

# Cálculo em construção

Hugo Cattarucci Botós (ICMC - USP)  
[hugobotos@gmail.com](mailto:hugobotos@gmail.com)

Última atualização em 5 de janeiro de 2023

Copyright © 2023 de Hugo Cattarucci Botós. Autorizo reprodução e distribuição do texto para fins não-lucrativos desde que a autoria seja citada. Se encontrar erros, agradeço se me notificar via e-mail: [hugobotos@gmail.com](mailto:hugobotos@gmail.com).

# Sumário

<b>1</b>	<b>Números reais</b>	<b>3</b>
1.1	Base decimal . . . . .	3
1.2	Sequência e convergência . . . . .	8
1.3	Sequências convergentes . . . . .	13
1.4	Sequências divergentes . . . . .	15
1.5	Aritmética dos infinitos . . . . .	17
1.6	Sequências de Cauchy, completude e o número de Euler . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Continuidade</b>	<b>25</b>
2.1	Limite de funções . . . . .	26
2.2	Funções contínuas . . . . .	34
2.3	Funções contínuas em intervalos: zeros de funções . . . . .	38
2.4	Exponencial natural . . . . .	43
2.5	Máximos e mínimos de funções contínuas . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Cálculo diferencial</b>	<b>49</b>
3.1	Introdução informal com infinitesimais e cálculo de reta tangente . . . . .	49
3.1.1	Velocidade e aceleração . . . . .	49
3.1.2	Reta tangente . . . . .	52
3.2	Formalização e regras básicas . . . . .	54
3.3	Derivada da composta: Regra da cadeia . . . . .	58
3.4	Teorema de função inversa . . . . .	60



# Capítulo 1

## Números reais

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk. <sup>1</sup>

Leopold Kronecker

René Descartes pensou ser uma boa ideia representar pontos de um plano usando eixos coordenados, que costumeiramente chamamos de eixo  $x$  e eixo  $y$ . Não seria exagero dizer que a partir daí os números reais se tornaram centrais na matemática, pois esses aritmetizaram a geometria, tópico de grande interesse dos matemáticos desde a antiguidade.

### 1.1 Base decimal

Por termos dez dedos nas mãos, utilizamos o sistema decimal para representar números. Os números naturais são

0 1 2 3 4 5 6 7 ...

e formam o conjunto denotado por  $\mathbb{N}$ .



**Figura 1.1:** *Números naturais*

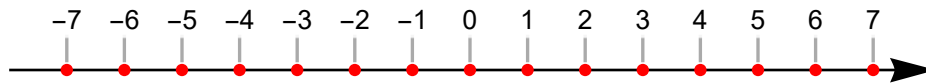
Representar um número natural no sistema decimal significa escrevê-lo usando potências de dez:  $10^0 = 1$ ,  $10^1 = 10$ ,  $10^2 = 100$ ,  $10^3 = 1000$ , etc. Por exemplo, ao escrevermos 11, queremos dizer que esse número é  $1 \times 10^0 + 1 \times 10^1$ . O número 12 é  $2 \times 10^0 + 1 \times 10^1$ . Já 2022 é  $2 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^3$ . De forma geral, o número  $a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0$ , onde os dígitos  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$  são números naturais de 0 a 9, é

$$a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + a_3 \times 10^3 + \dots + a_k \times 10^k.$$

Adicionando os negativos dos números naturais à nossa lista de números, obtemos os inteiros, que formam o conjunto  $\mathbb{Z}$ .

---

<sup>1</sup>Deus criou os números inteiros, todo o resto é obra do homem.



**Figura 1.2:** *Números Inteiros*

Denotamos o conjunto dos inteiros positivos  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$  por  $\mathbb{Z}_{>0}$ , onde o subscrito  $> 0$  nos diz que consideramos apenas os elementos de  $\mathbb{Z}$  maiores que zero.

Números racionais são frações  $m/n$ , onde  $m$  e  $n$  são inteiros e  $n \neq 0$ , e formam o conjunto  $\mathbb{Q}$ . A fim de representar frações positivas no sistema decimal, utilizamos as potências de 10 com expoente inteiros

$$\dots 10^3, \quad 10^2, \quad 10^1, \quad 10^0, \quad 10^{-1}, \quad 10^{-2}, \quad 10^{-3} \dots$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} 10^{-1} &= \frac{1}{10} = 0.1, & 10^{-4} &= \frac{1}{10000} = 0.0001, \\ 10^{-2} &= \frac{1}{100} = 0.01, & 10^{-5} &= \frac{1}{100000} = 0.00001, \\ 10^{-3} &= \frac{1}{1000} = 0.001, & 10^{-6} &= \frac{1}{1000000} = 0.000001, \end{aligned}$$

e assim por diante.

**Exemplo 1.1.**

- $1/4 = 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 0.25$  ;
- $2/5 = 4 \times 10^{-1} = 0.4$ ;
- $90/8 = 1 \times 10 + 1 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 11.25$ .

Já  $1/3$  é  $0.3333\dots$  com infinitos 3's aparecendo em sua representação.

$$\frac{1}{3} = 3 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} + \dots$$

Algo similar ocorre com  $1/7$ . Calculemos seus dígitos. A ideia é trocar frações menores que 1 por maiores que 1 multiplicando por 10 em cima e em baixo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= \frac{10}{7} \times 10^{-1} \\ &= 10^{-1} + \frac{3}{7} \times 10^{-1} \\ &= 10^{-1} + \frac{30}{7} \times 10^{-2} \\ &= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + \frac{2}{7} \times 10^{-2} \\ &= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + \frac{20}{7} \times 10^{-3} \\ &= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + \frac{6}{7} \times 10^{-3} \\ &= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + \frac{60}{7} \times 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + \frac{4}{7} \times 10^{-4} \\
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + \frac{40}{7} \times 10^{-5} \\
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-5} + \frac{5}{7} \times 10^{-5} \\
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-5} + \frac{50}{7} \times 10^{-6} \\
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-5} + 7 \times 10^{-6} + \frac{1}{7} \times 10^{-6}
\end{aligned}$$

As frações menores que 1 destacadas em vermelho nos cálculos acima seguem um padrão: elas se repetem. Começamos com  $1/7$  e obtemos o ciclo de frações

$$\frac{1}{7} \rightarrow \frac{3}{7} \rightarrow \frac{2}{7} \rightarrow \frac{6}{7} \rightarrow \frac{4}{7} \rightarrow \frac{5}{7} \rightarrow \frac{1}{7}$$

Porque essas frações eventualmente começam a se repetir, temos que ao continuarmos o procedimento acima obteremos  $\frac{1}{7} = 0.\textcolor{red}{142857}142857142857142857142857\cdots$  com uma lista de dígitos repetindo-se periodicamente. Isso sempre ocorre para frações, suas representações em base 10 tem uma lista de dígitos que se repete. Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = 0.5\textcolor{red}{00000000}\cdots$$

$$\frac{1}{11} = 0.\textcolor{red}{09}090909090909\cdots$$

$$\frac{12}{13} = 0.\textcolor{red}{923076}923076\cdots$$

O padrão repetido pode não surgir de imediato. Na fração

$$\frac{7}{12} = 0.58\textcolor{red}{333333333333}\cdots,$$

por exemplo, o 58 não faz parte da lista de dígitos que se repete. No entanto, a partir de certo ponto, o dígito 3 passa a se repetir.

