Cálculo em construção

Hugo Cattarucci Botós (ICMC - USP)
hugocbotos@gmail.com

Última atualização em 24 de maio de 2023

Sumário

1 Números reais **3**

1.1 Base decimal . . . 3
1.2 Sequência e convergência . . . 9
1.3 Sequências convergentes . . . 14
1.4 Sequências divergentes . . . 16
1.5 Aritmética dos infinitos . . . 18
1.6 Sequências de Cauchy, completude e o número de Euler . . . 19
1.7 Séries . . . 24
1.8 Séries de potência . . . 33

2 Continuidade **41**

2.1 Limite de funções . . . 42
2.2 Funções contínuas . . . 50
2.3 Funções contínuas em intervalos: zeros de funções . . . 55
2.4 Exponencial natural . . . 60
2.5 Máximos e mínimos de funções contínuas . . . 62
2.6 Continuidade de séries de potência . . . 65

3 Cálculo diferencial **69**

3.1 Introdução informal com infinitesimais e cálculo de reta tangente . . . 69
3.1.1 Velocidade e aceleração . . . 69
3.1.2 Reta tangente . . . 72
3.2 Formalização e regras básicas . . . 75
3.3 Derivada da composta: Regra da cadeia . . . 78
3.4 Teorema da função inversa . . . 81
3.5 Na busca de máximos e mínimos . . . 81
3.6 Diferenciabilidade de séries de potência . . . 84
3.7 Polinômio e séries Taylor . . . 85

4 Séries de potência **89**

4.1 Séries numéricas . . . 89

Capítulo 1

Números reais

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk. [1]

Leopold Kronecker

René Descartes pensou ser uma boa ideia representar pontos de um plano usando eixos coordenados, que costumeiramente chamamos de eixo x e eixo y. Não seria exagero dizer que a partir daí os números reais se tornaram centrais na matemática, pois esses aritmetizaram a geometria, tópico de grande interesse dos matemáticos desde a antiguidade.

1.1 Base decimal

Por termos dez dedos nas mãos, utilizamos o sistema decimal para representar números.

Os números naturais são

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad \cdots$$

e formam o conjunto denotado por $\mathbb{N}$.

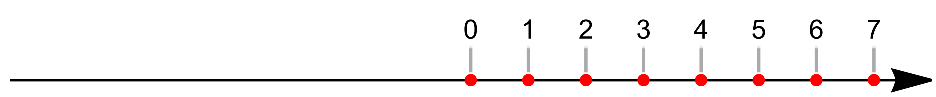

Figura 1.1: *Números naturais*

Representar um número natural no sistema decimal significa escrevê-lo usando potências de dez: $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, etc. Por exemplo, ao escrevermos 11, queremos dizer que esse número é $1 \times 10^0 + 1 \times 10^1$. O número 12 é $2 \times 10^0 + 1 \times 10^1$. Já 2022 é $2 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^3$. De forma geral, o número $a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, onde os dígitos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$ são números naturais de 0 a 9, é

$$a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + a_3 \times 10^3 + \cdots + a_k \times 10^k.$$

[1] Deus criou os números inteiros, todo o resto é obra do homem.

Adicionando os negativos dos números naturais à nossa lista de números, obtemos os inteiros, que formam o conjunto $\mathbb{Z}$.

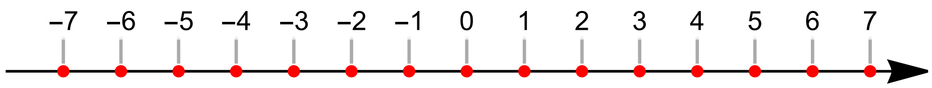

Figura 1.2: *Números Inteiros*

Denotamos o conjunto dos inteiros positivos $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ por $\mathbb{Z}_{>0}$, onde o subscrito > 0 nos diz que consideramos apenas os elementos de $\mathbb{Z}$ maiores que zero.

Números racionais são frações m/n, onde m e n são inteiros e $n \neq 0$, e formam o conjunto $\mathbb{Q}$. A fim de representar frações positivas no sistema decimal, utilizamos as potências de 10 com expoente inteiros

$$\cdots 10^3, \quad 10^2, \quad 10^1, \quad 10^0, \quad 10^{-1}, \quad 10^{-2}, \quad 10^{-3} \cdots$$

Lembrando que

$$\begin{array}{ll} 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1, & 10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0.0001, \\ 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01, & 10^{-5} = \frac{1}{100000} = 0.00001, \\ 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0.001, & 10^{-6} = \frac{1}{1000000} = 0.000001, \end{array}$$

e assim por diante.

Exemplo 1.1.

- $1/4 = 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 0.25$;
- $2/5 = 4 \times 10^{-1} = 0.4$;
- $90/8 = 1 \times 10 + 1 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 11.25$.

Já $1/3$ é $0.3333\ldots$ com infinitos $3'$s aparecendo em sua representação.

$$\frac{1}{3} = 3 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} + \cdots .$$

Algo similar ocorre com $1/7$. Calculemos seus dígitos. A ideia é trocar frações menores que 1 por maiores que 1 multiplicando por 10 em cima e em baixo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= \frac{10}{7} \times 10^{-1} \\ &= 10^{-1} + \frac{3}{7} \times 10^{-1} \\ &= 10^{-1} + \frac{30}{7} \times 10^{-2} \\ &= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + \frac{2}{7} \times 10^{-2} \end{aligned}$$

$$= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + \frac{20}{7} \times 10^{-3}$$

$$= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + \frac{6}{7} \times 10^{-3}$$

$$= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + \frac{60}{7} \times 10^{-4}$$

$$= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + \frac{4}{7} \times 10^{-4}$$

$$= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + \frac{40}{7} \times 10^{-5}$$

$$= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-5} + \frac{5}{7} \times 10^{-5}$$

$$= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-5} + \frac{50}{7} \times 10^{-6}$$

$$= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-5} + 7 \times 10^{-6} + \frac{1}{7} \times 10^{-6}$$

As frações menores que 1 destacadas em vermelho nos cálculos acima seguem um padrão: elas se repetem. Começamos com $1/7$ e obtemos o ciclo de frações

$$\frac{1}{7} \to \frac{3}{7} \to \frac{2}{7} \to \frac{6}{7} \to \frac{4}{7} \to \frac{5}{7} \to \frac{1}{7}$$

Porque essas frações eventualmente começam a se repetir, temos que ao continuarmos o procedimento acima obteremos $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857142857142857\cdots$ com uma lista de dígitos repetindo-se periodicamente. Isso sempre ocorre para frações, suas representações em base 10 tem uma lista de dígitos que se repete. Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = 0.5000000000\cdots$$

$$\frac{1}{11} = 0.0909090909090909\cdots$$

$$\frac{12}{13} = 0.923076923076\cdots$$

O padrão repetido pode não surgir de imediato. Na fração

$$\frac{7}{12} = 0.583333333333333\cdots ,$$

por exemplo, o 58 não faz parte da lista de dígitos que se repete. No entanto, a partir de certo ponto, o digito 3 passa a se repetir.

Geometricamente, o procedimento descrito se manifesta da seguinte maneira: se temos uma fração $r > 0$, tome q como sendo o maior número natural menor que ou igual a r. Tome a_{-1} como sendo o maior número natural tal que $q + a_{-1} \times 10^{-1} \leq r$. Como $0 \leq r - q < 1$, a_{-1} tem de ser um número natural de 0 a 9. Similarmente, a_{-2} é o maior número natural satisfazendo $q + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} \leq r$. Como $0 \leq r - (q + a_{-1} \times 10^{-1}) < 10^{-1}$, o número a_{-2} é um natural de 0 a 9. Repetindo tal algoritmo, obtemos

$$q + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \cdots + a_{-n} \times 10^{-n} \leq r$$

com a diferença entre esses dois números sendo menor que 10^{-n}. Os cálculos para $1/7$ feitos anteriormente podem ser vistos geometricamente de acordo com a Figura 1.3 a seguir. Observe que os intervalos em preto vão ficando cada vez menor. O primeiro segmento em preto tem comprimento 1, o segundo tem comprimento 10^{-1}, o terceiro tem comprimento 10^{-2}, etc.

O padrão de repetição descrito anteriormente aparece na figura a seguir da seguinte forma. O ponto em roxo oscila entre os intervalos delimitados por pontos vermelhos, até que volta novamente para o segundo intervalo (da esquerda para direita).

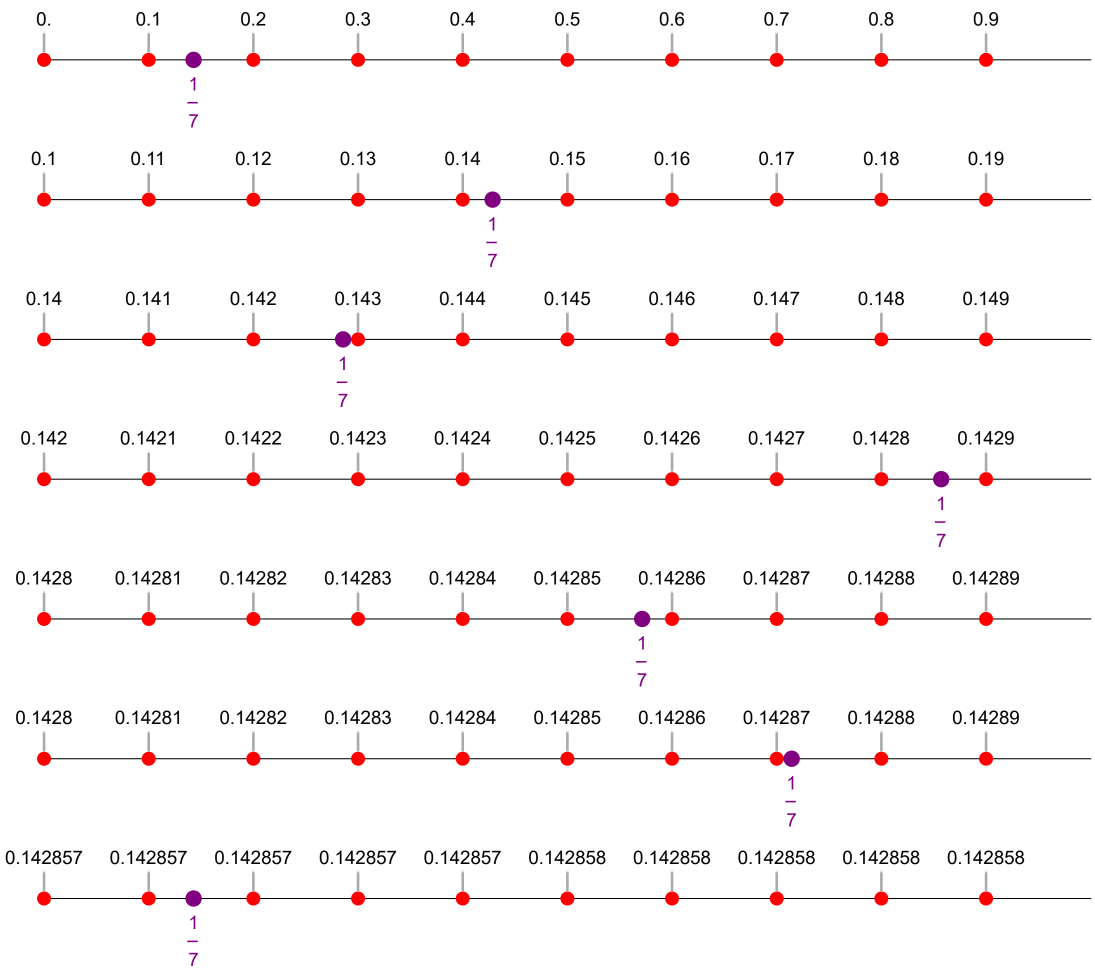

Figura 1.3: *Fração* $1/7$ *na base* 10

Voltando ao caso geral. Como 10^{-n} decresce conforme n cresce, temos que a soma de infinitos termos

$$q + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \cdots + a_{-n} \times 10^{-n} + \cdots$$

é igual a r.

Como q é um natural positivo,

$$q = a_0 + a_1 \times 10 + \cdots + a_l \times 10^l,$$

ou seja,

$$r = a_l \times 10^l + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \cdots + a_{-k} \times 10^{-n} + \cdots ,$$

que escrevemos abreviadamente como sendo

$$r = a_l a_{l-1} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots .$$

O mesmo método de aproximação funciona se r for um número irracional positivo (como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π). Você sempre consegue escrevê-lo no sistema decimal seguindo o mesmo algoritmo descrito. Se o número for racional, essa representação apresenta um padrão que se repete periodicamente. Reciprocamente, se um número apresenta uma lista de número que se repete periodicamente, então esse deve ser racional. Verificar tal afirmação, que não farei, segue de generalizar o exemplo a seguir.

Exemplo 1.2. Se $r = 0.314232323232323232\cdots$, então temos

$$r - 0.314 = 0.000232323232323232\cdots$$

e multiplicando por 10^2 obtemos

$$100r - 31.4 = 0.0232323232323232\cdots = 0.023 + 0.0002323232323232\cdots = 0.023 + (r - 0.314),$$

$$r = \frac{31.109}{99} = \frac{31109}{99000},$$

que é racional.

Desta forma, um número irracional não possui uma lista de dígitos consecutivos que se repete periodicamente.

Exemplo 1.3. O número irracional

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769\ldots$$

não apresenta um padrão em seus dígitos que se repete periodicamente.

Até então, representamos decimalmente apenas números positivos. Se o número real r for negativo, então podemos escrever $-r$ na representação decimal e depois colocar um $-$ na frente. Por exemplo, $-3/4 = -0.75$ porque $3/4 = 0.75$. Mais precisamente, se r for negativo, podemos aproximar $s = -r$ por termos s_n e definindo $r_n = -s_n$ temos $|r - r_n| < 10^{-n}$.

Os números r_n's construídos são racionais independentemente se r é real ou somente racional. Assim, como para todo r real temos $|r - r_n| < 10^{-n}$, podemos aproximar qualquer número por um racional com a precisão que quisermos.

Exemplo 1.4. Para o número

$$\sqrt{3} = 1.7320508075688772935274463415058723669428052538104\cdots,$$

temos

$$\begin{aligned}
|\sqrt{3} - 1| &< 1 \\
|\sqrt{3} - 1.7| &< 0.1 \\
|\sqrt{3} - 1.73| &< 0.01 \\
|\sqrt{3} - 1.732| &< 0.001
\end{aligned}$$

e assim por diante.

Observação 1.5. O procedimento descrito anteriormente nos dá uma representação decimal para qualquer número. No entanto, certos números têm duas representações decimais. Por exemplo,

$$1 = 1.0000\cdots = 0.9999\cdots$$

A primeira representação é a fornecida pelo algoritmo que descrevemos. Por outro lado, $0.9999\cdots$ de fato outra é representação de 1, pois

$$\begin{aligned}
0.9999 &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots \\
&= \frac{9}{10}\overbrace{\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right)}^{=\frac{1}{1-1/10}=\frac{10}{9}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Esse fenômeno ocorre apenas quando o número tem uma representação decimal finita:

$$0.1 = 0.09999\cdots \qquad 12.7 = 12.69999\cdots \qquad 0.219 = 0.2189999\cdots$$

Nota histórica 1.6. Os matemáticos indianos do primeiro milênio d.C. conheciam o zero, números negativos e o sistema decimal para números naturais. Como fazemos hoje, mas, é claro, com outra simbologia. Também expressavam números racionais como frações. Comparado com a forma que os gregos e romanos representavam números, eles estavam anos-luz a frente. Imagine só fazer aritmética com número romanos. Tais ideias adentraram o mundo árabe e persa, onde foram absorvidas e aprofundadas. O sistema numérico indo-arábico adentrou a Europa no século XIII com o nascente comércio entre essa e o oriente médio. No final século XVI, o matemático belga Simon Stevin introduziu a representação de números reais no sistema decimal, um enorme avanço, por ser uma forma concisa de representar números com precisão.

1.2 Sequência e convergência

Definição 1.7. Uma sequência r_n é uma lista de números reais indexada por números inteiros positivos.

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$$

Exemplo 1.8.

- Os $r_n's$ construídos para a representação decimal de um número real r formam uma sequência de números racionais;

- outros exemplos básicos de sequências são

$$\frac{1}{n}, \qquad \frac{n^2+2}{n}, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

  onde ! denota o fatorial[2].

Definição 1.9. Uma sequência r_n converge para o número real r se para $\varepsilon > 0$ temos que $|r - r_n| < \varepsilon$ para n suficientemente grande: existe um inteiro suficientemente grande N tal que $|r - r_n| < \varepsilon$ quando $n > N$.

Geometricamente, isso quer dizer que não importa quão pequeno seja o $\varepsilon > 0$, r_n fica dentro de $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ a partir de algum n.

Frequentemente **dizemos que** r_n **tende a** r **ou tende para** r e denotamos esse fato por

$$r_n \to r \quad \text{ou por} \quad \lim_{n\to\infty} r_n = r.$$

O número r é o **limite** de r_n.

Exemplo 1.10. A sequência $r_n = 1/n$ tende a 0 (veja a Figura 1.4). De fato, dado $\varepsilon > 0$, tão pequeno quanto se queira, temos que $|r_n| < \varepsilon$ para n suficientemente grande. Isso mostra que $r_n \to 0$.

Mais formalmente, tome N suficientemente grande[3] satisfazendo $1/N < \varepsilon$. Para $n > N$ temos que

$$|0 - r_n| = 1/n < 1/N < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

[2]Lembre-se que $0! = 1$ por definição e $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.
[3]N pode ser um inteiro positivo qualquer maior que $1/\varepsilon$

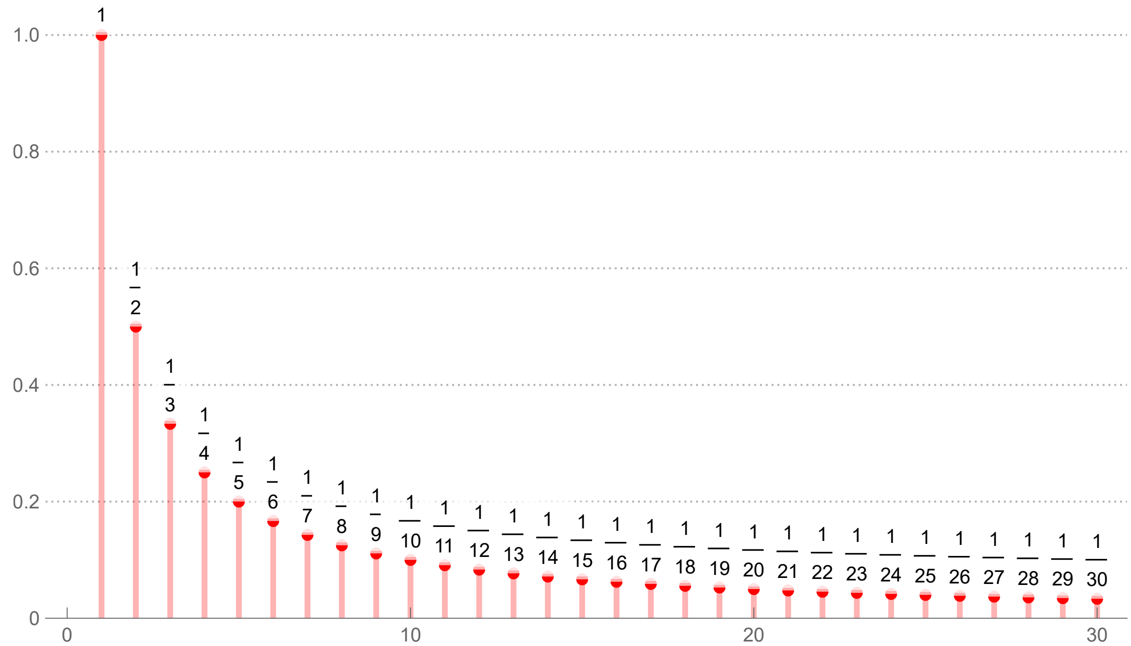

Figura 1.4: *Sequência* $r_n = \frac{1}{n}$

Observação 1.11. Gráficos como na Figura 1.4 podem ser feitos no software **Mathematica**. De fato, todas figuras desse livro foram feitas no Mathematica. Uma versão online básica e gratuita se encontra no Wolfram cloud `https://wolframcloud.com/`. Para fazer gráficos de sequências, usa-se o comando **DiscretePlot**. O gráfico na Figura 1.4 (com menos enfeites) é gerado pelo comando `DiscretePlot[1/n, {n, 1, 30}]` A documentação da linguagem Wolfram encontra-se em `https://reference.wolfram.com/language`. Há também bastante informação disponível em `https://mathematica.stackexchange.com`. Para uma introdução ao Mathematica voltada à análise real (um nome chique para cálculo), veja o fascinante livro **Analysis With Mathematica** de G. Filipuk e A. Kozowski [FKo].

Exemplo 1.12. Considere $r_n = \frac{n}{n+1}$ (veja Figura 1.5). Essa sequência converge para 1.

De fato,

$$1 - r_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

$$r_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Como $1/(n+1) \to 0$, temos que $r_n \to 1$. Mais precisamente, dado $\varepsilon > 0$, temos que

$$|1 - r_n| = \frac{1}{1+n} < \varepsilon$$

para n suficientemente grande[4]. Portanto, $r_n \to 1$.

[4]Sendo extremamente formal: para $\varepsilon > 0$ tome N tal que $1/(N+1) < \varepsilon$. Daí temos que

$$|r_n - r| = \frac{1}{1+n} < \frac{1}{1+N} < \varepsilon$$

quando $n > N$.

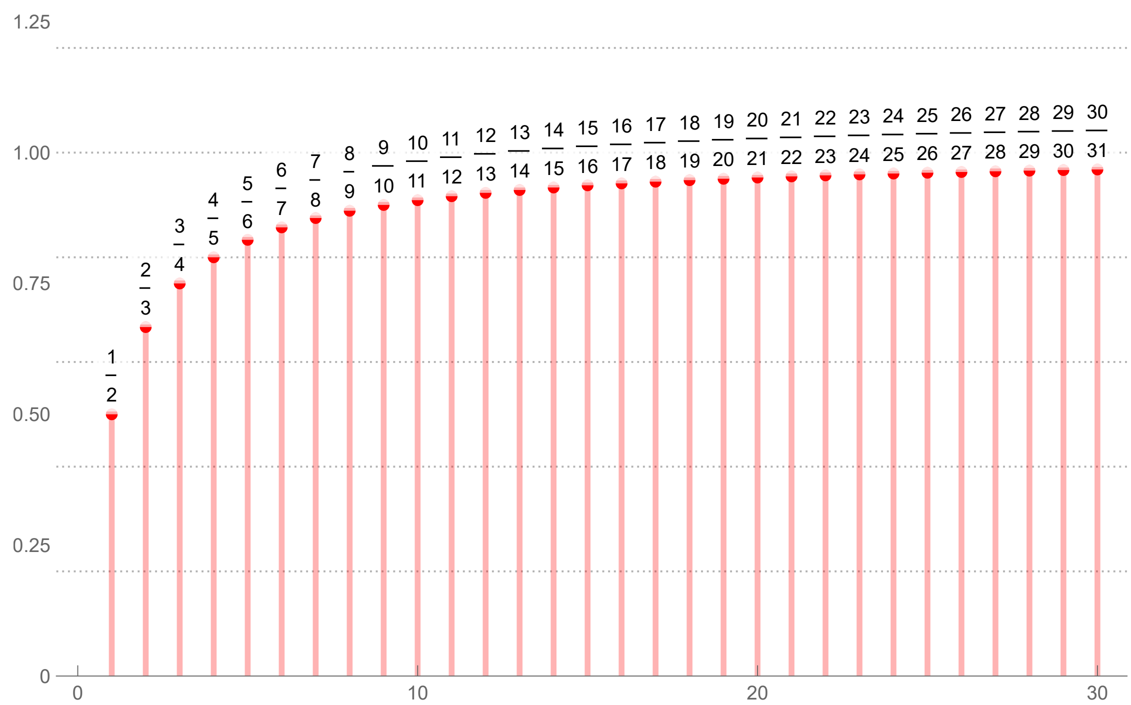

Figura 1.5: *Sequência* $r_n = \frac{n}{n+1}$

Observação 1.13. A fim de calcular o limite de uma sequência computacionalmente no Mathematica, utilizamos o comando `Limit[n/(n+1),n->Infinity]`.

