Algorithmique avancée : Feuille de TP n^o 2

Flots et Programmation Linéaire
1 TP encadré + 1 TP non encadré + 1 QEL [1]

⚠ À l'issue du TP encadré, vous aurez une séance de TP non encadrée, puis lors de la séance encadrée suivante, un QEL sera organisé pour évaluer l'atteinte des objectifs fixés.

Utilisation du solveur de problèmes de Flots

— Vous avez besoin d'un ordinateur avec un compilateur C. Vous aurez besoin d'un terminal et d'un éditeur.
— Téléchargez l'archive Hochbaum.tar sur moodle.
— Extrayez les fichiers : `tar xvf Hochbaum.tar`

Le programme `pseudo` écrit par Hochbaum [2] implémente un des meilleurs algorithmes pour calculer un flot maximum. Il est basé sur la notion de pseudo-flot (c'est-à-dire que ce qui entre n'est pas égal à ce qui sort), le pseudo-flot est amélioré progressivement jusqu'à obtenir un flot maximum.

1. Le programme `pseudo` traite des réseaux de transports décrits dans des fichiers dont le format est précisé ici. Vous devez lire cette page et en déduire un dessin du graphe décrit dans le fichier `ex7_9.max` de l'archive Hochbaum.
2. Pour créer le programme exécutable, tapez la commande
   `make pseudo`
3. Faire tourner l'algorithme pseudo sur le fichier `ex7_9.max` :
   `./pseudo < ex7_9.max`
4. Le programme vous permet d'obtenir :
   — la valeur du flot maximum,
   — les valeurs des flux dans les arcs pour ce flot maximum
   — et la coupe de capacité minimale.

Utilisation du solveur de programmes linéaires

Pour résoudre les programmes linéaires vous devez utiliser l'outil proposé à cett adresse : `http://www.zweigmedia.com/simplex/simplex.php?lang=en`. Cliquez d'abord sur "Example" pour vérifier la syntaxe utilisée pour coder les programmes linéaires puis cliquez sur "Solve" pour résoudre le problème (vous pourrez choisir des solutions sous forme décimal ou sous forme de fraction).

Il existe également un solveur graphique pour les programmes linéaires avec deux variables : `http://www.zweigmedia.com/utilities/lpg/index.html?lang=en`.

1. QEL=Questionnaire en Espace Limité.
2. Pour les curieux, l'article décrivant cet algorithme est accessible : Chandran et Hochbaum en 2009.

Travail à faire avant la prochaine séance encadrée

Le travail consiste à terminer la modélisation de tous les exercices proposés dans cette feuille.

Le questionnaire en espace limité (QEL) demandera de faire tourner le solveur de flots sur un exemple simple afin de donner le flot maximal et de décrire la coupe minimale, puis de modéliser un problème plus compliqué et d'en donner la solution.

Le QEL demandera également de faire tourner le solveur de programmes linéaires sur un exemple simple afin de donner l'optimum et les valeurs des variables qui permettent de l'obtenir, puis de modéliser un problème plus compliqué et d'en donner la solution.

I Exercices de Modélisation en Flots

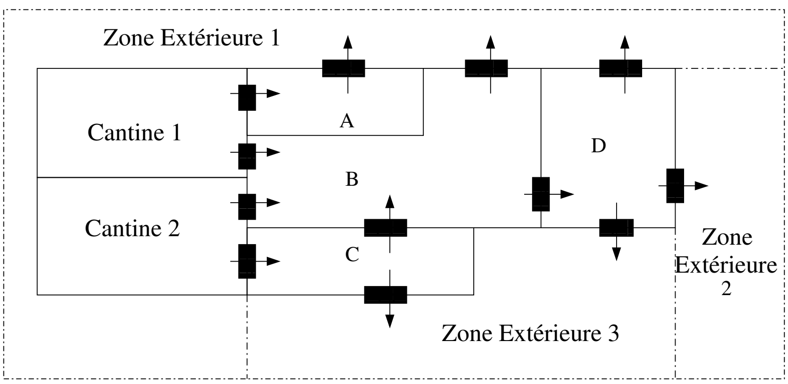
A) Problème de transport

Une entreprise disposant de 2 usines doit transporter ses produits finis vers ses 3 entrepôts régionaux pour répondre aux besoins locaux. On peut a priori faire transiter les produits de n'importe quelle usine vers n'importe quel entrepôt sans contrainte de quantité. Chaque usine a une capacité limitée. La capacité de production de l'usine 1 (notée U1) est de 100 (en milliers de tonnes) et celle de l'usine U2 de 150. Les entrepôts ont exprimé une demande qui doit être satisfaite : l'entrepôt 1, noté E1, a une demande de 50 (en milliers de tonnes), le deuxième 70 et le troisième 80. Les entrepôts ne peuvent pas stocker plus de produits que ce qu'ils ont demandé.

