

计算复杂性 作业 1

李煦阳 DZ21330015 (njulixuy@163.com)

2021 年 10 月 7 日

1. 5.13, VC-Dimension

VC-d 的定义: $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ 是有限集 U 的子集集合 (表示某类模型所有可以产生的二分), 集合 \mathcal{S} 的 VC-d 指可以被该模型二分的最大集合的大小 (这个集合, 无论我们如何划分它, 这个划分都可以被某个实例模型产生的二分描述) (the size of largest set $X \subseteq U$, such that $\forall X' \subseteq X$, $\exists i, S_i \cap X = X'$).

(a) 要证明所有的 **NP** 问题 ($L \in \mathbf{NP}$) 都可以规约至停机问题。

已知 $\forall L \in \mathbf{NP}. \exists M, p. \forall x. x \in L \Leftrightarrow \exists u \in \{0, 1\}^{p(|x|)}. M(x, u) = 1$.

令规约函数 $f(x) = \langle \langle \alpha \rangle, \langle \beta, \theta, x \rangle \rangle$, 其中 $M_\beta = M$, θ 为 p 的编码, M_α 重复遍历 $u \in \{0, 1\}^{p(|x|)}$, 在 $M_\beta(x, u) = 1$ 时停机, 否则不停机。易知其复杂度为常数, 是一个双射函数。

基于 M 构造 **HALT** 问题: 输入为 $\langle \langle \alpha \rangle, \langle \beta, \theta, x \rangle \rangle$, 其对应的语言为 L'
现证 $x \in L \Leftrightarrow f(x) \in L'$.

(a) $x \in L \Rightarrow f(x) \in L'$

由构造 L' 的方式可知, 对于 $x \in L$, $f(x)$ 在 **HALT** 上会停机, 所以 $f(x) \in L'$ 。

(b) $f(x) \in L' \Rightarrow x \in L$

反证, 若存在 $f(x) \in L'$ 且 $x \notin L$, 则 x 在构造的图灵机上不会停机, 所以 $\text{HALT}(f(x))$ 不为 0, 所以 $f(x) \notin L'$

■

(b) **HALT** 问题不是 **NP** 问题。

易知 **HALT** 问题是不可判定问题（并不存在一种算法可以描述 **HALT** 问题）（将 **HALT** 问题带入自身可证）。只需证所有 **NP** 问题都是可判定的（即可以找到一个通用算法），便可说明 **HALT** 不是 **NP**。

对于每个 **NP** 问题，已知 M, P ，对于一个输入 x ，我们可以对解空间进行 $EXP(p(|x|))$ 次枚举寻找 certificate，并在多项式时间内演算每个可能解的真假（总复杂度为 $EXP(p(|x|))$ ），所以 **NP** 是可判定的。

■