Lembrete 1.14 (Binômio de Newton)**.** Para n natural e x real,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n,$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Exemplo 1.15. Mostremos que se $0 < a < 1$, então $a^n \to 0$ (veja Figura 1.6). Como $0 < a < 1$, temos que $a^{-1} > 1$. Tomando $b = a^{-1} - 1$, que é positivo, temos $1/a = 1 + b$. Pelo binômio de Newton (veja Lembrete 1.14),

$$(1+b)^n \geq \binom{n}{0}b^0 + \binom{n}{1}b^1 = 1 + nb,$$

ou seja,

$$\frac{1}{a^n} = (1+b)^n \geq 1 + nb.$$

Daí segue que

$$a^n \leq \frac{1}{1+nb},$$

e o resultado desejado.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$a^n \leq \frac{1}{1+nb} < \frac{1}{1+Nb} < \varepsilon$$

para n suficientemente grande. Logo, $a^n \to 0$.

Exemplo 1.16. Na mesma linha do exemplo anterior, mostremos que se $0 < a < 1$, então $na^n \to 0$. Pelo mesmo truque do binômio de Newton, com $b = a^{-1} - 1 > 0$, temos

$$\frac{1}{a^n} = (1+b)^n \geq 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 = 1 + n\left(b - \frac{b^2}{2}\right) + \frac{n^2b^2}{2},$$

para $n \geq 2$. Daí segue que

$$|na^n| \leq \frac{n}{1 + n\left(b - \frac{b^2}{2}\right) + \frac{n^2b^2}{2}} = \frac{2}{\left(\frac{2}{n^2} + \frac{(2b-b^2)}{n} + b^2\right)} \frac{1}{n} \to 0,$$

pois

$$\frac{2}{n^2} + \frac{(2b-b^2)}{n} + b^2 \to b^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} \to 0.$$

Por argumento similar, $n^k a^n \to 0$ para qualquer número natural k . Isso quer dizer que a^n tende a zero rápido demais, mais rápido que $1/n^k$.

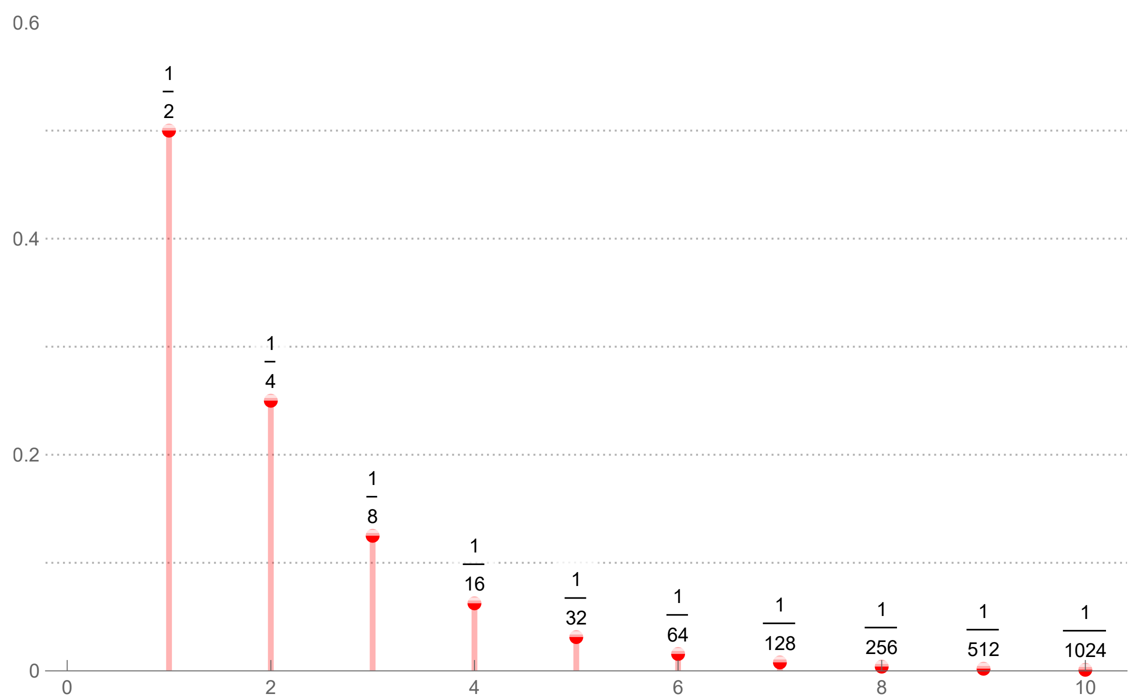

Figura 1.6: *Sequência* $r_n = \frac{1}{2^n}$

Observação 1.17. O comando

```
Limit[a^n, n -> Infinity, Assumptions -> 0 <= a < 1]
```

retorna o número 0 no Mathematica. A parte `Assumptions -> 0 <= a < 1` declara à maquina que estamos assumindo $0 \leq a < 1$. Similarmente, usando `Assumptions -> a>1`, obtemos ∞.

Definição 1.18. Se $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ é definido a partir da soma de termos a_k's, então denotamos o limite de s_n, se esse existir, por

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Chamamos essa soma de infinitos termos de **série**.

Exemplo 1.19. A sequência

$$s_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$

converge para $1/(1-a)$ quando $-1 < a < 1$. Em outras palavras, a **série geométrica dada por** a

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$$

vale $1/(1-a)$, o que é conhecido da escola.

O truque para mostrar isso é multiplicar s_n por a:

$$s_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n \quad \text{e} \quad as_n = a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^{n+1},$$

de onde segue que

$$s_n - as_n = 1 - a^{n+1}$$

e, consequentemente,

$$s_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Como $0 < |a| < 1$, o termo a^{n+1} na expressão acima tende a zero e $s_n \to 1/(1-a)$. Portanto,

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a}.$$

Observação 1.20. Para somarmos séries no Mathematica usamos o seguinte comando `Sum[1/n^2,{n,1,Infinity}]`, que computa a soma dos termos $1/n^2$ com n indo de 1 a infinito. O Mathematica nos fornece $\pi^2/6$, que de fato é a resposta correta.

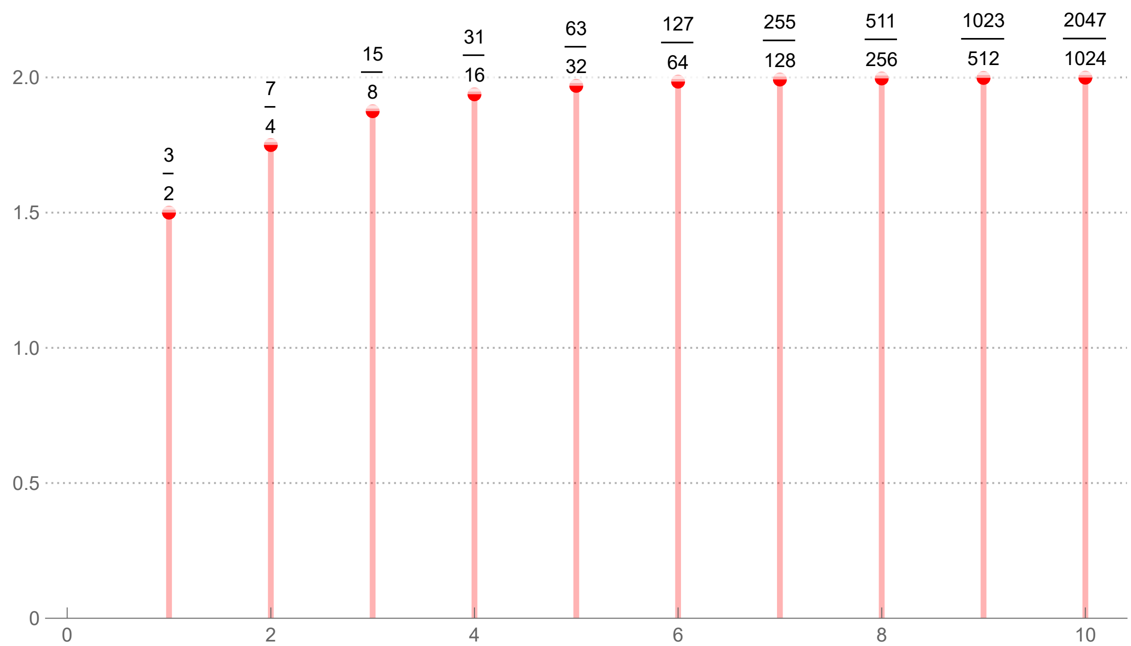

Figura 1.7: *Sequência* $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ *tende a* $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Exemplo 1.21. Para os r_n's que construímos ao representarmos r na base decimal, temos que $|r - r_n| < 10^{-n}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe um N inteiro suficientemente grande para o qual $10^{-N} < \varepsilon$. Desta forma, temos que $|r - r_n| < 10^{-n} < 10^{-N} < \varepsilon$ para $n > N$. Em outras palavras, temos que r_n tende para r.

1.3 Sequências convergentes

Nessa seção, assumiremos que os limites das sequências sejam finitos (isto é, não são $\pm\infty$). Comecemos provando que sequências convergentes são limitadas.

Proposição 1.22. Se $r_n \to r$, então r_n é limitada.

Demonstração. Para $\varepsilon = 1$, existe N tal que $|r_n - r| < 1$ para $n > N$. Somente para finitos n's a distância de r_n a r não é menor que 1. Logo, r_n é limitada. ■

Proposição 1.23. Suponha $r_n \to r$ e $s_n \to s$.

1. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha r_n \to \alpha r$;

2. $r_n + s_n \to r + s$;

3. $r_n s_n \to rs$.

Demonstração. 1. Dado $\varepsilon > 0$ temos $|r - r_n| < \varepsilon$ para n suficientemente grande. De onde segue que

$$|\alpha r - \alpha r_n| = |\alpha||r - r_n| \leq |\alpha|\varepsilon,$$

provando o primeiro item, pois podemos tomar $|\alpha|\varepsilon$ tão pequeno quanto for necessário.

2. Para $\varepsilon > 0$ temos

$$|r - r_n| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |s - s_n| < \varepsilon$$

quando n for suficientemente grande. Assim,

$$|r + s - r_n - s_n| = |(r - r_n) + (s - s_n)| \leq |r - r_n| + |s - s_n| < 2\varepsilon,$$

provando o segundo item.

3. O terceiro item é o mais complicado. Como r_n é limitada, existe $M > 0$ tal que $|r_n| \leq M$. Para $\varepsilon > 0$, as desigualdades

$$|r - r_n| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |s - s_n| < \varepsilon$$

valem para n suficientemente grande. Daí obtemos

$$|rs - r_n s_n| = |s(r - r_n) + (s - s_n)r_n| \leq |s||r - r_n| + |s - s_n||s_n| \leq \varepsilon(|s| + M).$$

Como $\varepsilon(|s| + M)$ pode ser tomado tão pequeno quanto necessário (fazendo ε pequeno) temos que o terceiro item é valido.

■

Exemplo 1.24.

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1 + 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 1;$
- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{(4n + 100)^3}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(4 + \frac{100}{n}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} 4 + \frac{100}{n}\right)^3 = 4^3 = 64.$

Proposição 1.25. Se $s_n \to s$ com $s \neq 0$, então

1. $|s_n| > |s|/2$ para n suficientemente grande. Em particular, a partir de algum n a sequência não se anula;
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$.

Demonstração. Provemos o primeiro item. Como $s \neq 0$, o número $\varepsilon = |s|/2$ é positivo. Assim, para n suficientemente grande $|s - s_n| < |s|/2$. Como

$$|s| = |(s - s_n) + s_n| \leq |s - s_n| + |s_n| \leq |s_n| + \frac{|s|}{2},$$

temos

$$|s_n| \geq |s|/2 > 0$$

para n suficientemente grande.

Provemos o segundo item. Para $\varepsilon > 0$, devido ao primeiro item,

$$|s_n - s| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |s_n| > |s|/2$$

para n suficientemente grande.

Logo,

$$\left|\frac{1}{s} - \frac{1}{s_n}\right| = \frac{|s_n - s|}{|s||s_n|} \leq \frac{2\varepsilon}{|s|^2} \to 0,$$

nos garantindo $s_n^{-1} \to s^{-1}$. ■

Exemplo 1.26.

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n^3 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n^2}} = 0.$$
- $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - 1)(\sqrt{n+1} + 1)}{n(\sqrt{n+1} + 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + 1)}$$

que vale 1 porque

$$\frac{n}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1$$

Exercício 1.27. Calcule os limites

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(2n+3)}{5n^3+1}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|100-n|}{|150-n|}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\left(1+\cos\left(n^{21}+7\right)\right)}{n}$

Exercício 1.28. Considere $a \in \mathbb{R}$ e uma sequência convergente $x_n \to x$. Prove que se $x_n \leq a$ para todo n, então $x \leq a$.

Dica: Use a ideia empregada ao mostramos o primeiro item da proposição 1.25.

Analogamente, se $x_n \geq a$, então $x \geq a$.

1.4 Sequências divergentes

Uma sequência divergente é aquela que não converge para um número real.

Exemplo 1.29. A sequência $r_n = (-1)^n$ diverge porque fica oscilando entre 1 e -1 conforme n cresce.

Exemplo 1.30. As sequências n, $-n^2$, $n + \frac{1}{n}$ divergem porque vão para ∞ ou $-\infty$ quando $n \to \infty$.

Definição 1.31. A sequência r_n tende para ∞ se para cada $R > 0$ existe N tal que $r_n > R$ para $n > N$. Em bom português, isso quer dizer que não importa quão grande queremos r_n, isso ocorre desde que n seja suficientemente grande. Nesse caso escrevemos

$$r_n \to \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty.$$

Analogamente, r_n tende para $-\infty$ se para cada $R > 0$ existe N tal que $r_n < -R$ para $n > N$. Denotamos esse segundo caso por

$$r_n \to -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} r_n = -\infty.$$

Exemplo 1.32. Para $a > 1$ temos que $a^n \to \infty$. De fato, tomando $b = a - 1 > 0$, temos $a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb$. Para $R > 0$ tão grande quanto quisermos, existe N satisfazendo $1 + Nb > R$, de onde segue que para $n > N$ vale $a^n > R$. Desta forma, $a^n \to \infty$.

Observação 1.33. Pode ser tentador dizer que r_n converge para ∞ em vez de diverge e isso não está errado. No entanto, evitaremos tal nomenclatura. Quando dizermos que algo converge, estaremos assumindo que o limite é um número real.

A sequência a^n, com $a > 1$, cresce muito rápido para infinito, o que é ilustrado pelo seguinte exercício.

Exercício 1.34. Mostre que

- para qualquer $k \in \mathbb{Z}_{>0}$,
$$\frac{a^n}{n^k} \to \infty;$$
- para todo polinômio $p(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$ não nulo,
$$\frac{a^n}{p(n)} \to \infty.$$

Exemplo 1.35. Mostremos que o fatorial cresce mais rápido que a exponencial, isto é, para qualquer a real
$$\frac{a^n}{n!} \to 0.$$

Fixe q inteiro positivo tal que
$$\frac{|a|}{q} < \frac{1}{2}.$$

Para $n > q$

$$\frac{a^n}{n!} = \underbrace{\overbrace{\frac{a}{n}}^{\leq\frac{1}{2}} \times \overbrace{\frac{a}{n-1}}^{\leq\frac{1}{2}} \times \cdots \times \overbrace{\frac{a}{q+1}}^{\leq\frac{1}{2}}}_{n-q \text{ vezes}} \times \frac{a^q}{q!} \leq \frac{1}{2^{n-q}} \times \frac{a^q}{q!} = \frac{2^q a^q}{q!} \times \frac{1}{2^n} \to 0,$$

de onde segue o resultado. Por outro lado, n^n cresce mais rápido que $n!$
$$\frac{n^n}{n!} \to \infty,$$

o que deixarei de exercício ao leitor.

Por outro lado, $\log(n)$ cresce muito devagar. De fato, para todo expoente real $r > 0$

$$\frac{\log(n)}{n^r} \to 0.$$

Como não temos definição precisa de log ainda, deixemos para justificar tais fatos mais a frente.

Abaixo temos sequências que tendem para infinito. Quanto mais à direita, mais velozmente ela cresce.

$$\cdots \qquad \log(\log(n)) \qquad \log(n) \qquad \sqrt{n} \qquad n \qquad n^2 \qquad a^n \qquad n! \qquad n^n \qquad \cdots$$

onde $a > 1$.

Exercício 1.36. Calcule os limites quando existir:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(2n+3)}{2n^2+3}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{3n+1}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{3n+1} n^3$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} n + \sin\big((n^2+n)\pi\big) n$

1.5 Aritmética dos infinitos

É fácil verificar que se $r_n \to r$ e $s_n \to s$, então

- $r_n s_n \to \infty$ quando $r = \infty$ e $s > 0$;
- $r_n s_n \to \infty$ quando $r = s = \infty$;
- $r_n s_n \to \infty$ quando $r = -\infty$ e $s < 0$;
- $r_n s_n \to \infty$ quando $r = s = -\infty$.
- $r_n s_n \to -\infty$ quando $r = -\infty$ e $s > 0$;
- $r_n s_n \to -\infty$ quando $r = \infty$ e $s < 0$;
- $r_n s_n \to -\infty$ quando $r = -s = \infty$.

Verifiquemos o primeiro item por descargo de consciência. Para $R > 0$ tão grande quanto for necessário, como $r_n \to \infty$, temos que existe N tal que $r_n > R$ para $n > N$. Aumentando N se preciso, temos que $s_n > s/2$ para $n > N$ pela proposição 1.25. Logo, $r_n s_n > Rs/2$ para $n > N$, finalizando o argumento.

É duro lembrar todas essas regras. No entanto, operações com infinitos são fáceis de executar: considere r, s, ambos não nulos, com um deles ao menos sendo ∞ ou $-\infty$. Se r, s tem o mesmo sinal, então $rs = \infty$, e se tem sinais opostos, $rs = -\infty$. Assim, nos exemplos acima temos sempre $r_n s_n \to rs$. Por exemplo, se $r_n = n^2 + \sin(n)$, que tende a ∞ porque $|\sin(n)| \le 1$, e $s_n = n/(2n+3)$, que tende a $1/2$, então

$$\lim_{n\to\infty} r_n s_n = \infty \times 1/2 = \infty.$$

Exemplo 1.37. Já a expressão rs com $r = 0$ e $s = \infty$ não está bem definida.

- Para $r_n = 1/n$ e $s_n = n$ temos $r_n s_n \to 1$;
- para $r_n = 1/n^2$ e $s_n = n$ temos $r_n s_n = 1/n \to 0$;
- para $r_n = 1/n$ e $s_n = n^2$ temos $r_n s_n = n \to \infty$.

Algo similar ocorre com a soma de duas sequências $r_n \to \infty$ e $s_n \to s$. Desde que s não seja $-\infty$, temos que $r_n + s_n \to \infty$. Em outras palavras, $\infty + s = \infty$ para $s \neq -\infty$. Similarmente, $-\infty + s = -\infty$ para $s \neq \infty$.

Exemplo 1.38. O "número" $\infty - \infty$ não faz sentido.

- Para $r_n = n$ e $s_n = -n$, temos $r_n + s_n \to 0$;
- para $r_n = n^2$ e $s_n = -n$, temos $r_n + s_n \to \infty$;
- para $r_n = n + 2$ e $s_n = -n$, temos $r_n + s_n \to 2$;
- para $r_n = n + 2$ e $s_n = -n^2$, temos $r_n + s_n \to -\infty$.

Quanto a divisão, é fácil verificar que se $|r_n| \to \infty$, então $1/r_n \to 0$.

Exemplo 1.39. A série divergente mais famosa provavelmente é a **série harmônica**

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots ,$$

que é o limite da sequência

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Mostremos que $H = \infty$. De fato, se $H < \infty$, então vale a desigualdade

$$\frac{1}{2}H = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

e somando $\frac{1}{2}H$, que é a soma dos inversos dos números pares, a ambos os lados, obtemos $H < H$, o que é uma contradição. Assim, nossa hipótese de que $H < \infty$ não pode ser verdadeira. Logo, $H = \infty$.

1.6 Sequências de Cauchy, completude e o número de Euler

Considere uma sequência r_n convergindo para r. Por definição, para $\varepsilon > 0$ $|r - r_n| < \varepsilon$ para n suficientemente grande.

Se k e l são suficientemente grandes, temos

$$|r - r_k| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |r - r_l| < \varepsilon$$

e daí segue que

$$|r_k - r_l| = |(r - r_l) - (r - r_k)| \leq |r - r_l| + |r - r_k| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Isso quer dizer o seguinte, se uma sequência converge, então os números r_k e r_l podem ser tomados tão próximos quanto for necessário desde que k e l sejam suficientemente grandes.

Definição 1.40. Uma sequência r_n é de **Cauchy** se para $\varepsilon > 0$ existe N suficientemente grande tal que $|r_k - r_l| < \varepsilon$ para $k, l > N$

Como foi observado, toda sequência convergente é de Cauchy. A mágica nos números reais é que o oposto também vale. A fim de provar isso, deveríamos investigar a fundo a axiomatização dos números reais. No entanto, não faremos isso. Simplesmente assumiremos que a propriedade a seguir é verdadeira a priori. Discussões profundas e detalhadas sobre a estrutura dos números reais podem ser encontradas em [Zor] e [Sta].

Postulado 1.41 (Propriedade dos intervalos encaixados)**.** Considere uma sequência de intervalos $I_0, I_1, I_2, \ldots$ e assuma que esses são limitados e fechados (têm seus extremos). Se os intervalos são encaixados, isto é,

$$I_0 \supset I_1 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

então existe um $r \in \mathbb{R}$ comum a todos os I_n' s. Mais formalmente, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.42. Se r_n é uma sequência de Cauchy, então existe um número real r tal que $r_n \to r$. Essa propriedade se chama **completude**.

Demonstração. Primeiramente, toda sequência de Cauchy é limitada. De fato, para $\varepsilon = 1$, existe N tal que $|r_k - r_l| < 1$. Em particular, fazendo $l = N + 1$, temos $r_{N+1} - 1 < r_k < r_{N+1} + 1$ para $k > N$. Desta forma, a sequência é limitada, pois exceto finitos pontos da sequência r_n distam menos que 1 de r_{N+1}. De toda forma, r_n está contido em um intervalo fechado e limitado $I_0 = [a_0, b_0]$.

Agora o truque é dividir e conquistar: fabricar intervalos encaixados de acordo com algum critério. Seja c o ponto médio do intervalo I_0. Temos que $r_n \in [a_0, c]$ ocorre para infinitos $n's$ ou $r_n \in [c, b_0]$ ocorre para infinitos $n's$. Note que ambas coisas podem acontecer, o que não ocorre é ambas afirmações serem falsas. Se $r_n \in [a_0, c]$ ocorre para infinitos n's, então definimos $I_1 = [a_0, c]$. Se isso não ocorre, então $r_n \in [c, b_0]$ ocorre para infinitos n's e nesse caso definimos $I_1 = [c, b_0]$. Em outras palavras, dividimos I_0 ao meio e tomamos para ser I_1 uma das metades que contem r_n para infinitos n's. Recursivamente, I_2 é uma das metades de I_1 que contém r_n para infinitos n's. Já I_3 é uma das metades de I_2 que contém r_n para infinitos n's, e assim por diante. Por construção, temos a sequência

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

de intervalos fechados, limitados e encaixados, de modo que o comprimento $|I_n|$ do intervalo I_n tenda a zero.

$$|I_n| = \frac{|I_0|}{2^n} \to 0.$$

Comum a todos esses intervalos há um ponto r, pela propriedade dos intervalos encaixados. E porque o comprimento desses intervalos tende a zero, esse ponto é único. Tome $\varepsilon > 0$ e n_0 tal que $|I_{n_0}| < \varepsilon$. Por outro lado, existe N natural tal que $|r_k - r_l| < \varepsilon$ para $k, l > N$. Como $r_n \in I_{n_0}$ ocorre para infinitos n's (por construção), temos que existe $l_0 > N$ tal que $r_{l_0} \in I_{n_0}$. Desta forma, para $k > N$ temos $|r_k - r_{l_0}| < \varepsilon$ e, por outro lado, $|r - r_{l_0}| < \varepsilon$. Logo,

$$|r - r_k| = |(r - r_{l_0}) + (r_{l_0} - r_k)| \leq |r - r_{l_0}| + |r_{l_0} - r_k| < 2\varepsilon$$

para $k > N$, isto é, $r_k \to r$. ■

Usamos a completude para fabricar novos números (e funções) a partir de sequências de Cauchy.