Quelle quantité maximale totale pourra être acheminée des usines vers les entrepôts ?

B) Évacuation de cantines

Le dessin ci-dessous est un **plan d'évacuation des cantines** d'une école (les portes sont des rectangles noirs). Dans l'éventualité d'un feu, l'école décide qu'il sera raisonnable d'utiliser chaque porte seulement dans une direction indiquée par une flèche.



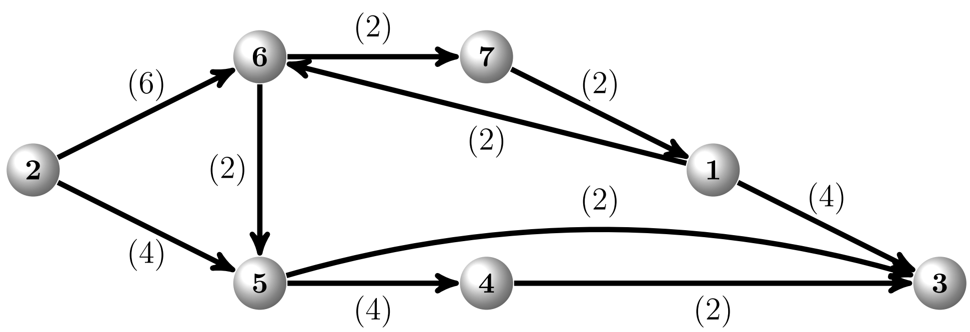
Si un feu se produit, il faut que les enfants traversent les zones intérieures (A, B, C ou D) pour se rendre dehors (dans une des zones 1 2 ou 3).
Les portes ont des tailles variées. L'école fait des tests pour savoir combien d'enfants peuvent passer sans bousculade en une minute par chaque porte, les résultats sont donnés ci-contre.
L'école veut savoir en combien de temps on pourra évacuer tous les enfants qui sont dans les cantines vers l'extérieur.

Porte		Nombre
De	à	d'enfants
Cantine 1	A	80
Cantine 1	B	120
Cantine 2	B	60
Cantine 2	C	70
A	Zone Extérieure 1	70
B	Zone Extérieure 1	80
B	D	70
C	B	20
C	Zone Extérieure 3	60
D	Zone Extérieure 1	40
D	Zone Extérieure 2	50
D	Zone Extérieure 3	60

1. Dessinez un réseau de transport pour lequel le calcul d'un flot compatible maximum permettrait de savoir combien d'enfants pourront être évacués en 1 minute.
2. Quelle est la valeur du flot maximum ?
3. Au plus fort moment d'affluence, il y a 550 enfants qui mangent à la cantine. En négligeant le temps de trajet de chaque enfant, les portes permettent-elles d'évacuer les 550 enfants en 2 minutes ?
4. Décrivez une coupe séparant s et t de capacité minimum (donnez la coupe, ses arcs et sa capacité).
5. On aimerait pouvoir faire manger 600 élèves à la fois, on peut changer les portes afin qu'elles permettent le passage de 90 élèves par minutes. Le changement d'une seule porte permet-il l'évacuation (en moins de 2 mn) ? si oui, quelle porte faut-il changer ?

C) Pollution de rivière

On considère le réseau fluvial $R = (X, U, c)$ suivant, où les capacités c sont exprimées entre parenthèses :



Sachant que le coût de construction d'une barrière anti-innondation est proportionnelle (k fois la capacité) à la capacité de chaque fleuve, quelles sont les barrières à construire pour permettre d'isoler la ville 2 de la ville 3 en cas de pollution par une usine chimique de la ville 2 au moindre coût ?

1. Expliquez comment ce problème est lié à une recherche de flot maximum.

2. Donnez la liste des arcs sur lesquels construire ces barrières et donnez une estimation du coût en fonction de k.

D) Contre-espionnage

On considère un réseau de 8 personnes A, ... H, qui peuvent se transmettre des informations plus ou moins facilement. On dispose des informations suivantes sur la robutesse des moyens de communication entre les personnes. Cette robustesse est estimée entre 0 et 10.

espion i :	A	B	C	D	E	F	G	H
peut contacter l'espion j	C	A,C		A,B,G	B,G,H	C,E,H		G
robustesse de la communication entre i et j	3	4,5		5,6,3	4,3,7	8,2,4		6

Le tableau ci-dessus décrit des arcs (i, j) qui relie deux personnes telles que la personne i est capable de joindre la personne j (mais pas forcément le contraire).

