Análise em $\mathbb{R}^d$

Hugo Cattarucci Botós (ICMC - USP)
hugocbotos@gmail.com

Última atualização em 18 de fevereiro de 2024

Sumário

Capítulo 1

Beabá topológico

> The introduction of the cipher 0 or the group concept was general nonsense too, and mathematics was more or less stagnating for thousands of years because nobody was around to take such childish steps ...
>
> Alexander Grothendieck

1.1 Revisão de sequências na reta.

Uma sequência em um conjunto X é uma função $\mathbb{Z}_{\geq 1} \to X$ associa a cada inteiro positivo n um ponto x_n de X. Uma sequência x_n em $\mathbb{R}$ é formada por números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ e converge para $x \in \mathbb{R}$ se temos $|x - x_n|$ tão pequeno quanto quisermos para n suficientemente grande. Mais precisamente, dizemos que x_n converge para x se para cada $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Denotamos essa convergência por $x_n \to x$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Exercício 1.1 (Desigualdade de Bernoulli)**.** Prove que para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $x > -1$ temos

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

A desigualdade de Bernoulli é bastante útil quando mostrando limites numéricos básicos.

Exemplo 1.2. Considere $a \in \mathbb{R}_{>1}$ e $x_n = a^{\frac{1}{n}}$. Temos que $x_n \to 1$. De fato, considere $h_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$ e note que $h_n \geq 0$. Pela desigualdade de Bernoulli 1.1,

$$a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n,$$

ou seja,

$$0 \leq h_n \leq \frac{a-1}{n} \to 0,$$
$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + h_n \to 1.$$

Por outro lado, se $0 < a < 1$, temos

$$a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(a^{-1})^{\frac{1}{n}}} \to 1,$$

pois $a^{-1} > 1$.

Exercício 1.3. Mostre que $n^{1/n} \to 1$.

Vamos supor que o leitor saiba que conjuntos limitados superiormente em $\mathbb{R}$ possuem supremo, e conjuntos limitados inferiormente possuem ínfimo. Esses fatos são normalmente vistos em um curso básico de análise na reta.

Exercício 1.4. Mostre que

- se x_n é crescente e limitada, então $x_n \to \sup\{x_i : i \geq 1\}$;
- se x_n é decrescente e limitada, então $x_n \to \inf\{x_i : i \geq 1\}$.

Exemplo 1.5. Considere $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Mostremos que a_n é crescente. A seguir, fatoraremos a_{n+1}/a_n até termos uma expressão apropriada para aplicar a desigualdade de Bernoulli 1.1, assim mostrando que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&\geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1} = 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, $a_{n+1} \geq a_n$, ou seja, a sequência a_n é crescente. Se essa for limitada superiormente, teremos que $a_n \to \sup\{a_i : i \geq 1\}$, que é o número e.

Mostremos que a_n é limitada superiormente. Pelo binômio de Newton

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \\
&= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{2.3\cdots n}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\
&\leq 3.
\end{aligned}$$

Logo, a_n converge para $\sup\{a_i : i \geq 1\}$.

Exercício 1.6. Sejam x_n e y_n sequências em $\mathbb{R}$ convergentes para x e y e seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante . Mostre que

$$x_n + y_n \to x + y, \quad \alpha x_n \to \alpha x, \quad x_n y_n \to xy.$$

Mostre que para $y \neq 0$, temos que y_n é não nulo par n suficientemente grande e

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}.$$

Proposição 1.7. Considere uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo. São equivalentes:

- f é contínua em x_0, i.e., dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{quando} \quad |x - x_0| < \delta.$$

- Para toda sequência convergente $x_n \to x_0$, temos $f(x_n) \to f(x_0)$.

Exercício 1.8. Prove a Proposição 1.7.

Definição 1.9. Uma subsequência de x_n é uma sequência

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots$$

com

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots .$$

Exercício 1.10. Considere uma sequência x_n e um ponto x. Mostre que $x_n \to x$ se as subsequências x_{2k} e x_{2k+1} convergem para x.
Extra: Utilize tal resultado para provar o teste de convergência de Leibniz para séries: se a_k é uma sequência decrescente de termos não-negativos e $a_k \to 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

converge.

Teorema 1.11 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** Toda sequência limitada admite subsequência convergente.

Demonstração. Considere a sequência x_n limitada. Há $R > 0$ tal que $x_n \in [-R, R]$. Seja $I_0 = [-R, R]$. Dividindo I_0 ao meio, obtemos dois intervalos fechados. Escolha I_1 como sendo uma das metades possuindo x_n para infinitos n's. Temos que $\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : x_n \in I_1\}$ é infinito e o comprimento de I_1, denotado por $|I_1|$, vale $|I_1| = |I_0|/2$. Dividindo I_1 ao meio, escolhemos I_2 tal que $\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : x_n \in I_2\}$ é infinito e $|I_2| = |I_1|/2 = |I_0|/2^2$. Seguindo tal algorítimo, obtemos os intervalos fechados e limitados $I_0, I_1, I_2, \ldots$ tais que

- $\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : x_n \in I_i\}$ é infinito,
- $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_i \supset I_{i+1} \supset \cdots$,
- $|I_i| = |I_0|/2^i$.

Escolha $x_{n_1} \in I_1$. Existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in I_2$, pois $\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : x_n \in I_2\}$ é infinito. Similarmente, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \in I_3$. Seguindo tal procedimento, existem $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_i < n_{i+1} < \cdots$ tais que $x_{n_i} \in I_i$.

Como I_i é um intervalo fechado e limitado, temos que esse possuí extremos a_i, b_i, isto é, $I_i = [a_i, b_i]$. Adicionalmente, temos que $I_{i+1} \subset I_i$ e, consequentemente, $a_i \leq a_{i+1}$ e $b_i \geq b_{i+1}$. Além disso, a sequência a_i é limitada superiormente por R e a sequência b_i é limitada inferiormente por $-R$, ou seja, os números

$$\alpha := \sup\{a_i : i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \quad \text{e} \quad \beta := \inf\{b_i : i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$$

existem.

Assim, $a_n \to \alpha$ e $b_n \to \beta$, por serem sequências monótonas. Como $b_n - a_n = |I_0|/2^n \to 0$, temos que $\alpha = \beta$, ou seja, $a_n, b_n \to \alpha$.

Por outro lado, $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$, pois $x_{n_k} \in I_k$. Deste modo,

$$a_k - \alpha \leq x_{n_k} - \alpha \leq b_k - \alpha,$$

ou seja,

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \alpha.$$

■

Exemplo 1.12. A sequência $x_n = (-1)^n$ não converge, mas é limitada. Temos as subsequências convergentes $x_{2k} \to 1$ e $x_{2k+1} \to -1$.

Exercício 1.13. Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que:

- f é limitada;
- existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$, ou seja, f atinge máximo.

1.2 Normas e métricas

Comecemos com $\mathbb{R}^d$. Temos o produto interno canônico

$$\langle x, y\rangle = \sum_i x^i y^i,$$

onde $x = (x^1, \ldots, x^d)$ e $y = (y^1, \ldots, y^d)$.

Esse produto nos fornece uma norma definida pela fórmula

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Mais explicitamente,

$$|x| = \sqrt{\sum_i (x^i)^2}.$$

Uma norma, se o leitor não viu ou não lembra, tem de satisfazer as seguintes propriedades:

- $|kx| = |k||x|$ para $k \in \mathbb{R}$ e $x \in V$;
- $|x| \geq 0$ para qualquer $x \in V$ e somente vale zero se $x = 0$;
- Vale a desigualdade triangular: Para $x, y \in \mathbb{R}^d$, temos que

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Geometricamente, essa última propriedade é interpretada da seguinte forma. Se temos um triangulo com lados $x, y, x + y$, então a soma do comprimento de dois lados é maior ou igual que o comprimento do terceiro lado. De jeito mais simplista. Se queremos ir de 0 a $x + y$, então podemos ir direto, percorrendo a distância $|x + y|$, ou ir passando por x. Isto é, vamos de 0 a x percorrendo a distância $|x|$ e depois de x a $x + y$ percorrendo a distância $|y|$, porque $x + y - x = y$.

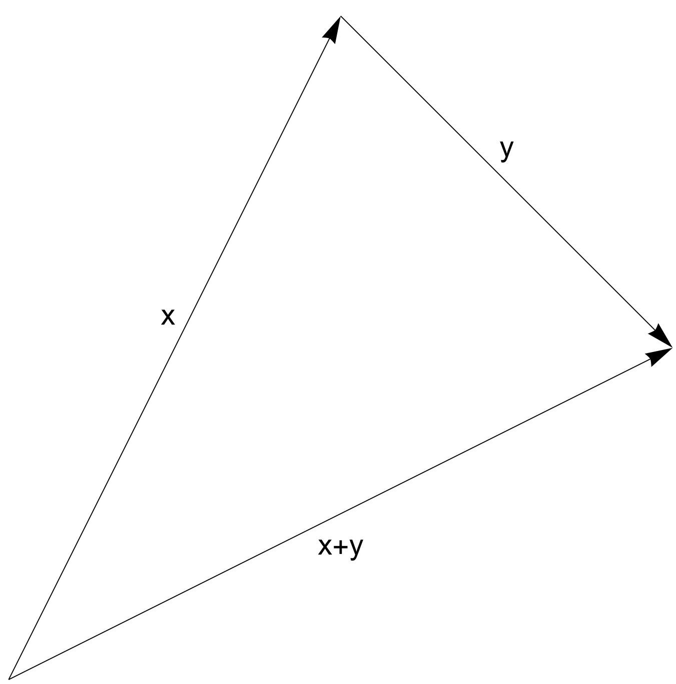


Figura 1.1: *Triangulo com vetores x, y e $x + y$.*

De forma mais geral, temos:

Definição 1.14. Uma norma em um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ é uma função $\boldsymbol{p} : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as três propriedades listadas acima.

- $\boldsymbol{p}(kx) = |k|\boldsymbol{p}(x)$ para $k \in \mathbb{K}$ e $x \in V$;
- $\boldsymbol{p}(x) \geq 0$ para qualquer $x \in V$ e somente vale zero se $x = 0$;
- Vale a desigualdade triangular: Para $x, y \in V$, temos que

$$\boldsymbol{p}(x+y) \leq \boldsymbol{p}(x) + \boldsymbol{p}(y).$$

O espaço V munido da $\boldsymbol{p}$ é chamado de espaço vetorial normado e é denotado por $(V, |\cdot|)$.

Voltemos a $\mathbb{R}^d$. Repare que as duas primeiras propriedades de normas são evidentes, mas a terceira não é. A fim de prova-la precisamos da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Primeiro provemos o "teolema" de Pitágoras.

Definição 1.15. Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^d$ são ortogonais (ou perpendiculares) se $\langle x, y \rangle = 0$.

Repare que o vetor nulo é ortogonal a todo vetor.

Lema 1.16 (Teorema de Pitágoras)**.** Considere $x, y \in \mathbb{R}^d$. Temos que x, y são orthogonais se, e só se,

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

Demonstração. Basta notar que

$$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$$

∎

Teorema 1.17 (Desigualdade de Cauchy-Schwartz)**.** Se $x, y \in \mathbb{R}^d$, então

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|.$$

A igualdade vale se x, y são linearmente dependentes.

Demonstração. Se $x = 0$ ou $y = 0$, então $\langle x, y \rangle = 0$ e o resultado é trivialmente válido. Podemos desta forma assumir que x e y são não nulos. Considere o vetor

$$\Pi[y]x := \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y,$$

que se chama projeção de x sobre a reta $\mathbb{R}y$.

