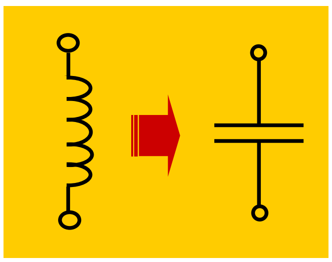
Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 3: Capacidade e Indutância



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

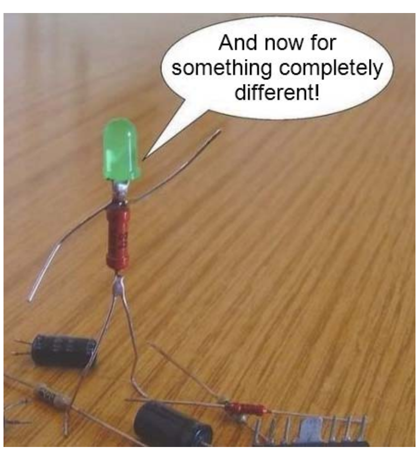
- **Capacidade e indutância como elementos passivos;**
- **Condensador e capacidade;**
- **Resposta ao degrau do circuito RC;**
- **Bobina e indutância;**
- **Combinação de bobinas e combinação de condensadores.**

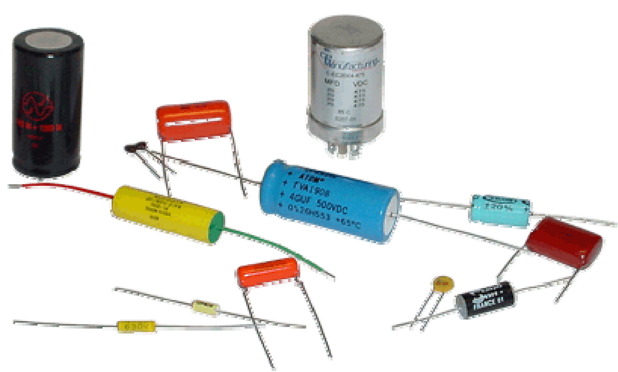
Introdução

- A <u>capacidade</u> e a <u>indutância</u> são propriedades de dois novos elementos de circuito: o **condensador** e a **bobina**, respectivamente;

- Estes elementos são considerados **passivos** como as resistências, embora tenham a capacidade de **armazenar e fornecer quantidades finitas de energia**.

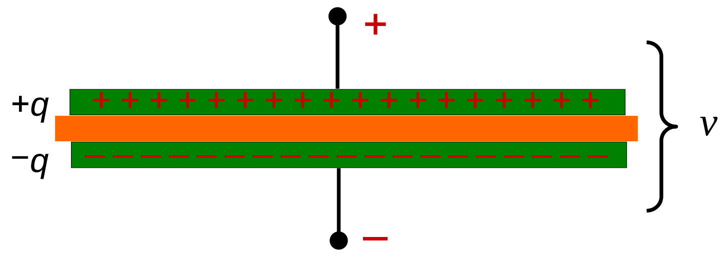
Condensador





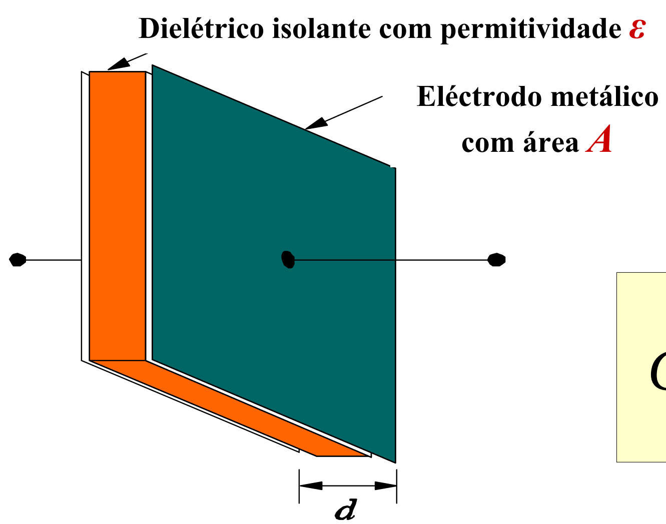
Condensador fisico

- **Constituído por duas superfícies condutoras paralelas separadas por um isolador.**