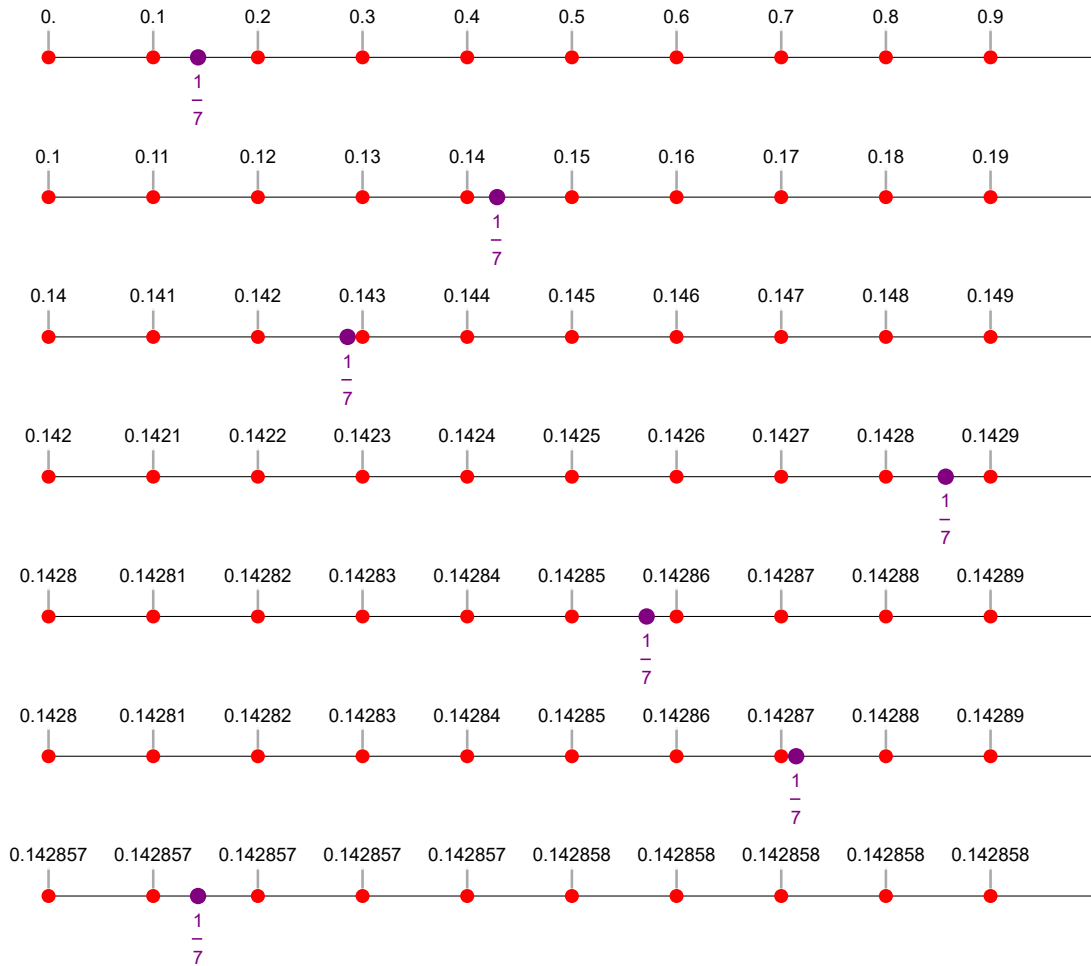
Geometricamente, o procedimento descrito se manifesta da seguinte maneira: se temos uma fração  $r > 0$ , tome  $q$  como sendo o maior número natural menor que ou igual a  $r$ . Tome  $a_{-1}$  como sendo o maior número natural tal que  $q + a_{-1} \times 10^{-1} \leq r$ . Como  $0 \leq r - q < 1$ ,  $a_{-1}$  tem de ser um número natural de 0 a 9. Similarmente,  $a_{-2}$  é o maior número natural satisfazendo  $q + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} \leq r$ . Como  $0 \leq r - (q + a_{-1} \times 10^{-1}) < 10^{-1}$ , o número  $a_{-2}$  é um natural de 0 a 9. Repetindo tal algoritmo, obtemos

$$q + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \cdots + a_{-n} \times 10^{-n} \leq r$$

com a diferença entre esses dois números sendo menor que  $10^{-n}$ . Os cálculos para  $1/7$  feitos anteriormente podem ser vistos geometricamente de acordo com a Figura 1.3 a seguir. Observe que os intervalos em preto vão ficando cada vez menor. O primeiro segmento em

preto tem comprimento 1, o segundo tem comprimento  $10^{-1}$ , o terceiro tem comprimento  $10^{-2}$ , etc.

O padrão de repetição descrito anteriormente aparece na figura a seguir da seguinte forma. O ponto em roxo oscila entre os intervalos delimitados por pontos vermelhos, até que volta novamente para o segundo intervalo (da esquerda para direita).



**Figura 1.3:** Fração  $1/7$  na base 10

Voltando ao caso geral. Como  $10^{-n}$  decresce conforme  $n$  cresce, temos que a soma de infinitos termos

$$q + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \cdots + a_{-n} \times 10^{-n} + \cdots$$

é igual a  $r$ .

Como  $q$  é um natural positivo,

$$q = a_0 + a_1 \times 10 + \cdots + a_l \times 10^l,$$

ou seja,

$$r = a_l \times 10^l + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \cdots + a_{-k} \times 10^{-n} + \cdots,$$



que escrevemos abreviadamente como sendo

$$r = a_l a_{l-1} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots .$$

O mesmo método de aproximação funciona se  $r$  for um número irracional positivo (como  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  e  $\pi$ ). Você sempre consegue escrevê-lo no sistema decimal seguindo o mesmo algoritmo descrito. Se o número for racional, essa representação apresenta um padrão que se repete periodicamente. Reciprocamente, se um número apresenta uma lista de número que se repete periodicamente, então esse deve ser racional. Verificar tal afirmação, que não farei, segue de generalizar o exemplo a seguir.

**Exemplo 1.2.** Se  $r = 0.3142323232323232 \cdots$ , então temos

$$r - 0.314 = 0.0002323232323232 \cdots$$

e multiplicando por  $10^2$  obtemos

$$100r - 31.4 = 0.02323232323232 \cdots = 0.023 + 0.00023232323232 \cdots = 0.023 + (r - 0.314),$$

$$r = \frac{31.109}{99} = \frac{31109}{99000},$$

que é racional.

Desta forma, um número irracional não possui uma lista de dígitos consecutivos que se repete periodicamente.

**Exemplo 1.3.** O número irracional

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769 \dots$$

não apresenta um padrão em seus dígitos que se repete periodicamente.

Até então, representamos decimalmente apenas números positivos. Se o número real  $r$  for negativo, então podemos escrever  $-r$  na representação decimal e depois colocar um  $-$  na frente. Por exemplo,  $-3/4 = -0.75$  porque  $3/4 = 0.75$ . Mais precisamente, se  $r$  for negativo, podemos aproximar  $s = -r$  por termos  $s_n$  e definindo  $r_n = -s_n$  temos  $|r - r_n| < 10^{-n}$ .