Exemplo 1.43. Para cada inteiro positivo k considere $a_{-k} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Considere também um número natural q. Desses ingredientes, obtemos a sequência

$$r_n = q + \frac{a_{-1}}{10} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \frac{a_{-3}}{10^3} + \cdots + \frac{a_{-n}}{10^n},$$

que pode ser escrita na representação decimal como $q + 0.a_{-1}a_{-2}a_{-3} \cdots a_{-n}$. A priori, não há evidência de que o número $q + 0.a_{-1}a_{-2}a_{-3} \cdots$, com todos seus infinitos dígitos, faz sentido. A existência desse número é consequência da completude dos reais.

Mostremos que a sequência r_n é de Cauchy e assim existe r tal que $r_n \to r$. Considere k e l, e suponhamos $k < l$. Usando que $a_i \leq 9$ e

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{l-k-1}} < 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

obtemos a seguinte estimativa.

$$\begin{aligned}
r_l - r_k &= \frac{a_{-k-1}}{10^{k+1}} + \frac{a_{-k-2}}{10^{k+2}} + \cdots \frac{a_{-l}}{10^l} \\
&\leq \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} + \cdots \frac{9}{10^l} \\
&= \frac{9}{10^{k+1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{l-k-1}}\right) \\
&< \frac{9}{10^{k+1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{9}{10^{k+1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{9}{10^{k+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= \frac{9}{10^{k+1}} \frac{10}{9}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10^k}$$

Se $k > l$, então pelo mesmo raciocínio $r_k - r_l < 10^{-l}$. Em todo caso, para $\varepsilon > 0$ podemos tomar N tal que $10^{-N} < \varepsilon$. Se $k, l > N$, temos que $|r_k - r_l| < 10^{-N} < \varepsilon$. Em outras palavras, a sequência r_n é de Cauchy e, consequentemente, ela converge para algum número real r. Esse é $q + 0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\cdots$.

Que fique claro o seguinte: sequências de Cauchy são convergentes em $\mathbb{R}$, isto é, garantimos que ela converge para um número real. No entanto, se uma sequência r_n de números racionais é de Cauchy, não é em geral verdade que seu limite é racional. Um exemplo que escancara isso é aproximar $\sqrt{2}$ truncando sua representação decimal.

Exemplo 1.44. A sequência $r_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ é convergente, o que provaremos mostrando que r_n é de Cauchy.

Considere $k < l$. Temos

$$r_l - r_k = \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \cdots + \frac{1}{l!}$$

Como

$$(k+1)! = \underbrace{\overbrace{(k+1)}^{\geq 2} \times \overbrace{k}^{\geq 2} \times \overbrace{(k-1)}^{\geq 2} \times \cdots \times \overbrace{3}^{\geq 2} \times \overbrace{2}^{=2}}_{k \text{ termos}} \times 1 \geq 2^k,$$

temos

$$\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Similarmente,

$$\frac{1}{(k+i)!} \leq \frac{1}{2^{k+i-1}},$$

de onde segue que

$$r_l - r_k \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdot \frac{1}{2^{l-1}} < \frac{1}{2^k}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Analogamente, se $l < k$,

$$r_k - r_l < \frac{1}{2^{l-1}}.$$

De toda forma, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|r_k - r_l| < \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$ para $k, l > N$. Logo, a sequência r_n converge por ser de Cauchy e seu limite é a série (soma infinita)

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots.$$

Esse número é, junto com π, excepcionalmente importante em matemática. Ele se chama número de Euler e o denotamos por e. Em base decimal

$$e = 2.7182818284590452354\cdots.$$

Além disso, e é irracional, o que mostraremos a frente.

Observação 1.45. O número e é representado por E maiúsculo no Mathematica. Utilizamos o comando N para obtermos E com quantos dígitos desejarmos. Por exemplo, `N[E,10]` nos fornece 10 dígitos: $e \approx 2.718281828$.
Similarmente, `N[Pi,3]` nos fornece $\pi \approx 3.14$.
Podemos também aproximar e usando a série que o define. Somando os 10 primeiros termos da série com `N[Sum[1/Factorial[n],{n,0,9}],7]`, obtemos $e \approx 2.718282$.

De modo mais geral, para cada $x \in \mathbb{R}$, a sequência $s_n(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ é convergente, seguindo argumento similar ao feito anteriormente, isto é, mostrando que tal sequência é Cauchy. O limite dessa sequência é denotado por e^x ou $\exp(x)$ ou

$$\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

e chama-se **exponencial natural**. Certamente é uma das funções mais importantes de toda matemática[5].

Proposição 1.46. A sequência $s_n(x)$ é de Cauchy para cada x e assim converge. Em outras palavras, a função

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

está bem definida.

Demonstração. Ao invés de provar na força bruta aqui, esse fato será verificado com ferramenta mais apropriada no Corolário 1.59. ■

Obviamente, $e^0 = 1$ e $e^1 = e$. Além disso, a notação e^x sugere a propriedade $e^{x+y} = e^x e^y$, isto é, e^x de fato se comporta como uma exponencial. Esse de fato é o caso.

Proposição 1.47. A identidade $e^{x+y} = e^x e^y$ vale para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Efetuando o produto termo a termo obtemos

$$\begin{aligned} e^x e^y &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) \\ &= 1 + (x+y) + \left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!}y + x\frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^3}{3!}y + \frac{x^2}{2!}\frac{y^2}{2!} + x\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!}\right) + \cdots \\ &= 1 + (x+y) + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2!} + \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{3!} + \end{aligned}$$

[5] O leitor com alguma sensatez talvez se pergunte: por que diabos definir esse animal medonho? Bem, seja insensato por um tempo, em breve esse animal fará sentido! Tenha fé! Se você não tem fé, então lhe direi que essa exponencial é importante porque é a mais simples de se trabalhar e as demais exponenciais podem ser escritas a partir da exponencial natural, ou seja, na prática, só há uma exponencial e essa é e^x.

$$
\begin{aligned}
&+\frac{x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4}{4!}+\cdots \\
&=1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}+\frac{(x+y)^4}{4!}+\cdots \\
&=e^{x+y}.
\end{aligned}
$$

■

Observação 1.48. Um argumento mais preciso pode ser feito realizando a conta com todos os fatoriais escritos explicitamente junto com fatorações usando binômio de Newton.

Proposição 1.49. A função $x \mapsto e^x$ é estritamente crescente, isto é, $e^x < e^y$ quando $x < y$.

Demonstração. Por definição

$$
e^{y-x}=1+(y-x)+\frac{(y-x)^2}{2!}+\frac{(y-x)^3}{3!}+\cdots.
$$

Como $y-x>0$, temos $e^{y-x}>1$ por causa da expressão acima. Multiplicando $e^{y-x}>1$ por e^x obtemos $e^y>e^x$. ■

1.7 Séries

Já estabelecemos o conceito de série na Definição 1.18 a fim de, principalmente, estabelecer o número e e a função exponencial. Estudemos o assunto com mais afinco agora. No Exemplo 1.19 vimos a série geométrica, que é a mais importante das séries. Para $a \in (-1,1)$ ela é dada por

$$
1+a+a^2+a^3+\cdots=\frac{1}{1-a}.
$$

Vimos, ao fim da Seção 1.6, a série que define a exponencial natural

$$
e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,
$$

que é um exemplo de série de potências: “um polinômio de grau infinito”. O número de Euler e ocorre para $x=1$:

$$
e=e^1=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots.
$$

Também vimos que todo número real se escreve no sistema decimal (Seção 1.1), que é uma expansão do número em uma série.

Existem vários critérios para certificar que uma série converge, a maioria dos quais são obtidos da convergência da série geométrica. Veremos três critérios básicos: o teste da comparação, o da razão e o de Leibniz. Existem inúmeros outros testes, mas esses três bastam para esse texto. Mas primeiro, estabeleçamos notação. Ao invés de escrever $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$, o que é um tanto longo, denotaremos tal soma por $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, que matemáticos chamam de somatório. O índice k está ali simbolizado apenas para indicar que estamos somando os termos a_k com $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Já uma série $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ com seus infinitos termos é denotada por $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Mais precisamente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Repare que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ou $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ representam a mesma soma, ou seja, o índice i, j ou k pode ser trocado conforme for conveniente. Se $m < n$ e escrevemos $\sum\limits_{l=1}^{n} a_l$ queremos representar

$$a_m + a_{m+1} + \cdots a_n.$$

As vezes é comum indexar os a_i's começando pelo zero. Por exemplo,

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a^k,$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Segue das propriedades de sequências (Proposição 1.23) que

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

quando $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum\limits_{i=k}^{\infty} b_k$ convergem, onde λ é um número real. De fato, basta notar que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \to \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} b_k \to \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Exercício 1.50. Mostre que $a_n \to 0$ quando a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente. Dica: repare que $s_n = a_n + s_{n-1}$, onde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Definição 1.51. Uma série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ é absolutamente convergente se $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge.

Note que se os termos de uma série são não negativos, então séries convergentes são absolutamente convergentes.

A maior parte das séries com que lidamos na prática são absolutamente convergentes, o que é ótimo, porque essas são as mais fáceis de lidar.

Proposição 1.52. Se a série é absolutamente convergente, então ela é convergente.

Demonstração. Temos de provar que a sequência $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ é de Cauchy. Para $m < n$

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k|$$

e para $n < m$

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

De todo modo, dado $\varepsilon > 0$, temos $|s_n - s_m| < \varepsilon$ para m, n suficientemente grandes. Assim, s_k é de Cauchy e, consequentemente, converge. ■

Para averiguar que uma série em particular converge, mostramos que a sequência que a define é de Cauchy. Isso garante que a série converge, mas não nos diz muito sobre seu limite. De forma geral, calcular valores de séries explicitamente é uma tarefa brutalmente difícil.

Lema 1.53 (Teste da comparação)**.** Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ são séries com coeficientes positivos tais que $a_k \leq b_k$ para k suficientemente grande.

Se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Demonstração. Considere $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e mostremos que tal sequencia é de Cauchy. Por hipótese, existe N tal que $a_k \leq b_k$ para $k \geq N$. Para $n > m$, ambos maiores que N, temos

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} a_k \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{m} b_k.$$

Similarmente, se $m > n$, ambos maiores que N, temos

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Como a série com termos b_k converge, podemos fazer a diferença $|s_n - s_m|$ tão pequena quanto necessário fazendo n, m suficientemente grandes, ou seja, a sequência $\sum_{k=1}^{n} a_k$ é de Cauchy e portanto converge. ■

Exemplo 1.54. A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge. De fato, como $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ e

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1,$$

temos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ é absolutamente convergente[6].

Exercício 1.55. Mostre que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge quando $\alpha \geq 2$. Dica: use o exemplo anterior.

Exercício 1.56. Mostre que a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$$

diverge. Dica: use $\frac{1}{2(k+1)} \leq \frac{1}{2k+1}$.

[6]Essa série vale $\frac{\pi^2}{6}$, o que não é óbvio. Descobrir o valor dessa série ficou conhecido como problema de Basel e foi somente resolvido no século XVIII com Leonard Euler.

O teste a seguir, conhecido como teste da razão, é frequentemente usado por ser simples.

Proposição 1.57 (Teste da razão)**.** Se temos a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

onde a_k é não nulo para k suficientemente grande, e o limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

existe e é menor que 1, então a série converge absolutamente.

Demonstração. Como o limite do enunciado vale menos que 1 temos que para r satisfazendo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < r < 1$$

temos $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < r$ para k suficientemente grande: existe N tal que $|a_{k+1}| \leq r|a_k|$ para $k \geq N$. Em particular, $|a_k| \leq r^{k-N}|a_N|$ para $n \geq N$.

Como $0 < r < 1$, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-N}|a_N| = r^{-N+1}|a_N|(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots)$$

converge (porque é essencialmente uma série geométrica). Como $|a_k| \leq r^{k-N}|a_N|$ para $k \geq N$, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

converge pelo teste da comparação (Lema 1.53). Portanto, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente.

■

Exemplo 1.58. As seguintes séries convergem absolutamente pelo teste da razão:

- $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ para $|a| < 1$, pois $\lim_{k\to\infty} \frac{|a^{k+1}|}{|a^k|} = |a| < 1$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$, pois $\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(k+1)^3}{2^{k+1}}\right|}{\left|\frac{k^3}{2^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|(k+1)^3\right|}{|2k^3|} = \frac{1}{2} < 1$.
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}$, pois $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+3)(2k+2)} = 0 < 1$.

Corolário 1.59. A série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

da exponencial natural converge para todo x. De fato, converge absolutamente.

Demonstração. A série obviamente converge para 1 quando $x = 0$ e para $x \neq 0$ aplicamos o teste da razão com $a_k = x^k/k!$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|x|^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0$$

que é menor que 1. Assim, o teste da razão nos garante que a série definindo a exponencial natural converge absolutamente. ■

Como o leitor viu no Exercício 1.50, o coeficiente a_k de uma série convergente vai para zero. Se temos a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

com todos seus coeficientes não nulos, o limite $L = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ existe e $L > 1$, então tomando r no intervalo $(1, L)$ obtemos $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > r$ para k suficientemente: existe N para o qual $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > r$ quando $k \geq N$. Desta forma, $|a_k| > r^{k-N}|a_N|$ para $k \geq N$. Como $|a_N| > 0$ e $r > 1$, $|a_k| \to \infty$, ou seja, não tende para zero. Em particular, pelo Exercício 1.50 essa série não pode convergir.

Portanto, para uma série, o teste da razão nos dá também um critério de divergência.

Observação 1.60. Se temos uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, com todos seus termos a_k's são não nulos, e o limite $L = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ existe, então

	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
$L < 1$	Diverge
$L > 1$	Converge absolutamente
$L = 1$	Indeterminado

No caso $L = 1$ escrevemos indeterminado porque há casos em que a série converge e outros onde diverge. As três séries a seguir tem $L = 1$: série harmônica diverge (veja 1.39), a série harmônica alternada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

converge (mas não absolutamente!) e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

converge absolutamente.

Exercício 1.61. Determine se a série converge ou diverge.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$;

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(3k+1)!} - \frac{k^3}{(5k+1)!}$;

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{37}+24k^{13}+42}{k!}$;

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{10^k}$;

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{5/2}}{1.01^k} - \frac{1}{50^k}$;

6. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$;

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3}$;

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$;

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$.

Observação 1.62. O comando SumConvergence testa se séries numéricas convergem. Por exemplo, para o segundo item, executando o comando

```
SumConvergence[k^2/Factorial[3 k + 1] - k^3/Factorial[5 k + 1], k]
```

obtemos a resposta `True`, ou seja, a série converge.

Proposição 1.63 (Teste de Leibniz)**.** Considere a sequência decrescente[7] a_k de números positivos tal que $a_k \to 0$. A série

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots$$

converge. Essa convergência pode ser não absolutamente convergente, como é ilustrado pela série harmônica alternada (o que veremos após a demonstração).

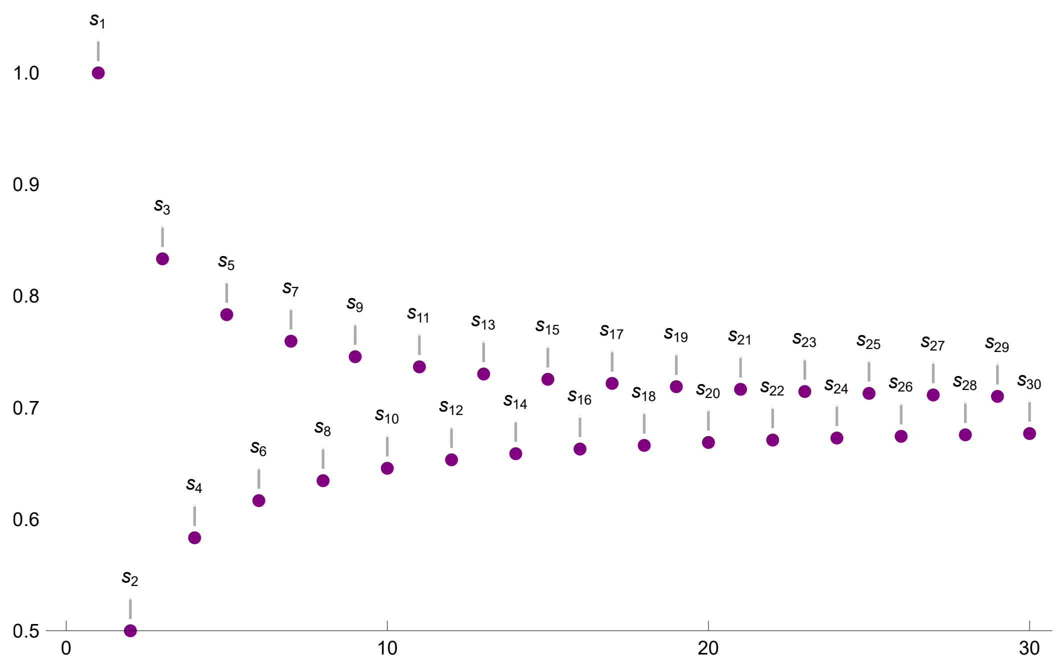

Figura 1.8: $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Demonstração. O truque é usar intervalos encaixados 1.42. A sequência $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ tem a seguinte propriedade (que é visível na Figura 1.8): s_3 está entre s_1 e s_2, s_4 está entre

[7] Isto é, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots$.

s_2 e s_3, s_5 está entre s_3 e s_4, etc. Em geral, s_n está entre s_{n-1} e s_{n-2}. Assim, se I_n é o intervalo fechado cujos extremos são s_n e s_{n+1}, então esses I_n's formam uma sequência de intervalos encaixados

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \cdots$$

e o comprimento de I_n, que é a_{n+1}, tende a zero. Pelo Postulado 1.42, há $s \in \mathbb{R}$ comum a todos esses intervalos. Desta forma, como $s \in I_{n+1}$ obtemos $|s - s_n| \leq a_{n+1} \to 0$ e, assim,

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k.$$

■

Do Teste de Leibniz temos que séries como $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2+2k+3}$ e $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{\log(k+1)}}$ convergem. No entanto, o teste de Leibniz não nos garante convergência absoluta. Por exemplo, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right|$$

é a série harmônica, que diverge.

Séries que convergem mas não absolutamente são chamadas de **séries condicionalmente convergentes** e são extremamente mal comportadas: se você rearranjar infinitos a_k's de uma série condicionalmente convergente, você pode obter outro valor para série. Por rearranjar termos, queremos dizer que estamos considerando uma bijeção $\lambda : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ e definindo $b_k = a_{\lambda(k)}$. Assim, a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ é obtida rearranjando os termos da série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Com a permutação certa dos coeficientes de uma série condicionalmente convergente você consegue fazer ela assumir qualquer valor (Teorema de Riemann sobre séries). Nesses casos, a ordem dos coeficientes é extremamente importante. Por exemplo, a série harmônica alternada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$ vale $\log(2)$, o que provaremos depois usando integrais.

Repare no seguinte: como

$$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \cdots,$$

obtemos

$$\begin{aligned} 2\log(2) &= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \cdots \\ &= 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \cdots. \end{aligned}$$

Todas as passagens até então são permitidas.

Agora note que na série acima temos $2/3$ e $-1/3$ (que veio $-2 \times 1/6$). Similarmente, temos $2/5$ e $-1/5$ (que veio de $-2 \times 1/10$), etc. De forma geral, para cada $2/n$ com n ímpar temos $-1/n$. Por outro lado, 1, $1/2$, $1/4$, $1/6$, etc aparecem uma vez só cada, todos com sinais positivos. Assim, rearranjando infinitos termos temos

$$1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{9}\right) + \cdots,$$

que é onde cometemos um crime matemático! Não se pode permutar infinitos termos em séries não absolutamente convergentes! Esse crime nos levará a uma contradição a seguir.

Essa última série vale por sua vez

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\cdots=\log(2).$$

Assim, se o rearranjo acima fosse um passo legal, obteríamos $2\log(2)=\log(2)$, ou seja, $2=1$! Portanto, tome cuidado com séries condicionalmente convergentes.

Já séries absolutamente convergentes não sofrem de tal problema, pode-se permutar seus termos a vontade e o valor da série não se altera. São as bem comportadas. Esses dois fatos sobre rearranjo de termos em uma série não serão provados aqui, mas podem ser encontrados na seção "Comutatividade" presente no capítulo 4 do livro do Elon Lages Lima [Lag]. Encontra-se também tais fatos no livro do Walter Rudin [Rud], na seção "Rearrangements" no capítulo 3.

Falemos um pouco sobre produto de séries.

Considere duas séries convergentes $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ e $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j$, que indexaremos a partir de 0 em vez de 1, para simplificar a notação.

Repare que

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right)=\left(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(b_0+b_1+b_2+\cdots b_n\right)$$

vale

$$a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0)+\cdots \qquad (\diamond)$$

Denotamos esses $(n+1)$ primeiros coeficientes por $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$. Mais precisamente,

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0.$$

A pergunta natural é se o produto

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

vale o mesmo que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0\right).$$

Isto é, podemos ignorar os termos escondidos nos três pontinos na expressão $(\diamond)$?

A resposta é não se ambas as séries forem condicionalmente convergentes. Se uma delas for absolutamente convergente, então a identidade é sempre verdadeira, o que é conhecido como teorema de Mertens.

Nosso interesse é multiplicar séries absolutamente convergentes. Nesse caso, podemos fazer o produto despreocupadamente.

Proposição 1.64. Se $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ e $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ são absolutamente convergentes, então $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ também é e
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Já usamos a identidade da Proposição 1.64 no produto de séries feito na Proposição 1.47. Lá as séries envolvidas são exponenciais naturais, que convergem absolutamente pelo Corolário 1.59. Aqueles cálculos são válidos porque ao fazê-los como se estivéssemos multiplicando polinômios, estávamos de fato calculando os c_k's. De modo mais rigoroso, o cálculo que fazemos lá é o seguinte:

$$\begin{aligned}
e^x e^y &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\frac{y^0}{0!} + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\frac{y^1}{1!} + \frac{x^{k-2}}{(k-2)!}\frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{x^0}{0!}\frac{y^k}{k!}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{k!}{k!0!}x^k y^0 + \frac{k!}{(k-1)!1!}x^{k-1}y^1 + \frac{k!}{(k-2)!2!}x^{k-2}y^2 + \cdots + \frac{k!}{0!k!}x^0 y^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}\\
&= e^{x+y},
\end{aligned}$$

onde utilizamos o Binômio de Newton ao escrevermos
$$\frac{k!}{k!0!}x^k y^0 + \frac{k!}{(k-1)!1!}x^{k-1}y^1 + \frac{k!}{(k-2)!2!}x^{k-2}y^2 + \cdots + \frac{k!}{1!(k-1)!}x^1 y^{k-1} + \frac{k!}{0!k!}x^0 y^k = (x+y)^k.$$

Prova da Proposição 1.64. Para $n \geq 2$, defina t_n como sendo o maior inteiro positivo menor que ou igual a $n/2$, ou seja, temos $t_n \leq n/2$ e e $t_n + 1 > n/2$. Defina $t_1 = 1$. Em particular, $t_n \to \infty$.

Para $n < m$ temos que
$$|c_n| + |c_{n+1}| + \cdots + |c_m|$$
é menor que ou igual a
$$(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_m|)(|b_0|+|b_1|+\cdots+|b_m|)-(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{t_n}|)(|b_0|+|b_1|+\cdots+|b_{t_n}|).$$
De fato, repare que
$$|c_k| \leq |a_0||b_k| + |a_1||b_{k-1}| + \cdots + |a_{k-1}||b_1| + |a_k||b_0|$$
e todos os termos em
$$\sum_{k=n+1}^{m}(|a_0||b_k| + |a_1||b_{k-1}| + \cdots + |a_{k-1}||b_1| + |a_k||b_0|)$$
aparecem em
$$(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m|)(|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_m|),$$

mas não aparecem em

$$(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{t_n}|)(|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_{t_n}|),$$

pois todo termo dessa expressão é da forma $|a_i||b_j|$ com $i + j$ menor que n, já que $2t_n < n$.