- **Quando submetido a uma tensão, v, o condensador carrega com uma quantidade de carga, q, determinada pela sua capacidade, C.**

Condensador fisico



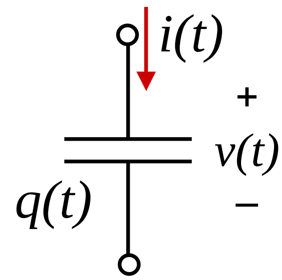
$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

Condensador – modelo matemático

- **A capacidade do condensador define-se como:**

$$C = \frac{q}{v}$$

$$1 Coulomb / 1 Volt = 1\ Farad$$



Símbolo

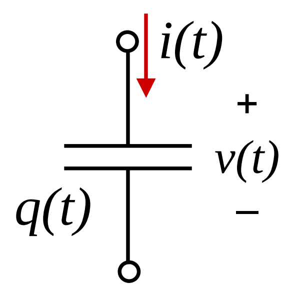
- **Uma relação idêntica é:**

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2023/2024

Condensador – modelo matemático

$$\boxed{i = C\frac{dv}{dt}}$$



Símbolo

- **Desta relação podemos desde logo concluir que:**
  - **Uma tensão constante aos terminais de um condensador corresponde a uma corrente nula – o condensador é pois um circuito aberto para DC;**
  - **Uma variação brusca de tensão aos terminais de um condensador requer uma corrente infinita. Como não temos nunca correntes infinitas, segue-se daqui que um condensador não permite variações bruscas de tensão.**

Relação corrente-tensão

$$i = C\frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad dv = \frac{1}{C} i dt$$

- **Integrando ambos os lados da igualdade entre um instante inicial, t_0, e t, obtém-se**

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i dt \Leftrightarrow v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i dt$$

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i dt + v(t_0)}$$

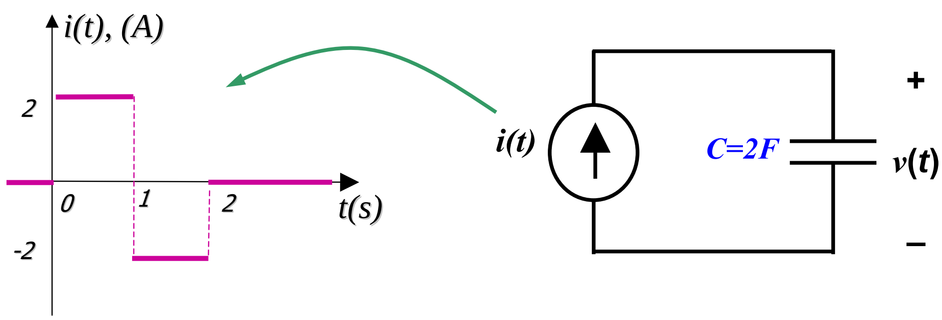
- **Em muitas situações pode seleccionar-se, $t_0 = -\infty$ e $v(-\infty) = 0$, o que reduz o integral a**

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i dt$$

Note-se que todas estas relações assumem a Convenção de Sinais de Elemento Passivo – a corrente entra no condensador pelo terminal marcado pela polaridade (+).

Exemplo 1

Calcular a tensão no condensador, *v(t)*, sabendo que $v(t = 0) = -0.5V$.

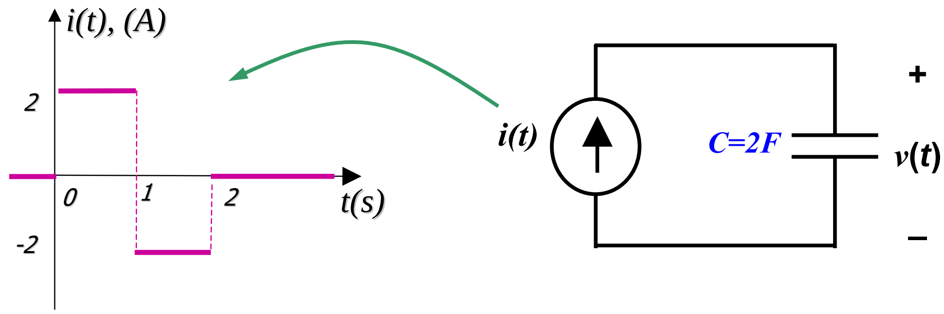


- **Consideremos primeiro o intervalo *0* a *1s*:**

$$v_1(t) = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i dt + v(0) = \frac{1}{2}\int_{0}^{t} 2 dt - 0.5$$