Os números  $r'_n$ s construídos são racionais independentemente se  $r$  é real ou somente racional. Assim, como para todo  $r$  real temos  $|r - r_n| < 10^{-n}$ , podemos aproximar qualquer número por um racional com a precisão que quisermos.

**Exemplo 1.4.** Para o número

$$\sqrt{3} = 1.7320508075688772935274463415058723669428052538104 \cdots ,$$

temos

$$|\sqrt{3} - 1| < 1$$

$$|\sqrt{3} - 1.7| < 0.1$$

$$|\sqrt{3} - 1.73| < 0.01$$

$$|\sqrt{3} - 1.732| < 0.001$$

e assim por diante.

**Observação 1.5.** O procedimento descrito anteriormente nos dá uma representação decimal para qualquer número. No entanto, certos números têm duas representações decimais. Por exemplo,

$$1 = 1.0000 \dots = 0.9999 \dots$$

A primeira representação é a fornecida pelo algoritmo que descrevemos. Por outro lado,  $0.9999 \dots$  de fato outra é representação de 1, pois

$$\begin{aligned} 0.9999 &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots \\ &= \frac{1}{1-1/10} = \frac{10}{9} \\ &= \frac{9}{10} \left( 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Esse fenômeno ocorre apenas quando o número tem uma representação decimal finita:

$$0.1 = 0.09999 \dots \quad 12.7 = 12.69999 \dots \quad 0.219 = 0.2189999 \dots$$

**Nota histórica 1.6.** Os matemáticos indianos do primeiro milênio d.C. conheciam o zero, números negativos e o sistema decimal para números naturais. Como fazemos hoje, mas, é claro, com outra simbologia. Também expressavam números racionais como frações. Comparado com a forma que os gregos e romanos representavam números, eles estavam anos-luz a frente. Imagine só fazer aritmética com número romanos. Tais ideias adentraram o mundo árabe e persa, onde foram absorvidas e aprofundadas. O sistema numérico indo-arábico adentrou a Europa no século XIII com o nascente comércio entre essa e o oriente médio. No final século XVI, o matemático belga Simon Stevin introduziu a representação de números reais no sistema decimal, um enorme avanço, por ser uma forma concisa de representar números com precisão.

## 1.2 Sequência e convergência

**Definição 1.7.** Uma sequência  $r_n$  é uma lista de números reais indexada por números inteiros positivos.

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$$

**Exemplo 1.8.**

- Os  $r'_n$ s construídos para a representação decimal de um número real  $r$  formam uma sequência de números racionais;
- outros exemplos básicos de sequências são

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{n^2 + 2}{n}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

onde ! denota o fatorial<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Lembre-se que  $0! = 1$  por definição e  $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ .

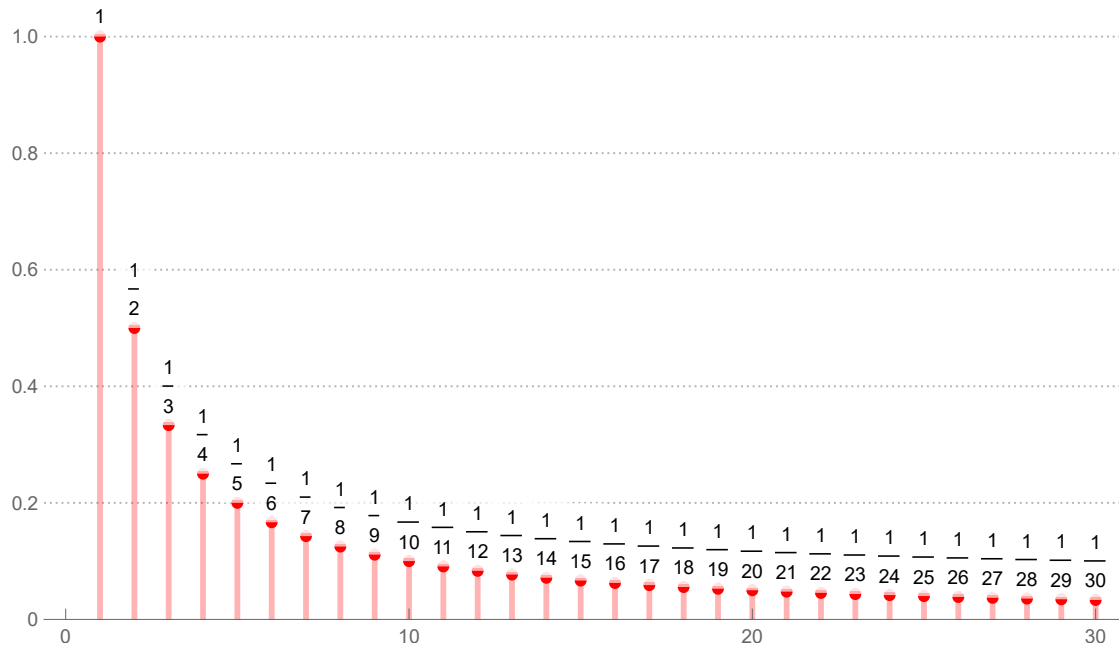
**Definição 1.9.** Uma sequência  $r_n$  converge para o número real  $r$  se para  $\varepsilon > 0$  temos que  $|r - r_n| < \varepsilon$  para  $n$  suficientemente grande: existe um inteiro suficientemente grande  $N$  tal que  $|r - r_n| < \varepsilon$  quando  $n > N$ .

Geometricamente, isso quer dizer que não importa quão pequeno seja o  $\varepsilon > 0$ ,  $r_n$  fica dentro de  $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$  a partir de algum  $n$ .

Frequentemente **dizemos que  $r_n$  tende a  $r$  ou tende para  $r$**  e denotamos esse fato por

$$r_n \rightarrow r \quad \text{ou por} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r.$$

O número  $r$  é o **limite** de  $r_n$ .



**Figura 1.4:** Sequência  $r_n = \frac{1}{n}$

**Exemplo 1.10.** A sequência  $r_n = 1/n$  tende a 0 (veja a Figura 1.4). De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , tão pequeno quanto se queira, temos que  $|r_n| < \varepsilon$  para  $n$  suficientemente grande. Isso mostra que  $r_n \rightarrow 0$ .