Como

$$(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_m|)(|b_0|+|b_1|+\cdots+|b_m|)-(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{t_n}|)(|b_0|+|b_1|+\cdots+|b_{t_n}|)$$

pode ser tomado tão pequeno quanto quisermos, desde que m, n sejam grandes, temos que a sequência

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k|$$

é de Cauchy e, portanto, converge. Assim, a série determinada por c_k é absolutamente convergente.

Note que

$$\left| \sum_{k=0}^{n} c_k - \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) \right| \leq \sum_{k=0}^{2n} |c_k| - \sum_{k=0}^{n} |c_k| \to 0,$$

nos dando que

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

■

1.8 Séries de potência

Uma função na variável x da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

onde $a_k \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, é chamada de **série de potência**. O número c é o centro da série de potências e dizemos que essa é centrada em c. Séries de potência são importantes por nos permitir representar explicitamente um monte de funções, mesmo quando essas não se escrevem em termos de funções elementares como exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas, polinômios, etc.

Já vimos que a função

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

está bem definida para todo x, pois a série converge para todo x.

A série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

converge para $-1 < x < 1$ e diverge para outros valores de x, pois nesse caso o termo x^k não tende a zero. Em $-1 < x < 1$, temos

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Já a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k} = \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \cdots$$

converge para $|x-1| < 1$ e diverge para $|x-1| > 1$. De fato, pelo teste da razão,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{k+2}(x-1)^{k+1}}{k+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k|x-1|}{k+1} = |x-1|$$

que nos garante que a série converge absolutamente para $|x-1| < 1$ e diverge para $|x-1| > 1$. A série acima de fato descreve $\log(x)$, o que provaremos mais tarde,

$$\log(x) = \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \cdots$$

para $0 < x \leq 2$. Repare que o teste da razão não nos diz nada sobre os extremos $x = 0$ e $x = 2$. Nesse caso em particular, a série está definida para $x = 2$, nos dando

$$\log(2) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Já para $x = -1$, a série diverge para $-\infty$, pois é dada por menos a série harmônica. Assim, a expressão acima para o log vale para $|x-1| < 1$.

Sempre que temos uma série de potência

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

centrada em c, podemos redefini-la a para eliminar o termo c,

$$f(x+c) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

ou seja, de agora em diante, assumiremos que $c = 0$. No caso do logaritmo temos

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

definida para $-1 < x \leq 1$.

Outro exemplos de séries de potências que surgem na vida com frequência e que serão justificadas no decorrer do texto:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Essas três séries de potências para funções trigonométricas foram descobertas pelo matemático indiano Mdhava (1350 - 1425) e redescobertas na Europa alguns séculos depois.

Essa última é é curiosa porque nos fornece uma fórmula bonitinha para π. De fato, $\pi/4 = \arctan(1)$ e daí obtemos

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

descoberta por Mdhava e popularmente conhecida como série de Leibniz. Essa série é uma porcaria para aproximar π: usando seus 100 primeiros obtemos $\pi \approx 3.131592\ldots$. Vale dizer também que Mdhava descobriu séries bem melhores para calcular π e de fato era quem detinha as melhores aproximações da época.

Lema 1.65. Se a série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

converge para $x = \alpha$, então converge absolutamente para $|x| < |\alpha|$.

Demonstração. Aqui usamos truques de progressão geométrica. Como a série converge para α, temos, pelo Exercício 1.50, que $a_k \alpha^k$ tende a zero. Assim, para N suficientemente grande temos que $|a_k \alpha^k| \leq 1$ para $k \geq N$.

Agora aplicamos o teste da comparação (Lema 1.53). Como a série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{|\alpha|} \right)^k$$

converge e

$$|a_k x^k| \leq \left(\frac{|x|}{|\alpha|} \right)^k$$

para $k \geq N$, temos que a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

converge absolutamente. ■

Sempre vamos supor que nossa série de potência $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge para algum $x = \alpha$ não nulo [8]. Pois uma série de potências que só converge em 0 é imprestável.

[8]Existem séries de potências como $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ que só convergem para $x = 0$. Verifique que isso verdade usando o teste da razão.

Lema 1.66. Se a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ diverge para $x = \beta$, então diverge também para $|x| > |\beta|$.

Demonstração. Se existe $x = \alpha$ com $|\alpha| > |\beta|$ para o qual a série converge, então, pelo Lemma 1.65, a série converge absolutamente para todo ponto no intervalo $(-|\alpha|, |\alpha|)$, incluindo β, o que não pode ocorrer. ■

Proposição 1.67. Considere a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e suponha que existe β para o qual a série diverge. Existe $R > 0$ tal que a série converge absolutamente para todo x satisfazendo $|x| < R$ e diverge quando $|x| > R$.

Demonstração. A prova é dividir e conquistar.

Considere os conjuntos

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \text{ a série } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha^k \text{ converge}\},$$

$$B = \{\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \text{ a série } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \beta^k \text{ diverge}\}.$$

Tome $\alpha_0 \in A$ e $\beta_0 \in B$. Note que $\alpha_0 < \beta_0$ e denote por $I_0 = [\alpha_0, \beta_0]$.

A série converge ou diverge no ponto médio $m = (\alpha_0 + \beta_0)/2$. Se convergir, tomamos I_1 como sendo o intervalo fechado formado pela metade direita $[m, \beta_0]$, caso contrário, tomamos I_1 como sendo a metade esquerda, isto é, $[\alpha_0, m]$. De toda forma, temos I_1 com metade do comprimento de I_0 e seus extremos esquerdo e direito pertencem a A e B, respectivamente. O intervalo fechado I_2 é construído da mesma forma: corta-se I_1 ao meio, se o ponto médio pertencer a A, toma-se I_2 como sendo a metade direita, caso contrário, toma-se I_2 para ser a metade esquerda. De toda forma, o comprimento de I_2 é metade do de I_1 e tem seus extremos esquerdo e direito em A e B, respectivamente.

Recursivamente, construímos a sequência de intervalos fechados, limitados e encaixados

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$$

e pelo Postulado 1.42 há um R real comum a todos esses intervalos. Como o comprimento dos intervalos tende a zero, somente R pertence a todos os I_n's. Escrevendo $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ e reparando que I_n tem comprimento $\frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n}$, temos que $\alpha_n \to R$ pela esquerda e $\beta_n \to R$ pela direita.

De toda forma, temos que se $|x| < R$, então para n suficientemente grande $\alpha_n > |x|$. Como a série converge para α_n, ela converge absolutamente para x (Lema 1.65). Por outro lado, se $|x| > R$, então para n suficientemente grande temos $\beta_n < |x|$ e como a série diverge para β_n, diverge para x também (Lema 1.66). Essas duas afirmações finalizam a prova. ■

Definição 1.68. Se a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge em $\mathbb{R}$ dizemos que seu raio de convergência é infinito. Caso contrário, o raio de convergência é a constante R dada pela Proposição 1.67.

O raio de convergência é como um divisor de águas: de um lado ($|x| < R$) a convergência é garantida e do outro a divergência é garantida ($|x| > R$).

Reanalisemos a série que descreve o $\log(1 + x)$:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

O teste da razão

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{k+2}x^{k+1}}{k+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k|x|}{k+1} = |x|$$

nos diz que a série converge absolutamente para $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$. Assim, o raio de convergência é 1. Note que o raio de convergência não nos diz nada sobre convergência para $|x| = 1$: de fato, para $x = 1$ a série converge condicionalmente e para $x = -1$ ela diverge.

A série geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

também tem raio 1 pelo teste da razão, mas diverge para $x = 1$ e $x = -1$ (pois em ambos casos x^k não tende a zero).

Observação 1.69. Se temos uma série de potência

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k, \qquad (☠_1)$$

então podemos considerar

$$f(x + c) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad (☠_2)$$

e determinar seu raio R de convergência. Como ☠$_2$ converge absolutamente para $|x| < R$ e diverge para $|x| > R$, temos que ☠$_1$ converge absolutamente para $|x - c| < R$ e diverge para $|x - c| > R$.

Desta forma, dizemos que R é o raio de convergência para ☠$_1$..

Exercício 1.70. Determine o raio de convergência das séries de potência.

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k2^k x^k$;
2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) x^{2k}$;
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+3}}{k^2(k-1)}$.
4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$;
5. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+2}}{k+1}$;
6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^2}$.

Observação 1.71. O comando SumConvergence do Mathematica nos fornece a região de convergência. Para o primeiro item do exercício acima executamos `SumConvergence[k 2^k x^k, k]` e obtemos `Abs[x] < 1/2`, que quer dizer $|x| < 1/2$.

Vamos por fim calcular a série de Potência de $\sqrt{1 + x}$. Suponhamos que há uma função

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + \cdots$$

tal que $f(x)^2 = 1 + x$ e $f(0) = 1$. Essa segunda condição nos garante que $a_0 = 1$. Devemos ter

$$\begin{aligned}
1 + x &= (1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots)(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots) \\
&= 1 + 2a_1x + (2a_2 + a_1^2)x^2 + (2a_3 + 2a_1a_2)x^3 + (2a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2)x^4 + \\
&\qquad + (2a_5 + 2a_1a_4 + 2a_2a3)x^5 + (2a_6 + 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2)x^6 + \cdots
\end{aligned}$$

Dessa identidade, igualando os coeficientes da primeira expressão com os da última na identidade acima, inferimos que

- $2a_1 = 1$,
- $2a_2 + a_1^2 = 0$,
- $2a_3 + 2a_1a_2 = 0$,
- $2a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 = 0$,
- $2a_5 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 = 0$,
- $2a_6 + 2a_1a_5 + 2a_2a_3 + a_3^2 = 0$

e assim por diante.

Resolvendo as equações acima (se encontra a_1 com a primeira equação, a_2 com a segunda, a_3 com a terceira, etc) obtemos

- $a_1 = 1/2$,
- $a_2 = \frac{a_1(a_1-1)}{2!}$,
- $a_3 = \frac{a_1(a_1-1)(a_1-2)}{3!}$,
- $a_4 = \frac{a_1(a_1-1)(a_1-2)(a_1-3)}{4!}$,
- $a_5 = \frac{a_1(a_1-1)(a_1-2)(a_1-3)(a_1-4)}{5!}$,
- $a_6 = \frac{a_1(a_1-1)(a_1-2)(a_1-3)(a_1-4)(a_1-5)}{6!}$

e assim por diante. De fato, tais formulas não são tão surpreendentes, se n é inteiro positivo, então pelo binômio de Newton temos

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

onde o coeficiente binomial é dado por

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-(k-1))}{k!} & \text{se } k > 0, \\ 1 & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Como $\binom{n}{k} = 0$ para $k > n$, porque temos um zero no produto definindo o coeficiente binomial, podemos reescrever

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k.$$

Ao tentarmos obter $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ descobrimos exatamente essa série com $n = 1/2$. Nesse caso, os coeficientes $\binom{1/2}{k}$ não se anulam, onde estamos estendendo a definição do coeficiente binomial para n real qualquer.

Assim, nosso candidato a raiz quadrada de $1+x$ é

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k$$

e temos apenas de determinar qual é seu raio de convergência. Pelo teste da razão

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{1/2}{k+1} x^{k+1}}{\binom{1/2}{k} x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x||1/2-k|}{k+1} = |x|$$

e, assim, o raio de convergência é 1. Logo,

$$\sqrt{1+x} = \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1} x + \binom{1/2}{2} x^2 + \binom{1/2}{3} x^3 + \binom{1/2}{4} x^4 + \cdots \qquad \text{para } -1 < x < 1,$$

ou, mais explicitamente,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \frac{21x^6}{1024} + \frac{33x^7}{2048} - \frac{429x^8}{32768} + \frac{715x^9}{65536} - \frac{2431x^{10}}{262144} + \cdots$$

para $-1 < x < 1$.

Observação 1.72. O comando Series no Mathematica nos fornece a série de potências de uma função por uma técnica chamada expansão de Taylor. Para $(1+x)^{1/3}$ escrevemos `Series[(1 + x)^(1/3), {x, 0, 10}]` e o resultado retornado é

$$1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \frac{22x^5}{729} - \frac{154x^6}{6561} + \frac{374x^7}{19683} - \frac{935x^8}{59049} + \frac{21505x^9}{1594323} - \frac{55913x^{10}}{4782969} + O(x^{11})$$

Note que no comando temos `{x,0,10}`. O x indica a variável, o 0 é o centro escolhido para a série e o 10 é nossa forma de dizer à maquina que queremos até o termo x^{10} com coeficientes explicitamente escritos. O termo $O(x^{11})$ é o que se chama "notação de big-O" e indica que os termos não exibidos têm fator x^{11} ou de grau maior.

Exercício 1.73. Calcule $\sqrt{3}$ fazendo $x = -1/4$.

Capítulo 2

Continuidade

> Calculus required continuity, and continuity was supposed to require the infinitely little; but nobody could discover what the infinitely little might be.[1]
>
> **Bertrand Russell**

Nosso objetivo nesse capítulo é estudar funções e usaremos nossos conhecimentos de sequências a esse fim.

Nem sempre entender numericamente o comportamento de uma função é viável, porque ela simplesmente pode ser complicada demais, muitas vezes sequer é explicita. Nesses casos, é de interesse entender o seu comportamento qualitativo, ou seja, um desenho grosseiro de seu gráfico. As técnicas aqui desenvolvidas permitem tal feito.

A maioria das modelagens reais (para não dizer todas) são descritas em termos de funções. Listarei algumas só por ilustração. Não espero que as compreenda. Apenas contemple a diversidade.

- A energia potencial em um sistema massa-mola é dada por
$$U(x) = \frac{kx^2}{2},$$
onde x é a deformação da mola e k é uma constante.

- se uma central telefônica recebe em média λ telefonemas por minuto, então a probabilidade de obtermos dois telefonemas consecutivos com tempo entre eles menor que t minutos é
$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

- em relatividade restrita, a energia cinética de uma partícula de massa m com velocidade v é dada por
$$K(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

[1] Cálculo exigia continuidade, e supunha-se que a continuidade exigisse o infinitamente pequeno; mas ninguém conseguia descobrir o que era o infinitamente pequeno.

onde c é a velocidade da luz.

- o Urânio 235 decai com o tempo exponencialmente, isto é, se m_0 é sua massa inicial então $m(t)$, a massa depois t anos, é dada por $m(t) = m_0 e^{-\mu t}$. O tempo de meia vida do U-235 é $t_{1/2} = 7.04 \times 10^8$ anos (700 milhões de anos), o que quer dizer que $m(t_{1/2}) = 0.5 \times m_0$ e daí temos

$$e^{-\mu \times 7.04 \times 10^8} = 0.5 \Longrightarrow \mu \approx 9.8 \times 10^{-10}.$$

Observação 2.1. Para resolver essa equação no Mathematica podemos usar

```
sol = Solve[E^{-7.04*10^8 x} == 0.5, x];
x /. sol[[1]]
```

onde `sol` é uma variável. O comando `x /. sol[[1]]` nos dá o valor de x que resolve a equação.

Dos exemplos descritos acima é obvio que problemas de mínimo, máximo e resolver equações aparecem naturalmente: "quando a energia do sistema é mínima?" "quão improvável é ficarmos 2 horas sem receber ligação telefônica em nossa central?"

De modo mais geral, considere uma função $f : X \to \mathbb{R}$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Algumas perguntas de interesse são:

- a função atinge máximo ou mínimo em algum local?
- a equação $f(x) = 0$ tem solução?
- como encontrar numericamente a solução de $f(x) = 0$ caso exista?
- qual a geometria do gráfico de f em $\mathbb{R}^2$?
  - ⋆ é esse feito de um ou mais pedaços?
  - ⋆ possuí retas tangentes?
  - ⋆ o gráfico delimita uma região convexa?
  - ⋆ qual é a área de certa região delimitada pelo gráfico?

e assim por diante.

2.1 Limite de funções

Definição 2.2. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é **bom** se é união de intervalos não triviais[2].

Exemplo 2.3. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{>0}$, $[0, 1]$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $[0, 1] \cup (2, 3]$ são todos bons.

[2]Estamos supondo que o extremo direito e o esquerdo de cada intervalo são diferentes, pois senão obtemos conjuntos como $[a, a] = a$ e $[a, a) = \varnothing$.

Na pratica, todo conjunto onde temos o mais remoto interesse em trabalhar é bom, então essa definição é uma formalidade.

Definição 2.4. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função definida em um conjunto bom. Considere $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, que não necessariamente se encontra em X, mas que pode ser atingido por uma sequência x_n de $X \setminus \{a\}$, isto é, existe $x_n \in X \setminus \{a\}$ satisfazendo $x_n \to a$.

Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é L se para toda sequência x_n de $X \setminus \{a\}$ tendendo para a temos $f(x_n) \to L$.

Denotamos tal limite por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Na definição acima, nada impede que a ou L sejam valores infinitos.

Observação 2.5. Na definição de limite, fique atento no seguinte: consideramos apenas sequências de X que têm termos diferentes de a. Essa condição é necessária porque f pode não estar definida em a.

Exemplo 2.6. A função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ não está definida para $x = 1$ ou -1 (veja Figura 2.1).

Computemos os limites nos pontos reais. Note primeiramente que

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Assim, se x_n é uma sequência de $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ que converge para 1, temos que $f(x_n) \to 1/2$, ou seja,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, se x_n é uma sequência de pontos de $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ convergindo para -1, o limite $f(x_n)$ vai depender da sequência. Para $x_n = -1 + 1/n$ temos $f(x_n) \to \infty$. Para $x_n = -1 - 1/n$ temos $f(x_n) \to -\infty$. De toda forma, o limite

$$\lim_{x \to -1} f(x)$$

não existe. O limite existe sem problemas quando $a \neq 1$ e $a \neq -1$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

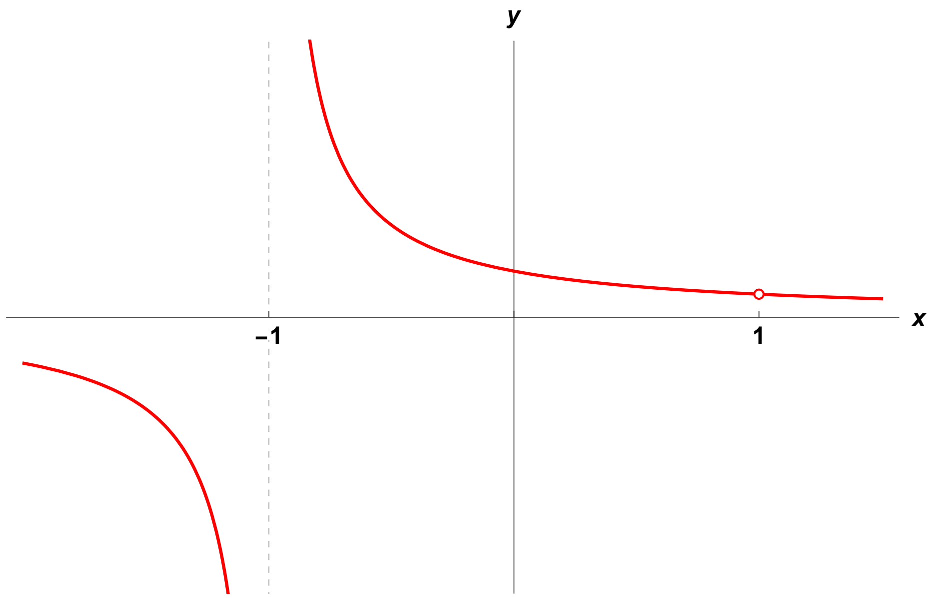

Figura 2.1: *Gráfico da função* $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$.

Observação 2.7. O comando `Plot[ (x-1)/(x^2-1), {x, -2, 1.5}]` nos fornece um gráfico tal como o acima.

Exemplo 2.8. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para o qual $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe em nenhum ponto a é

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases} \tag{2.9}$$

Se a é racional, então $x_n = a + 1/n$ satisfaz $f(x_n) \to 0$ e $x_n = a + \sqrt{2}/n$ satisfaz $f(x_n) \to 1$. Por outro lado, se a é irracional, $x_n = a + 1/n$ satisfaz $f(x_n) \to 1$ e tomando x_n como sendo a aproximação decimal de a obtemos $f(x_n) \to 0$. Em todo caso,

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

nunca existe!

Exercício 2.10. Calcule os limites

1. $\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)}{x-1}$
2. $\lim_{x\to 2} \frac{(x^3-8)}{x^2-4}$
3. $\lim_{x\to 0} x\sin(x)$
4. $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$
5. $\lim_{x\to \infty} \frac{(x^4-24x^3+1)}{x^4+12}$
6. $\lim_{x\to -\infty} \frac{(x^{35}-2x)}{23x^{30}}$
7. $\lim_{x\to \infty} \frac{(x+\sin(x))}{x+25}$
8. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\cos\left(x^2+1/x^2\right)}{x^3}$

Lema 2.11 (Limite fundamental da exponencial)**.** Para $x \in (-1, 1)$ temos

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

Em particular,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Demonstração. Suponhamos $x \in [0, 1)$. Como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

temos $e^x \geq 1 + x$. Por outro lado, como

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \leq 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

temos as desigualdades para $x \in [0, 1)$. Para $x \in (-1, 0)$ temos

$$1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x},$$

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

Logo, as desigualdades valem para $-1 < x < 1$. Note que para $x \in (-1, 1)$ vale a desigualdade

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1/(1-x) - 1}{x} = \frac{1}{1-x},$$

de onde segue que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

■

Proposição 2.12. A exponencial natural pode ser escrita como

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Demonstração. Pelo Lema 2.11, temos que para n suficientemente grande

$$1 + \frac{x}{n} \leq e^{x/n},$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

Por outro lado,

$$1 + \frac{x}{n} = \frac{n+x}{n} = \frac{1}{\frac{n}{x+n}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{x+n}}$$

que é maior que ou igual a $e^{x/(x+n)}$ pelo Lema 2.11. Portanto,

$$e^{x/(x+n)} \leq 1 + \frac{x}{n},$$

$$e^{nx/(x+n)} \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Assim, as desigualdades

$$e^{nx/(x+n)} \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

valem para n suficientemente grande. Mostraremos que o termo da esquerda converge para e^x conforme n tende para infinito, provando o resultado.

De fato, como

$$\frac{nx}{n+x} = x - \frac{x^2}{n+x} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} e^h = 1,$$

concluímos que

$$e^{nx/(x+n)} = e^x e^{-x^2/(n+1)} \to e^x$$

quando n tende a infinito. Portanto,

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

■

Exercício 2.13. Mostre que a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ converge.

Exemplo 2.14 (Decaimento radioativo)**.** A seguir, modelaremos o decaimento de massa de um material radioativo. Obteremos que a massa é descrita por uma exponencial, o que de fato concorda com dados experimentais.

Seja $m(t)$ a massa de certo material radioativo em um instante t. Dividindo $[0,t]$ em n intervalos iguais de comprimento $\Delta = t/n$ temos as seguintes massas

$$m(0),\ m(\Delta),\ m(2\Delta),\ \ldots\ m\left((n-1)\Delta\right),\ m(n\Delta) = m(t).$$

No que segue assumiremos que n é enorme, infinitamente grande.