$$v_1(t) = t - 0.5 \qquad 0 \le t \le 1$$

Exemplo 1



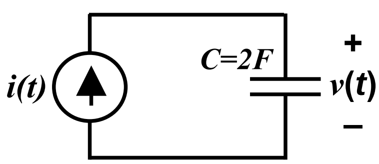
- **… e agora o intervalo *1* a *2s*:**

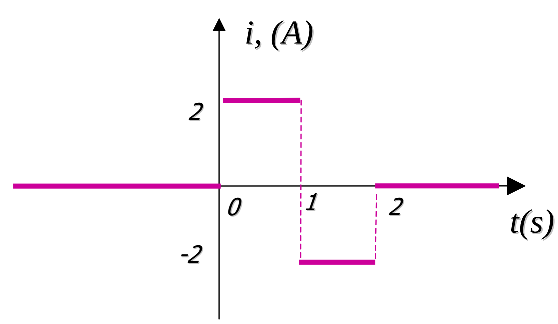
$$v_2(t) = \frac{1}{C}\int_1^t i\,dt + v_1(1) = \frac{1}{2}\int_1^t (-2)\,dt + 0.5 = \frac{1}{2}(-2t+2)+0.5$$

$$v_1(1) = 1 - 0.5 = 0.5V \qquad\qquad v_2(t) = -t + 1.5 \qquad 1 \le t \le 2$$

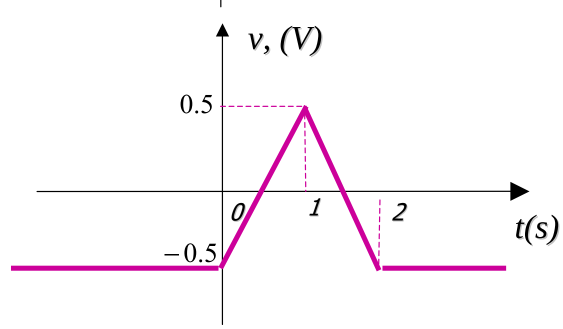
Exemplo 1

- **Obtemos então**



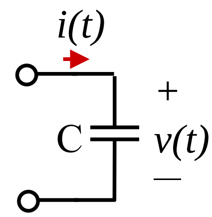


$$v(t) = \begin{cases} -0.5 & t \le 0 \\ t - 0.5 & 0 \le t \le 1 \\ -t + 1.5 & 1 \le t \le 2 \\ -0.5 & t \ge 2 \end{cases}$$



- ***v(1)* é igual à área do primeiro rectângulo de corrente x *1/C* mais *v(0)*.**

Energia armazenada num condensador



- **A potência fornecida ao condensador é:**

$$p = vi = vC\frac{dv}{dt}$$

- **Como $p = dW/dt$, a energia armazenada no campo eléctrico é:**

$$dw = pdt \Leftrightarrow \int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = \int_{t_0}^{t} pdt = \int_{t_0}^{t} (vi)dt = C\int_{t_0}^{t} v\frac{dv}{dt}dt = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} vdv$$

$$\int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = C\left(\frac{v^2}{2}\right)_{v(t_0)}^{v(t)} \Leftrightarrow W(t) - W(t_0) = \frac{1}{2}C\left(v(t)^2 - v(t_0)^2\right)$$

- **Se seleccionarmos t_0 de forma a que a tensão e a energia sejam ambos zero:**

$$W(t) = \frac{1}{2}Cv(t)^2$$

Condensador ideal – aspectos a reter

- **Se a tensão aos terminais de um condensador não varia com o tempo, então a corrente através dele é nula – o condensador é um circuito aberto em DC;**

- **Uma quantidade finita de energia pode ser armazenada num condensador mesmo quando $i = 0$;**

- **É impossível variar instantaneamente (i.e. em tempo zero) a tensão aos terminais de um condensador pois isso requer uma corrente infinita; Um condensador resiste a uma variação abrupta de tensão tal como uma mola resiste a uma mudança brusca no deslocamento;**