Mais formalmente, tome  $N$  suficientemente grande<sup>3</sup> satisfazendo  $1/N < \varepsilon$ . Para  $n > N$  temos que

$$|0 - r_n| = 1/n < 1/N < \varepsilon,$$

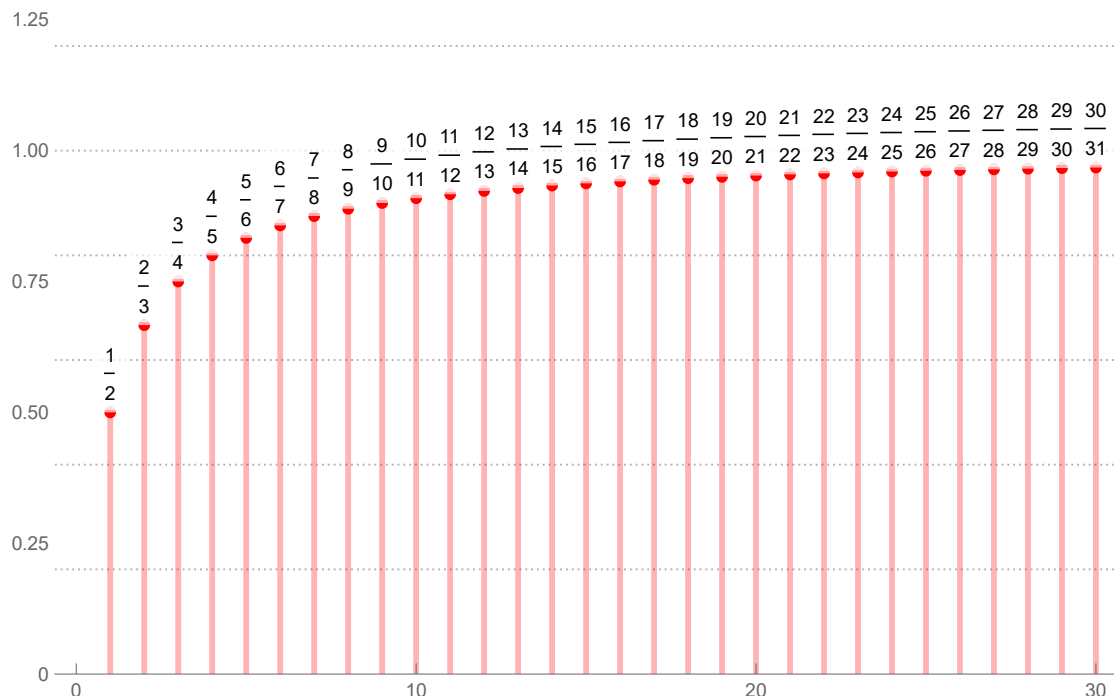
ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**Observação 1.11.** Gráficos como na Figura 1.4 podem ser feitos no software **Mathematica**. De fato, todas figuras desse livro foram feitas no Mathematica. Uma versão online básica e gratuita se encontra no Wolfram cloud <https://wolframcloud.com/>. Para fazer

<sup>3</sup> $N$  pode ser um inteiro positivo qualquer maior que  $1/\varepsilon$

gráficos de seqüências, usa-se o comando **DiscretePlot**. O gráfico na Figura 1.4 (com menos enfeites) é gerado pelo comando `DiscretePlot[1/n, {n, 1, 30}]`. A documentação da linguagem Wolfram encontra-se em <https://reference.wolfram.com/language>. Há também bastante informação disponível em <https://mathematica.stackexchange.com>. Para uma introdução ao Mathematica voltada à análise real (um nome chique para cálculo), veja o fascinante livro **Analysis With Mathematica** de G. Filipuk e A. Kozłowski [FKo].



**Figura 1.5:** Sequência  $r_n = \frac{n}{n+1}$

**Exemplo 1.12.** Considere  $r_n = \frac{n}{n+1}$  (veja Figura 1.5). Essa seqüência converge para 1. De fato,

$$1 - r_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

$$r_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Como  $1/(n+1) \rightarrow 0$ , temos que  $r_n \rightarrow 1$ . Mais precisamente, dado  $\varepsilon > 0$ , temos que

$$|1 - r_n| = \frac{1}{1+n} < \varepsilon$$

para  $n$  suficientemente grande<sup>4</sup>. Portanto,  $r_n \rightarrow 1$ .

<sup>4</sup>Sendo extremamente formal: para  $\varepsilon > 0$  tome  $N$  tal que  $1/(N+1) < \varepsilon$ . Daí temos que

$$|r_n - 1| = \frac{1}{1+n} < \frac{1}{1+N} < \varepsilon$$

quando  $n > N$ .

**Observação 1.13.** A fim de calcular o limite de uma sequência computacionalmente no Mathematica, utilizamos o comando `Limit[n/(n+1), n->Infinity]`.

**Lembrete 1.14** (Binômio de Newton). Para  $n$  natural e  $x$  real,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n,$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

**Exemplo 1.15.** Mostremos que se  $0 < a < 1$ , então  $a^n \rightarrow 0$  (veja Figura 1.6). Como  $0 < a < 1$ , temos que  $a^{-1} > 1$ . Tomando  $b = a^{-1} - 1$ , que é positivo, temos  $1/a = 1 + b$ . Pelo binômio de Newton (veja Lembrete 1.14),

$$(1+b)^n \geq \binom{n}{0}b^0 + \binom{n}{1}b^1 = 1 + nb,$$

ou seja,

$$\frac{1}{a^n} = (1+b)^n \geq 1 + nb.$$

Daí segue que

$$a^n \leq \frac{1}{1 + nb},$$

e o resultado desejado.

De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , temos

$$a^n \leq \frac{1}{1 + nb} < \frac{1}{1 + Nb} < \varepsilon$$

para  $n$  suficientemente grande. Logo,  $a^n \rightarrow 0$ .

**Exemplo 1.16.** Na mesma linha do exemplo anterior, mostremos que se  $0 < a < 1$ , então  $na^n \rightarrow 0$ . Pelo mesmo truque do binômio de Newton, com  $b = a^{-1} - 1 > 0$ , temos

$$\frac{1}{a^n} = (1+b)^n \geq 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 = 1 + n \left( b - \frac{b^2}{2} \right) + \frac{n^2b^2}{2},$$