Como a taxa (velocidade) com que a massa do material diminui depende somente da quantidade de material disponível no dado instante, é razoável supor em nossa modelagem que existe uma constante $\mu > 0$ para a qual

$$\frac{m\left((k+1)\Delta\right) - m(k\Delta)}{\Delta} = -\mu m(k\Delta).$$

Isolando $m\left((k+1)\Delta\right)$, obtemos

$$m\left((k+1)\Delta\right) = m\left(k\Delta\right)\left(1-\mu\Delta\right) = m\left(k\Delta\right)\left(1+\frac{-\mu t}{n}\right),$$

que nos permite deduzir

$$m\left((k+1)\Delta\right) = m(0)\left(1+\frac{-\mu t}{n}\right)^{k+1}.$$

Em particular, pela fórmula da proposição 2.12,

$$m\left(t\right) = m\left(n\Delta\right) = m(0)\left(1+\frac{-\mu t}{n}\right)^n \approx m(0)e^{-\mu t}.$$

A mesma modelagem acima funciona para descrever o crescimento no número de infectados em uma pandemia nos estágios iniciais (quando a taxa de crescimento do número de infectados depende apenas da quantia de infectados e de que cada um desses pode infectar outros). O modelo exponencial de fato descreve muito precisamente esse primeiro estágio de uma pandemia. No entanto, conforme medidas a fim de desacelerar a propagação da doença são implantadas, nossa hipótese de modelagem deixa de valer e o modelo exponencial falha (dando espaço a outros modelos, como o logístico).

Proposição 2.15. A exponencial e^x cresce mais rápido que qualquer polinômio.

Demonstração. Considere $p(x)$ um polinômio de grau n. Suponha que $x > 0$.

$$e^{\frac{x}{n+1}} = 1 + \frac{x}{n+1} + \frac{\left(\frac{x}{n+1}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x}{n+1}\right)^3}{3!} + \cdots \geq 1 + \frac{x}{n+1},$$

ou seja,

$$e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.$$

Como $p(x)$ tem grau n,

$$\frac{|p(x)|}{e^x} \leq (n+1)^{n+1} \frac{|p(x)|}{x^{n+1}}$$

tende a zero quando x tende infinito. ■

Exercício 2.16. Calcule os limites

1. $\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x-1}$
2. $\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2} - e^{2-x}}{x-2}$
3. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x^{100}}$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x}$

Lema 2.17 (Limite fundamental trigonométrico)**.** O seguinte limite é válido:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$$

Demonstração. Nas figuras abaixo, há três regiões em destaque.

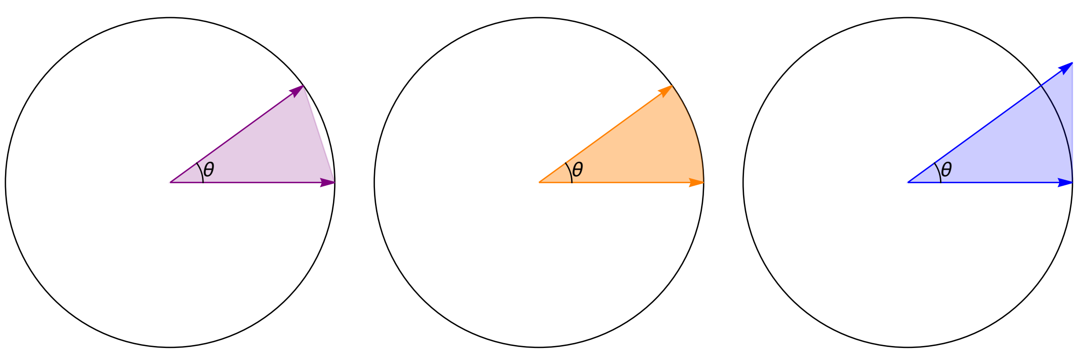

Figura 2.2: *Círculo de raio 1.*

A área da primeira região (em roxo) é $\frac{1}{2}|\sin(\theta)|$ porque tem base 1 e altura $|\sin(\theta)|$. A área da segunda região (em laranja) é $\frac{1}{2}|\theta|$. A área da terceira região (em azul) é $\frac{1}{2}|\tan(\theta)|$ porque tem base 1 e altura $|\tan(\theta)|$.

Comparando as áreas temos

$$\frac{1}{2}|\sin(\theta)| \leq \frac{1}{2}|\theta| \leq \frac{1}{2}|\tan(\theta)|,$$

$$|\sin(\theta)| \leq |\theta| \leq |\tan(\theta)|.$$

Para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ e $\theta \neq 0$, simplificando a desigualdade acima, obtemos

$$1 \leq \frac{|\theta|}{|\sin(\theta)|} \leq \frac{1}{|\cos(\theta)|},$$

$$1 \leq \frac{\theta}{\sin(\theta)} \leq \frac{1}{\cos(\theta)},$$

$$\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1$$

e como $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$, temos o resultado.

De fato, tome uma sequência de termos não nulos θ_n convergindo para 0. Das desigualdades acima

$$|\sin(\theta_n)| \leq |\theta_n| \to 0$$

de onde obtemos

$$\cos(\theta_n) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_n)} \to 1,$$

(que é valido pela Proposição 2.27) e, consequentemente,

$$\frac{\sin(\theta_n)}{\theta_n} \to 1,$$

finalizando a prova. ■

Observação 2.18. A função $\sin(x)/x$ ocorre com tanta frequência em aplicações práticas (em análise de sinais elétricos, por exemplo) que tem sua própria notação $\mathrm{sinc}(x)$. A priori, essa função faz sentido apenas para $x \neq 0$, mas definindo $\mathrm{sinc}(0) = 1$ obtemos uma função definida em toda reta real. Seu gráfico é dado por

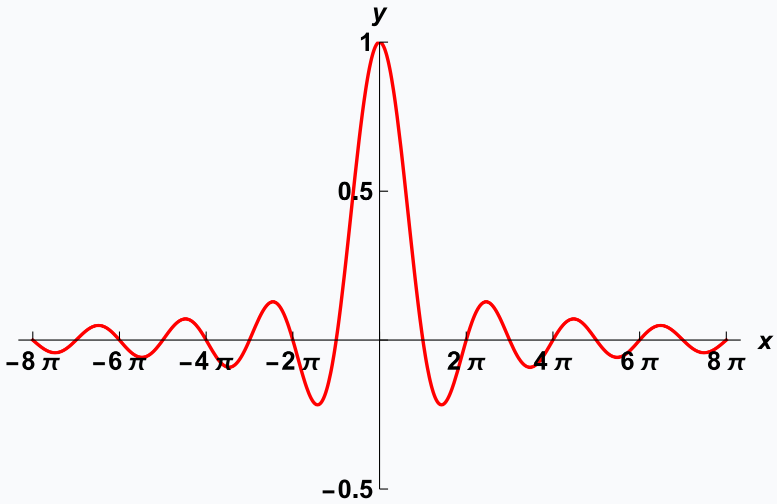

Figura 2.3: $sinc(x) = \sin(x)/x$.

Exercício 2.19. Compute os limites

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(1/x)\sin(x^2)}{x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{e^x-1}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin(2x)}$

Calculemos a área delimitada por um círculo de raio r. Considere um n-ágono[3] regular inscrito em tal círculo (veja a figura 2.4).

Como cada n-ágono regular é formado por n triângulos isósceles de lados r. O ângulo dentre os lados de comprimento r de cada um desses triângulos isósceles é $2\pi/n$. Desta forma, a área de cada um desses triângulos é

$$\frac{r^2\sin(2\pi/n)}{2}$$

e a área do n-ágono é

$$A_n = n\frac{r^2\sin(2\pi/n)}{2} = \pi r^2\frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n}$$

que converge para πr^2 pelo limite fundamental trigonométrico (lema 2.17). Portanto, a área do disco de raio r é πr^2.

Observação 2.20. Para $r = 1$, a sequência A_n aproxima π. Para $n = 96$, obtemos $|A_n - \pi| \approx 2.2 \times 10^{-3}$, ou seja, a aproximação é muito lenta. Para obtermos algumas casas de precisão necessitamos de polígonos grotescamente complicados.

[3] Um n-ágono é um polígono de n lados. Regular quer dizer que os lados são iguais entre si e o mesmo ocorre com os ângulos internos.

Já o perímetro do n-ágono regular é

$$P_n = n\sqrt{2r^2 - 2r^2\cos(2\pi/n)}$$

pela lei dos cossenos. Como $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$, temos

$$\begin{aligned} P_n &= \sqrt{2}nr\sqrt{1-\cos(2\pi/n)} \\ &= \sqrt{2}nr\sqrt{1-(1-2\sin^2(\pi/n))} \\ &= 2nr\sin(\pi/n) \\ &= 2\pi r\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \to 2\pi r \end{aligned}$$

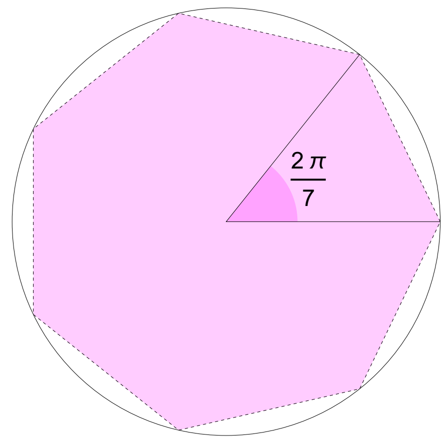

Figura 2.4: *7-ágono regular inscrito.*

que é o perímetro do círculo.

É bem interessante que técnicas como as descritas acima foram usadas para calcular π numericamente da antiguidade nos tempos de Arquimedes em 250 a.C. até a primeira metade do século 17 por todos os cantos do mundo. Arquimedes, por exemplo, utilizando um 96-ágonos regulares mostrou que $223/71 < \pi < 22/7$, aproximando π em duas casas decimais.

Com o avanço do cálculo e a descoberta de diversas séries que computam π essa abordagem geométrica foi abandonada por ser muito ineficiente. Na infância do cálculo, ainda no século 17, Issac Newton estabeleceu uma série que aproxima π muito rápido (matando de vez a ideia de usar polígonos para calcular π). A série milagrosa, obtida de um truque simples com integrais, tem os seguintes primeiros termos

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3\times 2^3} - \frac{1}{5\times 2^5} - \frac{1}{28\times 2^7} - \frac{1}{72\times 2^9} - \frac{5}{704\times 2^{11}} - \frac{7}{1664\times 2^{13}} - \cdots\right).$$

Utilizando somente os termos escritos acima (7 termos da série), obtemos uma aproximação que concorda com π nas cinco primeiras casas decimais.

2.2 Funções contínuas

Definição 2.21. Considere um subconjunto X bom de $\mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ se leva sequências que convergem para a em sequências que convergem para $f(a)$. Simbolicamente, f é contínua em a se

$$(x_n \to a) \implies (f(x_n) \to f(a)).$$

Observação 2.22. Lembre-se que na definição de limite, ao contrário da feita para continuidade, consideramos apenas sequências $x_n \in X \setminus \{a\}$ convergindo para a, isto é, estamos supondo $x_n \neq a$ para todo n.
No entanto, para verificar continuidade, não precisamos de todas sequências convergentes. Basta tomar sequências x_n em $X \setminus \{a\}$ tendendo para a.

Em termos simbólicos, isso quer dizer que f é contínua em a se o limite

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

existe e vale $f(a)$, o que provamos a seguir.

Proposição 2.23. Se $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e vale $f(a)$, então f é contínua em a.

Demonstração. Considere $x_n \to a$. Se $x_n = a$ para n suficientemente grande, então $f(x_n) = f(a)$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Por outro lado, se existem infinitos $n's$ para os quais $x_n \neq a$, então podemos listá-los $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ e temos a subsequência x_{n_k} convergindo para a.

Fixe $\varepsilon > 0$. Como $x_{n_k} \neq a$, temos $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a)$ (que existe e assume esse valor por hipótese). Assim, $|f(x_{n_k}) - f(a)| < \varepsilon$ para n_k suficientemente grande. Por outro lado, para os m's em que $x_m = a$, a desigualdade $|f(x_m) - f(a)| < \varepsilon$ é trivialmente verdadeira. Logo, para n suficientemente grande, $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Portanto, $f(x_n) \to f(a)$. ■

Proposição 2.24. Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas em a e $\alpha \in \mathbb{R}$, então αf, $f + g$ e fg são contínuas em a. Além disso, se g não se anula em X, então f/g é contínua em a.

Demonstração. Se $x_n \to a$, então $f(x_n) \to f(a)$ e $g(x_n) \to g(a)$. Os resultados seguem das proposições 1.23 e 1.25. Temos

$$\alpha f(x_n) \to \alpha f(a), \quad f(x_n) + g(x_n) \to f(a) + g(a), \quad f(x_n)g(x_n) \to f(a)g(a)$$

e, assumindo que g não se anula em X,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(a)}{g(a)}.$$

■

Definição 2.25. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua se for contínua em cada ponto de X.

Exemplo 2.26. Funções polinomiais em $\mathbb{R}$ são obviamente contínuas. O mesmo ocorre para a função $f(x) = |x|$. Se temos uma função definida em um intervalo, ela é contínua se geometricamente pode ser desenhada sem tirar o lápis do papel. A função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

definida no intervalo $\mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos exceto 0 (Figura 2.5). De fato, tomando a sequência $x_n = -1/n$, temos que $x_n \to 0$ e $f(x_n) \to 0 \neq f(0)$. Graficamente, essa descontinuidade é vista como um salto.

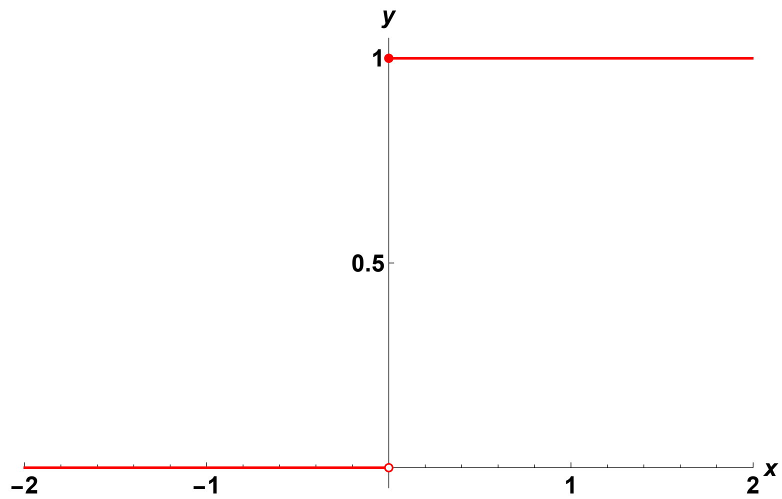

Figura 2.5: *A função é descontínua em* 0*. Contínua em seus demais pontos.*

Já a função $f(x) = 20x^3 + 50x^2 - 40x - 30$ definida no intervalo $\mathbb{R}$ é contínua em todos seus pontos. Não apresenta saltos em seu gráfico.

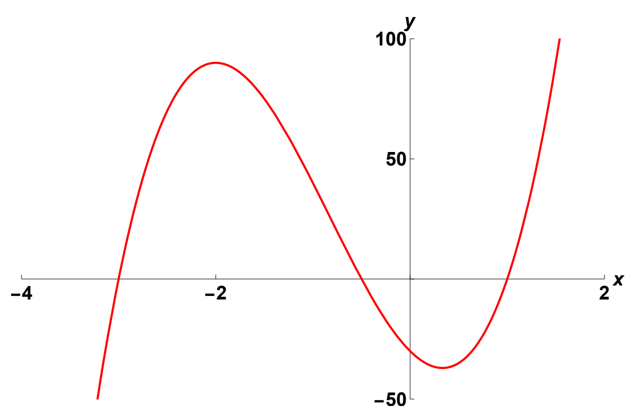

Figura 2.6: *A função* $x \mapsto 20x^3 + 50x^2 - 40x - 30$ *é contínua e não tem saltos em seu gráfico.*

Por outro lado, a função $f(x) = 1/x$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é contínua em todos os pontos. No entanto, como seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ não é um intervalo, o gráfico não é feito de um único pedaço (não dá para desenhar o gráfico dessa função sem tirar o lápis do papel). Note que não faz sentido falar de continuidade de f em 0, pois a função nem sequer está definida em tal ponto.

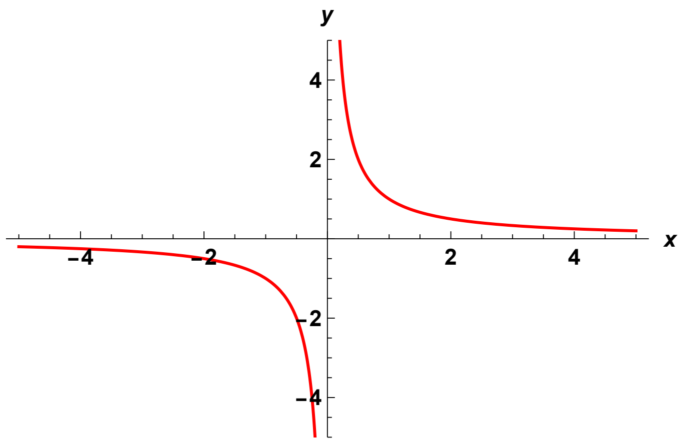

Figura 2.7: *A função $x \mapsto 1/x$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, mas seu gráfico apresenta salto porque o domínio não é um intervalo.*

Proposição 2.27. A função $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua.

Demonstração. Se $x_n \to 0$ é uma sequência convergente de $\mathbb{R}_{\geq 0}$, então temos $\sqrt{x_n} \to 0$ por conta direta com a definição. Logo, f é contínua em 0.

Agora, tome $x_n \to x$, com $a > 0$, temos

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} \to 0.$$

■

Proposição 2.28. As funções sin e cos definidas em $\mathbb{R}$ são contínuas.

Demonstração. Pelo limite fundamental trigonométrico (lema 2.17), sabemos que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$$

Em particular

$$\lim_{\theta \to 0} \sin(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta}\theta = 1 \times 0 = 0$$

e

$$\lim_{\theta \to 0} \cos(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} = 1.$$

De modo geral, para $\theta \to \theta_0$, temos

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \sin\left((\theta - \theta_0) + \theta_0\right) \\ &= \sin(\theta - \theta_0)\cos(\theta_0) + \cos(\theta - \theta_0)\sin(\theta_0) \end{aligned}$$

de onde segue

$$\lim_{\theta \to \theta_0} \sin(\theta) = \sin(\theta_0).$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos\left((\theta-\theta_0)+\theta_0\right)\\ &= \cos(\theta-\theta_0)\cos(\theta_0)-\sin(\theta-\theta_0)\sin(\theta_0)\end{aligned}$$

dando sequência a

$$\lim_{\theta\to\theta_0}\cos(\theta)=\cos(\theta_0).$$

■

Proposição 2.29. A exponencial natural $x \mapsto e^x$ é contínua.

Demonstração. Pelo limite fundamental (lema 2.11), temos

$$\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}\lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} = e^{x_0},$$

onde usamos que

$$\lim_{h\to 0} e^h - 1 = \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}h = 1\times 0 = 0,$$
$$\lim_{h\to 0} e^h = 1.$$

■

Observação 2.30. No exercício a seguir temos funções definidas por partes. Para plotarmos seus gráficos no Mathematica usamos o comando `Piecewise` para definir a função. No segundo item do exercício temos a função

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{se } x<1\\ 0 & \text{se } 1\le x<4\\ x^2-16 & \text{se } x\ge 4\end{cases}$$

Para plotarmos seu gráfico usamos o código

```
f[x_] = Piecewise[{{-x + 1, x < 1}, {0, 1 <= x < 4}, {x^2 - 16, x >= 4}}];
Plot[f[x], {x, -2, 5}]
```

Exercício 2.31. Mostre que

1. $f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x<0\\ x & \text{se } x\ge 0\end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

2. $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{se } x<1\\ 0 & \text{se } 1\le x<4\\ x^2-16 & \text{se } x\ge 4\end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}$

3. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{e^x-1} & \text{se } x\ne 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}$

4. $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}_{>0}$, mas não é contínua em 0.

Exercício 2.32. Mostre que composição de funções contínuas é contínua: se $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ são contínua com $f(X) \subset Y$, então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua.

Exercício 2.33. Descreva quais funções contínuas estão sendo composta e mostre que

1. $f(x) = \sin\left(x^2 + e^{-x}\right)$ está bem definida e é contínua em $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \frac{\sin\left(x^3\right)e^{-\cos\left(x^2\right)}}{x^2-1}$ está bem definida e é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
3. $f(x) = \sin(1/x)$ está bem definida e é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
4. $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}$

2.3 Funções contínuas em intervalos: zeros de funções

Um subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se para quaisquer a, b em I, com $a \leq b$, temos $[a, b] \subset I$. Em outras palavras, se I tem dois pontos, então tem também os demais pontos entre esses dois.

Exercício 2.34. Prove que os intervalos segundo a definição acima são exatamente aqueles que conhecemos da escola.[4]

> **Dica:** o argumento é dividir e conquistar. Se o intervalo é limitado a direita, por exemplo, podemos tomar $r_0 \in I$ e s_0 a direita de I.
> Defina $J_0 = [r_0, s_0]$, Se o ponto médio m_1 de J_0 estiver em I, defina $J_1 = [m_1, s_0]$, caso contrário, defina $J_1 = [r_0, m_1]$. Prossiga o algorítimo, encontre os J_k's e o extremo direito de I, que é o ponto comum a todos os I_k's .

Teorema 2.35 (Teorema do valor intermediário)**.** Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, então existe $a < c < b$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração. A ideia é dividir e conquistar. Suponhamos que não existe $c \in I$ satisfazendo $f(c) = 0$.

Seja m_1 o ponto médio do intervalo $I_0 = [a, b]$. Se $f(m_1) > 0$, defina $I_1 = [a, m_1]$, caso contrário, se $f(m_1) < 0$, defina $I_1 = [m_1, b]$. O importante aqui é que I_1 é um intervalo com metade do comprimento de I_0 no qual f em seus extremos é positivo à direita e negativo à esquerda.

[4] Pessoa de pouca fé! Por quê provar se um desenho já convence?

Repete o procedimento anterior: seja m_2 o ponto médio do intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$. Se $f(m_2) > 0$, defina $I_2 = [a_1, m_2]$, caso contrário, defina $I_2 = [m_2, b_1]$. Obtemos $|I_2| = |I_1|/2$ e o sinal de f nos extremos de I_2 é positivo à direita e negativo à esquerda. Os demais intervalos $I_3, I_4, \ldots$ são construídos da mesma forma.

O algoritmo acima nos fornece intervalos I_n's com as seguintes propriedades:

- $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \cdots \supset I_n \supset \cdots$
- f é negativa no extremo esquerdo de I_n e positiva no extremo direito;
- $|I_n| = (b-a)/2^n \to 0$.

Pela propriedade dos intervalos encaixados 1.41, existe c comum a todos os intervalos I_n's. Sejam a_n o extremo esquerdo de I_n e b_n o extremo direito. Por construção,

$$|a_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n} \to 0 \quad \text{e} \quad |b_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n} \to 0,$$

ou seja, $a_n \to c$ e $b_n \to c$. Pelo Exercício 1.28, como $f(a_n) < 0$, temos que

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0.$$

Similarmente, $f(c) \geq 0$ porque $f(b_n) > 0$. Portanto, $f(c) = 0$, contradizendo a hipótese de que tal c não existe. ■

Exemplo 2.36 (Aproximando $\sqrt{2}$ computacionalmente)**.** A demonstração do teorema do valor intermediário de fato nos fornece um algoritmo para aproximarmos raízes de equações. Considere $f(x) = x^2 - 2$. Temos que $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$. Assim, tomemos $[1, 2]$ como sendo o domínio de f. A solução de $f(x) = 0$ em $[1, 2]$ tem de ser $\sqrt{2}$.

Seja $a = 1$ e $b = 2$. Calcule $c = (a+b)/2$. Se $f(c) < 0$, então trocamos o valor de a pelo de c, se $f(c) > 0$ então trocamos o valor de b pelo de c. Os novos a, b definem um intervalo com metade do comprimento original. Com respeito a esses novos a e b podemos recalcular $c = (a+b)/2$ e reobter novos a e b, assim por diante. Podemos executar tal algoritmo em Mathematica com o código:

```
a = 1;
b = 2;
f[x_] = x^2 - 2;
i = 1;
While[i <= 10,
 c = (a + b)/2;
 If[f[c] < 0, a = c];
 If[f[c] > 0, b = c];
 If[f[c] == 0, Break[]];
 i = i + 1
]
```

no qual repetimos 10-vezes o procedimento descrito. Como a distância dentre a e b é 1 inicialmente. Depois de 10 iterações, temos que a distância dentre a e b é $1/2^{10} < 0.001$. O número c obtido depois de 10 iterações vale

$$c = \frac{1449}{1024} \quad \text{e} \quad |c - \sqrt{2}| < 0.001.$$

Note que esse método (conhecido como **método da bisseção**) pode ser usado para aproximar a raiz de qualquer número. De modo mais geral, pode ser usado para computar raízes reais de polinômios.