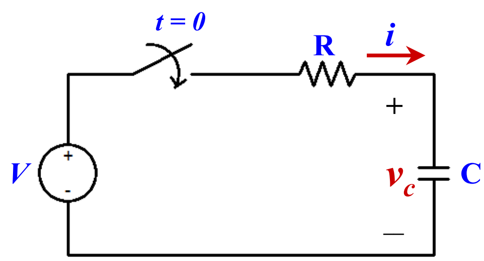
- **Ao contrário da resistência, um condensador não dissipa energia; apenas a armazena.**

Resposta ao degrau do circuito RC

Resposta ao degrau do circuito RC

- **O fecho do interruptor gera uma variação brusca da tensão no circuito RC: um degrau de tensão;**

- **O condensador vai carregar gradualmente de *0* até *V* volts.**



Aplicando KVL : $-V + Ri + v_c = 0$ **com** $i = C\dfrac{dv_c}{dt}$

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = V \quad \Leftrightarrow \quad RCdv_c = (V - v_c)dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{RC}{(V - v_c)}dv_c = dt$$

$$\Leftrightarrow \quad RC\int_0^{v_c(t)} \frac{1}{V - v_c}dv_c = \int_0^t dt$$

Resposta ao degrau do circuito RC

$$RC\int_0^{v_c(t)} \frac{1}{V-v_c}dv_c = \int_0^t dt$$

$$\boxed{\int \frac{1}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx)}$$

$$\Leftrightarrow \quad -RC\ln(V-v_c)\Big|_0^{v_c(t)} = t\Big|_0^t$$

$$\Leftrightarrow \quad -RC\left[\ln(V-v_c(t))-\ln V\right]=t \quad \Leftrightarrow \quad \ln\frac{V-v_c(t)}{V} = -\frac{t}{RC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{V-v_c(t)}{V} = e^{-t/RC}$$

$$v_c(t) = V\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

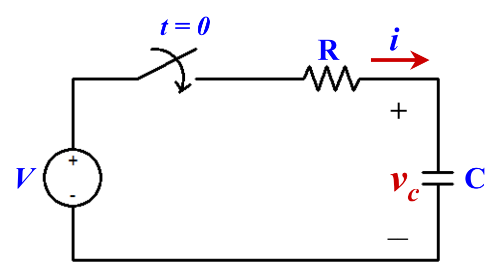
em que $\tau = RC$

é a constante de tempo do circuito

Resposta ao degrau do circuito RC

- **Também chamada de resposta transitória.**

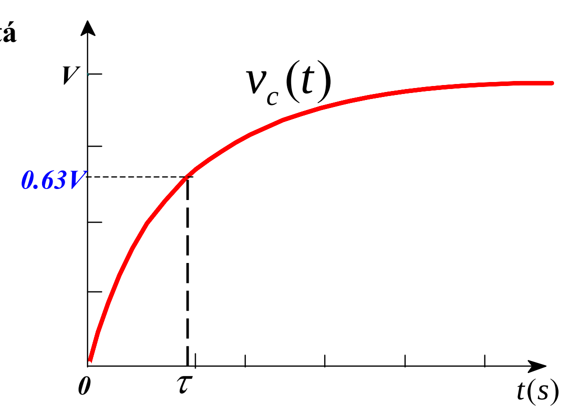
$$v_c(t) = V\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$



- τ **quantifica a velocidade do circuito a responder ao degrau;**

- **Para** $t = \tau$ **a tensão no condensador está a** ***63%*** **do valor final.**

t	v_c/V
τ	0.632
2τ	0.865
3τ	0.950
4τ	0.982
5τ	0.993



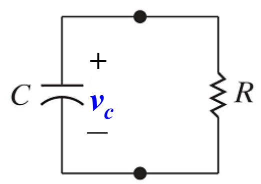
Resposta ao degrau do circuito RC

- **Mais genericamente, a variação da tensão num condensador pode ser obtida por**

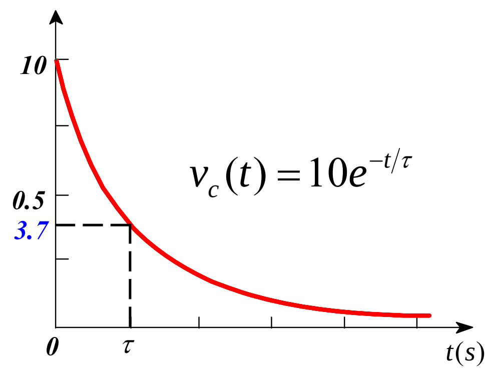
$$v_c(t) = V_{cf} + \left(V_{ci} - V_{cf}\right)e^{-t/\tau}$$

em que V_{ci} **– Tensão inicial no condensador (*t = 0*);**
V_{cf} **– Tensão final no condensador (*t = ∞*).**