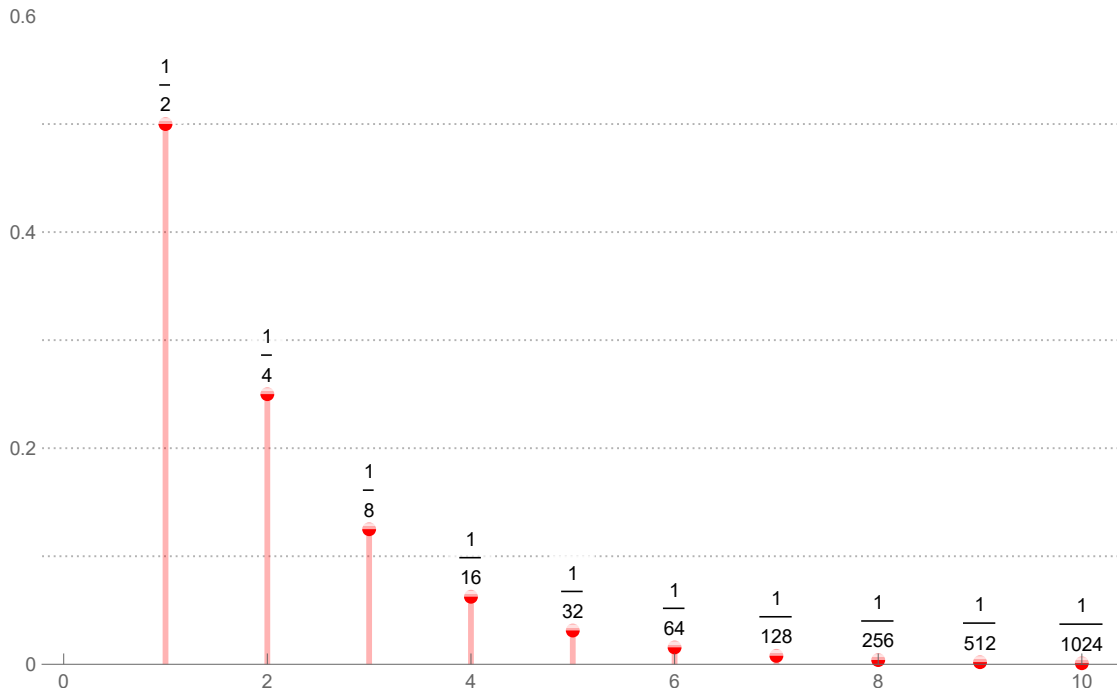
para  $n \geq 2$ . Daí segue que

$$|na^n| \leq \frac{n}{1 + n \left( b - \frac{b^2}{2} \right) + \frac{n^2b^2}{2}} = \frac{2}{\left( \frac{2}{n^2} + \frac{(2b-b^2)}{n} + b^2 \right)} \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

pois

$$\frac{2}{n^2} + \frac{(2b-b^2)}{n} + b^2 \rightarrow b^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Por argumento similar,  $n^k a^n \rightarrow 0$  para qualquer número natural  $k$ . Isso quer dizer que  $a^n$  tende a zero rápido demais, mais rápido que  $1/n^k$ .



**Figura 1.6:** Sequência  $r_n = \frac{1}{2^n}$

**Observação 1.17.** O comando

```
Limit[a^n, n -> Infinity, Assumptions -> 0 <= a < 1]
```

retorna o número 0 no Mathematica. A parte `Assumptions -> 0 <= a < 1` declara à máquina que estamos assumindo  $0 \leq a < 1$ . Similarmente, usando `Assumptions -> a > 1`, obtemos  $\infty$ .

**Definição 1.18.** Se  $s_n = a_1 + \cdots + a_n$  é definido a partir da soma de termos  $a_k$ 's, então denotamos o limite de  $s_n$ , se esse existir, por

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Chamamos essa soma de infinitos termos de **série**.

**Exemplo 1.19.** A sequência

$$s_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$

converge para  $1/(1 - a)$  quando  $-1 < a < 1$ . Em outras palavras, a **série geométrica dada por  $a$**

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$$

vale  $1/(1 - a)$ , o que é conhecido da escola.

O truque para mostrar isso é multiplicar  $s_n$  por  $a$ :

$$s_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n \quad \text{e} \quad as_n = a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^{n+1},$$

de onde segue que

$$s_n - as_n = 1 - a^{n+1}$$

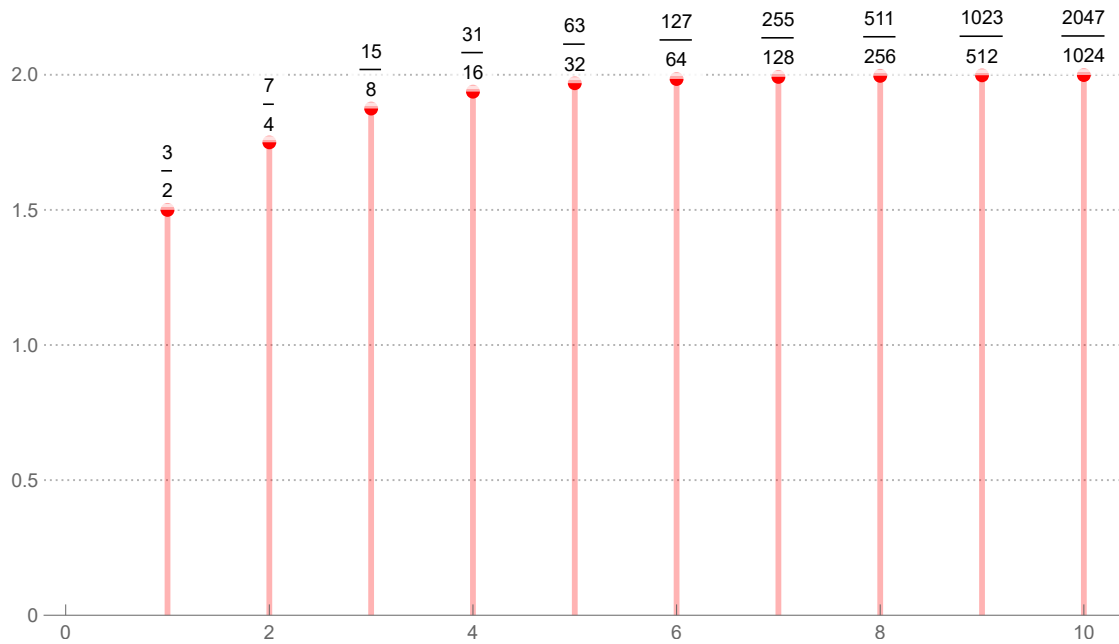
e, conseqüentemente,

$$s_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a}.$$

Como  $0 < |a| < 1$ , o termo  $a^{n+1}$  na expressão acima tende a zero e  $s_n \rightarrow 1/(1 - a)$ . Portanto,

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1 - a}.$$

**Observação 1.20.** Para somarmos séries no Mathematica usamos o seguinte comando `Sum[1/n^2,{n,1,Infinity}]`, que computa a soma dos termos  $1/n^2$  com  $n$  indo de 1 a infinito. O Mathematica nos fornece  $\pi^2/6$ , que de fato é a resposta correta.



**Figura 1.7:** Sequência  $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$  tende a  $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ .

**Exemplo 1.21.** Para os  $r'_n$ s que construímos ao representarmos  $r$  na base decimal, temos que  $|r - r_n| < 10^{-n}$ . Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $N$  inteiro suficientemente grande para o qual  $10^{-N} < \varepsilon$ . Desta forma, temos que  $|r - r_n| < 10^{-n} < 10^{-N} < \varepsilon$  para  $n > N$ . Em outras palavras, temos que  $r_n$  tende para  $r$ .

### 1.3 Sequências convergentes

Nessa seção, assumiremos que os limites das sequências sejam finitos (isto é, não são  $\pm\infty$ ). Começemos provando que sequências convergentes são limitadas.

**Proposição 1.22.** Se  $r_n \rightarrow r$ , então  $r_n$  é limitada.

**Demonstração.** Para  $\varepsilon = 1$ , existe  $N$  tal que  $|r_n - r| < 1$  para  $n > N$ . Somente para finitos  $n$ 's a distância de  $r_n$  a  $r$  não é menor que 1. Logo,  $r_n$  é limitada. ■

**Proposição 1.23.** Suponha  $r_n \rightarrow r$  e  $s_n \rightarrow s$ .

1. Se  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então  $\alpha r_n \rightarrow \alpha r$ ;
2.  $r_n + s_n \rightarrow r + s$ ;
3.  $r_n s_n \rightarrow rs$ .

**Demonstração.** 1. Dado  $\varepsilon > 0$  temos  $|r - r_n| < \varepsilon$  para  $n$  suficientemente grande. De onde segue que

$$|\alpha r - \alpha r_n| = |\alpha| |r - r_n| \leq |\alpha| \varepsilon,$$

provando o primeiro item, pois podemos tomar  $|\alpha| \varepsilon$  tão pequeno quanto for necessário.