Exercício 2.37. Com respeito ao teorema 2.35. Verifique que o mesmo resultado vale se trocarmos $f(a) < 0$ por $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$ por $f(b) < 0$. De fato, basta aplicar o teorema enunciado para função $-f$.

Exercício 2.38. Mostre que todo polinômio de grau impar tem uma solução real. Dica: calcule seu limite para quando x tende para $-\infty$ e ∞.

Proposição 2.39. Se I é intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f(I)$ é intervalo.

Demonstração. Tome $\alpha = f(a)$ e $\beta = f(b)$ com $a, b \in I$. Se γ é um número real entre α e β, mas diferente de tais números, então $g(x) = f(x) - \gamma$, definida em $[a, b]$, é positiva em um dos extremos e negativa no outro. Pelo teorema do valor intermediário 2.35, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, $f(c) = \gamma$. Assim, para α e β em $f(I)$, todos os valores entre tais números encontram-se em $f(I)$, ou seja, $f(I)$ é um intervalo. ■

Teorema 2.40 (Versão contínua do teorema da função inversa)**.** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente[5]. Se $J = f(I)$ e $g : J \to I$ é dada por $g(y) = f^{-1}(y)$, então, além de ser estritamente crescente, g é contínua.

Demonstração. Pela proposição 2.39, o conjunto J é um intervalo, pois f é contínua. Mostremos que g é contínua em $b \in J$.

Seja $a = g(b)$. Como f é estritamente crescente, temos que a é extremo de I se, e só se, b é extremo de J.

[5] Isso quer dizer que $x > y \implies f(x) > f(y)$. Em particular, f é injetora.

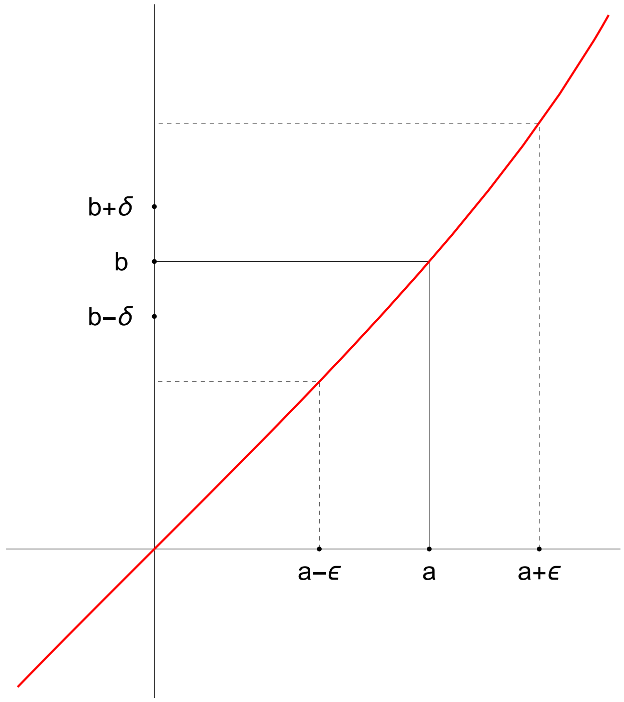

Figura 2.8: *Encontrando δ para função estritamente crescente.*

Se b não for extremo, tome $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$ pertencem a I. Existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta \leq f(a+\varepsilon) - b \quad \text{e} \quad \delta \leq b - f(a-\varepsilon).$$

Se $y_n \to b$, então $|b - y_n| < \delta$ para n suficientemente grande. Assim,

$$|g(y_n) - g(b)| = |g(y_n) - a| < \varepsilon$$

para n suficientemente grande, de onde segue que $g(y_n) \to g(b) = a$.

Portanto, g é contínua nos pontos não extremos de J.

Suponha que b é extremo direito. Tome $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $a - \varepsilon \in I$. Tome $\delta > 0$ satisfazendo $f(a-\varepsilon) = b - \delta$. Se $y_n \to b$, então para n suficientemente grande $|y_n - b| < \delta$ e, consequentemente, $|g(y_n) - a| < \varepsilon$. Logo, g é contínua em b. Similarmente, g é contínua em seu extremo esquerdo, caso esse exista. ■

Observação 2.41. Trocando f por $-f$ temos que se f é estritamente decrescente e contínua, então a sua inversa é também estritamente decrescente e contínua.

Exemplo 2.42. Pelo Teorema 2.40.

- A exponencial natural $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ é estritamente crescente e contínua. Sua inversa, o logaritmo natural $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, é estritamente crescente e contínua.

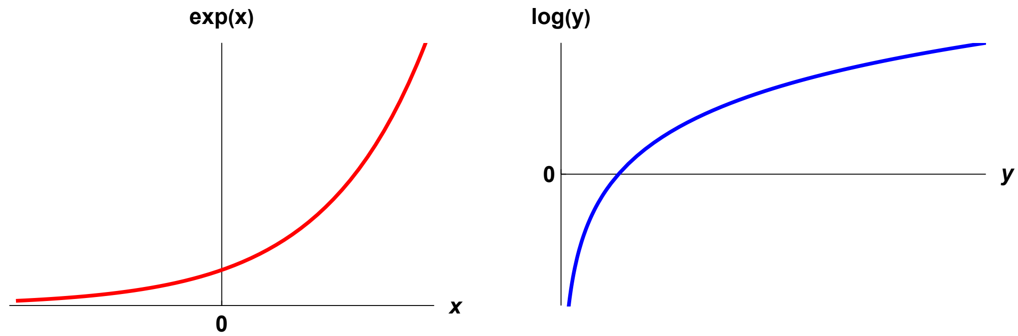

Figura 2.9: $y = \exp(x)$ *e* $x = \log(y)$.

- A função seno $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ é estritamente crescente e contínua. Sua inversa, a função arco seno $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, é estritamente crescente e contínua.

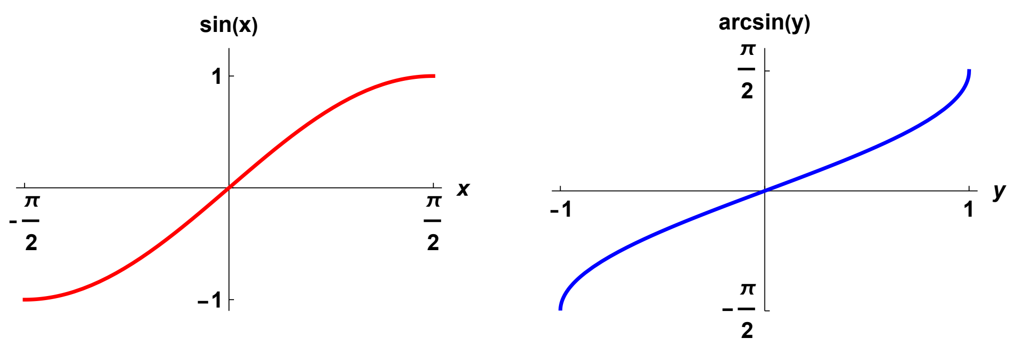

Figura 2.10: $y = \sin(x)$ *e* $x = \arcsin(y)$.

- A função cosseno $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ é estritamente decrescente e contínua. Sua inversa, a função arco cosseno $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, é estritamente decrescente e contínua.

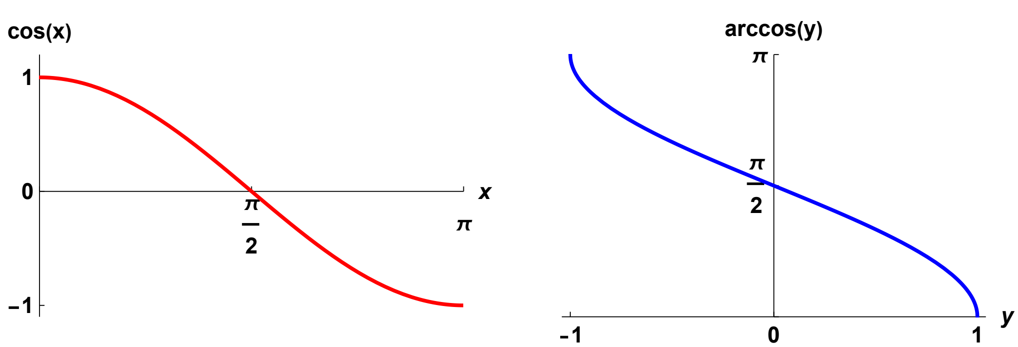

Figura 2.11: $y = \cos(x)$ *e* $x = \arccos(y)$.

- A função tangente $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente e contínua. Sua inversa, a função arco tangente $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, é estritamente crescente e contínua.

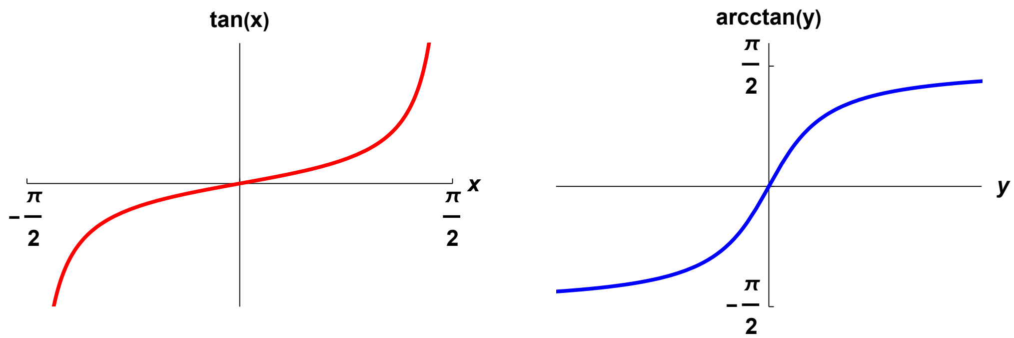

Figura 2.12: *$y = \tan(x)$ e $x = \arctan(y)$.*

Exemplo 2.43. Calculemos

$$\lim_{y \to 0} \frac{\arcsin(y)}{y}$$

Para $y_n \to 0$, com y_n não nulo, definimos $x_n = \arcsin(y_n)$ para n suficientemente grande[6]. Como arcsin é contínua temos $x_n \to 0$ e portanto

$$\frac{\arcsin(y_n)}{y_n} = \frac{x_n}{\sin(x_n)} = \frac{1}{\sin(x_n)/x_n} \to 1.$$

Logo,

$$\lim_{y \to 0} \frac{\arcsin(y)}{y} = 1.$$

Exercício 2.44. Calcule os limites

1. $\lim_{y \to 0} \arccos(y)$
2. $\lim_{y \to e} \log(y)$
3. $\lim_{y \to 1} \frac{\log(y)}{y-1}$
4. $\lim_{y \to 0} \frac{\arctan(y)}{y}$
5. $\lim_{y \to \infty} \arctan(y)$
6. $\lim_{y \to -\infty} \arctan(y)$

2.4 Exponencial natural

A exponencial natural $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0)}$, onde denotamos $\exp(x)$ por e^x muitas vezes. Sua inversa é o logaritmo natural $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ e ambas funções são estritamente crescentes e contínuas. As propriedades básicas da exponencial natural são

$$e^0 = 1 \quad \text{e} \quad \exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$$

[6] Precisa-se de n suficientemente grande para garantir que y_n está no domínio de arcsin, o intervalo (-1,1). Para n pequeno, podemos definir x_n como sendo qualquer coisa, pois no cálculo de limites somente os n grandes importam.

de acordo com a Proposição 1.47.

Podemos elevar um número real positivo a a qualquer potência inteira sem problemas. Se m é positivo, simplesmente temos a^m como sendo o produto de m cópias de a. Se $m = 0$, então definimos $a^0 = 1$. Se m é negativo, então $a^n = 1/a^{-m}$.

Já para a fração $\frac{m}{n}$, com n positivo, o número $a^{\frac{m}{n}}$ é a raiz positiva da equação $x^n - a^m = 0$. Por exemplo, $5^{\frac{2}{3}}$ é a raiz positiva da equação $x^3 - 5^2 = 0$.

E para r real qualquer, como definimos a^r? Poderíamos definir a^r como sendo o limite de a^{r_n} onde $r_n \to r$ é uma sequência de números racionais. Porque isso é muito complicado, especialmente mostrar que a^{r_n} converge, não seguiremos essa rota. Usaremos as boas propriedades que exp tem a fim de resolver tal problema.

Proposição 2.45. O logarítmico natural tem as seguintes propriedades:

1. $\log(1) = 0$;
2. Se $a, b > 0$, então $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$;
3. Se $a > 0$ e n inteiro, então $\log(a^n) = n \log(a)$;
4. Se $a > 0$ e n/m é racional, então $\log\left(a^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m} \log(a)$.

Demonstração.

1. Repare que $e^0 = 1$.
2. Basta notar que $\exp(\log(a) + \log(b)) = \exp(\log(a)) \exp(\log(b)) = ab$.
3. Se $\lambda = \log(a^n)$, então $e^\lambda = a^n$, ou seja, $e^{\frac{\lambda}{n}} = a$ e aplicando log obtemos
$$\frac{\lambda}{n} = \log(a),$$
$$\log(a^n) = n \log(a).$$
4. Pelo terceiro item temos
$$m \log\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = \log\left(\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^m\right) = \log(x^n) = n \log(x),$$
$$\log\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m} \log(x).$$

■

Se x é racional
$$a^x = e^{\log(a^x)} = e^{x \log(a)}.$$
A parte da direita faz sentido mesmo quando x é real.

Definição 2.46. Para $a > 0$ e x real, definimos $a^x = e^{x \log(a)}$.

Em outras palavras, a partir da exponencial natural podemos definir todas as demais exponenciais, o que é bom porque já sabemos bastante sobre a exponencial natural (que é contínua, estritamente crescente e satisfaz a propriedades algébricas esperadas) .

Note que a^x satisfaz a propriedades esperadas de uma exponencial:

$$a^0 = e^{0\log(a)} = e^0 = 1,$$

$$a^x a^y = e^{x\log(a)} e^{y\log(a)} = e^{(x+y)\log(a)} = a^{x+y}.$$

Além disso, a função $x \mapsto a^x$ é contínua porque exp é contínua.

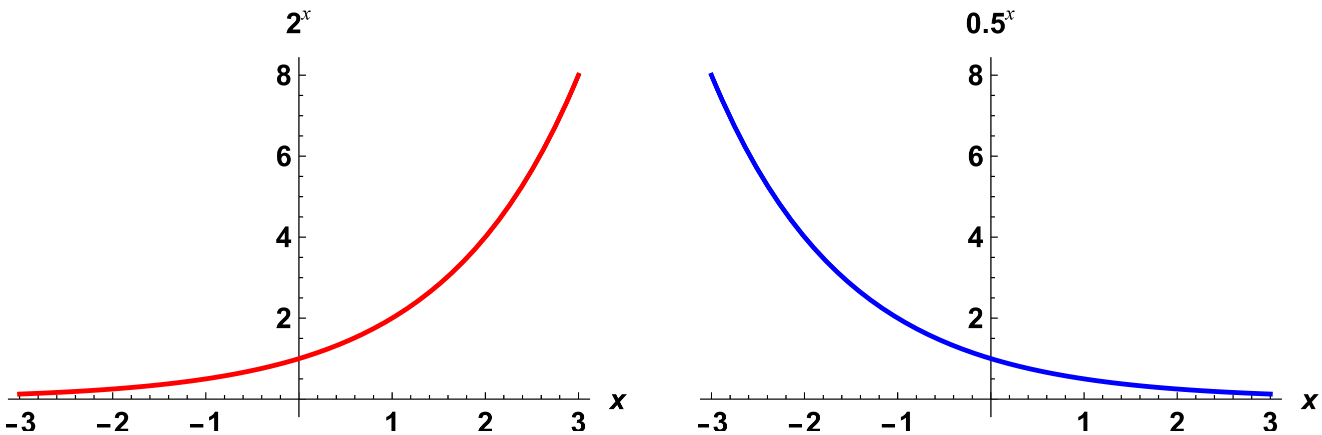

Figura 2.13: *Curvas* $x \mapsto 2^x$ *e* $x \mapsto 0.5^x$.

Exercício 2.47. Considere a função $f(x) = a^x$. Mostre que f é estritamente crescente para $a > 1$ e estritamente decrescente para $0 < a < 1$. Dica: olhe o gráfico da função log.

2.5 Máximos e mínimos de funções contínuas

Definição 2.48. Um intervalo compacto nada mais é que um intervalo da forma $[a, b]$, isto é, possuí ambos extremos.

Definição 2.49. Um ponto x_0 é um ponto de máximo de $f : I \to \mathbb{R}$ se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in I$. Nesse caso, $f(x_0)$ é o máximo de f. Similarmente, x_0 é um ponto de mínimo se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in I$. Aqui $f(x_0)$ é o mínimo de f.

Em geral, funções contínuas podem não admitir máximo ou mínimo. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$ não possui máximo, pois

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.$$

Por outro lado, no intervalo compacto $[-1, 1]$ a função $f(x) = x^2$ possui dois pontos de máximo, 1 e -1. Já no intervalo $(-1, 1)$ a função não atinge máximo.

A fim de provar o teorema central dessa seção, o Teorema de Weierstrass (2.54), precisamos de dois lema, que são muito importantes (talvez devesse chama-los de teolemas), pois caracterizam intervalos compactos do ponto de vista sequencial.

Definição 2.50. Considere uma sequência x_n.

Se temos os números inteiros positivos $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ em ordem crescente, podemos definir a sequência x_{n_k}, com $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Quando isso ocorre, dizemos que x_{n_k} é subsequência de x_n.

Exemplo 2.51.
- A sequência $x_n = (-1)^n$ tem subsequencias como $x_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ e $x_{2k+1} = -1$. Embora a sequência x_n não convirja, ambas subsequências convergem.
- A sequência
$$x_n = \begin{cases} 1/n & \text{se } n \text{ é múltiplo de } 3 \\ (n+1)/n^2 & \text{se } n \text{ não é múltiplo de } 3 \end{cases}$$
tem
$$x_{3k} = 1/(3k), \quad x_{3k+1} = (3k+2)/(3k+1)^2, \quad x_{3k+2} = (3k+3)/(3k+2)^2$$
como subsequências.

Lema 2.52 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** Toda sequência em $[a,b]$ possui uma subsequência convergente.

Demonstração. A prova é novamente dividir e conquistar. Considere uma sequência x_n em $[a,b]$. Comecemos com $I_0 = [a,b]$. Uma das metades de I_0 contem x_n para infinitos n's. Tomamos essa metade para ser I_1. Novamente, dividindo I_1 ao meio temos que uma de suas metades contem x_n para infinitos n's. Tomamos essa metade para ser I_2, e assim por diante. Assim, temos a sequência de intervalos compactos

- $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$
- Para cada I_k temos que há infinitos valores de n para os quais $x_n \in I_k$;
- $|I_k| \leq (b-a)/2^k$.

Pela propriedade dos intervalos encaixados, há x comum a todos os intervalos I_k's. Escolha n_1 tal que $x_{n_1} \in I_1$. Agora escolha $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in I_2$. Similarmente, tome $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \in I_3$, e assim por diante. Temos que a subsequência x_{n_k} de x_n converge para x, pois $|x - x_{n_k}| < (b-a)/2^k$. ■

Lema 2.53. Se I é um intervalos não compacto, então existe uma sequência $x_n \in I$ que não admite subsequência que converge para um ponto de I.

Demonstração. Se o intervalo for ilimitado a direita, a sequência $x_n = n$ não tem subsequência convergente. O mesmo ocorre se o intervalo I for ilimitado a esquerda. Assim, o intervalo tem de ser $[a, b)$ ou $(a, b]$ ou (a, b). Vamos supor que $I = [a, b)$: a sequência $x_n = b - (b - a)/2^n$ em $[a, b)$ não possui uma subsequência convergente com limite em $[a, b)$, pois toda subsequência tem limite b, que não pertence ao intervalo. O argumento é análogo para os demais intervalos. ■

Teorema 2.54 (Teorema de Weierstrass)**.** Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma contínua, então f admite máximo. Observe que o domínio da função f é um intervalo compacto.

Demonstração. Pela Proposição 2.39, $J = f([a, b])$ é um intervalo. Considere uma sequência y_n de J.

Para cada n escolha $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) = y_n$. Existe uma subsequencia x_{n_k} tendendo para algum $x \in \mathbb{R}$, porque o intervalo $[a, b]$ é compacto (Lema 2.52). Como $a \leq x_{n_k} \leq b$, o limite x dessa subsequencia quando $k \to \infty$ tem de satisfazer $a \leq x \leq b$ (veja Exercício 1.28), ou seja, $x \in [a, b]$.

Assim, $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ converge para $f(x) \in J$, pois f é contínua. Logo, toda sequência y_n de J admite uma subsequência que converge para um ponto de J. Portanto, J é um intervalo compacto (Lema 2.53): existem c_0 e c_1 em $[a, b]$ tais que $J = [f(c_0), f(c_1)]$. Em outras palavras, c_0 é um ponto de mínimo e c_1 é um ponto de máximo. ■

Porque os exemplos que discutimos até agora possuem gráficos relativamente simples, pode parecer que teoremas como o do valor intermediário e o de Weierstrass sejam apenas justificativas pomposas de coisas simples. No entanto, funções contínuas são em geral extremamente selvagens. A função

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{1}{2^2}\cos\left(4^2 x\right) + \cdots + + \frac{1}{2^k}\cos\left(4^k x\right) + \cdots$$

é contínua em $\mathbb{R}$ e é conhecida como função de Weierstrass.

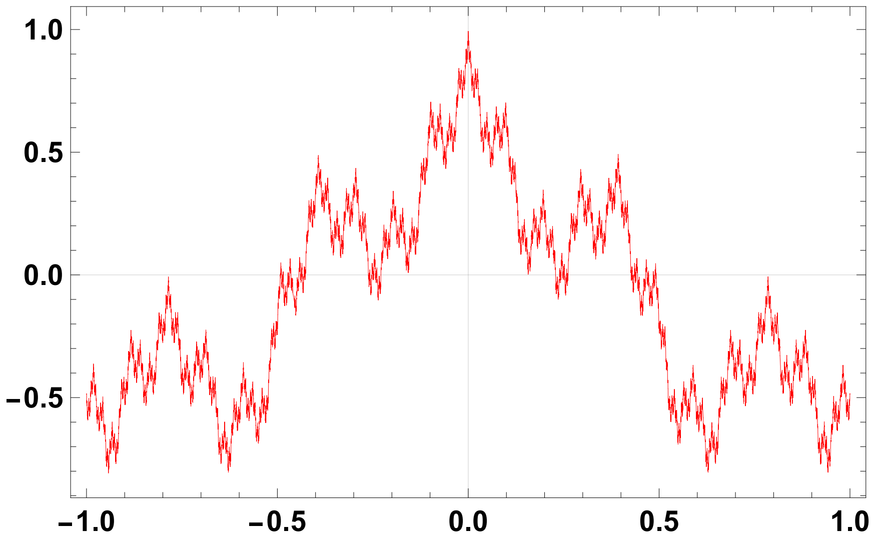

Figura 2.14: *Função de Weierstrass.*

O gráfico dessa função é uma curva fractal (google it!) e não está representado com todo sua complexidade na Figura 2.14, pois isso seria impossível. Além disso, nenhum de seus pontos possuem a noção de tangência (isso quer dizer que a derivada, que veremos a frente, não existe em ponto algum).

Apesar da função de Weierstrass ser extremamente patológica, o teorema do valor intermediário nos garante que ela tem um zero ao menos e o teorema de Weierstrass nos garante que essa função possuí ponto de máximo e de mínimo no intervalo compacto $[-1, 1]$. Em resumo, essa curva abala nossa confiança (mas só um pouquinho) de que funções contínuas em intervalos são as que podemos desenhar o gráfico sem tirar o lápis do papel.

Via de regra, quando procuramos por zeros ou pontos de máximo/mínimo em algum problema matemático, primeiro mostramos que solução para esse existe. Em geral, não conseguimos uma solução explicita, apenas mostramos que ela tem que existir. A segunda etapa é descobrir métodos para aproximar a solução desses problemas da forma mais eficaz possível.