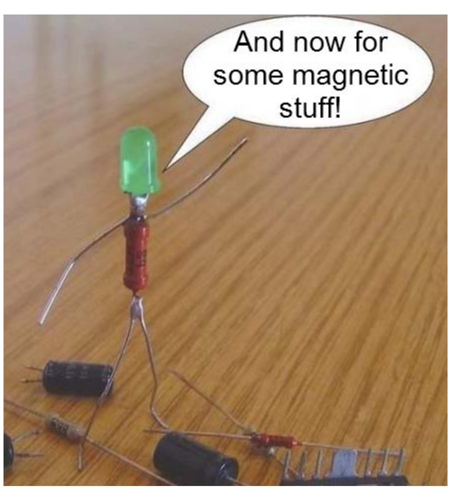
- **Exemplo:**

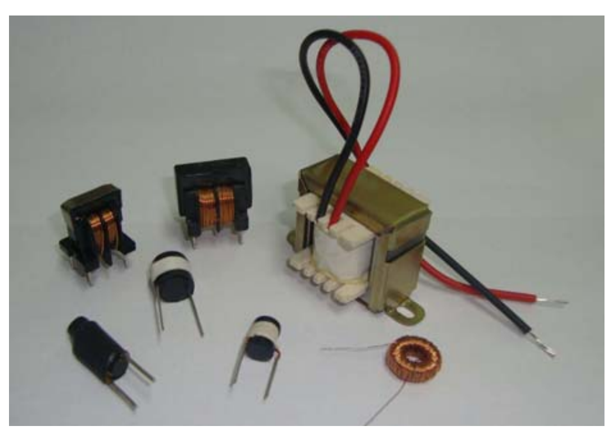


V_{ci} = 10V; V_{cf} = 0V

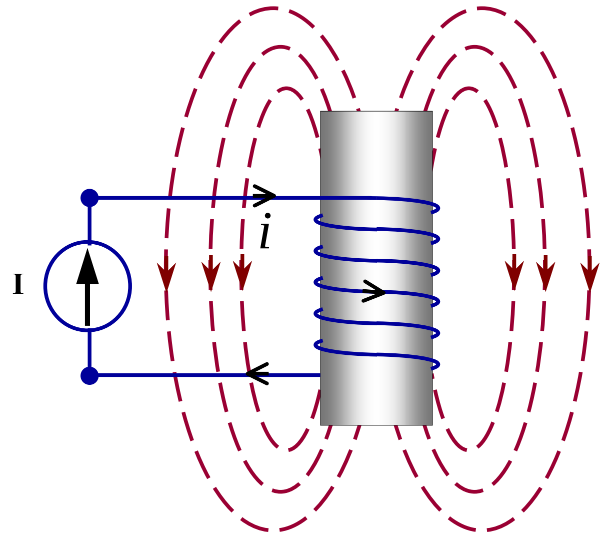


Bobinas





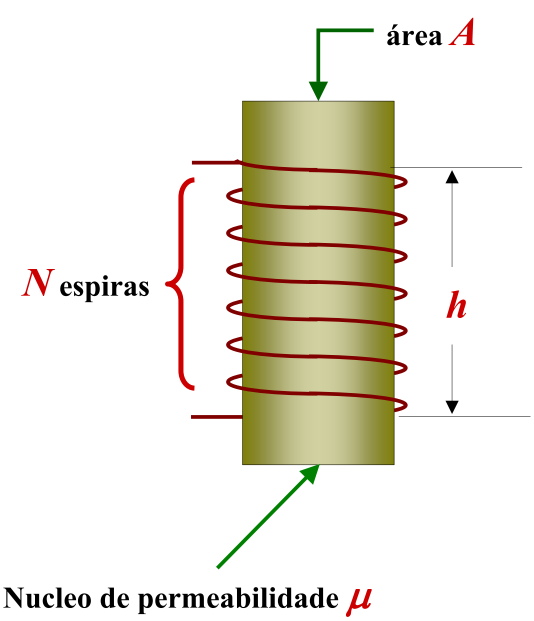
Bobina física



- Constituída por um certo número de espiras de fio condutor enroladas.