2. Para  $\varepsilon > 0$  temos

$$|r - r_n| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |s - s_n| < \varepsilon$$

quando  $n$  for suficientemente grande. Assim,

$$|r + s - r_n - s_n| = |(r - r_n) + (s - s_n)| \leq |r - r_n| + |s - s_n| < 2\varepsilon,$$

provando o segundo item.

3. O terceiro item é o mais complicado. Como  $r_n$  é limitada, existe  $M > 0$  tal que  $|r_n| \leq M$ . Para  $\varepsilon > 0$ , as desigualdades

$$|r - r_n| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |s - s_n| < \varepsilon$$

valem para  $n$  suficientemente grande. Daí obtemos

$$|rs - r_n s_n| = |s(r - r_n) + (s - s_n)r_n| \leq |s| |r - r_n| + |s - s_n| |r_n| \leq \varepsilon(|s| + M).$$

Como  $\varepsilon(|s| + M)$  pode ser tomado tão pequeno quanto necessário (fazendo  $\varepsilon$  pequeno) temos que o terceiro item é válido. ■

**Exemplo 1.24.**

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = 1;$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n + 100)^3}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 4 + \frac{100}{n} \right)^3 = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \frac{100}{n} \right)^3 = 4^3 = 64.$

**Proposição 1.25.** Se  $s_n \rightarrow s$  com  $s \neq 0$ , então

1.  $|s_n| > |s|/2$  para  $n$  suficientemente grande. Em particular, a partir de algum  $n$  a sequência não se anula;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}.$



**Demonstração.** Provemos o primeiro item. Como  $s \neq 0$ , o número  $\varepsilon = |s|/2$  é positivo. Assim, para  $n$  suficientemente grande  $|s - s_n| < |s|/2$ . Como

$$|s| = |(s - s_n) + s_n| \leq |s - s_n| + |s_n| \leq |s_n| + \frac{|s|}{2},$$

temos

$$|s_n| \geq |s|/2 > 0$$

para  $n$  suficientemente grande.

Provemos o segundo item. Para  $\varepsilon > 0$ , devido ao primeiro item,

$$|s_n - s| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |s_n| > |s|/2$$

para  $n$  suficientemente grande.

Logo,

$$\left| \frac{1}{s} - \frac{1}{s_n} \right| = \frac{|s_n - s|}{|s||s_n|} \leq \frac{2\varepsilon}{|s|^2} \rightarrow 0,$$

nos garantindo  $s_n^{-1} \rightarrow s^{-1}$ . ■

**Exemplo 1.26.**

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n^3 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n^2}} = 0.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - 1)(\sqrt{n+1} + 1)}{n(\sqrt{n+1} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + 1)}$

que vale 1 porque

$$\frac{n}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \rightarrow 1$$

**Exercício 1.27.** Calcule os limites

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(2n+3)}{5n^3+1}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|100-n|}{|150-n|}$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1+\cos(n^{21}+7))}{n}$

**Exercício 1.28.** Considere  $a \in \mathbb{R}$  e uma sequência convergente  $x_n \rightarrow x$ . Prove que se  $x_n \leq a$  para todo  $n$ , então  $x \leq a$ .

Dica: Use a ideia empregada ao mostramos o primeiro item da proposição 1.25.

Analogamente, se  $x_n \geq a$ , então  $x \geq a$ .

## 1.4 Sequências divergentes

Uma sequência divergente é aquela que não converge para um número real.

**Exemplo 1.29.** A sequência  $r_n = (-1)^n$  diverge porque fica oscilando entre 1 e  $-1$  conforme  $n$  cresce.

**Exemplo 1.30.** As seqüências  $n$ ,  $-n^2$ ,  $n + \frac{1}{n}$  divergem porque vão para  $\infty$  ou  $-\infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Definição 1.31.** A seqüência  $r_n$  tende para  $\infty$  se para cada  $R > 0$  existe  $N$  tal que  $r_n > R$  para  $n > N$ . Em bom português, isso quer dizer que não importa quão grande queremos  $r_n$ , isso ocorre desde que  $n$  seja suficientemente grande. Nesse caso escrevemos

$$r_n \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty.$$

Analogamente,  $r_n$  tende para  $-\infty$  se para cada  $R > 0$  existe  $N$  tal que  $r_n < -R$  para  $n > N$ . Denotamos esse segundo caso por

$$r_n \rightarrow -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = -\infty.$$

**Exemplo 1.32.** Para  $a > 1$  temos que  $a^n \rightarrow \infty$ . De fato, tomando  $b = a - 1 > 0$ , temos  $a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb$ . Para  $R > 0$  tão grande quanto quisermos, existe  $N$  satisfazendo  $1 + Nb > R$ , de onde segue que para  $n > N$  vale  $a^n > R$ . Desta forma,  $a^n \rightarrow \infty$ .

**Observação 1.33.** Pode ser tentador dizer que  $r_n$  converge para  $\infty$  em vez de diverge e isso não está errado. No entanto, evitaremos tal nomenclatura. Quando dissermos que algo converge, estaremos assumindo que o limite é um número real.

A seqüência  $a^n$ , com  $a > 1$ , cresce muito rápido para infinito, o que é ilustrado pelo seguinte exercício.

**Exercício 1.34.** Mostre que

- para qualquer  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,

$$\frac{a^n}{n^k} \rightarrow \infty;$$

- para todo polinômio  $p(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_0$  não nulo,

$$\frac{a^n}{p(n)} \rightarrow \infty.$$

**Exemplo 1.35.** Mostremos que o fatorial cresce mais rápido que a exponencial, isto é, para qualquer  $a$  real

$$\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0.$$

Fixe  $q$  inteiro positivo tal que

$$\frac{|a|}{q} < \frac{1}{2}.$$

Para  $n > q$

$$\frac{a^n}{n!} = \underbrace{\frac{\overset{\leq \frac{1}{2}}{a}}{n} \times \frac{\overset{\leq \frac{1}{2}}{a}}{n-1} \times \dots \times \frac{\overset{\leq \frac{1}{2}}{a}}{q+1}}_{n-q \text{ vezes}} \times \frac{a^q}{q!} \leq \frac{1}{2^{n-q}} \times \frac{a^q}{q!} = \frac{2^q a^q}{q!} \times \frac{1}{2^n} \rightarrow 0,$$

de onde segue o resultado. Por outro lado,  $n^n$  cresce mais rápido que  $n!$

$$\frac{n^n}{n!} \rightarrow \infty,$$

o que deixarei de exercício ao leitor.

Por outro lado,  $\log(n)$  cresce muito devagar. De fato, para todo expoente real  $r > 0$

$$\frac{\log(n)}{n^r} \rightarrow 0.$$

Como não temos definição precisa de log ainda, deixemos para justificar tais fatos mais a frente.

Abaixo temos sequências que tendem para infinito. Quanto mais à direita, mais velozmente ela cresce.

$$\cdots \quad \log(\log(n)) \quad \log(n) \quad \sqrt{n} \quad n \quad n^2 \quad a^n \quad n! \quad n^n \quad \cdots$$

onde  $a > 1$ .