O teorema de Weierstrass, apesar de garantir que a função tem um ponto de máximo (ou mínimo), não nos diz como encontrá-lo (ao contrário da nossa prova do Teorema do valor intermediário). Técnicas para efetivamente encontrar máximo e mínimo serão discutidas ao estudarmos cálculo diferencial.

2.6 Continuidade de séries de potência

Considere a função

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

que é uma série de potências centrada em 0 com raio de convergência R. Nosso objetivo nessa seção é mostrar que f é contínua para $|x| < R$.

Proposição 2.55. A série de potências

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

tem raio de convergência R.

Observação 2.56. Como veremos a frente, essa série é a derivada de f.

Prova da proposição 2.55. Tome $x \in (-R, R)$ e s satisfazendo $|x| < s < R$. Como a série definindo f converge em s, temos que $|a_k| s^k \to 0$. Portanto, existe N suficientemente grande para o qual $|a_k| s^k \leq 1$ quando $k \geq N$.

Como consequência, para $k \geq N$

$$k|a_k||x|^{k-1} = s^{-1} k \left(\frac{|x|}{s}\right)^k |a_k| s^k \leq s^{-1} \left(\frac{|x|}{s}\right)^k$$

e, como a série geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{s}\right)^k$$

converge, concluímos pelo teste da comparação 1.53 que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k||x|^{k-1}$$

converge.

Por outro lado, considere x tal que $|x| > R$. Tome s satisfazendo $R < s < |x|$. Se

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

convergisse, teríamos que a série que define f convergiria absolutamente em s por causa do teste da comparação 1.53, já que $a_k |s|^k \leq k a_k |s|^k$ para $k \geq 1$ e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k s^{k-1}$$

converge absolutamente, o que contradiz a definição de raio de convergência para f. ■

Proposição 2.57. Dado $r \in (0, R)$, existe $C \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ em $[-r, r]$.

Demonstração. A série presente na Proposição 2.55 converge absolutamente no valor r. Definimos

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} k|a_k| r^{k-1}.$$

Agora tome $x, y \in [-r, r]$. Como

$$f(x) - f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x^k - y^k),$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||x^k - y^k|.$$

Por outro lado,

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1}),$$

$$|x^k - y^k| \leq |x - y|(|x|^{k-1} + |x|^{k-2}|y| + \cdots + |x||y|^{k-2} + |y|^{k-1})$$

e, lembrando que $|x| \leq r$ e $|y| \leq r$, temos

$$|x^k - y^k| \leq kr^{k-1}|x - y|.$$

Portanto,

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} k|a_k|r^{k-1}|x - y| = C|x - y|.$$

■

Corolário 2.58. A função $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ é contínua.

Demonstração. Para $a \in (-R, R)$, tome $r > 0$ tal que $|a| \leq r < R$. Pela Proposição 2.57 existe $C \geq 0$ tal que $|f(x) - f(a)| \leq C|x - a|$ para $x \in [-r, r]$. Se $x_n \to a$, temos que $x_n \in (-r, r)$ para n suficientemente grande. Assim,

$$|f(x_n) - f(a)| \leq C|x_n - a| \to 0,$$

provando que f é contínua em x. ■

Podemos usar a continuidade de séries de potências para calcular limites complicados. Por exemplo, imagine que queiramos computar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{(\sqrt{1 + x} - 1)^4}.$$

Como vimos (mas ainda não provamos) na Seção 1.8,

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - O(x^5),$$

que escrevemos usando o big-O (abordado na Observação 1.72). O $O(x^5)$ quer dizer que os termos da série não exibidos têm fator x^5 ou de potência maior.

Similarmente,

$$\sqrt{1 + x} = 1 + x/2 + O(x^2).$$

Desta forma, obtemos as séries de potência

$$\cos(x) - 1 + x^2/2 = \frac{x^4}{4!} + O(x^5),$$

$$(\sqrt{1+x} - 1)^4 = (x/2 + O(x^2))^4 = x^4/16 + O(x^5),$$

que são funções contínuas e, portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{(\sqrt{1+x} - 1)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4/24 + O(x^5)}{x^4/16 + O(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/24 + O(x)}{1/16 + O(x)} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Os próprios limites fundamentais podem ser vistos dessa forma. A série da exponencial natural é $e^x = \sum_{k=0} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + O(x^3)$, onde novamente usamos o Big-O, nesse caso para denotar que estamos omitindo os termos com x^3 ou grau maior. Daí

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + O(x^2),$$

e pela continuidade da série acima

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{x}{2!} + O(x^2) = 1,$$

que é o limite fundamental da exponencial (Proposição 2.11).

Similarmente,

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^4),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + O(x^4)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{3!} + O(x^3) = 1,$$

que é o limite fundamental trigonométrico (Proposição 2.17).

Capítulo 3

Cálculo diferencial

3.1 Introdução informal com infinitesimais e cálculo de reta tangente

3.1.1 Velocidade e aceleração

Considere um carro viajando em uma estrada, que modelamos como um ponto se movendo ao longo da reta real $\mathbb{R}$ com o passar do tempo.

Em um instante t, a posição do ponto é $q(t)$. Já sua posição no instante $t + \Delta t$ é $q(t + \Delta t)$. A velocidade média nesse intervalo de tempo é

$$v_{\text{média}} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}.$$

Denotamos a variação na posição $q(t + \Delta t) - q(t)$ por Δq, onde fica subentendido que esse número depende de t e Δt.

$$v_{\text{média}} = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

O significado da velocidade média é o seguinte: se eu movesse com velocidade constante $v_{\text{média}}$ partindo de $q(t)$, eu demoraria o tempo Δt para chegar em $q(t + \Delta t)$, ou seja,

$$q(t + \Delta t) = q(t) + v_{\text{média}}\,\Delta t.$$

A velocidade no velocímetro de um carro não é a média. A velocidade que o ponteiro mede no instante t é o limite

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}.$$

Esse limite é conhecido como **derivada de q com respeito a t** e é denotado por

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

e o porquê em dessa notação vai ficar claro a seguir, quando falarmos de infinitesimais.

Se nosso incremento de tempo for um número δt bem pequeno e $\delta q = q(t + \delta t) - q(t)$, então, como no processo de limite acima estamos fazendo $\Delta t \to 0$, temos

$$v(t) \approx \frac{\delta q}{\delta t}. \tag{☠$_1$}$$

> **Nota histórica 3.1.** É costumeiro pensar em dt e dq como sendo "números" infinitamente pequenos, **infinitesimais**. Tão pequenos que a fórmula ☠$_1$ se torna uma igualdade, mas ainda não nulos porque não se pode dividir por zero. Infinitesimais foram descobertos/inventados por Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII e serviram de alicerce ao cálculo até o século XIX (que é quando sequências foram usadas para dar uma base sólida ao cálculo). Eles não são números reais e por muito tempo se acreditou que eles não passavam de uma ficção útil. Somente nos anos 60, com a descoberta da análise não padrão por Abraham Robinson, que uma teoria decente de infinitesimais foi estabelecida. Ao longo desse livro, empregarei infinitesimais para modelar problemas, porque são úteis, fáceis de manipular e comumente usados em ciências naturais, mas não adentrarei no seu formalismo.

Ilustremos o uso de infinitesimais: solta-se uma pedra de uma altura q_0 em metros. Sua posição é descrita por

$$q(t) = q_0 - \frac{gt^2}{2},$$

onde t é em segundos e $g \approx 10m/s^2$ é a aceleração gravitacional.

Para o infinitesimal dt temos

$$\mathrm{d}q = q(t + \mathrm{d}t) - q(t) = -\frac{g(t + \mathrm{d}t)^2}{2} + \frac{gt^2}{2} = -gt\mathrm{d}t - \frac{g\,\mathrm{d}t^2}{2},$$

ou seja, passando dt dividindo,

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -gt - \frac{g\,\mathrm{d}t}{2}.$$

O número gt é real e, por isso, não desprezível. Por outro lado, $-\frac{g\,\mathrm{d}t}{2}$ é infinitesimal, infinitamente pequeno, e assim podemos descartá-lo. Portanto, a velocidade $v(t)$ é

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -gt.$$

Embora faça sentido, esse é um argumento bastante informal. O $\mathrm{d}t$ é não nulo quando convém, ao fazermos a divisão, mas quando queremos descartar $\mathrm{d}t$ simplesmente fingimos que é nulo com respeito às demais variáveis.

A "velocidade" com que a velocidade muda é a aceleração. Como $\mathrm{d}v = -g\mathrm{d}t$, temos

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{g\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = -g.$$

Note que de fato a aceleração é $-g$, a aceleração gravitacional com o sinal trocado. O sinal de $-$ se deve ao fato da força gravitacional estar apontando para baixo, na direção oposta do eixo coordenado que aponta para cima. A aceleração é a segunda derivada da posição e a notação dada é

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2}.$$

Refaçamos as contas acima rigorosamente, fazendo uso de limites. Temos

$$\Delta q = -gt\Delta t - \frac{g\,\Delta t^2}{2},$$

de onde segue que

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} -gt - \frac{g\,\Delta t}{2} = -gt,$$

onde não precisamos de infinitesimais. Similarmente,

$$\Delta v = -g\Delta t,$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} -g = -g.$$

Nota histórica 3.2. O cálculo começou a tomar sua forma moderna no século XVII com os trabalhos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, que estavam interessados em problemas de tangência e área: para uma curva $y = f(x)$, queria-se determinar suas retas tangentes (cálculo diferencial) e a área delimitada por seu gráfico e o eixo x (cálculo integral). A relação entre esses dois problemas já era razoavelmente compreendida, mas Newton e Leibniz sistematizaram o cálculo em uma linguagem limpa e apresentaram a tal conexão dentre esses problemas de maneira clara.

Ambos intelectuais fizeram suas descobertas independentemente um do outro, o que é um tanto óbvio se você comparar os escritos de cada um. No entanto, na época, houve um grande e longo escândalo na comunidade matemática disputando quem descobriu o cálculo primeiro. Esse conflito foi bem feio e patético (com difamações e acusações de plágio), e terminou numa rivalidade amarga entre os dois matemáticos. Hoje o crédito da descoberta é dada aos dois.

Anteriormente utilizamos a notação de Leibniz, que recorre aos infinitesimais. Isaac Newton denotava velocidade e aceleração por $\dot{q}$ e $\ddot{q}$. Tal notação é frequentemente usada em física, engenharia e certas partes da matemática (como equações diferenciais e física matemática).

	Leibniz	Newton
Velocidade	$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$	$\dot{q}$
Aceleração	$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$	$\ddot{q}$

Taxa de crescimento de uma grandeza com respeito ao tempo, nada mais é que sua derivada com respeito ao tempo, como velocidade é derivada da posição.

Analisemos o exemplo 2.14 sobre decaimento radioativo novamente, mas agora com a ótica do cálculo diferencial. Se $m(t)$ é a massa do material no instante t, então após um tempo $\mathrm{d}t$, que é infinitamente pequeno, infinitesimal, devemos ver uma mudança $\mathrm{d}m$ na massa. Na modelagem, supomos que esse $\mathrm{d}m$ é proporcional a população no instante t: existe uma constante $\mu > 0$ para a qual $dm = -\mu m(t)\mathrm{d}t$. Repare que colocamos o número negativo $-\mu$ na expressão porque esperamos que a massa decresça com o tempo. Assim, temos a equação

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\mu m(t),$$

que quer dizer que a taxa de variação da massa é proporcional a massa.

Equações envolvendo derivadas como a acima se chamam equações diferenciais. Um chute educado de solução é $m(t) = m_0 e^{-\mu t}$ (ver Exemplo 2.14).

De fato, como

$$\mathrm{d}m = m(t + \mathrm{d}t) - m(t) = m_0 e^{-\mu t}(e^{-\mu \mathrm{d}t} - 1)$$

e

$$e^{\mathrm{d}t} = 1 + (-\mu \mathrm{d}t) + \frac{(-\mu \mathrm{d}t)^2}{2!} + \frac{(-\mu \mathrm{d}t)^3}{3!} \cdots$$

obtemos

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\mu m_0 e^{-\mu t} + \mathrm{d}t \times \heartsuit = -\mu m(t) + \mathrm{d}t \times \heartsuit,$$

onde $\heartsuit$ é uma expressão muito complicada e que não importa.

Como $\mathrm{d}t$ é infinitesimal, desprezamos $\mathrm{d}t \times \heartsuit$, por ser infinitamente pequeno. Assim, a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\mu m(t)$$

é satisfeita por $m(t) = m_0 e^{-\mu t}$.

Agora façamos as contas acima rigorosamente usando limites. Temos

$$\Delta m = m_0 e^{-\mu t}(e^{-\mu \Delta t} - 1)$$

e pela definição de derivada temos

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = m_0 e^{-\mu t} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{-\mu \Delta t} - 1}{\Delta t} = -\mu m_0 e^{-\mu t} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{-\mu \Delta t} - 1}{-\mu \Delta t}.$$

Pelo limite fundamental para exponencial (Lema 2.11), temos

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{-\mu \Delta t} - 1}{-\mu \Delta t} = 1$$

de onde segue

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\mu m_0 e^{-\mu t} = -\mu m(t).$$

3.1.2 Reta tangente

Dada uma função $y = f(x)$ e um ponto $p_0 = (x_0, f(x_0))$ no seu gráfico, gostaríamos de encontrar a reta que tangencia tal curva no ponto dado.

Considere outro ponto $p = (x_0 + \Delta x, f(x + \Delta x))$ no gráfico (veja Figura 3.1). A reta que corta o gráfico em p_0 e p tem coeficiente angular

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Quando fazemos $\Delta x \to 0$, que geometricamente quer dizer $p \to p_0$, temos que o coeficiente angular acima tende a derivada e a reta determinada pelo par de pontos tende a reta tangente. Assim sendo, a derivada

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

computada em x_0 é o coeficiente angular da reta tangente passando por p_0. Como aqui estamos computando a derivada em x_0 e queremos deixar isso explicito para evitar confusão, escrevemos

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \quad \text{ou} \quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0).$$

Assim, a equação da reta tangente é

$$y = f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)(x - x_0)$$

Para $f(x) = x^3$, por exemplo, temos

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + 3x_0^2 \Delta x^3}{\Delta x} = 3x_0^2.$$

e assim a reta tangente passando por (x_0, x_0^3) é

$$y = x_0^3 + 2x_0^2(x - x_0).$$

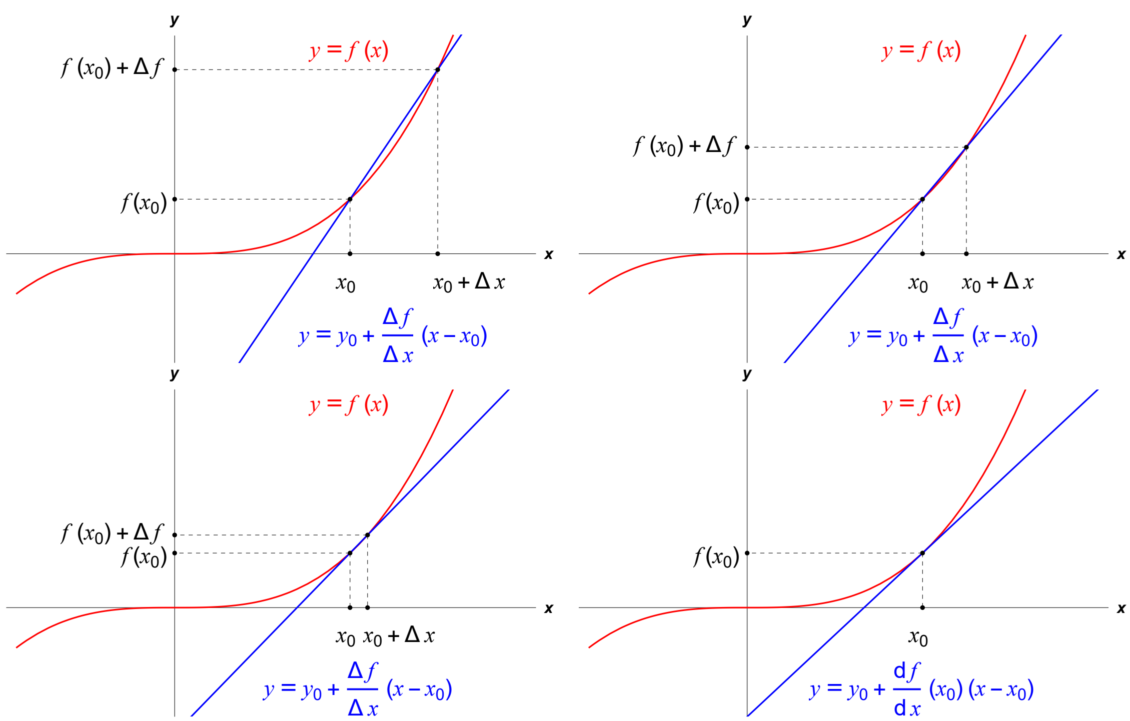

Figura 3.1: *Derivada em x_0 é o coeficiente angular da reta tangente em $(x_0, f(x_0))$.*

Como vimos na subseção 3.1.1, a derivada de $f(x) = e^x$ com respeito a x é e^x (embora a conta lá esteja um tanto poluída). De fato, pelo limite fundamental para exponencial,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x.$$

Assim, o coeficiente angular da reta tangente a $y = e^x$ em $(0, 1)$ é 1.

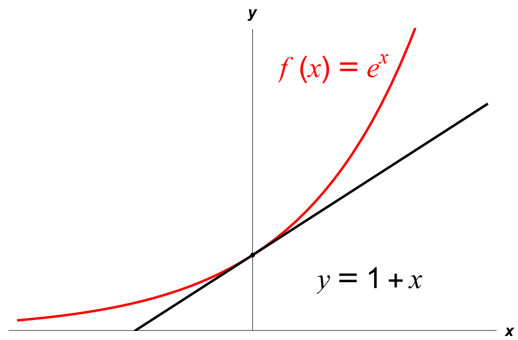

Figura 3.2: *Derivada de e^x em 0 é 1.*

De modo mais geral, se $f(x) = a^x$ com $a > 0$, então, lembrando que $a^x = e^{x\log(a)}$ e refazendo o cálculo acima, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \log(a) f(x).$$

O único a para o qual a reta tangente passante no ponto $(0, 1)$ tem coeficiente angular 1 é $a = e$. Essa é a propriedade que distingue a exponencial natural das demais, sua derivada em 0 é 1.

É interessante observar que poderíamos ter descoberto e dessa forma. Suponha que $f(x) = a^x$ é uma exponencial para a qual a reta tangente em $(0, 1)$ é $y = 1 + x$ e se pergunte: quem tem de ser a? Para N infinitamente grande, temos graficamente

$$e^{1/N} \approx 1 + \frac{1}{N}$$

e elevando a N temos

$$a \approx \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N.$$

É importante dizer aqui que o argumento acima é meio perigoso, se duas coisas são próximas, então ao elevarmos ambos lados a uma potência grande não obtemos necessariamente coisas próximas. No entanto, no caso acima, tal argumento vale.

Noutras palavras, se estivéssemos procurando por uma exponencial $x \mapsto a^x$ cuja reta tangente em $(0, 1)$ é $y = 1 + x$, seria natural tomar $a = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que é o número e pela proposição 2.12.

3.2 Formalização e regras básicas

Definição 3.3. Suponha que X é bom (veja Definição 2.2). A função $f : X \to \mathbb{R}$ é diferenciável ou derivável em a se o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe. Denotamos esse limite por

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) \qquad \text{ou} \qquad f'(a).$$

Algumas observações sobre a definição acima. No lugar de Δx, como usamos anteriormente, utilizamos h ou outra letra porque é mais conciso. Além disso, empregaremos bastante a notação f' de agora em diante.

Vamos destrinchar mais o limite acima: f ser derivável em a quer dizer que para toda sequência não nula h_n que tende a 0 e satisfaz $a + h_n \in X$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}.$$

Fazendo $x_n = a + h_n$, que pertence a $X \setminus \{a\}$ e tende a a, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a},$$

ou seja,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Proposição 3.4. Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a.

Demonstração. Pela Observação 2.22, tome $x_n \to a$ com $x_n \in X \setminus \{a\}$. Temos

$$f(x_n) - f(a) = \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a}(x_n - a) \to f'(a) \times (a - a) = 0.$$

■

Definição 3.5. A função é diferenciável ou derivável em X se possui derivada em todos os pontos de X.

Exemplo 3.6. A derivada de x^n é nx^{n-1}, onde n é inteiro positivo. Temos de trabalhar com o quociente

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Aqui podemos usar o binômio de Newton para expandir $(x + h)^n$ ou usarmos a soma geométrica

$$\frac{b^n - a^n}{b-a} = b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1}.$$

Utilizemos o segundo. Fazendo $b = x + h$ e $a = x$, obtemos

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} = (x+h)^{n-1} + x(x+h)^{n-2} + x^2(x+h)^{n-3} + \cdots + x^{n-2}(x+h) + x^{n-1}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (x+h)^{n-1} + x(x+h)^{n-2} + x^2(x+h)^{n-3} + \cdots + x^{n-2}(x+h) + x^{n-1} \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exercício 3.7. A derivada de e^x é e^x.

Exemplo 3.8. Derivada de sin e cos e a derivada de cos é $-\sin$.

Note que

$$\begin{aligned}
(\sin(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sin(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}.
\end{aligned}$$

Do limite fundamental trigonométrico (Lemma 2.17)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1 - \sin^2(h)} - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{1 - \sin^2(h)} - 1\right)}{h} \frac{\left(\sqrt{1 - \sin^2(h)} + 1\right)}{\left(\sqrt{1 - \sin^2(h)} + 1\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2(h)}{h} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(h)} + 1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $(\sin(x))' = \cos(x)$.

De modo análogo,

$$\begin{aligned}
(\cos(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\sin(x).
\end{aligned}$$

Proposição 3.9. Se f e g são diferenciáveis e $\alpha \in \mathbb{R}$, então temos

- $(\alpha f)' = \alpha f'$
- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Regra de Leibniz, veja Figura 3.3);
- se g não se anula, então $(1/g)' = g'/g^2$.

Observação 3.10. Vamos interpretar geometricamente a regra de Leibniz presente na Proposição 3.9. Considere as funções $u(x)$ e $v(x)$ de x. Queremos derivar o produto uv.

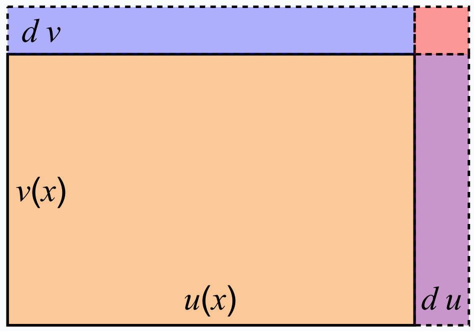

Figura 3.3: *Explicação geométrica da regra de Leibniz.*

O produto $u(x)v(x)$ é a área do retângulo laranja na Figura 3.3. Já

$$u(x+dx)v(x+dx) = (u(x)+du)(v(x)+dv)$$

é a área dos quatro retângulos coloridos juntos. Assim:

$$d(uv) = (u(x)+du)(v(x)+dv) - u(x)v(x) = u(x)dv + v(x)du + dudv$$

que é a área dos três triângulos menores. O triângulo vermelho tem ambos lados infinitesimais e portanto é muito menor que os demais. Logo, descartamos ele.

$$d(uv) = u(x)dv + v(x)du$$

$$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} = u(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v(x).$$

Demonstração. Provemos o terceiro e quarto itens (os dois primeiros são fáceis). Em ambos argumentos usaremos que funções diferenciáveis são contínuas (Proposição 3.4). A regra de Leibniz segue da conta a seguir.

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h)-g(x))}{h}\end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Agora computemos $(1/g)'$:

$$(1/g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1/g(x+h) - 1/g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

■

Exercício 3.11. Utilize os dois últimos itens a fim de provar

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Exemplo 3.12.

- $(x^2\sin(x))' = (x^2)'\sin(x) + x^2(\sin(x))' = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$;
- $\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x x'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$;
- $\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

Exercício 3.13. O seno e o cosseno hiperbólicos são, respectivamente, as funções

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = e^x + e^{-x}2.$$

Mostre que $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ e $(\cosh(x)) = \sinh(x)$.