- Quando atravessada por uma corrente, ***i***, a bobina produz um campo magnético com intensidade de fluxo, ***Φ***, determinada pela sua indutância, ***L***.

Bobina física

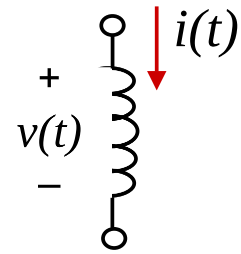


$$L = \mu \frac{N^2 A}{h}$$

Expressão aproximada, válida só quando *h >> diâmetro*

Bobina – modelo matemático

- **A indutância da bobina define-se como:**



Símbolo

$$L = \frac{\phi}{i}$$

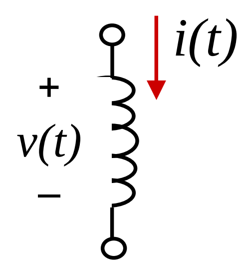
$$1 Volt.1 Segundo / 1 Ampére = 1\ Henry$$

- **Uma relação idêntica é:**

$$v = L\frac{di}{dt}$$

Bobina – modelo matemático

$$\boxed{v = L\frac{di}{dt}}$$



Símbolo

- **Desta relação podemos desde logo concluir que:**
  - **Tensão é proporcional à taxa de variação da corrente;**
  - **Se a corrente é constante a tensão é nula - bobina é um curto-circuito para DC;**
  - **Uma variação brusca de corrente requer tensão infinita. Como não temos tensões infinitas, segue-se que uma bobina não permite variações bruscas de corrente.**

Relação corrente-tensão

$$v = L\frac{di}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad di = \frac{1}{L}v\,dt$$

- **Integrando ambos os lados da igualdade entre um instante inicial, t_0, e t, obtém-se**

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt \;\Leftrightarrow\; i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt$$

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i(t_0)}$$

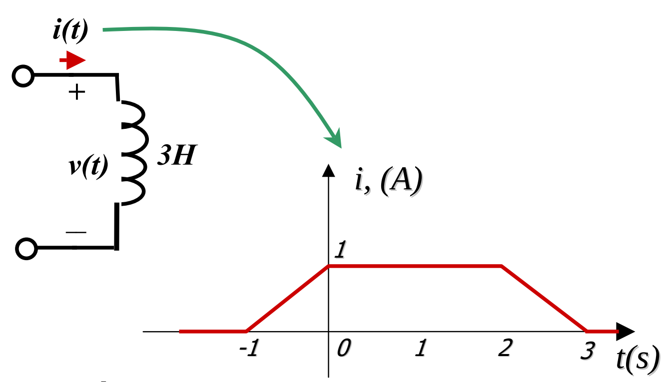
- **Em muitas situações pode seleccionar-se, $t_0 = -\infty$ e $i(-\infty) = 0$, o que reduz o integral a**

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,dt$$

Note-se que todas estas relações assumem a Convenção de Sinais de Elemento Passivo – a corrente entra na bobina pelo terminal marcado pela polaridade (+).

Exemplo 2

- **Efeito da velocidade de variação da corrente na tensão da bobina**

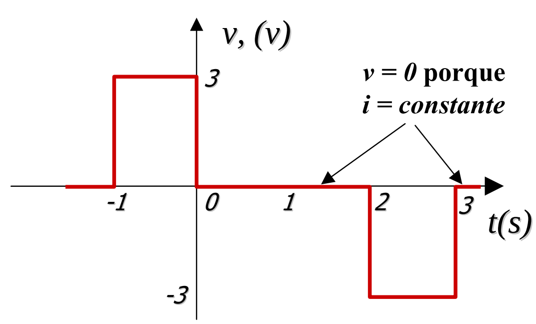


- **No intervalo $-1 < t < 0$ a tensão será:**

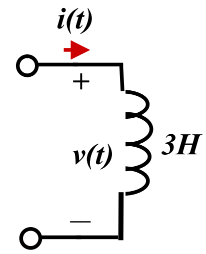
$$v_1 = L\frac{di}{dt} = 3\frac{1\text{A}}{1\text{s}} = 3V$$