**Exercício 1.36.** Calcule os limites quando existir:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(2n+3)}{2n^2+3}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{3n+1} n^3$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{3n+1}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} n + \sin((n^2 + n)\pi) n$$

## 1.5 Aritmética dos infinitos

É fácil verificar que se  $r_n \rightarrow r$  e  $s_n \rightarrow s$ , então

- $r_n s_n \rightarrow \infty$  quando  $r = \infty$  e  $s > 0$ ;
- $r_n s_n \rightarrow -\infty$  quando  $r = -\infty$  e  $s > 0$ ;
- $r_n s_n \rightarrow \infty$  quando  $r = s = \infty$ ;
- $r_n s_n \rightarrow -\infty$  quando  $r = \infty$  e  $s < 0$ ;
- $r_n s_n \rightarrow \infty$  quando  $r = -\infty$  e  $s < 0$ ;
- $r_n s_n \rightarrow -\infty$  quando  $r = -s = \infty$ .

Verifiquemos o primeiro item por descargo de consciência. Para  $R > 0$  tão grande quanto for necessário, como  $r_n \rightarrow \infty$ , temos que existe  $N$  tal que  $r_n > R$  para  $n > N$ . Aumentando  $N$  se preciso, temos que  $s_n > s/2$  para  $n > N$  pela proposição 1.25. Logo,  $r_n s_n > Rs/2$  para  $n > N$ , finalizando o argumento.

É duro lembrar todas essas regras. No entanto, operações com infinitos são fáceis de executar: considere  $r, s$ , ambos não nulos, com um deles ao menos sendo  $\infty$  ou  $-\infty$ . Se  $r, s$  tem o mesmo sinal, então  $rs = \infty$ , e se tem sinais opostos,  $rs = -\infty$ . Assim, nos exemplos acima temos sempre  $r_n s_n \rightarrow rs$ . Por exemplo, se  $r_n = n^2 + \sin(n)$ , que tende a  $\infty$  porque  $|\sin(n)| \leq 1$ , e  $s_n = n/(2n+3)$ , que tende a  $1/2$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n s_n = \infty \times 1/2 = \infty.$$

**Exemplo 1.37.** Já a expressão  $rs$  com  $r = 0$  e  $s = \infty$  não está bem definida.

- Para  $r_n = 1/n$  e  $s_n = n$  temos  $r_n s_n \rightarrow 1$ ;
- para  $r_n = 1/n^2$  e  $s_n = n$  temos  $r_n s_n = 1/n \rightarrow 0$ ;

- para  $r_n = 1/n$  e  $s_n = n^2$  temos  $r_n s_n = n \rightarrow \infty$ .

Algo similar ocorre com a soma de duas seqüências  $r_n \rightarrow \infty$  e  $s_n \rightarrow s$ . Desde que  $s$  não seja  $-\infty$ , temos que  $r_n + s_n \rightarrow \infty$ . Em outras palavras,  $\infty + s = \infty$  para  $s \neq -\infty$ . Similarmente,  $-\infty + s = -\infty$  para  $s \neq \infty$ .

**Exemplo 1.38.** O “número”  $\infty - \infty$  não faz sentido.

- Para  $r_n = n$  e  $s_n = -n$ , temos  $r_n + s_n \rightarrow 0$ ;
- para  $r_n = n^2$  e  $s_n = -n$ , temos  $r_n + s_n \rightarrow \infty$ ;
- para  $r_n = n + 2$  e  $s_n = -n$ , temos  $r_n + s_n \rightarrow 2$ ;
- para  $r_n = n + 2$  e  $s_n = -n^2$ , temos  $r_n + s_n \rightarrow -\infty$ .

Quanto a divisão, é fácil verificar que se  $|r_n| \rightarrow \infty$ , então  $1/r_n \rightarrow 0$ .

**Exemplo 1.39.** A série divergente mais famosa provavelmente é a **série harmônica**

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

que é o limite da seqüência

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Mostremos que  $H = \infty$ . De fato, se  $H < \infty$ , então vale a desigualdade

$$\frac{1}{2}H = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

e somando  $\frac{1}{2}H$ , que é a soma dos inversos dos números pares, a ambos os lados, obtemos  $H < H$ , o que é uma contradição. Assim, nossa hipótese de que  $H < \infty$  não pode ser verdadeira. Logo,  $H = \infty$ .

## 1.6 Sequências de Cauchy, completude e o número de Euler

Considere uma seqüência  $r_n$  convergindo para  $r$ . Por definição, para  $\varepsilon > 0$   $|r - r_n| < \varepsilon$  para  $n$  suficientemente grande.

Se  $k$  e  $l$  são suficientemente grandes, temos

$$|r - r_k| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |r - r_l| < \varepsilon$$

e daí segue que

$$|r_k - r_l| = |(r - r_l) - (r - r_k)| \leq |r - r_l| + |r - r_k| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Isso quer dizer o seguinte, se uma seqüência converge, então os números  $r_k$  e  $r_l$  podem ser tomados tão próximos quanto for necessário desde que  $k$  e  $l$  sejam suficientemente grandes.

**Definição 1.40.** Uma seqüência  $r_n$  é de **Cauchy** se para  $\varepsilon > 0$  existe  $N$  suficientemente grande tal que  $|r_k - r_l| < \varepsilon$  para  $k, l > N$

Como foi observado, toda sequência convergente é de Cauchy. A mágica nos números reais é que o oposto também vale. A fim de provar isso, deveríamos investigar a fundo a axiomatização dos números reais. No entanto, não faremos isso. Simplesmente assumiremos que a propriedade a seguir é verdadeira a priori. Discussões profundas e detalhadas sobre a estrutura dos números reais podem ser encontradas em [Zor] e [Sta].

**Postulado 1.41** (Propriedade dos intervalos encaixados). Considere uma sequência de intervalos  $I_0, I_1, I_2, \dots$  e assumamos que esses são limitados e fechados (têm seus extremos). Se os intervalos são encaixados, isto é,

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

então existe um  $r \in \mathbb{R}$  comum a todos os  $I_n$ 's. Mais formalmente, existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $r \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 1.42.** Se  $r_n$  é uma sequência de Cauchy, então existe um número real  $r$  tal que  $r_n \rightarrow r$ . Essa propriedade se chama **completude**.

**Demonstração.** Primeiramente, toda sequência de Cauchy é limitada. De fato, para  $\varepsilon = 1$ , existe  $N$  tal que  $|r_k - r_l| < 1$ . Em particular, fazendo  $l = N + 1$ , temos  $r_{N+1} - 1 < r_k < r_{N+1} + 1$  para  $k > N$ . Desta forma, a sequência é limitada, pois exceto finitos pontos da sequência  $r_n$  distam menos que 1 de  $r_{N+1}$ . De toda forma,  $r_n$  está contido em um intervalo fechado e limitado  $I_0 = [a_0, b_0]$ .