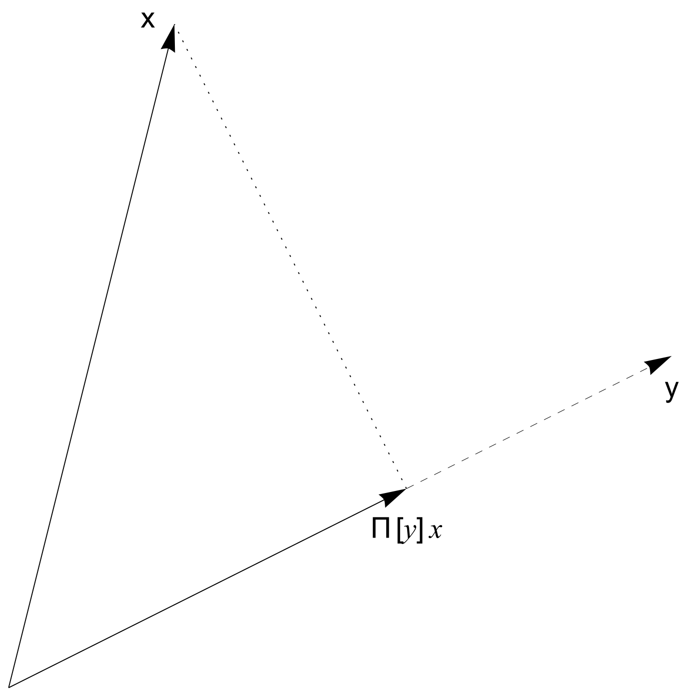


Figura 1.2: *Projeção de x sobre y.*

Note que $x - \Pi[y]x$ e $\Pi[y]x$ são ortogonais:

$$\langle x - \Pi[y]x, \Pi[y]x\rangle = \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\rangle = 0.$$

Assim, pelo Teorema de Pitágoras 1.16, obtemos

$$|x|^2 = |x - \Pi[y]x|^2 + |\Pi[y]x|^2.$$

Temos que

$$\begin{aligned} |x - \Pi[y]x|^2 &= |x|^2 - |\Pi[y]x|^2 \\ &= |x|^2 - \langle x, y\rangle^2 |y|^2 \\ &= \frac{1}{|y|^2} \left(|x|^2 |y|^2 - \langle x, y\rangle^2 \right). \end{aligned}$$

Como $|x - \Pi[y]x| \geq 0$ e somente é zero quando x, y são proporcionais, obtemos o resultado. ■

Observação 1.18. Todos esses resultados valem para espaços vetoriais reais ou complexos com produto interno. As provas são essencialmente as mesmas com a tecnicalidade de que no caso complexo você obtém $|\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle| \leq |x||y|$ no argumento acima. Nesse cenário se usa o seguinte truque: o número $\xi = \frac{\langle x, y\rangle}{|\langle x, y\rangle|}$ é complexo de norma 1. Assim,

$$\langle \overline{\xi} x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$$

e obtemos

$$|\langle x, y\rangle| = |\mathrm{Re}\,\langle \bar{\xi}x, y\rangle| \leq |\bar{\xi}x||y| = |\bar{\xi}||x||y| = |x||y|,$$

que é o resultado desejado.

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz 1.17, temos que para $x, y \in \mathbb{R}^d$ não nulos vale

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|} \leq 1$$

e assim há $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\langle x, y\rangle = |x||y|\cos(\theta)$.

O número θ é unicamente determinado, porque a função cosseno $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ é bijetora. Além disso, dizemos que θ é o ângulo entre x e y. Note também que para x, y não nulos, temos x, y ortogonais se, e só se, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Exercício 1.19. Mostre a Lei dos Cossenos. Se x, y são vetores não-nulos e θ é o ângulo entre eles, então

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos(\theta).$$

Finalmente podemos provar a terceira propriedade da definição de norma para $\mathbb{R}^d$, a desigualdade triangular. Basta usarmos a desigualdade de Cauchy-Schwarz 1.17.

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Exercício 1.20. Considere o espaço M_d das matrizes quadradas reais $d \times d$. Mostre que

- $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\left(AB^T\right)$ é um produto interno e $\boldsymbol{p}(A) = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^T)}$ é uma norma em M_d;
- $\boldsymbol{q}(A) = \sup\{|Ax| : x \in \mathbb{R}^d,\ |x| = 1\}$ é uma norma em M_d.

Agora definimos métrica (que é a mesma coisa que distância).

Definição 1.21. Uma métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ em um conjunto X é uma função satisfazendo as seguintes propriedades:

- **Positividade:** $d(x, y) \geq 0$ para quaisquer $x, y \in X$ e vale zero quando $x = y$;
- **Simetria:** $d(x, y) = d(y, x)$ para quaisquer $x, y \in X$;
- **Desigualdade triangular:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para quaisquer $x, y, z \in X$.

O conjunto X munido de uma métrica d é chamado de **espaço métrico**, que denotamos por (X, d).

O autor desse texto as vezes esquece de escrever coisas. Ao invés de escrever (X, d), muitas vezes escreverei X para denotar um espaço métrico, quando não houver confusão. As vezes denotamos a métrica de X por d_X quando for conveniente.

Se V é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ com norma p, então $d(x, y) := p(x - y)$ é uma métrica. Isso segue direto das propriedades de norma.

Para $\mathbb{R}^d$, temos que a distância entre x e y é

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_i (x^i - y^i)^2}.$$

Temos assim que todo espaço normado é naturalmente um espaço métrico.

Definição 1.22. Seja X um espaço métrico com métrica $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ e $A \subset X$. O conjunto A é espaço métrico com métrica $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ dada por $d_A(x, y) := d_X(x, y)$.

Em outras palavras, a métrica de A é só a métrica de X (a métrica ambiente) restrita a A. Essa métrica em A é conhecida como métrica induzida de X em A.

Assim, todo subconjunto de $\mathbb{R}^d$ tem é um espaço métrico.

Temos a reta $\mathbb{R} \times \{0\}$ em $\mathbb{R}^2$. A distância é dada por

$$d_{\mathbb{R}\times\{0\}}\left((x, 0), (y, 0)\right) = \sqrt{(x - y)^2 + (0 - 0)^2} = |x - y|$$

que é a distância entre x, y na reta real $\mathbb{R}$. Assim, a métrica induzida nos eixos coordenados é simplesmente a métrica vinda de $\mathbb{R}$.

Pela mesma lógica, se temos $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d-n}$, onde $n < d$, temos que a métrica em $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ é exatamente a que se espera, a vinda de $\mathbb{R}^n$.

O círculo unitário

$$\mathbb{S}^1 := \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\}$$

tem métrica induzida de $\mathbb{R}^2$. A distância entre $x, y \in \mathbb{S}^1$ é a comprimento do segmento de reta ligando x a y em $\mathbb{R}^2$, o que não é exatamente a métrica que vem a mente quando pensamos em um círculo. A distância mais óbvia seria a o comprimento $d'(x, y)$ do menor arco entre x, y.

Essa distância $d'(x, y)$ é ângulo entre x, y, porque o círculo tem raio 1:

$$d'(x, y) = \arccos(\langle x, y\rangle) \in [0, \pi],$$

onde $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ é inversa da função $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

Proposição 1.23. Considere $x, y \in \mathbb{S}^1$.

$$|x - y| \leq d'(x, y) \leq \frac{\pi}{2}|x - y|.$$

Demonstração. Se $x = y$ ou $x = -y$ a desigualdade é válida. Nesse segundo temos $|x-y| = 2$ e $d'(x,y) = \pi$.

Agora suponha $x \neq y$ e $x \neq -y$. Temos o triângulo $0, x, y$. Seja θ o ângulo entre x e y, isto é, $\theta = d'(x,y)$. Portanto, lembrando que $\cos(\theta) = 1 - 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$, temos que

$$|x-y|^2 = 2 - 2\langle x, y\rangle = 2(1-\cos(\theta)) = 4\sin^2(\theta/2)).$$

Provemos que para $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ valem as desigualdades

$$\frac{2}{\pi}s \leq \sin(s) \leq s.$$

A função $s \mapsto s - \sin(s)$ vale 0 em $s = 0$ e tem derivada $1 - \cos(s)$, que é não negativa, ou seja, a função é crescente. Daí segue que $s - \sin(s) \geq 0$. Por outro lado, a função $\sin(s)$ é concava (sua segunda derivada é não positiva) no intervalo $[0, \pi]$, ou seja, a parte inferior de seu gráfico é convexa. Assim, a reta ligando $(0,0)$ a $(\frac{\pi}{2}, 1)$, dada por $s \mapsto \frac{2}{\pi}s$, está abaixo do seu gráfico para $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$.

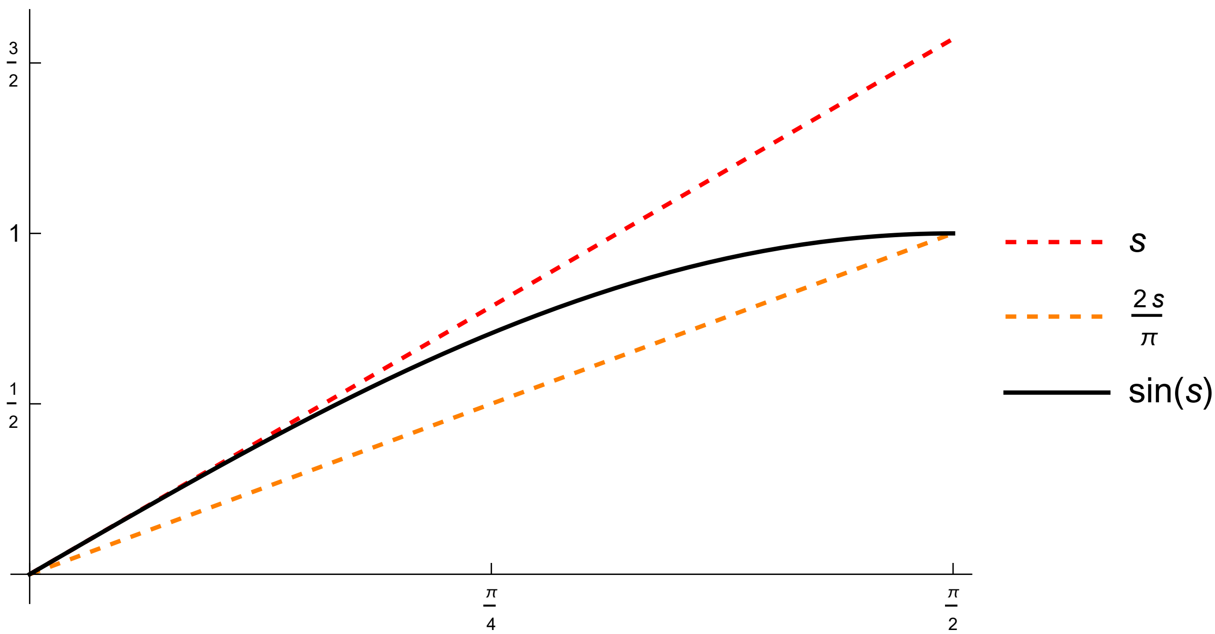


Figura 1.3: $\frac{2}{\pi}s \leq \sin(s) \leq s$ *para* $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$.

Tomando $s = \theta/2$ temos:

$$\frac{4}{\pi^2}\theta^2 \leq |x-y|^2 \leq \theta^2,$$

$$\frac{2}{\pi}d'(x,y) \leq |x-y| \leq d'(x,y),$$

$$|x-y| \leq d'(x,y) \leq \frac{\pi}{2}|x-y|.$$

■

Observação 1.24. A esfera unitária d-dimensional $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : |x| = 1\}$ satisfaz a mesma propriedade. Temos a métrica $d'(x, y) = \arccos(\langle x, y\rangle)$ que cálcula o comprimento do arco ligando x a y. Mais precisamente, se $x \neq y$, temos círculo $\mathbb{S}^d \cap (\mathbb{R}x + \mathbb{R}y)$ e $d'(x, y)$ computa o comprimento de arco nesse círculo. A comparação entre essa métrica intrínseca d' e a métrica vinda do ambiente é

$$|x - y| \leq d'(x, y) \leq \frac{\pi}{2}|x - y|,$$

a mesma que provamos acima. A prova é igual.

O que não é óbvio é que d' em $\mathbb{S}^d$ é de fato uma métrica. Mais precisamente, não é obvio que ela satisfaz a desigualdade triangular. Provemos tal fato.

Proposição 1.25. Para $x, y, z \in \mathbb{S}^d$, temos

$$d'(x, y) \leq d'(x, y) + d'(y, z)$$

Demonstração. Suponha que não vale. Há x, y, z tais que

$$\arccos\langle x, z\rangle > \arccos\langle x, y\rangle) + \arccos\langle y, z\rangle.$$

Como a função $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ é decrescente, temos

$$\langle z, x\rangle < \cos\left(\arccos\langle x, y\rangle + \arccos\langle y, z\rangle\right),$$

e, usando que $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$, obtemos

$$\langle z, x\rangle < \cos\left(\arccos\langle x, y\rangle\right)\cos\left(\arccos\langle y, z\rangle\right) - \sin\left(\arccos\langle x, y\rangle\right)\sin\left(\arccos\langle y, z\rangle\right),$$

que pode ser simplificado para

$$\langle z, x\rangle < \langle x, y\rangle\langle y, z\rangle - \sqrt{1 - \langle x, y\rangle^2}\sqrt{1 - \langle y, z\rangle^2},$$

onde usamos que $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos(\alpha)}$ para $0 \leq \alpha \leq \pi$. Assim

$$\sqrt{1 - \langle x, y\rangle^2}\sqrt{1 - \langle y, z\rangle^2} < \langle x, y\rangle\langle y, z\rangle - \langle z, x\rangle,$$
$$(1 - \langle x, y\rangle^2)(1 - \langle y, z\rangle^2) < \langle x, y\rangle^2\langle y, z\rangle^2 - 2\langle x, y\rangle\langle y, z\rangle\langle z, x\rangle + \langle z, x\rangle^2,$$
$$1 - \langle x, y\rangle^2 - \langle y, z\rangle^2 - \langle z, x\rangle^2 - 2\langle x, y\rangle\langle y, z\rangle\langle z, x\rangle < 0.$$

Por outro lado, a matriz de Gram

$$G := \begin{bmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle & \langle x,z\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle & \langle y,z\rangle \\ \langle z,x\rangle & \langle z,y\rangle & \langle z,z\rangle \end{bmatrix}$$

é igual a $A^T A$, onde

$$A = \begin{bmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{bmatrix}.$$

Em particular, $\det(G) = \det(A)^2 \geq 0$, ou seja, obtemos

$$1 - \langle x, y\rangle^2 - \langle y, z\rangle^2 - \langle z, x\rangle^2 - 2\langle x, y\rangle\langle y, z\rangle\langle z, x\rangle \geq 0,$$

contradizendo a desigualdade que deduzimos acima. ■

Portanto, temos a métrica de $\mathbb{R}^{d+1}$ restrita a esfera $\mathbb{S}^d$, a esfera intrínseca d' em $\mathbb{S}^d$ e elas ainda se comparam, o que quer dizer que o conceito de pequeno para uma métrica é pequeno para outra.