- **No intervalo $2 < t < 3$ a tensão será:**

$$v_2 = L\frac{di}{dt} = 3\frac{-1\text{A}}{1\text{s}} = -3V$$



Exemplo 3

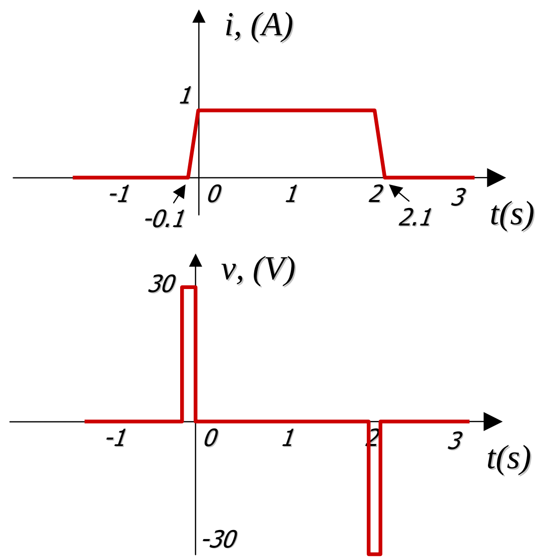


- Se a corrente variar mais rapidamente teremos na bobina tensões de:

$$v_1 = L\frac{di}{dt} = 3\frac{1\text{A}}{0.1\text{s}} = 30V;$$

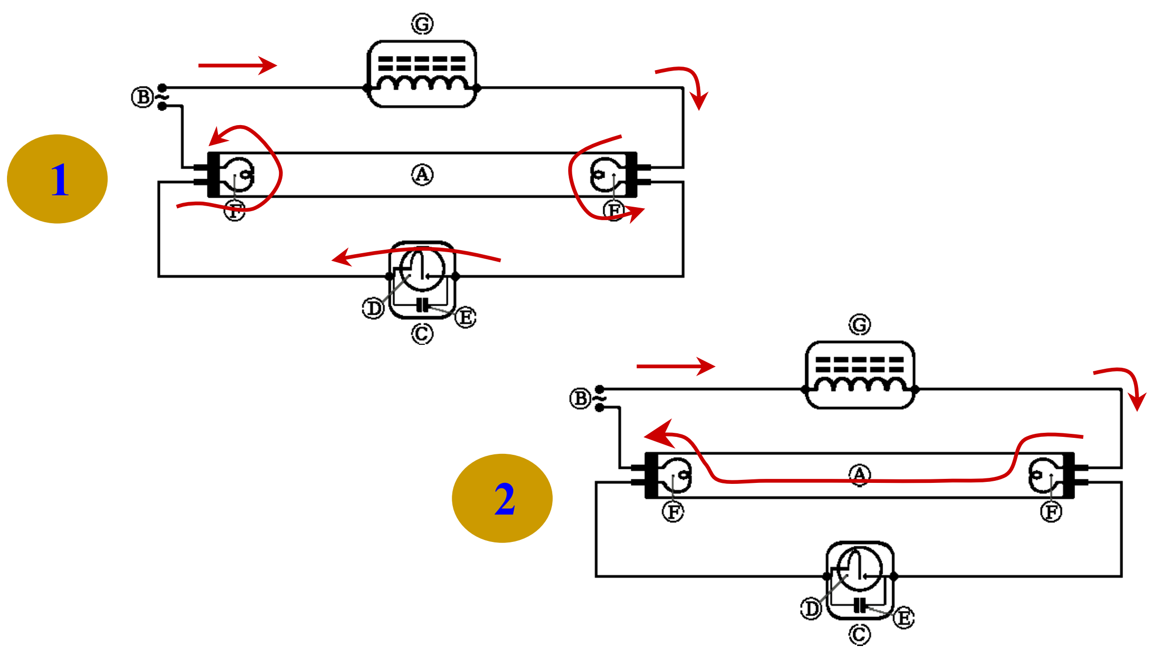
$$v_2 = -30V$$

- É por este motivo que a abertura de um interruptor num circuito indutivo causa, em geral, o aparecimento de um arco eléctrico – devido à tensão elevada que surge.