Les personnes D et F sont soupçonnées d'avoir récupéré des informations secrètes et le service de contre-espionnage est chargé de les empêcher de les faire parvenir aux personnes C, G et H, comment réaliser cette tâche le plus facilement (c'est-à-dire en s'attaquant aux moyens de communicatons les moins robustes) ? On veut qu'aucune des trois personnes ne reçoive l'information.

1. Vous devez dessiner un réseau de transport afin de transformer ce problème en recherche d'une coupe minimale dans ce réseau : vous préciserez les capacités des arcs.

2. Expliquez pourquoi la coupe minimum est une solution à ce problème.

3. Proposez une solution à ce problème et estimez la difficulté pour le service de contre-espionnage.

II Exercices de Modélisation en Programmes Linéaires

A) Problème de transport : (suite)

On considère le problème de transport de la section I.A), mais on y ajoute les informations concernant le coût de transport. [3]

Le coût de transport dépend bien sûr du trajet à effectuer et du mode de transport, donc de l'usine de départ et de l'entrepôt d'arrivée. On considère maintenant que les entrepots n'ont pas de problème de stockage, on s'occupe juste de satisfaire leur demande.

Le coût de transport par tonne de l'usine Ui $(i = 1, 2)$ vers l'entrepôt Ej $(j = 1, 2, 3)$ est donné dans le tableau suivant :

	E1	E2	E3
U1	4	3	6
U2	3	5	3

Le problème est de déterminer les quantités à transporter de chaque usine vers chaque entrepôt, de manière à minimiser le coût total de transport tout en respectant les contraintes de capacité des usines et en satisfaisant les demandes des entrepôts.

B) Élections

Durant les deux derniers jours de la campagne électorale américaine, un candidat veut convaincre la population d'indécis des "swing states" de voter pour lui. Pour cela sa direction de campagne décide d'utiliser plusieurs supports médiatiques, télévision (T), radio (R) et presse (P).

3. Ce problème peut se résoudre au moyen d'un algorithme de Flots à coûts mais nous vous proposons de le modéliser par un programme linéaire.

Pour être efficace, cette campagne doit toucher au moins 65% des jeunes entre 18 et 25 ans, au moins 45% des adultes entre 25 et 40 ans et au moins 10% des adultes de plus de 40 ans.

Le tableau suivant donne les estimations en milliers du nombre d'indécis des 3 catégories sensibilisées par un message selon le moyen de diffusion. La dernière ligne représente la population totale estimée d'indécis de chacune des catégories de personnes. La dernière colonne représente le coût en dollars d'un message pour chaque type de diffusion.

Catégories	18-25	25-40	40 et plus	Coût
T	5	12	2	10000
R	2	15	2	7000
P	1	5	3	5000
Population totale	300	1300	2600	

Sachant que le nombre de messages diffusés par la télévision ne doit pas être plus du triple du nombre de messages diffusés par l'ensemble des autres médias, écrire le programme linéaire permettant de déterminer le nombre de messages à diffuser dans chaque média, de telle sorte que la campagne soit la moins onéreuse possible (donner son coût). On notera x1, x2, x3 le nombre de messages dans les médias T, R et P respectivement.

C) Fonderie et Atelier

Pour produire des pièces de fonte, une entreprise utilise une fonderie et un atelier de mécanique.

	Fonderie	**Atelier**
Pièces de type 1	6 tonnes chaque heure	12 tonnes chaque heure
Pièces de type 2	5 tonnes chaque heure	15 tonnes chaque heure
Temps disponible	100mn	45mn

La consommation en énergie et les recettes par tonne sont données dans le tableau suivant :

	Énergie	**Recette par tonne**
Une tonne de pièces de type 1	14kW/h	2000€
Une tonne de pièces de type 2	30kW/h	3000€
Quantités disponibles	210kW/h	

Modéliser le problème afin de répondre à la question suivante : combien de tonnes de pièces de chaque type faut-il fabriquer pour maximiser la recette ?

D) Planification de production

On apprend que la production maximale d'articles par une entreprise en 1 mois dans des conditions normales est de 1200 articles, on peut produire 400 articles de plus par mois en payant des sous-traitants (le surcoût est de 7€ par article).

D'autre part, les demandes des clients pour les 3 prochains mois sont décrites dans le tableau suivant :

	mois 1	mois 2	mois 3
Demandes	900	1100	1700

On désire planifier une production sur 3 mois permettant de minimiser les stocks (qui coûtent 3€ par article par mois) et les coûts de sous-traitance. On veut un stock nul à la fin du 3ème mois et au départ le stock est nul.

Proposez un programme linéaire optimisant la production des articles sur 3 mois afin de satisfaire les demandes, il s'agit donc de décider chaque mois combien on doit produire d'articles en condition normale et combien on doit en produire en payant des sous-traitants.