Tal fenômeno também ocorre em $\mathbb{R}^d$, onde se compara entre métricas oriundas de normas. Se temos uma norma $\boldsymbol{p}$ em $\mathbb{R}^d$, então sempre há constantes $C_2, C_1 > 0$ para as quais $|x|C_1 \leq \boldsymbol{p}(x) \leq C_2|x|$ (veja Proposição 1.31). Em termos de métricas, temos

$$C_1|x-y| \leq \boldsymbol{p}(x-y) \leq C_2|x-y|.$$

Por exemplo, a função $|x|_1 := |x^1| + |x^2| + \cdots + |x^d|$ define uma norma. Por um lado,

$$|x|_1 = \langle (|x^1|, \ldots, |x^d|), (1, 1, \ldots, 1) \rangle \leq |x||(1, 1, \ldots, 1)| = \sqrt{d}|x|.$$

Por outro lado, $|x|_1^2$ tem entre seus temos $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^d)^2$, ou seja, $|x|_1^2 \geq |x|^2$. Logo,

$$|x| \leq |x|_1 \leq \sqrt{d}|x|.$$

Exemplo similar vem da norma $|x|_\infty := \max_i |x^i|$.

Temos

$$\frac{1}{\sqrt{d}}|x| \leq |x|_\infty \leq |x|.$$

Exercício 1.26. Mostre que:

- $|\cdot|_1, |\cdot|_\infty$ são normas;
- $\sum_i |x^i||y^i| \leq |x|_1 |y|_\infty$ para $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Essas três normas, $|\cdot|$, $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_\infty$, fazem parte de uma família maior de normas, as normas l^p. Para $p \in [1, \infty)$, definimos

$$|x|_p := \left(\sum_i |x^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para todo $p \in [1, \infty)$, a expressão acima define uma norma. A parte difícil é mostrar a desigualdade triangular, que faremos a seguir (veja Proposição 1.30). Além disso, repare que $|x|_\infty = \lim_{p \to \infty} |x|_p$ e que $|x| = |x|_2$.

Exercício 1.27. Mostre que $|x|_\infty = \lim_{p \to \infty} |x|_p$.

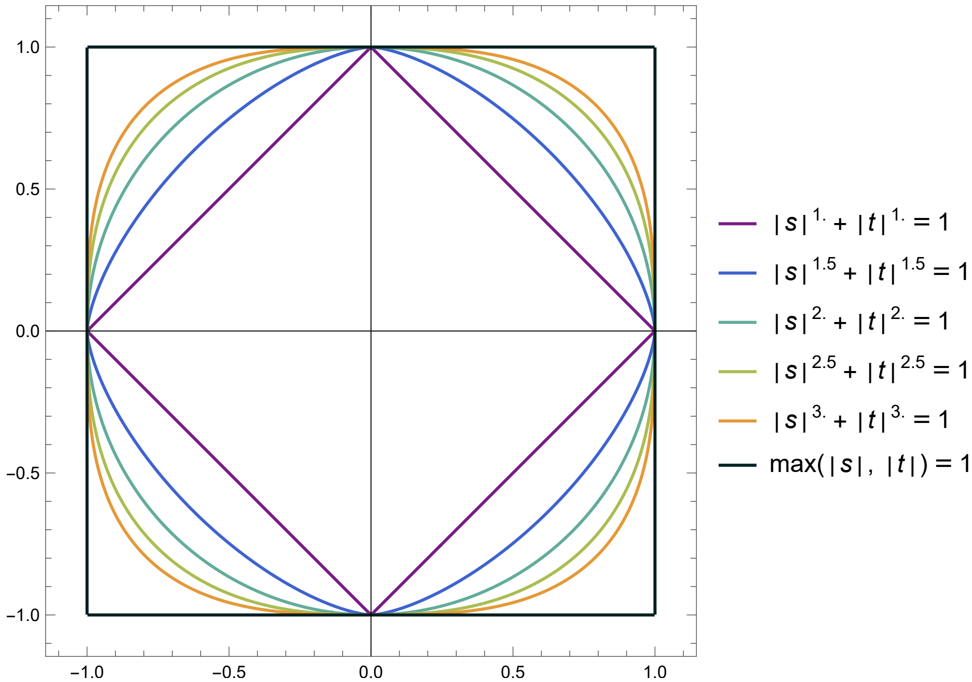


Figura 1.4: *Círculo* $|(s,t)|_p = 1$ *para vários* p*'s.*

Mostremos a desigualdade triangular para as normas l^p.

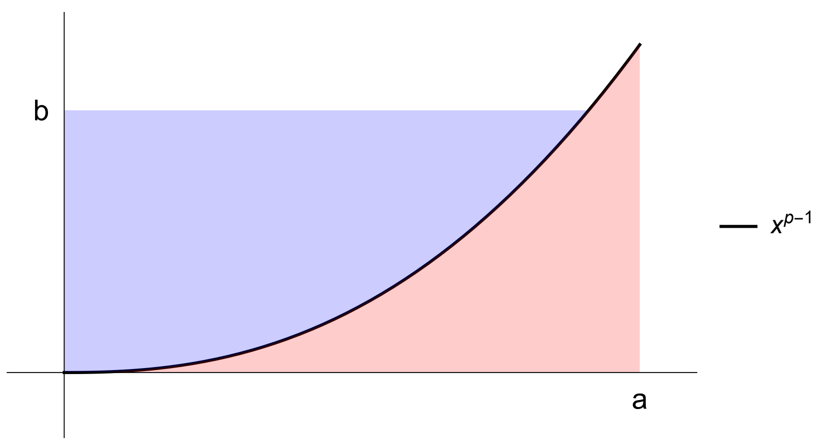


Figura 1.5: *Gráfico da função* x^{p-1}.

Lema 1.28 (Desigualdade de Young)**.** Considere $p \in (1, \infty)$ e tome q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, isto é, $q = \frac{p}{p-1}$. Para $a, b \geq 0$ temos

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Considere a função $f(x) = x^{p-1}$. A área abaixo do gráfico para $x \in [0, a]$ é $\frac{a^p}{p}$, em vermelho na Figura 1.5. A inversa dessa função é $g(y) = y^{q-1}$, pois se temos

$y = x^{p-1}$, então $x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$. A área em azul na Figura 1.5 é a integral de $g(y)$ de 0 a b, isto é, $\frac{b^q}{q}$.

O quadrado definido pelos pontos $(0,0),(a,0),(a,b),(0,b)$ tem área ab. Além disso, esse se encontra dentro da região conjunta formada pela região vermelha com a azul. Assim,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

■

Lema 1.29 (Desigualdade de Hölder)**.** Se $p \in (1,\infty)$ e $q = \frac{p}{p-1}$, então para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\sum_i |x^i||y^i| \leq |x|_p |y|_q.$$

Repare que para $p = q = 2$, temos que

$$\sum_i |x^i||y^i| \leq |x|_2 |y|_2,$$

(que segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz 1.17). Além disso, podemos extender o resultado para $p = 1$ e $q = \infty$. Pois nesse caso ainda temos $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e

$$\sum_i |x^i||y^i| \leq |x|_1 |y|_\infty.$$

Demonstração. Se $x = 0$ ou $y = 0$ a desigualdade é trivialmente verdadeira. Podemos assumir $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Considere $u = x/|x|_p$ e $v = y/|y|_q$. Temos $|u|_p = |v|_q = 1$. Pela desigualdade de Young 1.28, temos

$$\sum_i |u^i||v^i| \leq \sum_i \frac{|u^i|^p}{p} + \frac{|v^i|^q}{q} = \frac{\sum_i |u^i|^p}{p} + \frac{\sum_i |v^i|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Como $u^i = x^i/|x|_p$ e $v^i = y^i/|y|_q$, temos

$$\sum_i |x^i||y^i| \leq |x|_p |y|_q.$$

■

Finalmente, provamos a desigualdade triangular.

Proposição 1.30 (Desigualdade de Minkowski)**.** Considere $p \in [1,\infty]$. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ temos

$$|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$$

Demonstração. Podemos supor que $1 < p < \infty$, pois os casos extremos $p = 1, \infty$ são fáceis e são deixados ao leitor. Se $x + y$, x ou y são nulos, o resultado é obviamente verdadeiro. Assim, podemos supor $x + y \neq 0$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Temos que

$$|x+y|_p^p = \sum_i |x^i + y^i||x^i + y^i|^{p-1}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_i (|x^i| + |y^i|)|x^i + y^i|^{p-1} \\
&= \sum_i |x^i||x^i + y^i|^{p-1} + \sum_i |y^i||x^i + y^i|^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_i |x^i|^p\right)^{1/p} \left(|x^i + y^i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_i |y^i|^p\right)^{1/p} \left(|x^i + y^i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&= |x|_p \left(|x^i + y^i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_i |y^i|^p\right)^{1/p} \left(|x^i + y^i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= |x|_p |x + y|_p^{p-1} + |y|_p |x + y|_p^{p-1} \\
&= (|x|_p + |y|_p)|x + y|_p^{p-1}
\end{aligned}
$$

onde a desigualdade de Hölder 1.29 entra na passagem da terceira para quarta linha.

Portanto,

$$|x + y|_p^p \leq (|x|_p + |y|_p)|x + y|_p^{p-1},$$

$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p.$$

■

Proposição 1.31. Para quaisquer normas $\boldsymbol{p}$ em $\mathbb{R}^d$, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1|x| \leq \boldsymbol{p}(x) \leq C_2|x|.$$

Demonstração. Na base canônica temos $x = x^1 e_1 + \cdots + x^d e_d$. Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz 1.17, temos

$$\boldsymbol{p}(x) \leq |x^1|\boldsymbol{p}(e_1) + \cdots + |x^d|\boldsymbol{p}(e_d) \leq C_2|x|$$

onde $C_2 = \sqrt{\boldsymbol{p}(e_1)^2 + \cdots + \boldsymbol{p}(e_d)^2}$.

Agora mostremos que existe uma cosntante positiva C_1 pequena suficiente de modo que $C_1|x| \leq \boldsymbol{p}(x)$. Suponha que não existe tal constante. Para cada n existe $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^d)$ tal que

$$\boldsymbol{p}(x_n) < \frac{1}{n}|x_n|.$$

Tome $y_n = x_n/|x_n|$. Temos $p(y_n) < \frac{1}{n}$, ou seja, $p(y_n) \to 0$.

Temos que y_n está na esfera de raio 1. Em particular, para cada índice i temos $y_n^i \in [-1, 1]$.

Uma sequência limitada admite subsequência convergente (veja Teorema 1.11). A menos de passar para uma subsequência, podemos assumir que y_n^1 converge. Novamente passando para subsequência, podemos agora supor que y_n^2 também converge. Fazendo o processo novamente, podemos supor que y_n^3 também converge. Assim, a menos de passar para uma subsequência, podemos supor que $y_n^1, \cdots, y_n^d$ convergem em $\mathbb{R}$ para $y^1, \ldots, y^d$. Como $(y_n^1)^2 + \cdots + (y_n^d)^2 = 1$ para todo n, temos $|y| = 1$, onde $y = (y^1, \ldots, y^d)$.

Por um lado,

$$p(y) \leq p(y_n - y) + p(y_n) \leq C_2|y_n - y| + p(y_n) \to 0,$$

ou seja, $p(y) = 0$.

Por outro lado, $y \neq 0$, ou seja, $p(y) \neq 0$, porque $\boldsymbol{p}$ é uma norma. Uma contradição. ■

A menos que seja dito o contrário, sempre que considerarmos uma norma/métrica em $\mathbb{R}^d$, estamos considerando a canônica.

Definição 1.32. Duas métricas d_1, d_2 em X são Lipschitz equivalentes se há constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y).$$

Exercício 1.33. Prove que a relação "ser Lipschitz equivalente" em métricas sobre X define uma relação de equivalência.