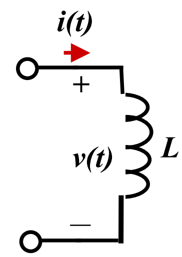


Curiosidade

- O aparecimento de um tensão elevada devido à interrupção da corrente numa bobina constitui o principio de funcionamento das lâmpadas fluorescentes:



Energia armazenada numa bobina



- **A potência fornecida à bobina é:**

$$p = vi = L\frac{di}{dt}i$$

- **Como $p=dW/dt$, a energia armazenada no campo magnético é:**

$$dw = pdt \Leftrightarrow \int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = \int_{t_0}^{t} pdt = L\int_{t_0}^{t} i\frac{di}{dt}dt = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} idi$$

$$\int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = L\left(\frac{i^2}{2}\right)_{i(t_0)}^{i(t)}$$

$$W(t) - W(t_0) = \frac{1}{2}L\left(i(t)^2 - i(t_0)^2\right)$$

- **Se selecionarmos t_0 de forma a que a corrente e a energia sejam ambos zero:**

$$W(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$$

Bobina ideal – aspectos a reter

- **A tensão aos terminais duma bobina é zero se a corrente que a atravessa não varia com o tempo – a bobina é um curto-circuito em DC;**

- **Uma quantidade finita de energia pode ser armazenada numa bobina mesmo quando $v = 0$ (i.e. a corrente é constante);**

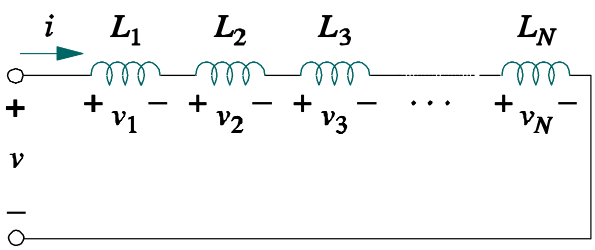
- **É impossível variar instantaneamente (i.e. em tempo zero) a corrente aos terminais de uma bobina pois isso requer uma tensão infinita; Uma bobina resiste a uma variação abrupta de corrente assim como uma massa resiste a uma mudança brusca na velocidade;**

- **Ao contrário da resistência, uma bobina não dissipa energia; apenas a armazena.**

Combinação de bobinas e condensadores

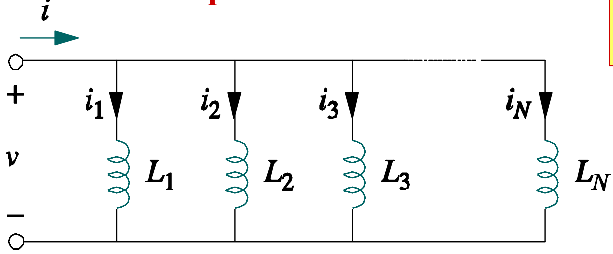
Combinações de bobinas

Bobinas em série



$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_N$$

Bobinas em paralelo



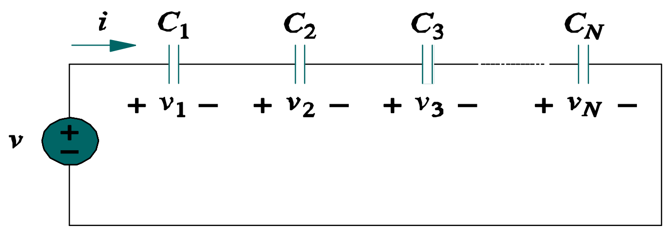
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \ldots + \frac{1}{L_N}$$

Nota: **Para *N=2* a indutância equivalente é dada por:**

$$L_{eq2} = \frac{L_1 . L_2}{L_1 + L_2}$$

Combinações de condensadores

Condensadores em série

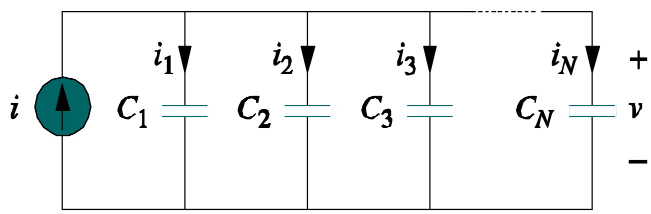


$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}$$

Nota: **Para *N=2* a capacidade equivalente é dada por:**

$$C_{eq2} = \frac{C_1 . C_2}{C_1 + C_2}$$

Condensadores em paralelo



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N$$