Exercício 3.14. Calcule as derivadas

1. $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$;
2. $e^{-x}\cos(x) + \sin(x)$;
3. $\dfrac{e^x}{1+x^2}$;
4. $\sin(x)(\cosh(x) + x)$;
5. $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$;
6. $x(x+1)(x+2)(x+3)$.

3.3 Derivada da composta: Regra da cadeia

Agora vamos ver como derivar a composta de duas funções. Pensando em infinitesimais: se temos $y = f(x)$ e $z = g(y)$, então temos que $z = g(f(x))$, isto é, z como função de x. Portanto, usando

$$dz = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}dy \quad \text{e} \quad dy = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}dx$$

temos

$$dz = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}dy = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}dx,$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Em termos de x temos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x), \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = g'(y) = g'(f(x)) \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (g \circ f)'(x),$$

ou seja, deve valer a identidade

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x),$$

que se chama **regra da cadeia** e provaremos a seguir. Mas antes, alguns exemplos.

Exemplo 3.15.

- Para $z = \cos(2x+3)$ temos $z = \cos(y)$ e $y = 2x+3$. Assim,
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (-\sin(y)) \times 2 = -2\sin(2x+3);$$
- para $z = e^{-x^2}$ tomamos $y = -x^2$ e $z = e^y$. Temos
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^y(-2x) = -2xe^{-x^2};$$
- para $z = a^x$, onde $a > 0$, temos $z = e^{x\log(a)}$. Tomando $y = x\log(a)$, temos
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^y\log(a) = \log(a)a^x;$$
- para $z = x^k$, onde k é real qualquer e $x > 0$, temos que $z = e^{k\log(x)} = e^y$ com $y = k\log(x)$ (relembre isso na Seção 2.4). Utilizando que a derivada de $\log(x)$ é $1/x$, que verificaremos em breve mas que o leitor pode computar tal resultado se quiser (não é difícil), temos
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^y\frac{k}{x} = kx^{k-1}.$$
Logo, a derivada de x^k é kx^{k-1}, generalizando o que vimos na Observação 3.6;
- se $z = 1/\sqrt{1-x^2}$ com $x \in (-1,1)$, então, tomando $z = 1/\sqrt{y} = y^{-1/2}$ e $y = 1-x^2$, temos
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (-1/2)y^{-1/2-1}(-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Proposição 3.16 (Regra da cadeia)**.** Se f e g são diferenciáveis e a imagem de f está contida no domínio de g, então $g \circ f$ é diferenciável e $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}$$

existe e vale $g'(f(a))f'(a)$. Considere $x_n \to a$ com $x_n \neq a$ para todo n. Defina $y_n = f(x_n)$.

1. Se $y_n \neq f(a)$ para n suficientemente grande, então
$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \frac{g(y_n) - g(f(a))}{y_n - f(a)} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \to g'(f(a))f'(a).$$

2. Se $y_n = f(a)$ para n suficientemente grande, então
$$\frac{f(g(x_n)) - f(g(a))}{x_n - a} = 0 = g'(f(a))f'(a),$$
pois $f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = 0$.

3. No caso que sobrou, y_n tem infinitos n's para os quais $y_n \neq f(a)$, denotados por
$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots ,$$
e infinitos n's para os quais $y_n = f(a)$, denotados por
$$m_1 < m_2 < m_3 < \cdots .$$
Por um lado temos
$$\frac{f(g(x_{n_k})) - f(g(a))}{x_{n_k} - a} = \frac{g(y_{n_k}) - g(f(a))}{y_{n_k} - f(a)} \frac{f(x_{n_k}) - f(a)}{x_{n_k} - a} \to g'(f(a))f'(a).$$
Esse limite é zero porque $x_{m_k} \to a$ e $f(x_{m_k}) = f(a)$ para k suficientemente grande, o que garante que $f'(a) = 0$. Assim,
$$\frac{f(g(x_{n_k})) - f(g(a))}{x_{n_k} - a} \to 0.$$
Por outro lado
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(x_{m_k})) - f(g(a))}{x_{m_k} - a} = 0$$
e coincide com $g'(f(a))f'(a) = 0$.

Desta forma, como todo número inteiro positivo é um n_k ou um m_k, temos que dado $\varepsilon > 0$ a desigualdade
$$\left| \frac{f(g(x_n)) - f(g(a))}{x_n - a} \right| < \varepsilon$$
vale para n suficientemente grande. Em outras palavras,
$$\frac{f(g(x_n)) - f(g(a))}{x_n - a} \to 0 = g'(f(a))f'(a).$$

Portanto, não importa qual seja a sequência $x_n \to a$ com $x_n \neq a$ para todo n, temos que
$$\frac{f(g(x_n)) - f(g(a))}{x_n - a} \to g'(f(a))f'(a),$$
ou seja,
$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = g'(f(a))f'(a).$$

■

Exercício 3.17. Calcule as derivadas de

1. $5e^{-x^5}x^4$
2. $\sin^2(x+2)$;
3. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^2e^{-\frac{x^2}{18}}$;
4. $\dfrac{1-x^2}{\sin(x^2)}$.

Exercício 3.18. Prove que se f, g, h são funções diferenciáveis e a composição $h \circ g \circ f$ está bem definida, então essa composta é diferenciável e

$$(h \circ g \circ f)'(x) = h'(g(f(x)))g'(f(x))f'(x).$$

3.4 Teorema da função inversa

3.5 Na busca de máximos e mínimos

Definição 3.19. Considere a função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ contínua definida no intervalo I. Se para $c \in I$ existe $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(c)$ quando $|x - c| < r$, então c é ponto de **máximo local**. Se, por outro lado, existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(c)$ quando $|x - c| < r$, então c é ponto de **mínimo local**.

Definição 3.20. Dizemos que a é um **ponto crítico** de f se $f'(a) = 0$.

A proposição a seguir é o principal critério na busca de máximos e mínimos.

Proposição 3.21. Considere $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável, onde I é um intervalo. Todo ponto de máximo ou mínimo local no interior[1] de I é ponto crítico.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que c é ponto de máximo. Considere uma sequência $x_n \to c$ vindo pela esquerda, como $x_n = c - r/2^n$ por exemplo. Temos que $f(x_n) \leq f(c)$. Temos

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \geq 0$$

porque $f(x_n) - f(c) \leq 0$ e $x_n - c < 0$.

Por outro lado, tomando uma sequência x_n aproximando-se de c pela direita, temos

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \leq 0$$

porque $f(x_n) - f(c) \leq 0$ e $x_n - c > 0$.

Logo, $f'(c) = 0$. ∎

Observação 3.22. Todos os pontos de máximo e mínimo locais são pontos críticos, mas a reciproca não vale.
Primeiramente, podemos encontrar pontos de máximo e mínimos locais de uma função

[1] isso quer dizer o ponto crítico não é um dos possíveis extremos do intervalo.

calculando os zeros da sua derivada. Por exemplo, para a parábola $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, temos que a derivada de y é $2ax + b$ e assim $x = -b/2a$ é candidato para mínimo ou máximo local.

Inspecionando o gráfico de tal curva, temos que a parábola tem sua concavidade voltada para cima quando $a > 0$ e, consequentemente, $-b/2a$ é ponto de máximo. Já para $a < 0$ sua concavidade é voltada, indicando que $-b/2a$ é ponto de máximo.

No entanto, podemos ter derivada nula em pontos onde a função não é nem máximo nem mínimo local. A função $y = x^3$ tem derivada $3x^2$ que se anula em $x = 0$. No entanto, $x = 0$ não é ponto de máximo ou mínimo local. Nesse caso, dizemos que o ponto em questão é de **inflexão**.

Repare também que máximos locais necessariamente não são globais: a função $y = x^3 - 3x + 1$ tem derivada $3x^2 - 3$, cujas raízes são 1 e -1. Note que $x = -1$ é ponto de máximo local pois no entorno desse ponto $f(-1)$ é o maior ponto que f assume. Da mesma forma, $x = 1$ é ponto de mínimo local. No entanto, esses pontos não são máximos e mínimos globais porque a função $y = x^3 - 3x + 1$ nem sequer é limitada:

$$\lim_{x \to \infty} x^3 - 3x + 1 = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x + 1 = -\infty.$$

Vale notar que usando as técnicas da Seção 2.3 podemos encontrar numericamente zeros de f'. Adicionalmente, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então pela Proposição 3.4 ela é contínua e pela Proposição 2.54 ela admite máximo e mínimo. Assim, sempre temos candidatos a máximo e mínimos quando o domínio for um intervalo compacto.

Teorema 3.23 (Teorema de Rolle)**.** Considere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(a) = f(b) = 0$ e suponha que f é diferenciável em (a,b). Existe $c \in (a,b)$ que tal que $f'(c) = 0$.

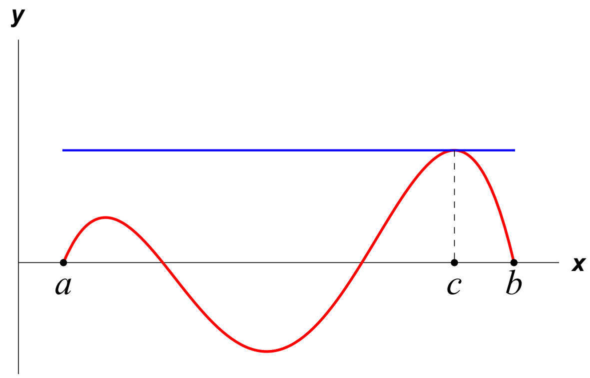

Figura 3.4: *Tangente em c é horizontal: $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Se f for constante e igual a 0, então tome c qualquer entre (a,b). Se f não é constante, então temos que f assume um ponto de máximo e mínimo global pela Proposição 2.54. Como f é não constante, o máximo ou o mínimo de f é não nulo. Podemos supor que o máximo é não nulo e que ocorre em um ponto c. Por ser não nulo, c não é a ou b e pela Proposição 3.21 temos que $f'(c) = 0$. ■

Uma consequência muito importante é a seguinte

Teorema 3.24 (Teorema de Lagrange[2])**.** Se a função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável em (a,b), então há $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

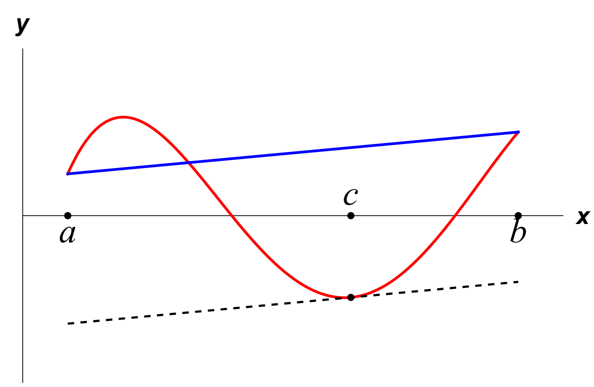

Figura 3.5: *O coeficiente angular da reta azul é $f'(c)$ para algum c entre a e b.*

Demonstração. Considere a função

$$\phi(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x)$$

definida em $[a,b]$ e contínua.

Na Figura 3.5, a reta em azul representa

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

e a curva em vermelho é $f(x)$. Assim, $\phi(x)$ é a diferença entre essas duas funções.

Note que ϕ é diferenciável em (a,b) e $\phi(b) = \phi(a) = 0$. Existe $c \in (a,b)$ pelo teorema de Rolle (3.23) tal que

$$\phi'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(c) = 0.$$

■

[2] Conhecido também como Teorema do valor médio.

Exemplo 3.25. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é crescente. então $f' \geq 0$. De fato, para uma sequência $x_n \to a$ com $x_n \in I \setminus \{a\}$ temos sempre

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \geq 0,$$

pois se $x_n < a$ então $f(x_n) \leq f(a)$ e se $x_n > a$, $f(x_n) \geq f(a)$. Portanto, $f'(a) \geq 0$.

Similarmente, se f é decrescente, $f' \leq 0$.

Se f é estritamente crescente, não há garantia de que f' seja positivo em todo ponto: a função $f(x) = x^3$ é estritamente crescente, mas $f'(0) = 0$. No entanto, a recíproca vale, a derivada ser positiva em todo ponto garante que f é estritamente crescente.

Proposição 3.26. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo I e diferenciável no seu interior. Se $f'(x) > 0$ no interior de I, então f é estritamente crescente.

Analogamente, se $f'(x)$ é negativa no interior de I, então f é estritamente decrescente.

Demonstração. Tome $\alpha < \beta$ em I. Pelo Teorema de Lagrange 3.24, existe $\gamma \in (\alpha, \beta)$ tal que

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\gamma)(\beta - \alpha) > 0$$

de onde segue $f(\beta) > f(\alpha)$. Provando que f é estritamente crescente.

A prova de que f é estritamente decrescente quando f' for negativa é análoga. ■

3.6 Diferenciabilidade de séries de potência

Considere a série de potências

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

com raio de convergência R. Se fossemos derivar f como se fosse um polinômio, deveríamos ter

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\Big) \\
&= \frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}a_1 x}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}a_2 x^2}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}a_3 x^3}{\mathrm{d}x} + \cdots \\
&= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots .
\end{aligned}$$

É necessário verificar que o cálculo acima é válido e esse é o objetivo dessa seção. Mas primeiro, alguns exemplos.

Exemplo 3.27. A derivada da exponencial natural

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

é ela mesma:

$$\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x.$$

Observação 3.28. As séries de potências a seguir têm raio de convergência R:

- $f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + k a_k x^{k-1} + \cdots$,
- $f_2(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots + k(k-1) a_k x^{k-2} + \cdots$.

De fato, o raio de convergência de f_1 se obtém aplicando a Proposição 2.55 a f. Já o raio de convergência de f_2 se obtém aplicando a mesma proposição à série f_1.

Teorema 3.29. A série de potências f é diferenciável e $f' = f_1$.

Demonstração. Pelo Teorema de Lagrange 3.24, existe $\alpha_k \in (0,1)$ tal que

$$(x+h)^k - x^k = k(x + \alpha_k h)^{k-1} h.$$

Aplicando o Teorema de Lagrange de novo, existe $\beta_k \in (0,1)$ tal que

$$(x + \alpha_k h)^{k-1} - x^{k-1} = (k-1)(x + \beta_k \alpha_k h)^{k-2} h.$$

Escrevendo $\gamma_k = \alpha_k \beta_k$, que pertence a $(0,1)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) - f_1(x)h &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k \big((x+h)^k - x^k - k x^{k-1} h\big) \\ &= h^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x + \gamma_k h)^{k-2}. \end{aligned}$$

De onde segue

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x) - f_1(x)h| &\leq h^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) |a_k| |x + \gamma_k h|^{k-2} \\ &= h^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) |a_k| (|x| + |h|)^{k-2}. \end{aligned}$$

A série de potências $\phi(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_k| s^{k-2}$ tem raio de convergência R, porque f_2 tem raio de convergência R e, assim, é absolutamente convergente em cada $s \in (-R, R)$. Em particular, ϕ é contínua. Portanto,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f_1(x) \right| \leq |h| \phi(|x| + |h|) \to 0$$

quando $h \to 0$, de onde segue que $f' = f_1$. ■

3.7 Polinômio e séries Taylor

Considere f definida em um intervalo aberto I e suave. Fixe $a \in I$. O polinômio de Taylor de f com grau n é

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que usaremos para aproximar $f(x)$ perto de a.

Teorema 3.30. Defina a função

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x),$$

conhecida como resto de Lagrange. Fixado x, temos que

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algum número real $\theta \in (0, 1)$.

Demonstração. O fato é trivialmente verdadeiro se $x = a$, pois ambos lados da identidade se anulam e assim qualquer $\theta \in (0, 1)$ funciona. Podemos portanto supor que $x \neq 0$.

Adapta-se o mesmo truque empregado no teorema de Lagrange 3.24. Considere as funções

$$\phi(u) = f(u) + f'(u)(x-u) + \cdots + \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n,$$
$$\psi(u) = (x-u)^{n+1},$$
$$\lambda(u) = \phi(a) + \frac{\phi(x) - \phi(a)}{\psi(x) - \psi(a)}(\psi(u) - \psi(a)) - \phi(u).$$

Repare que $\lambda(a) = \lambda(x) = 0$. Pelo teorema de Rolle 3.23, existe c entre a e x, mas diferente de ambos, tal que

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}u}(c) = 0.$$

Note que os termos na derivada de ϕ se cancelam

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u} = f'(u) + \Big(f''(u)(x-u) - f'(u) \Big) + \Big(\frac{f'''(u)}{2!}(x-u)^2 - f''(u)(x-u) \Big) +$$
$$+ \Big(\frac{f''''(u)}{3!}(x-u)^3 - \frac{f'''(u)}{2!}(x-u)^3 \Big) + \cdots$$
$$\cdots + \Big(\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n - \frac{f^{(n-1)}(u)}{(n-1)!}(x-u)^{n-1} \Big).$$

de onde segue que

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u} = \frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n.$$

Por outro lado, $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}u} = -(n+1)(x-u)^n$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}u}(c) &= \frac{\phi(x) - \phi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}u}(c) - \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u}(c) \\
&= \frac{f(x) - p_n(x)}{-(x-a)^n}\big(-(n+1)(x-c)^n \big) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \\
&= \frac{r_n(x)}{(x-a)^n}(n+1)(x-c)^n - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n,
\end{aligned}$$

que vale zero. Assim, igualando a última expressão acima a zero e isolando r_n obtemos

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

onde tomamos $\theta = (c-a)/(x-a)$, que pertence a $(0, 1)$. ∎

Trocando $x - a$ por h obtemos a fórmula mais bonita

$$p_n(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

Capítulo 4

Séries de potência

4.1 Séries numéricas

Já estabelecemos o conceito de série na Definição 1.18 a fim de, principalmente, estabelecer o número e e a função exponencial. Estudemos o assunto com mais afinco agora. No Exemplo 1.19 vimos a série geométrica, que é a mais importante das séries. Para $a \in (-1, 1)$ ela é dada por

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a}.$$

Vimos, ao fim da Seção 1.6, a série que define e^x, a exponencial natural,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Esse é um exemplo de série de potências: "um polinômio de grau infinito". O número de Euler e ocorre para $x = 1$

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Também foi visto todo número real se escreve no sistema decimal (Seção 1.1), que é uma expansão do número em uma série.

Existem vários critérios para certificar que uma série converge. Quase todos eles são obtidos da convergência da série geométrica. Assim sendo, ao invés de passar testes prontos, mostrarei como usar a série geométrica de jeito eficaz, pois isso é de fato o que importa mais. Mas primeiro, estabeleçamos notação. Ao invés de escrever $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, o que é um tanto longo, denotaremos tal soma por $\sum_{i=1}^{n} a_i$, que matemáticos chamam de somatório. O índice i está ali simbolizado apenas para indicar que estamos somando os termos a_i com $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Já uma série $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ com seus infinitos termos é denotada por $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Mais precisamente, definimos

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Segue das propriedades de sequências que

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

quando $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ convergem, onde λ é um número real.

A maior parte das séries com que lidamos na prática são absolutamente convergentes, pois essas são as mais fáceis de lidar.

Exercício 4.1. Mostre que $a_k \to 0$ quando a série é convergente.

Definição 4.2. Uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é absolutamente convergente se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge.

Proposição 4.3. Se a série é absolutamente convergente, então ela é convergente.

Demonstração. Considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ provida pelas somas $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e mostremos que tal sequencia é de Cauchy. Para $m < n$

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k|$$

e para $n < m$

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

De todo modo, dado $\varepsilon > 0$, temos $|s_n - s_m| < \varepsilon$ para m, n suficientemente grandes. Assim, s_k é de Cauchy e, consequentemente, converge. ■

Para averiguar que uma série em particular converge, mostramos que a sequência que a define é de Cauchy.

Exemplo 4.4. Mostremos que a série converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Definindo $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ com $a_k = \frac{k}{2^k}$, temos que para $m < n$

$$|s_n - s_m| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n|$$

Como

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)2^k}{k2^{k+1}} = 1/2,$$

temos que para k suficientemente grande $|a_{k+1}| < \frac{1}{2}|a_k|$: existe N tal que $|a_{k+1}| < \frac{1}{2}|a_k|$ para $k \geq N$. Assim, para $m, n > N$ com $n > m$ temos

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |a_N|\frac{1}{2^{m+1-N}} + |a_N|\frac{1}{2^{m+2-N}} + \cdots + |a_N|\frac{1}{2^{n-N}} \\
&= \frac{|a_N|}{2^{m+1-N}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1+N}}\right) \\
&\leq \frac{|a_N|}{2^{m+1-N}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1+N}} + \cdots\right) \\
&= \frac{|a_N|}{2^{m+1-N}} \times 2 = 2^N|a_N|\frac{1}{2^m},
\end{aligned}$$

onde usamos que $|a_k| \leq \frac{1}{2^{k-N}}|a_N|$ para $k \geq N$.

Similarmente, para $n < m$, ambos maiores que N, temos

$$|s_m - s_n| < 2^N|a_N|\frac{1}{2^n},$$

que tende a zero conforme aumentamos m e n. Repare que o número N é fixado a priori e não depende de m ou n.

De qualquer modo, dado $\varepsilon > 0$, temos $|s_n - s_m| < \varepsilon$ para n e m suficientemente grandes. Assim, s_k é de Cauchy e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

converge. Embora sabemos que a série converge (e absolutamente convergente, já que seus coeficientes são positivos), determinar seu valor numérico explicito é muito difícil em geral. Por isso sequências de Cauchy são importantes, pois garantem que tais limites existem mesmo que não saibamos seu valor.

Verifiquemos que o argumento acima vale em geral.

Proposição 4.5. Se temos a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

onde a_k é não nulo para k suficientemente grande e o limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

existe e é menor que 1, então repetindo o argumento acima temos que a série converge absolutamente. Esse teste de convergência se chama **teste da razão**.

Demonstração. Como o limite do enunciado vale menos que 1 temos que para r satisfazendo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < r < 1$$

temos $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < r$ para k suficientemente grande: Existe N tal que $|a_{k+1}| \leq r|a_k|$ para $k \geq N$. Em particular $|a_k| \leq r^{k-N}|a_N|$ para $n \geq N$. Portanto, se $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$, então para $n < m$, ambos maiores que N, temos

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |a_N|r^{m+1-N} + |a_N|r^{m+2-N} + \cdots + |a_N|r^{n-N} \\
&= |a_N|r^{m+1-N}\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-m-1+N}\right) \\
&\leq |a_N|r^{m+1-N}\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots\right) \\
&= |a_N|r^{m+1-N}\frac{1}{1-r} = \frac{|a_N|r^{1-N}}{1-r}r^m.
\end{aligned}
$$

Similarmente, para $n < m$, ambos maiores que N, temos

$$
|s_m - s_n| < \frac{|a_N|r^{1-N}}{1-r}r^n.
$$

Daí, concluímos que s_n é de Cauchy e a sequência converge absolutamente. ■

Aplicando o teste da razão, podemos provar também que

$$
e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}
$$

converge para todo x. De fato, a série obviamente converge para 1 se $x = 0$ e para $x \neq 0$ aplicamos o teste da razão com $a_k = x^k/k!$ assim obtendo

$$
\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!|x|^{k+1}}{(k+1)!|x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k} = 0
$$

que é menor que 1. Assim, o teste da razão nos garante que a série definindo a exponencial natural converge absolutamente.

Referências Bibliográficas

[Cou] Richard Courant. Differential and Integral Calculus Volume 1. Wiley. 1937.

[Lag] Elon Lages Lima. Análise Real Volume 1. IMPA, 10ł edição. 2009.

[FKo] Galina Filipuk e Andrzej Kozlowski. Analysis With Mathematica. De Gruyter. 2019.

[Pis] Nikolai Piskunov. Calculo Diferencial e Integral Tomo I. MIR, 3ł edição. 1977.

[Rud] Rudin, Walter. Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill, 3ł edição. 1976.

[Sta] Saul Stahl. Real Analysis: A Historical Approach. Wiley, 2ł edição. 2011.

[Zor] Vladimir Zorich. Mathematical Analysis I. Springer, 2ł edição. 2016.