Como vimos, as duas métricas consideradas na esfera $\mathbb{S}^d$ são Lipschitz equivalentes e pela Proposição 1.31 temos que métricas oriundas de normas distintas em $\mathbb{R}^d$ são Lipschitz equivalentes.

Além disso, observe que como todo espaço vetorial V de dimensão finita é isomorfo a algum $\mathbb{R}^d$, temos que duas normas nesse espaço vetorial são Lipschitz equivalentes. Em particular, as normas sobre matrizes quadradas vistas no Exercício 1.20 são equivalentes, o que não é imediato.

Definição 1.34. Seja (X, d) um espaço métrico. Uma bola aberta de centro x e raio r é o conjunto $B_{(X,d)}(x, r) = \{y \in X : d_X(x, y) < r\}$. Se estamos trabalhando com apenas a métrica d, então escrevemos apenas $B(x, r)$ para designar a bola, pois não há ambiguidade.

Em $\mathbb{R}^d$, uma bola centrada em x com raio r é da forma

$$B_{\mathbb{R}^d}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \sum_i |y^i - x^i|^2 < r^2\}.$$

Para $d = 1$, obtemos

$$B_{\mathbb{R}}(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x|^2 < r^2\} = (x - r, x + r),$$

o intervalo centrado em x com comprimento $2r$.

Se temos duas métricas d_1, d_2 Lipschitz equivalentes com constantes $C_1, C_2 > 0$ satisfazendo

$$C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y),$$

então podemos comparar as bolas de (X, d_1) e (X, d_2):

$$B_{(X,d_1)}(x, r) \subset B_{(X,d_2)}(x, C_2 r) \quad \text{e} \quad B_{(X,d_2)}(x, s) \subset B_{(X,d_1)}\left(x, \frac{s}{C_1}\right).$$

Definição 1.35. Seja (X, d_X) um espaço métrico. Um aberto de X é um subconjunto U com a seguinte propriedade: para cada $x \in X$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$.

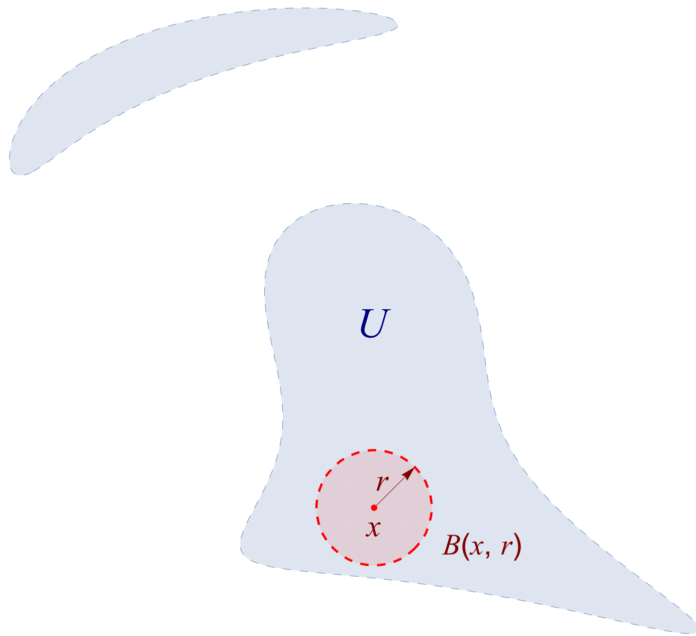


Figura 1.6: *Um ponto x em U cabe com folga.*

Intuitivamente, um aberto em X é um conjunto no qual todo ponto cabe com certa folga dentro de U. De fato, se $x \in U$, existe $B(x, r) \subset U$ com $r > 0$. Isso quer dizer que se $y \notin U$, então $d_X(x, y) \geq r$.

Exercício 1.36. Sejam d_1, d_2 métricas Lipschitz equivalentes em X. Mostre que U é aberto com respeito a d_1 se, e só se, for aberto com respeito a d_2.

Exercício 1.37. Considere $\mathbb{R}$ com as métricas $d_1(x, y) = |x - y|$ e $d_2(x, y) = \min(1, |x - y|)$. Mostre que

- d_2 é de fato uma métrica;
- as métricas d_1, d_2 **não** são Lipschitz equivalentes;
- as métricas d_1, d_2 produzem os mesmos abertos em $\mathbb{R}$.

Exercício 1.38. Mostre que $[0, 1)$ é aberto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$, mas não é aberto de $\mathbb{R}$.

Proposição 1.39. A bola aberta $B(x, r)$ em (X, d_X) é aberta.

Demonstração. Considere $x' \in B(x,r)$ e $r' = r - d_X(x', x)$, que é positivo. Se $y \in B(x', r')$, então

$$d_X(x,y) \leq d_X(x,x') + d_X(x',y) < r' + d_X(x',y) = r,$$

ou seja, $B(x', r') \subset B(x,r)$. ■

O conjunto vazio $\emptyset$ é aberto de X. Se não fosse aberto, haveria um ponto x em $\emptyset$ para o qual $B(x,r) \not\subset \emptyset$ para todo r, o que é impossível porque $\emptyset$ não possui elementos. Assim, $\emptyset$ é aberto. O conjunto X é aberto de X.

Além disso, se U_1, U_2 são abertos de X, então $U_1 \cap U_2$ é aberto de X. De fato, dado $x \in U_1 \cap U_2$, existem $r_1, r_2 > 0$ tais que $B(x, r_1) \subset U_1$ e $B(x, r_2) \subset U_2$. Tomando $r = \min(r_1, r_2)$, temos

$$B(x,r) \subset U_1 \cap U_2.$$

Por fim, se $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma família de abertos de X, então $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ é aberto de X, onde essa união pode ser finita ou infinita (não necessariamente enumerável). De fato, se $x \in \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, então existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in U_{\lambda_0}$. Como U_{λ_0} é aberto, existe $r > 0$ para o qual

$$B(x,r) \subset U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda.$$

Em resumo, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.40. Seja (X, d_X) espaço métrico.

- $\emptyset, X$ são abertos de X;
- se U_1, U_2 são abertos de X, então $U_1 \cap U_2$ é aberto de X;
- se $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma família de abertos de X, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ é aberto de X.

Exercício 1.41. Mostre que todo aberto U de um espaço métrico X é união das bolas abertas contidas em U.

Exercício 1.42. Mostre que

- todo intervalo aberto de $\mathbb{R}$ contem um número racional;
- todo subconjunto de $\mathbb{R}$ é união de intervalos.
  Dica: $A \subset \mathbb{R}$ é intervalo se para $a_1, a_2 \in A$, com $a_1 \leq a_2$, temos $[a_1, a_2] \subset A$;
- um aberto de $\mathbb{R}$ é união enumerável de intervalos abertos disjuntos.

1.3 Topologia de espaço métrico

Definição 1.43. Considere um conjunto X com uma família τ de subconjuntos de X. Dizemos que τ é uma topologia se satisfaz as seguintes propriedades:

- $\emptyset, X \in \tau$;
- se $U_1, U_2 \in \tau$, então $U_1 \cap U_2 \in \tau$;
- se $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \tau$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$.

Nesse caso, chamamos (X, τ) de espaço topológico e os elementos de τ são chamados de abertos de X. Quando a topologia está clara do contexto, escrevemos $U \subset\circ X$ para denotar que U é aberto de X.

Em resumo, uma topologia é uma família distinguida de subconjuntos chamados abertos, que devem seguir regras básicas. O espaço todo e o vazio devem ser abertos, intersecção de finitos abertos é aberto, e união arbitrária de abertos é aberta.

Exemplo 1.44. Seja (X, d_X) um espaço métrico. Lembre-se que definimos aberto em X de acordo com a Definição 1.35. O conjunto $\tau = \{U \subset X : U \text{ é aberto de } X\}$ define uma topologia em X, por causa da Proposição 1.40. Dizemos que essa topologia é induzida pela métrica d_X.

A partir desse ponto, assumiremos que todo espaço tem uma métrica.

Exemplo 1.45. Exemplos extremos. Seja X um conjunto.

- A maior topologia em X é a discreta, onde todo subconjunto é aberto:

  $$\tau_{\text{discreta}} = \{U : U \subset X\}.$$

  Essa topologia é induzida pela métrica $d(x_1, x_2)$ que vale 1 se $x_1 \neq x_2$ e 0 se $x_1 = x_2$.

- A menor topologia em X é a caótica, que tem somente $\emptyset$ e X como abertos:

  $$\tau_{\text{caótica}} = \{\emptyset, X\}.$$

  Essa topologia também vem de uma métrica. De fato, basta tomar $d(x_1, x_2) = 0$ para todo $x_1, x_2 \in X$.

Definição 1.46. Uma propriedade topológica é aquela que pode ser caracterizada a partir da topologia.

Como veremos, continuidade, convergência de sequências, conexidade, conexidade por caminhos e compacidade são propriedades caracterizadas a partir da topologia.

Exemplo 1.47. Considere em reta $\mathbb{R}$ as métricas $d_1(x,y) = |x-y|$ e $d_2(x,y) = \min(|x-y|, 1)$. O conjunto $\mathbb{Z}$ é ilimitado com respeito a métrica d_1 e limitado com respeito a métrica d_2, isto é, $d_2(x,0) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. No entanto, d_1, d_2 induzem a mesma topologia. Assim, a propriedade "ser limitado" não é uma propriedade topológica, i.e., não pode ser caracterizada a partir da topologia, que é a discreta nesse exemplo.

Em breve daremos uma definição mais apropriada de propriedade topológica, como sendo aquela que é invariante por homeomorfismo.

Exercício 1.48. Considere um espaço métrico X. Mostre que para pontos $x, y \in X$ distintos, existem abertos U e V de X tais que $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ e $y \in V$.

Exercício 1.49. Seja (X, d_X) espaço métrico e Y subconjunto. Considere em Y a métrica d_Y induzida de X, isto é, $d_Y(y_1, y_2) := d_X(y_1, y_2)$. Mostre que $A \subset Y$ é aberto com respeito a métrica d_Y se, e somente se, existe um aberto U de X tal que $A = Y \cap U$.
Dica: Escreva A como uma união de bolas de Y e use que bolas de Y são bolas de X intersectadas com Y. Construa U como união de bolas de X.

Exercício 1.50. Considere $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$. Mostre que topologia induzida em $\mathbb{Z}^d$ é a discreta.

Exercício 1.51. Se Y é aberto de X, então U é aberto de Y se, e só se, U é aberto de X e $U \subset Y$.

Em um espaço métrico, sempre usaremos a topologia induzida pela sua métrica. Além disso, lembre-se que métricas Lipschitz equivalentes induzem a mesma topologia (Exercício 1.36), então em espaços normados, por exemplo, podemos trabalhar com qualquer norma quando interessados em propriedades relacionadas a topologia.

Exercício 1.52. Considere os espaços métricos $(X_1, d_{X_1}), \cdots, (X_n, d_{X_q})$.

- Mostre que as métricas

$$d_1((x^1, \cdots, x^q), (y^1, \cdots, y^q)) := \sum_{i=1}^{q} d_{X_i}(x^i, y^i),$$
$$d_2((x^1, \cdots, x^q), (y^1, \cdots, y^q)) := \sqrt{\sum_{i=1}^{q} d_{X_i}(x^i, y^i)^2},$$
$$d_\infty((x^1, \cdots, x^q), (y^1, \cdots, y^q)) := \max_{1 \leq i \leq q} (d_{X_i}(x^i, y^i))$$

  em $X_1 \times \cdots \times X_q$ são Lipschitz equivalentes e, consequentemente, definem a mesma topologia.

- Mostre $\Omega \subset X_1 \times \cdots \times X_q$ é aberto se, e só se, para cada $x = (x^1, \ldots, x^q) \in \Omega$ existem abertos $U_1, \ldots, U_q$ com $U_i \subset\!\circ X_i$ tais que

$$x \in U_1 \times \cdots \times U_q \subset \Omega.$$

  Dica: Utilize a métrica d_∞.

Nós chamamos a topologia descrita no exercício acima de **topologia produto**. Obviamente, a topologia de $\mathbb{R}^d$ (oriunda de uma norma) coincide com a topologia produto.

Definição 1.53. Seja X espaço métrico. O subconjunto $F \subset X$ é fechado se $X \setminus F$ é aberto.

Exemplo 1.54. Pontos são fechados. Mais precisamente, se $x \in X$, então $\{x\}$ é fechado. De fato, dado $y \in X \setminus \{x\}$ temos que $B(y, d(y,x)) \subset X \setminus \{x\}$, ou seja, $X \setminus \{x\}$ é aberto.

Exercício 1.55. Mostre que a bola fechada

$$B[x,r] = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$$

é fechada.

Proposição 1.56. Temos que

- X e $\emptyset$ são fechados;
- se F_1, F_2 são fechados, então $F_1 \cup F_2$ é fechado;
- se $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de fechados, então $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ é fechado.

