存在 h_n, 对于构造长度小于等于 n 的函数, 使得 $f(\vec{x}) < ||x|| + h_n$ 成立. 假设构造序列为 $f_1, \ldots, f_n, f$. 若 $f \in \mathcal{IF}$，显然 $f(x) < ||x|| + h_n + 1$. 若 $f = \mathsf{Comp}_k^m[f_{i_0}, \ldots, f_{i_k}]$，根据归纳假设有 $f(x) < max\{f_{i_j}(x)\} + h_n < ||x|| + 2h_n$，此时我们找到了 $h_{n+1} = 2h_n$.

□