Demonstração. Basta usar as identidades de conjuntos

$$X \setminus \bigcup_i A_i = \bigcap_i (X \setminus A_i),$$

$$X \setminus \bigcap_i A_i = \bigcup_i (X \setminus A_i).$$

■

Definição 1.57. Uma vizinhança de $x \in X$ é um aberto contendo x.

Exemplo 1.58. Em um espaço métrico X, temos que bolas $B(x,r)$ são vizinhanças de x.

Exemplo 1.59. Se X está munido da topologia discreta, então $\{x\}$ é uma vizinhança de x. Se X está munido da topologia caótica, a única vizinhança de um ponto é o espaço X todo.

Definição 1.60. Considere um subconjunto A de X e ponto $x \in X$. Dizemos que x é ponto aderente de A em X se para toda vizinhança V de x temos que $V \cap A \neq \emptyset$.

O fecho $\overline{A}$ de A em X é o conjunto dos pontos aderentes de A em X.

Em outras palavras, pontos aderentes são aqueles próximos de A, mas que não necessariamente estão em A. O fecho $\overline{A}$ de A é formado pelos pontos de X próximos de A.

Exercício 1.61. Considere o subconjunto A do espaço métrico X. Mostre que $x \in X$ é ponto aderente de A em X se, e só se, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.

Exemplo 1.62. O ponto $\sqrt{2}$ é aderente de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. De fato, dado $r > 0$, considere $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que $\frac{1}{N} < r$. Seja k o maior inteiro satisfazendo $k \leq N\sqrt{2}$. Temos que $N\sqrt{2} < k + 1$. Portanto,

$$0 \leq \frac{k}{N} - \sqrt{2} < \frac{1}{N} < r.$$

Em outras palavras, $\frac{k}{N} \in (\sqrt{2} - r, \sqrt{2} + r) = B(\sqrt{2}, r)$.

Portanto, $B(\sqrt{2}, r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ para todo $r > 0$ e, consequentemente, $\sqrt{2} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Agora caracterizaremos fechados em termos de pontos aderentes. Um conjunto fechado será aquele que contem seus pontos aderentes.

Proposição 1.63. Seja A subconjunto de um espaço métrico X.

- $\overline{A}$ é fechado.
- A é fechado se, e só se, $A = \overline{A}$.

Demonstração. Provemos que $\overline{A}$ é fechado. Tome $x \in X \setminus \overline{A}$, isto é, x não é aderente de A em X. Existe uma bola $B(x, r)$ de x tal que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Para todo $y \in B(x, r)$ temos que $B(x, r)$ é vizinhança de y disjunta de A, ou seja, nenhum ponto de $B(x, r)$ é aderente a A em X. Portanto, $B(x, r) \subset X \setminus \overline{A}$. Daí segue que $X \setminus \overline{A}$ é aberto em X e $\overline{A}$ é fechado em X.

Agora mostremos que A é fechado se, e só se, $A = \overline{A}$. Como vimos acima, $\overline{A}$ é sempre fechado. Assim sendo, se $A = \overline{A}$, então A é fechado.

Provemos a recíproca. Considere A fechado e mostremos que $A = \overline{A}$. Tome $x \notin A$. Existe uma bola $B(x, r)$ de x tal que $B(x, r) \subset X \setminus A$, ou seja, $B(x, r) \cap A = \emptyset$ e, consequentemente, x não é aderente a A em X. Portanto, $\overline{A} \subset A$. Como $A \subset \overline{A}$ sempre vale, concluímos que $A = \overline{A}$. ■

Exercício 1.64. Mostre que $\overline{\mathbb{Q}}$ em $\mathbb{R}$ é $\mathbb{R}$.

Quando um subconjunto A de X tem fecho $\overline{A} = X$, dizemos que A é denso em X. Com isso em mente, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ seguindo o exercício acima. O conjunto dos números irracionais também é denso em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}^d$ é denso em $\mathbb{R}^d$.

Exercício 1.65. Seja X espaço métrico e A um subconjunto de X. Definimos a distância de $x \in X$ a A como sendo

$$d_X(x, A) := \inf_{a \in A} d_X(x, a).$$

Mostre que $x \in \overline{A}$ se, e só se, $d_X(x, A) = 0$.

1.4 Sequência em espaços métricos

Definição 1.66. Seja X espaço métrico. A sequência x_n converge para x se dada uma vizinhança U de x existe $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que $x_n \in U$ para $n \geq n_0$.

Denotamos essa convergência por $x_n \to x$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Intuitivamente, isso quer dizer que para qualquer vizinhança de x a sequência x_n entra nela eventualmente e permanece lá. É comum dizer também que para qualquer vizinhança U de x temos $x_n \in U$ para n suficientemente grande.

Do ponto de vista da métrica, temos que $x_n \to x$ se, e só se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$ para $n \geq n_0$, ou seja, se

$$d_X(x, x_n) < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geq n_0.$$

Em outras palavras, temos que $x_n \to x$ se, e só se, $d_X(x_n, x) \to 0$.

Exercício 1.67. Considere um espaço métrico X, a sequência x_n e os pontos x, x' em X. Mostre que se $x_n \to x$ e $x_n \to x'$, então $x = x'$.

Observação 1.68. Quando lidando com matrizes reais ou complexas, uma norma útil é a dada por $|A|_\infty := \max_{i,j} |a_{ij}|$. Como todas as normas de $\mathbb{R}^{d^2}$ (ou $\mathbb{C}^{d^2}$) são todas equivalentes entre si (veja a Proposição 1.31), temos que a norma $|\cdot|_\infty$ define a topologia do espaço de matrizes como qualquer outra. Desta norma fica fácil ver que $A_n \to A$ se, e só se, as entradas de A_n convergem para as correspondentes entradas de A.

Exemplo 1.69. Nesse exemplo, todas as matrizes são complexas. O resultado abaixo é falso para matrizes reais.

Seja A uma matriz $d \times d$ complexa. A decomposição de Schur nos diz que existem uma matriz triangular superior U e uma matriz unitária Q tais que

$$A = QUQ^*,$$

onde Q^* é a transposta da matriz conjugada de Q. Por triangular superior queremos dizer que U tem os termos abaixo de sua diagonal nulos e por unitária queremos dizer que $QQ^* = \mathrm{Id} = Q^*Q$, isto é, Q é uma isometria da forma Hermitiana canônica de $\mathbb{C}^d$.

$$A = Q \begin{bmatrix} u_{1\,1} & u_{1\,2} & u_{1\,3} & \cdots & u_{1\,d-1} & u_{1\,d} \\ 0 & u_{2\,2} & u_{2\,3} & \cdots & u_{2\,d-1} & u_{2\,d} \\ 0 & 0 & u_{3\,3} & \cdots & u_{3\,d-1} & u_{3\,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{d-1\,d-1} & u_{d-1\,d} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{d\,d} \end{bmatrix} Q^*.$$

A seguir mostraremos que perturbando a diagonal de U, obtemos matrizes diagonalizáveis suficientemente próximas de A.

Repare que os autovalores de A são $u_{1\,1}, u_{2\,2}, \cdots, u_{d\,d}$, os termos da diagonal de U. Dado $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, escolha $\varepsilon_1[n], \varepsilon_2[n], \ldots, \varepsilon_d[n] \geq 0$ tais que

$$u_{i\,i} + \varepsilon_i[n] \neq u_{j\,j} + \varepsilon_j[n]$$

para $i \neq j$ e $\varepsilon_1[n], \ldots, \varepsilon_d[n] < \frac{1}{n}$.

Adicionamos uma perturbação a diagonal de U usando tais ε's e definimos:

$$A_n := Q \begin{bmatrix} u_{1\,1} + \varepsilon_1[n] & u_{1\,2} & u_{1\,3} & \cdots & u_{1\,d-1} & u_{1\,d} \\ 0 & u_{2\,2} + \varepsilon_2[n] & u_{2\,3} & \cdots & u_{2\,d-1} & u_{2\,d} \\ 0 & 0 & u_{3\,3} + \varepsilon_3[n] & \cdots & u_{3\,d-1} & u_{3\,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{d-1\,d-1} + \varepsilon_{d-1}[n] & u_{d-1\,d} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{d\,d} + \varepsilon_d[n] \end{bmatrix} Q^*.$$

Assim temos que cada A_n é diagonalizável porque tem os autovalores dois a dois distintos. Além disso, $A_n \to A$, pois as entradas de A_n convergem para as entradas de A, já que $\varepsilon_j[n] < \frac{1}{n}$. Logo, para toda matriz A, existe uma sequência A_n de matrizes diagonalizáveis que converge para A.

Como vimos ao fim da Secção 1.3. Um subconjunto D de X é denso se $\overline{D} = X$. No caso de matrizes complexas $M_d(\mathbb{C})$, temos que o espaço D das matrizes $d \times d$ diagonalizáveis é denso em $M_d(\mathbb{C})$. Mais precisamente, o argumento acima prova que $\overline{D} = M_d(\mathbb{C})$. Deixemos isso mais claro.

Proposição 1.70. Considere o espaço métrico X. Temos que $D \subset X$ é denso em X, isto é, $\overline{D} = X$, se, e só se, para cada $x \in X$ existir uma sequência $x_n \in D$ tal que $x_n \to x$.

Demonstração. Assuma que D é denso em X e considere $x \in X$. Para cada bola $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$, existe $x_n \in D$, pois $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap D \neq \emptyset$. Logo, $d_X(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$ e $x_n \in X$.

Por outro lado, assuma que para cada $x \in X$ existe uma sequência $x_n \in D$ convergindo a x e mostremos que $\overline{D} = X$. Fixe $x \in X$. Se $x_n \in D$ converge para $x \in X$, então para toda vizinhança U de x há n_0 suficientemente grande tal que $x_{n_0} \in U$. Portanto, a intersecção $U \cap D$ é não vazia e, consequentemente, $x \in \overline{D}$. ∎

Da mesma forma, podemos provar que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ aproximando cada $x \in \mathbb{R}$ por uma sequência de $\mathbb{Q}$. Isso é fácil de fazer usando expansão decimal por exemplo. A menos de trocar x por $-x$, podemos assumir que $x \geq 0$. Na base 10 o elemento x se escreve como

$$x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i},$$

com $a_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $a_1, a_2, \cdots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Truncando x obtemos $x_n := a_0.a_1a_2a_3 \cdots a_n \in \mathbb{Q}$, que converge para x, pois

$$|x - x_n| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^i} = \frac{1}{10^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i} = \frac{1}{10^n} 0.9999 \cdots = \frac{1}{10^n} \to 0.$$

Portanto, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Observação 1.71. Definindo $y_n := x_n(1 + \sqrt{2}/n)$ temos uma sequência de números irracionais convergindo a x. Logo, $\overline{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \mathbb{R}$.

Exercício 1.72. Considere o espaço métrico X e $A \subset X$. Mostre que $x \in \overline{A}$ se, e só se, existe uma sequência $x_n \in A$ tal que $x_n \to x$.

Exercício 1.73. Considere o espaço métrico X e $A \subset X$. Mostre que A é fechado se, e só se, para toda sequência convergente $x_n \in A$ com limite $x \in X$ temos que $x \in A$.

Assim, o conceito de fechado em espaços métricos pode ser caracterizado via sequências: fechado é aquele cujas sequências não escapam para fora do conjunto.

Observação 1.74. Se temos o produto de espaços métricos $X_1 \times \cdots \times X_q$ e uma sequência $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^q)$, então temos que tal sequência converge para um ponto x se, e só se, $x_n^i \to x^i$, pois a topologia do produto pode, por exemplo, ser dada por

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{q} d_{X_i}(x^i, y^i)$$

e temos que $d_1(x_n, x) \to 0$ se, e só se, $d_{X_i}(x_n^i, x^i) \to 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$.
Em particular, uma sequência x_n em $\mathbb{R}^d$ converge se, e só se, suas coordenadas x_n^i convergem.

Definição 1.75. Considere $A \subset X$, uma função $f : A \to Y$ e um ponto $x_0 \in \overline{A}$. Dizemos que $\lim_{x \to X_0} f(x) = L$ se $f(x_n) \to L$ para toda sequência $x_n \in A$ convergindo a x.

Depois veremos que pode-se considerar $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ como espaço métrico (veja Observação 1.105). Para tal métrica temos que $x_n \to \infty$ se, e só se, $\lim |x_n| = \infty$.

Proposição 1.76. Mostre que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ se, e só se, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), L) < \varepsilon$ quando $x \in A$ e $d_X(x, x_0) < \delta$.

Demonstração. Assuma que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

e mostremos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), L) < \varepsilon$ quando $x \in A$ e $d_X(x, x_0) < \delta$.

Suponha que tal afirmação é falsa. Portanto, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ temos $d_Y(f(x), L) \geq \varepsilon$ quando $x \in A$ e $d_X(x, x_0) < \delta$. Para cada n existe $x_n \in A$ tal que $d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ e $d_Y(f(x_n), L) \geq \varepsilon$. Logo, $x_n \to x_0$ e $f(x_n) \not\to L$, uma contradição.

Por outro lado, mostremos que se vale a condição ε e δ então temos que para toda sequência $x_n \in A$ convergindo para x_0 vale $f(x_n) \to L$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), L) < \varepsilon$ quando $x \in A$ e $d(x, x_0) < \delta$. Existe n_0 tal que $x_n \in B_X(x_0, \delta)$ para $n \geq n_0$. Assim, $d_Y(f(x_n), L) < \epsilon$ para $n \geq n_0$. Logo, $f(x_n) \to L$. ■

1.5 Continuidade

Definição 1.77. Sejam X, Y espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua em x se dada uma vizinhança U de $f(x)$, existe uma vizinhança V de x tal que $f(U) \subset V$.

Se f é contínua em todo $x \in X$, dizemos que f é contínua.

Note que continuidade é algo que é puramente topológico, não depende de métrica ou de ε e δ.

Exercício 1.78. Mostre que se $f : X \to Y$ é constante, então f é contínua.

Exercício 1.79. Mostre que a função identidade é contínua.

Proposição 1.80. Sejam X e Y espaços métricos. A função $f : X \to Y$ é contínua em X se, e só se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \varepsilon),$$

isto é,

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{quando} \quad d_X(x, y) < \delta.$$

Observação: As bolas no domínio são com respeito a X e as no contradomínio, com respeito a Y.

Demonstração. Se f é contínua em x, então para a vizinhança $B_Y(f(x), \varepsilon)$ de $f(x)$ existe uma vizinhança V de x tal que $f(V) \subset B_Y(f(x), \varepsilon)$. Como $x \in V$ e V é aberto de X, existe uma bola $B_X(x, \delta) \subset V$. Portanto,

$$f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \varepsilon).$$

Agora suporemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \varepsilon)$ e mostraremos que f é contínua.

Dada uma vizinhança U de $f(x)$, há ε tal que $B_Y(f(x), \varepsilon) \subset U$. Por hipótese, há $\delta > 0$ tal que $f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \varepsilon)$. Tomando $V = B_X(x, \delta)$ temos $f(V) \subset B_Y(f(x), \varepsilon) \subset U$. ∎

Observação 1.81. Repare que a proposição acima, quando aplicada a $X = Y = \mathbb{R}$, se torna a definição de continuidade via ε e δ do cálculo.

Exercício 1.82. Sejam X e Y espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é Lipschitz se existe uma constante $C > 0$ tal que $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)$ para quaisquer $x_1, x_2 \in X$.

- Mostre que se f é Lipschitz, então f é contínua;
- Dê um exemplo de função contínua não-Lipschitz.

Proposição 1.83. Uma função $f : X \to Y$ é contínua em x se, e só se, para toda sequência x_n convergindo para x, temos $f(x_n) \to f(x)$.

Demonstração. Mostremos que se f é contínua em x e $x_n \to x$, então $f(x_n) \to f(x)$. Dada a vizinhança U de $f(x)$, existe uma vizinhança V de x tal que $f(V) \subset U$. Como $x_n \to x$, existe n_0 tal que $x_n \in V$ para $n \geq n_0$. Portanto, $f(x_n) \in U$ para $n \geq n_0$.

Mostremos agora que se f mapeia sequências convergentes para x em sequências convergentes para $f(x)$, então ela deve ser contínua. De fato, suponha que ela não seja contínua. Existe um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ temos que $f(B_X(x, \delta)) \not\subset B_Y(f(x), \varepsilon)$. Em particular, para cada n, existe $x_n \in B_X\left(x, \frac{1}{n}\right)$ tal que $f(x_n) \notin B_Y(f(x), \varepsilon)$. Temos que $x_n \to x$ porque $d_X(x_n, x) < \frac{1}{n}$ e $f(x_n) \not\to f(x)$ porque $d_Y(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$, uma contradição. ■

Exercício 1.84.

- Seja X espaço métrico. Considere $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ contínuas em x. Mostre que $f + g$ e fg são contínuas em x. Supondo que g não se anula em x, mostre que f/g é contínua em x.

- Mostre que $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, dada por $\pi_i(x^1, \ldots, x^d) = x^i$, é contínua ($\pi_i$ manda x em sua i-ésima coordenada x^i).

- Mostre que toda função polinomial $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é contínua. Por polinomial queremos dizer que p é da forma

$$p(x) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_d=0}^{n_d} a_{i_1 \cdots i_d} (x^1)^{i_1} \cdots (x^d)^{i_d}.$$

- Mostre que determinante e traço são contínuas como funções de $M_d(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}$, onde $M_d(\mathbb{R})$ é o espaço de matrizes quadradas $d \times d$ reais, que pode ser identificado com $\mathbb{R}^{d^2}$.

Proposição 1.85. Mostre que se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínua em x e $f(x)$, então $g \circ f : X \to Z$ é contínua em x.

Demonstração. Tome $x_n \to x$. Temos $f(x_n) \to f(x)$ e, consequentemente, $g(f(x_n)) \to g(f(x))$. ■

Logo, composta de funções contínuas é contínua.

Exemplo 1.86. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x^1, x^2) = \frac{\sin\left(x^1 + x^2\right)}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}$. Essa função é contínua, pois pode ser construída compondo funções contínuas. As funções abaixo são contínuas porque são compostas de funções contínuas:

$$(x^1, x^2) \mapsto x^1 + x^2 \mapsto \sin\left(x^1 + x^2\right),$$

$$(x^1, x^2) \mapsto (x^1)^2 + (x^2)^2 \mapsto \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}.$$

Note que

$$(x^1, x^2) \mapsto x^1 + x^2, \quad (x^1, x^2) \mapsto (x^1)^2 + (x^2)^2$$

são contínuas por serem polinomiais e

$$y \mapsto \sin(y), \quad y \mapsto \sqrt{y}$$

são funções contínuas de uma variável real a valores reais.

Dividindo

$$(x^1, x^2) \mapsto \sin\Big(x^1 + x^2\Big)$$

por

$$(x^1, x^2) \mapsto \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}.$$

obtemos a função f.

Exercício 1.87. Seja X espaço métrico e Y um subconjunto.

- Mostre que o mapa de inclusão $i : Y \to X$, dado por $i(y) = y$, é contínuo.
- Se $f : X \to Z$ é uma função contínua entre dois espaços métricos e $Y \subset X$, então $f|_Y : Y \to Z$ é contínua.
- Se $f : X \to Z$ é uma função contínua entre dois espaços métricos e $f(X) \subset W$, então $f : X \to W$ é contínua.

Exemplo 1.88. Considere uma função contínua $f : X \to Y$. A função

$$\lambda : \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\} \to X,$$

dada por $(x, f(x)) \mapsto x$ é contínua, por ser restrição de uma função contínua.

Exercício 1.89. Considere os espaços métricos $X, Y_1, Y_2, \cdots, Y_d$. Mostre que:

- a projeção $\pi_i : Y_1 \times \cdots \times Y_d \to Y_i$, dada por $\pi_i(y) = y^i$, é contínua.
- uma função $f : X \to Y_1 \times \cdots \times Y_d$ dada por $f = (f_1, \cdots, f_d)$ é contínua se, e só se, cada f_i é contínua.

Exemplo 1.90. Considere o espaço M_d de matrizes quadradas $d \times d$. Temos que as operações básicas são contínuas. As funções $\text{Soma}, \text{Mult} : M_d \times M_d \to M_d$, dadas por $\text{Soma}(A, B) = A + B$ e $\text{Mult}(A, B) = AB$, tem como entradas polinômios e, portanto, são contínuas. Por exemplo, AB tem entrada i, j igual a

$$\sum_k a_{ik} b_{kj},$$

que é polinomial nas entradas de A e B.

Se considerarmos o grupo multiplicativo $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R}) := \det^{-1}(\mathbb{R}_{\neq 0})$, que é aberto porque pré-imagem de aberto é aberto, então podemos definir a função

$$\mathrm{Inv} : \mathrm{GL}(d,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$$

pela fórmula $\mathrm{Inv}(A) = A^{-1}$.

Mostremos que a função Inv é contínua. Considere o polinômio característico de $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$. Temos

$$p(t) := \det(t - A) = t^d - c_{d-1}t^{d-1} + \cdots + tc_1 + c_0,$$

onde $c_0 = (-1)^d \det(A)$ porque $p(0) = c_0$. Note que cada c_i é um polinômio nas entradas de A.

Pelo teorema de Cayley-Hamilton, temos que

$$A^d + c_{d-1}A^{d-1} + \cdots + Ac_1 + c_0 = 0,$$

ou seja,

$$A\left(A^{d-1} + c_{d-1}A^{d-2} + \cdots + c_1\right) = -c_0,$$

$$A^{-1} = \frac{(-1)^{d+1}}{\det(A)}\left(A^{d-1} + c_{d-1}A^{d-2} + \cdots + c_1\right),$$

cujas entradas são quocientes de polinômios nas entradas de A.

Exemplo 1.91. Considere a esfera $\mathbb{S}^d$ e a matriz A com tamanho $(d+1) \times (d+1)$. Enxergaremos os vetores de $\mathbb{R}^{d+1}$ como vetores coluna e o produto interno como $\langle x, y\rangle = y^T x$. Definimos o mapa $E : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ como sendo

$$E(x) = \langle Ax, x\rangle = x^T Ax.$$

Essa função é contínua porque é restrição de uma função polinomial $\langle Ax, x\rangle$, que está definida em $\mathbb{R}^{d+1}$, na esfera.

O conceito de aberto nos permite caracterizar quando a função é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Proposição 1.92. Sejam X e Y espaços métricos. Uma função é contínua se, e só se, pré-imagem de aberto é aberto, isto é, $f^{-1}(U) \subset\circ X$ quando $U \subset\circ Y$.

Demonstração. Seja f contínua e mostremos que $f^{-1}(U) \subset\circ X$ para $U \subset\circ Y$. De fato, tome $x \in f^{-1}(U)$. Temos que $f(x) \in U$. Como f é contínua em x, existe uma vizinhança V_x de x tal que $f(V_x) \subset U$, ou seja, $V_x \subset f^{-1}(U)$. Como $f^{-1}(U) = \cup_{x \in f^{-1}U}(V_x)$, que é uma união de abertos de X, temos que $f^{-1}(U)$ é aberto.

Agora suponha que $f^{-1}(U) \subset\circ X$ quando $U \subset\circ Y$ e mostremos que f é contínua. Tome $x \in X$ e uma vizinhança U de $f(x)$. Como $V := f^{-1}(U)$ é aberto e $x \in V$, temos que V é vizinhança de x, Além disso, $f(V) \subset U$. Portanto, f é contínua em x e como x é arbitrário, f é contínua. ∎

Mostremos que composta de funções contínuas é contínua novamente.

Proposição 1.93. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.

Demonstração. Se $U \subset\circ Z$, então $g^{-1}(U) \subset\circ Y$ e, consequentemente, $f^{-1}(g^{-1}(U)) \subset\circ X$. Como $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto em X, temos que $g \circ f$ é contínua. ∎

Proposição 1.94. Sejam X, Y espaços métricos. Temos que $f : X \to Y$ é contínua se, e só se, $f^{-1}(F)$ é fechado em X para todo fechado F em Y.

Demonstração. Basta usar a identidade de conjunto

$$f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$$

e que pré-imagem de aberto é aberto se, e só se, a função for contínua. ∎

Exemplo 1.95. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua e a um número real. Temos que

$$\{x \in X : f(x) \geq a\}, \quad \{x \in X : f(x) \leq a\} \quad \text{e} \quad f^{-1}(a)$$

são fechados, pois conjuntos $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ e $\{a\}$ são fechados em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.96. Seja (X, d) espaço métrico. Dado $a \in X$, a função $x \mapsto d(x, a)$ é contínua, porque

$$|d(x, a) - d(x', a)| \leq d(x, x')$$

e assim a função é Lipschitz (verifique isso!). Portanto, a bola fechada

$$B[a, r] := \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$$

é fechada em X.

Exemplo 1.97. O grupo $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ das matrizes $d \times d$ com determinante 1 é fechado em $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ e em M_d porque $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$.

Exercício 1.98. Sejam (X, d_X) espaço métrico e A subconjunto X. Mostre que:

- $x \mapsto d_X(x, A) := \inf\limits_{a \in A} d_X(x, a)$ é contínua;
- se A é fechado, então $f^{-1}(0) = A$;
- se A_1, A_2 são fechados disjuntos, então

  $$\phi(x) = \frac{d_X(x, A_2)}{d_X(x, A_1) + d_X(x, A_2)}$$

  é uma função contínua que vale

  $$\phi|_{A_1} = 0, \quad \phi|_{A_2} = 1, \quad 0 < \phi(x) < 1 \quad \text{para} \quad x \in X \setminus (A_1 \cup A_2).$$

- os conjuntos

  $$U_1 = \phi^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{e} \quad U_2 = \phi^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \infty\right)\right)$$

  são abertos disjuntos de X satisfazendo

  $$A_1 \subset U_1, \quad A_2 \subset U_2 \quad \text{e} \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

1.6 Homeomorfismos

Definição 1.99. Um homeomorfismo entre X e Y é uma bijeção $f : X \to Y$ contínua cuja inversa $f^{-1} : Y \to X$ é contínua. Se um homeomorfismo entre X e Y existe, então dizemos que X e Y são homeomorfos. Note que homeomorfismo define uma relação de equivalência.

Exemplo 1.100. A função identidade $\mathrm{Id} : X \to X$, com domínio e contra domínio com mesma topologia, é homeomorfismo.

Exemplo 1.101. Considere $f : \mathbb{R} \to (0,1)$ dada por $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ é homeomorfismo. De fato, computemos sua inversa e mostremos que essa é contínua.

Se $y = f(x)$, então

$$e^x y + y = e^x,$$

$$e^x = \frac{y}{1-y},$$

$$x = \log\left(\frac{y}{1-y}\right).$$

Portanto,

$$f^{-1}(y) = \log\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

é contínua.

Exercício 1.102. Mostre que todo intervalo (a,b) é homeomorfo a $(0,1)$ e que o intervalo $[0,1)$ é homeomorfo a $(0,1]$.

Exemplo 1.103. Considere o grupo das matrizes $d \times d$ invertíveis $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$. Considere

$$Z = \{(A,t) \in M_d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \det(A)t = 1\}.$$

Temos o mapa $f : \mathrm{GL}(d,\mathbb{R}) \to Z$ dado por

$$f(A) = \left(A, \frac{1}{\det(A)}\right),$$

que é contínuo. Sua inversa é $f^{-1}(A,t) = A$, que é contínua também.

Logo, f é um homeomorfismo entre $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ e Z.

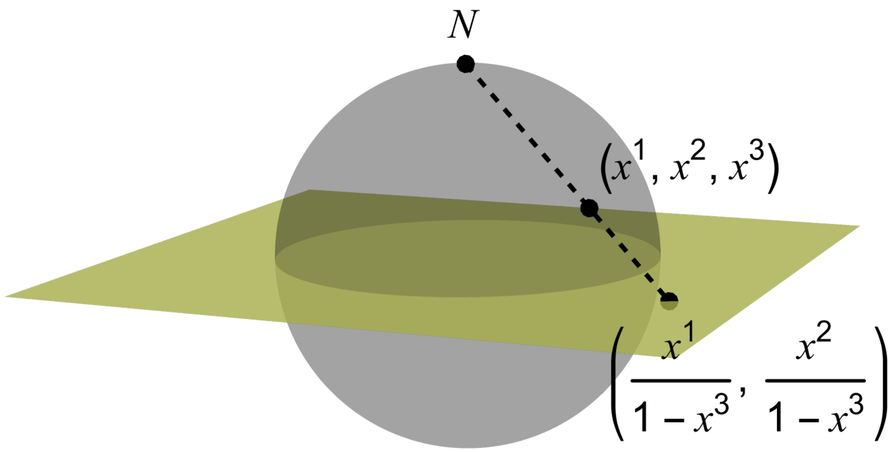


Figura 1.7: *Projeção estereográfica.*

Exemplo 1.104. Projeção estereográfica. Considere $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ e seja N o polo norte da esfera, i.e., $N = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. A projeção estereográfica

$$f : \mathbb{S}^d \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^d$$

é dada por

$$f(x^1, x^2, \ldots, x^d, x^{d+1}) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{d+1}}, \frac{x^2}{1 - x^{d+1}}, \cdots, \frac{x^d}{1 - x^{d+1}} \right),$$

que é contínua e tem inversa contínua

$$f^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{S}^d \setminus \{N\}$$

dada por

$$f^{-1}(y^1, y^2, \ldots, y^d) = \left(\frac{2y^1}{1 + \sum_{i=1}^{d} (y^i)^2}, \frac{2y^2}{1 + \sum_{i=1}^{d} (y^i)^2}, \cdots, \frac{2y^d}{1 + \sum_{i=1}^{d} (y^i)^2}, \frac{-1 + \sum_{i=1}^{d} (y^i)^2}{1 + \sum_{i=1}^{d} (y^i)^2} \right).$$

Logo, $\mathbb{S}^d \setminus \{N\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^d$.

Observação 1.105. Se considerarmos o símbolo ∞ e adiciona-lo a $\mathbb{R}^d$, obtemos o conjunto $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$. Considere a função $f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ que mapeia pontos $x \neq N$ para um ponto de $\mathbb{R}^d$ pela projeção estereográfica e $N \mapsto \infty$.
Podemos definir uma topologia em $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ a partir de $\mathbb{S}^d$. Dizemos que $U \subset \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ se $f^{-1}(U)$ é aberto na esfera. Isso define uma topologia em $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ de modo que $\mathbb{S}^d$ e $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ são homeomorfos. Uma vizinhança de ∞ é um subconjunto U de $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ contendo ∞ tal que $U \setminus \{\infty\}$ é aberto de $\mathbb{R}^d$ e existe $R > 0$ tal que

$$\{x \in \mathbb{R}^d : |x| > R\} \subset U.$$

Chamamos procedimentos como o descrito de compactificação.
No plano complexo $\mathbb{C}$, ao adicionar o ∞, obtemos $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que é uma esfera a menos de homeomorfismo. Quando se estuda funções da forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $ad - bc \neq 0$, podemos estender f para uma função contínua de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Se faz isso da seguinte forma. Se $c = 0$ definimos

$$f(\infty) := \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{d} = \infty$$

e se $c \neq 0$ definimos

$$f(-d/c) := \lim_{z\to -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \infty,$$

$$f(\infty) := \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{z\to\infty} \frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}} = \frac{a}{c}.$$

Além disso, essa função da esfera na esfera é homeomorfismo, porque é contínua (argumente via sequências) e tem inversa

$$f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Funções racionais como a descrita são chamadas de funções de Möbius. Por exemplo, se temos $f(z) = \frac{z}{3z-2}$, podemos definir $f(2/3) = \infty$ e $f(\infty) = 1/3$, assim obtendo uma função contínua da esfera na esfera.
Note que se temos

$$w = \frac{z}{3z-2},$$

então

$$3zw - 2w = z,$$

$$z = \frac{2w}{3w-1}.$$

Logo, a inversa de f é dada por

$$f^{-1}(w) = \frac{2w}{3w-1}.$$

Funções de Möbius são importantes porque preservam ângulo e orientação (mas não preservam distâncias).

Outros exemplos de homeomorfismos, que não provaremos aqui, são:

Exemplo 1.106. O toro, que em $\mathbb{R}^3$ pode ser dado por

$$(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2,$$

com $0 < r < R$, é homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Exemplo 1.107. O cubo $Q = [-1,1]^d \setminus (-1,1)^d$ é homeomorfo a esfera $\mathbb{S}^d$.

Definição 1.108. Uma propriedade é invariante topológico, se for invariante por homeomorfismo.

A seguir estudaremos nosso primeiro invariante topológico, a conexidade.

1.7 Conexidade

Definição 1.109. Um espaço métrico X é desconexo se existem U_1 e U_2 abertos em X e não vazios tais que

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset \quad \text{e} \quad X = U_1 \cup U_2.$$

Se X não é desconexo, então dizemos que X é conexo.

Repare que como $X \setminus U_1 = U_2$ e $X \setminus U_2 = U_1$, tanto U_1 quanto U_2 são fechados. Assim, poderíamos definir X como desconexo se esse pode ser escrito como a união de dois fechados não triviais disjuntos.

Um ponto $\{x\}$ é conexo, pois os únicos abertos no espaço $\{x\}$ são $\emptyset$ e $\{x\}$. Já um espaço formado por dois pontos $\{x, y\}$ com a topologia discreta é desconexo porque $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$ é união de dois abertos (ou fechados) não triviais e disjuntos.

Proposição 1.110. Se X é desconexo, então há uma função contínua tal que $\operatorname{cor} : X \to \{1, 2\}$ sobrejetora, onde o contra-domínio $\{1, 2\}$ tem a topologia induzida de $\mathbb{R}$, que é discreta. Reciprocamente, se tal função existe, X é desconexo.

Demonstração. Se X é desconexo, então temos abertos não triviais U_1, U_2 em X disjuntos tais que $X = U_1 \cup U_2$. Defina $\operatorname{cor}(x) = 1$ se $x \in U_1$ e $\operatorname{cor}(x) = 2$ se $x \in U_2$. Como pré-imagem de aberto é aberto, temos que f é contínua. De fato,

$$\operatorname{cor}^{-1}(\{1\}) = U_1, \quad \operatorname{cor}^{-1}(\{2\}) = U_2, \quad \operatorname{cor}^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad \operatorname{cor}^{-1}(\{1, 2\}) = X.$$

Por outro lado, se tal função existe, então temos os abertos disjuntos e não vazios

$$U_1 := \operatorname{cor}^{-1}(\{1\}) \quad \text{e} \quad U_2 := \operatorname{cor}^{-1}(\{2\})$$

tais que $X = U_1 \cup U_2$. ■

A ideia da função cor é a seguinte, se X é desconexo, então conseguimos separá-lo com duas cores, aqui denotadas por 1 e 2, de modo contínuo.

Os conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos.

Observação 1.111. Um subconjunto I de $\mathbb{R}$ é dito ser intervalo se para cada $a, b \in I$ com $a < b$ temos que $[a, b] \subset I$.

Exercício 1.112. Mostre que um intervalo é de um dos seguintes tipos:

$$\mathbb{R}, \quad (-\infty, b), \quad (-\infty, b], \quad (a, b), \quad (a, b], \quad [a, b), \quad [a, \infty), \quad (a, \infty).$$

Proposição 1.113. Um subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e só se, for I é intervalo.

Demonstração. Considere I conexo. Mostremos que I é um intervalo. Suponha que esse não é o caso. Existem $a, b \in I$ com $[a, b] \not\subset I$. Assim, há $c \notin I$ tal que $a < c < b$. Logo,

$$I = (I \cap (-\infty, c)) \cup (I \cap (c, \infty)),$$

ou seja, I é a união de dois abertos de I disjuntos e não triviais (observe que esses abertos são abertos de I, mas não necessariamente de $\mathbb{R}$). Logo, concluímos que I é desconexo, uma contradição.

Agora mostremos que se I é intervalo, então é conexo. Suponha que I é desconexo. Pela Proposição 1.110, existe $\mathrm{cor} : I \to \{1, 2\}$ sobrejetora e contínua. Tome $a, b \in I$ tal que $\mathrm{cor}(a) = 1$ e $\mathrm{cor}(b) = 2$. A menos de trocar a e b de símbolos, podemos supor que $a < b$. Pelo teorema do valor intermediário aplicado a função $\mathrm{cor}|_{[a,b]} : [a, b] \to \{1, 2\}$, existe c em (a, b) tal que $\mathrm{cor}(c) = 1.5$, uma contradição, pois a imagem de cor é $\{1, 2\}$. ■

Agora provemos que imagem de conexo é conexo.

Proposição 1.114. Se $f : X \to Y$ é contínua e X conexo, então $f(X)$ é conexo.

Demonstração. Suponha que $f(X)$ é desconexo. Há uma função contínua sobrejetora $\mathrm{cor} : f(X) \to \{1, 2\}$ pela Proposição 1.110. Assim, temos a função contínua e sobrejetora $\mathrm{cor} \circ f$ de X em $\{1, 2\}$. Provando que X é desconexo. Contradizendo a hipótese do teorema. ■

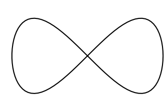
Uma consequência imediata desse fato é que para funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, imagem de intervalo é sempre intervalo.

Observação 1.115. Conexidade é invariante topológico por causa da proposição acima. Se X e Y são homeomorfos e X é conexo, então Y é conexo também.
Podemos usar isso para provar a inexistência de homeomorfismos. Por exemplo, mostremos que $\mathbb{R}$ não é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. Suponha, por absurdo, que eles são: existe um homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$. Removendo $N = (0, 1)$ do domínio e $f(N)$ do contra-domínio, obtemos o homeomorfismo $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\} \to \mathbb{R} \setminus \{f(N)\}$. Note que temos os homeomorfismos

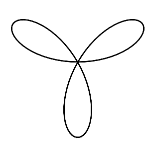
$$\mathbb{S}^1 \setminus \{N\} \simeq \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathbb{R} \setminus \{f(N)\} \simeq (-\infty, 0) \cup (0, \infty),$$

mas o primeiro é conexo e o segundo não é. Assim, temos uma contradição.

Exercício 1.116. Mostre que a figura



não é homeomorfa a $\mathbb{S}^1$. Mostre que a primeira figura não é homeomorfa a



Definição 1.117. Uma curva contínua em X é uma função contínua $\gamma : [0,1] \to X$.

Proposição 1.118. Se $\gamma_1 : [0,1] \to X$ e $\gamma_2 : [0,1]$ são curvas contínuas com $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, então $\gamma_3 : [0,1] \to X$ dada por

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } 0 \leq \text{t} \leq 0.5 \\ \gamma_2(2t-1) & \text{se } 0.5 \leq \text{t} \leq 1 \end{cases}$$

é uma curva contínua com $\gamma_3(0) = \gamma_1(0)$ e $\gamma_3(1) = \gamma_2(1)$.

Demonstração. É claro que γ_3 é contínua para $[0,0.5) \cup (0.5,1]$. Provemos sua continuidade em $t = 0.5$. Dada uma vizinhança V de $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, existe $\delta > 0$ (que podemos tomar menor que 0.5) tal que

$$\gamma_1(2t) \in V \quad \text{para} \quad t \in (0.5 - \delta, 0.5],$$

$$\gamma_2(2t-1) \in V \quad \text{para} \quad t \in [0.5, 0.5 + \delta),$$

pois tanto $\gamma_1(2t)$ quanto $\gamma_2(2t-1)$ são contínuas em $t = 0.5$. Assim, temos que

$$\gamma_3\big((0.5 - \delta, 0.5 + \delta)\big) \subset V.$$

Logo, γ_3 é contínua em $t = 0.5$. ■

Em outras palavras, dadas duas curvas γ_1 e γ_2 tais que o final de γ_1 é o início de γ_2, podemos junta-las em uma nova curva γ_3. É comum denotar essa concatenação de curvas γ_3 por $\gamma_1\gamma_2$.

Definição 1.119. O espaço X é conexo por caminhos se para quaisquer dois pontos x e y de X existe uma curva conectando um ao outro, i.e., existe $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Note que se γ é um caminho que vai de x a y então $t \mapsto \gamma(1-t)$ é um caminho que vai de y a x.

Exercício 1.120. Mostre que $I \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e só se, for conexo por caminhos.

Conexidade por caminhos é outro invariante topológico e costuma a ser relacionado a conexidade. Sempre se tem que conexidade por caminhos implica em conexidade, mas a recíproca não é verdadeira (exemplo desse fato pode ser encontrado em livros de topologia geral). No entanto, para uma classe grande de casos, conexidade por caminhos é equivalente a conexidade. Mais precisamente, se um espaço é conexo e todo ponto tem uma vizinhança conexa por caminhos, então tal espaço é conexo por caminhos, como veremos adiante.

A vantagem da conexidade por caminhos está na facilidade de verificar sua validade.

O espaço $\mathbb{R}^d$ é conexo por caminhos porque dois pontos podem ser ligados por um segmento de reta. A esfera $\mathbb{S}^d$ também é conexa por caminhos.

A fim de ver isso, mostremos primeiro que se removermos um ponto z de $\mathbb{S}^d$ obtemos que

$$\mathbb{S}^d \setminus \{z\} \simeq \mathbb{S}^d \setminus \{(0,\dots,0,1)\}.$$

De fato, fixe uma base ortonormal $v_1, v_2, \dots, v_d$ com $v_d = z$. A isometria que leva e_i em v_i leva a esfera $\mathbb{S}^d \setminus \{z\}$ em $\mathbb{S}^d \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$. Como esse mapa é a restrição de um isomorfismo linear, se trata de um homeomorfismo.

Agora mostremos que $\mathbb{S}^d$ é conexo por caminhos. Dado dois pontos $x, y \in \mathbb{S}^d$, tomamos um ponto $z \in \mathbb{S}^d$ diferente de x, y. Repare que $\mathbb{S}^d \setminus \{z\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^d$ porque

$$\mathbb{S}^d \setminus \{z\} \simeq \mathbb{S}^d \setminus \{(0,\dots,0,1)\} \simeq \mathbb{R}^d.$$

Como esse é conexo por caminho, podemos ligar x a y em $\mathbb{S}^d \setminus \{z\}$ e assim estamos conectando x a y por um caminho em $\mathbb{S}^d$.

Exercício 1.121. Mostre que se $f : X \to Y$ é contínua e X é conexo por caminho, então $f(X)$ é conexo por caminhos. Em particular, se f for homeomorfismo, então Y tem de ser conexo por caminhos (e assim conexidade por caminhos é invariante topológico).

Proposição 1.122. Mostre que se X é conexo por caminhos, então X é conexo.

Demonstração. Suponha que X é desconexo. Existe $\mathrm{col} : X \to \{1,2\}$ contínua e sobrejetora. Tome $x, y \in X$ tal que $\mathrm{col}(x) = 1$ e $\mathrm{col}(y) = 2$. Seja $\gamma : [0,1] \to X$ uma curva ligando x a y. Temos que $\mathrm{col} \circ \gamma$ é um mapa contínuo e sobrejetor de $[0,1]$ em $\{1,2\}$, contradizendo que $[0,1]$ é conexo. ■

Um espaço é localmente conexo por caminhos se todo ponto tem uma vizinhança conexa por caminhos. Todo aberto U de $\mathbb{R}^d$ é localmente conexo por caminhos porque bolas em $\mathbb{R}^d$ são conexas por caminhos e dado $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$.

Verifiquemos que bolas de $\mathbb{R}^n$ são conexas por caminho para qualquer norma. Mais que isso, são convexas, i.e., dois pontos podem ser ligados por um segmento de reta. Seja $\boldsymbol{p}$ uma norma em $\mathbb{R}^d$ e considere a bola

$$\{z \in \mathbb{R}^d : \boldsymbol{p}(x - z) < r\}$$

de raio r centrada em z. Tome x_1, x_2 nessa bola. Temos que o caminho $\gamma : [0,1] \to X$ dado por $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ está inteiramente contido em tal bola. De fato,

$$\boldsymbol{p}(\gamma(t)) \le (1-t)\boldsymbol{p}(x) + t\boldsymbol{p}(t) < (1-t)r + tr = r.$$

Proposição 1.123. Mostre que um aberto U em $\mathbb{R}^d$ é conexo por caminhos quando for conexo.

Demonstração. Suponha que U não é conexo por caminhos. Fixe um ponto $x_0 \in U$. Considere

$$V_1 := \{x \in U : \text{existe um caminho conectando } x_0 \text{ a } x\}$$

Seja $V_2 := X \setminus U_1$.

Se $x \in V_1$, então existe uma bola aberta B_x centrada em x contida em U, porque U é aberto. Como a bola é conexa por caminhos, todo ponto de B pode ser conectado a x, que por sua vez pode ser conectado a x_0. Desta forma, $B_x \subset V_1$. Assim, V_1 é aberto, porque

$$V_1 = \bigcup_{x \in U_1} B_x,$$

e não vazio, porque $x_0 \in U_1$.

Por outro lado, V_2 é aberto também. Se $x \in V_2$, então não podemos conectar x a x_0. Mas existe uma bola B_x centrada em x e contida em U. Todo ponto de B_x está conectado a x, que não pode ser conectado a x_0. Assim, nenhum ponto da bola B_x pode ser conectado a x_0. Portanto, $B_x \subset V_2$. Logo, V_2 é aberto e não vazio (pois estamos supondo que U não é conexo por caminhos). Portanto, $U = V_1 \cup V_2$, com V_1, V_2 abertos em U, disjuntos e não triviais. Logo, U é desconexo, uma contradição. ■

Pelo mesmo argumento, temos que, em $\mathbb{R}^d$, um aberto é conexo se, e só se, dois pontos podem ser conectados por um caminho poligonal, i.e., uma curva feita de segmentos de reta concatenados.

Exemplo 1.124. Uma álgebra real é um espaço vetorial real A munido de multiplicação satisfazendo:

- $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$ para $\alpha \in \mathbb{R}, x, y \in A$;
- $x(y + z) = xy + xz$ e $(y + z)x = yx + zx$ para $x, y, z \in A$;

Dizemos que a álgebra A é unital se ela tem unidade: existe e tal que $ex = xe = x$ para $x \in A$.

E uma álgebra unital A é de divisão se dados $a \neq 0$ e b em V, existem $x, x' \in V$ tais que $ax = b$ e $x'a = b$, ou seja, se é uma álgebra onde é possível resolver equações.

Exemplos de álgebras são vários. O produto vetorial em $\mathbb{R}^3$ é um exemplo de álgebra, mas ela não é unital. O espaço $C(X)$ de funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ é uma álgebra unital assim como o espaço de matrizes quadradas M_d.

Nenhuma dessas álgebras é de divisão. Exemplos de álgebras de divisão são $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Note que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$ e $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. Além dessas, existem somente outras duas de dimensão finita, a dos quaternions e a dos octonions, que tem dimensão 4 e 8.

Mostraremos que espaços tridimensionais não podem ter estrutura de álgebra de divisão. Suponha que $\mathbb{R}^3$ tem estrutura de álgebra de divisão real. Para cada $a \in \mathbb{R}^3$, existe a função $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_a(x) = ax$, que é linear. Note que $a \mapsto f_a$ é uma função de $\mathbb{R}^3$ no espaço $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, das transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ (que pode ser identificado com M_3). Além disso, essa função é contínua.

De fato, na base canônica e_1, e_2, e_3 há constantes $c_{ij}^k \in \mathbb{R}$ tais que

$$e_i e_j = \sum_{1 \leq i,j,k \leq 3} c_{ij}^k e_k.$$

e escrevendo $a = \sum_i a^i e_i$ e $x = \sum_j x^j e_j$, temos $f_a(x) = \sum_{i,j,k} a^j x^i c_{ij}^k e_k$ e, consequentemente, identificamos f_a com a matriz

$$M(a) = \begin{bmatrix} \sum_j a^j c_{1j}^1 & \sum_j a^j c_{2j}^1 & \sum_j a^j c_{3j}^1 \\ \sum_j a^j c_{1j}^2 & \sum_j a^j c_{2j}^2 & \sum_j a^j c_{3j}^2 \\ \sum_j a^j c_{1j}^3 & \sum_j a^j c_{2j}^3 & \sum_j a^j c_{3j}^3 \end{bmatrix}.$$

A aplicação $a \mapsto f_a$ de $\mathbb{R}^3$ em $\text{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ é contínua, pois $M(a)$ é contínua. Repare que para $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, temos que f_a é sobrejetora. De fato, dado y, existe x tal que $ax = y$. Assim, f_a é isomorfismo linear e consequentemente

$$\det(M(a)) \neq 0 \quad \text{para} \quad a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Seja e a unidade de $\mathbb{R}^3$, temos que

$$f_e x = ex = x \quad \text{e} \quad f_{-e} = (-e)x = -(ex) = -x.$$

Assim, $f_e = \text{Id}$ e $f_{-e} = -\text{Id}$ e, consequentemente,

$$M(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(-e) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Agora note que $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ é conexo por caminhos. Existe uma curva contínua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tal que $\gamma(0) = \text{Id}$ e $\gamma(1) = -\text{Id}$. Como a função $a \mapsto \det(M(a))$ é contínua, temos que $t \mapsto \det M(\gamma(t))$ é função contínua.

Logo, temos uma curva contínua em $\mathbb{R}$ ligando $\det M(e) = 1$ a $\det M(-e) = -1$, ou seja, há $t' \in [0,1]$ tal que $\det M(\gamma(t')) = 0$, contradizendo que $\gamma(t') \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Portanto, $\mathbb{R}^3$ não pode admitir estrutura de álgebra de divisão real.

Antes de terminar essa secção gostaria de adicionar que muitas vezes se usa a expressão “componente conexa”. Se X é espaço métrico, então podemos definir uma relação entre pontos que é $x \sim y$ se existe $C \subset X$ conexo tal que $x, y \in C$. Essa relação é de equivalência e assim temos que X é união disjunta de suas classes de equivalência. Cada classe de equivalência é conexa. Assim, quebramos X como união de conjuntos conexos.

Similarmente, podemos quebrar X é componentes conexas por caminho.

Exercício 1.125. Verifique que a relação descrita acima é de equivalência.
Dica: Use que C é conexo se não existe uma função $\text{cor} : C \to \{1, 2\}$ sobrejetora e contínua.

Além disso, mostre que as classes laterais são conexas.

Exercício 1.126. Se X é localmente conexo (como é todo aberto de $\mathbb{R}^d$), então as componentes conexas são abertas.

Exercício 1.127. Mostre que um aberto de $\mathbb{R}^d$ só pode ter uma quantidade enumerável de componentes.

Referências Bibliográficas

[Aur] Leandro F. Aurichi. Espaços métricos.
https://sites.icmc.usp.br/aurichi/dokuwiki/doku.php?id=curso:metricos2021