Agora o truque é dividir e conquistar: fabricar intervalos encaixados de acordo com algum critério. Seja  $c$  o ponto médio do intervalo  $I_0$ . Temos que  $r_n \in [a_0, c]$  ocorre para infinitos  $n$ 's ou  $r_n \in [c, b_0]$  ocorre para infinitos  $n$ 's. Note que ambas coisas podem acontecer, o que não ocorre é ambas afirmações serem falsas. Se  $r_n \in [a_0, c]$  ocorre para infinitos  $n$ 's, então definimos  $I_1 = [a_0, c]$ . Se isso não ocorre, então  $r_n \in [c, b_0]$  ocorre para infinitos  $n$ 's e nesse caso definimos  $I_1 = [c, b_0]$ . Em outras palavras, dividimos  $I_0$  ao meio e tomamos para ser  $I_1$  uma das metades que contem  $r_n$  para infinitos  $n$ 's. Recursivamente,  $I_2$  é uma das metades de  $I_1$  que contém  $r_n$  para infinitos  $n$ 's. Já  $I_3$  é uma das metades de  $I_2$  que contém  $r_n$  para infinitos  $n$ 's, e assim por diante. Por construção, temos a sequência

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

de intervalos fechados, limitados e encaixados, de modo que o comprimento  $|I_n|$  do intervalo  $I_n$  tenda a zero.

$$|I_n| = \frac{|I_0|}{2^n} \rightarrow 0.$$

Comum a todos esses intervalos há um ponto  $r$ , pela propriedade dos intervalos encaixados. E porque o comprimento desses intervalos tende a zero, esse ponto é único. Tome  $\varepsilon > 0$  e  $n_0$  tal que  $|I_{n_0}| < \varepsilon$ . Por outro lado, existe  $N$  natural tal que  $|r_k - r_l| < \varepsilon$  para  $k, l > N$ . Como  $r_n \in I_{n_0}$  ocorre para infinitos  $n$ 's (por construção), temos que existe  $l_0 > N$  tal que  $r_{l_0} \in I_{n_0}$ . Desta forma, para  $k > N$  temos  $|r_k - r_{l_0}| < \varepsilon$  e, por outro lado,  $|r - r_{l_0}| < \varepsilon$ . Logo,

$$|r - r_k| = |(r - r_{l_0}) + (r_{l_0} - r_k)| \leq |r - r_{l_0}| + |r_{l_0} - r_k| < 2\varepsilon$$

para  $k > N$ , isto é,  $r_k \rightarrow r$ . ■

Usamos a completude para fabricar novos números (e funções) a partir de sequências de Cauchy.

**Exemplo 1.43.** Para cada inteiro positivo  $k$  considere  $a_{-k} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Considere também um número natural  $q$ . Desses ingredientes, obtemos a sequência

$$r_n = q + \frac{a_{-1}}{10} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \frac{a_{-3}}{10^3} + \dots + \frac{a_{-n}}{10^n},$$

que pode ser escrita na representação decimal como  $q + 0.a_{-1}a_{-2}a_{-3} \dots a_{-n}$ . A priori, não há evidência de que o número  $q + 0.a_{-1}a_{-2}a_{-3} \dots$ , com todos seus infinitos dígitos, faz sentido. A existência desse número é consequência da completude dos reais.

Mostremos que a sequência  $r_n$  é de Cauchy e assim existe  $r$  tal que  $r_n \rightarrow r$ . Considere  $k$  e  $l$ , e suponhamos  $k < l$ . Usando que  $a_i \leq 9$  e

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{l-k-1}} < 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

obtemos a seguinte estimativa.

$$\begin{aligned} r_l - r_k &= \frac{a_{-k-1}}{10^{k+1}} + \frac{a_{-k-2}}{10^{k+2}} + \dots + \frac{a_{-l}}{10^l} \\ &\leq \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} + \dots + \frac{9}{10^l} \\ &= \frac{9}{10^{k+1}} \left( 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{l-k-1}} \right) \\ &< \frac{9}{10^{k+1}} \left( 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) \\ &= \frac{9}{10^{k+1}} \left( 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) \\ &= \frac{9}{10^{k+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{9}{10^{k+1}} \frac{10}{9} \\ &= \frac{1}{10^k} \end{aligned}$$

Se  $k > l$ , então pelo mesmo raciocínio  $r_k - r_l < 10^{-l}$ . Em todo caso, para  $\varepsilon > 0$  podemos tomar  $N$  tal que  $10^{-N} < \varepsilon$ . Se  $k, l > N$ , temos que  $|r_k - r_l| < 10^{-N} < \varepsilon$ . Em outras palavras, a sequência  $r_n$  é de Cauchy e, conseqüentemente, ela converge para algum número real  $r$ . Esse é  $q + 0.a_{-1}a_{-2}a_{-3} \dots$ .

Que fique claro o seguinte: sequências de Cauchy são convergentes em  $\mathbb{R}$ , isto é, garantimos que ela converge para um número real. No entanto, se uma sequência  $r_n$  de números racionais é de Cauchy, não é em geral verdade que seu limite é racional. Um exemplo que escancara isso é aproximar  $\sqrt{2}$  truncando sua representação decimal.

**Exemplo 1.44.** A sequência  $r_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$  é convergente, o que provaremos mostrando que  $r_n$  é de Cauchy.

Considere  $k < l$ . Temos

$$r_l - r_k = \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \cdots + \frac{1}{l!}$$

Como

$$(k+1)! = \underbrace{\overbrace{(k+1)}^{\geq 2} \times \overbrace{k}^{\geq 2} \times \overbrace{(k-1)}^{\geq 2} \times \cdots \times \overbrace{3}^{\geq 2} \times \overbrace{2}^{=2}}_{k \text{ termos}} \times 1 \geq 2^k,$$

temos

$$\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Similarmente,

$$\frac{1}{(k+i)!} \leq \frac{1}{2^{k+i-1}},$$

de onde segue que

$$r_l - r_k \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{l-1}} < \frac{1}{2^k} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Analogamente, se  $l < k$ ,

$$r_k - r_l < \frac{1}{2^{l-1}}.$$

De toda forma, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N$  tal que  $|r_k - r_l| < \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$  para  $k, l > N$ . Logo, a sequência  $r_n$  converge por ser de Cauchy e seu limite é a série (soma infinita)

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots.$$

Esse número é, junto com  $\pi$ , excepcionalmente importante em matemática. Ele se chama número de Euler e o denotamos por  $e$ . Em base decimal

$$e = 2.7182818284590452354 \cdots.$$

Além disso,  $e$  é irracional, o que mostraremos a frente.

**Observação 1.45.** O número  $e$  é representado por  $E$  maiúsculo no Mathematica. Utilizamos o comando `N` para obtermos  $E$  com quantos dígitos desejarmos. Por exemplo, `N[E,10]` nos fornece 10 dígitos:  $e \approx 2.718281828$ .

Similarmente, `N[Pi,3]` nos fornece  $\pi \approx 3.14$ .

Podemos também aproximar  $e$  usando a série que o define. Somando os 10 primeiros termos da série com `N[Sum[1/Factorial[n],{n,0,9}],7]`, obtemos  $e \approx 2.718282$ .

De modo mais geral, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , a sequência  $r_n(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$  é convergente, seguindo argumento similar ao feito anteriormente, isto é, mostrando que tal sequência é Cauchy. O limite dessa sequência é denotado por  $e^x$  ou  $\exp(x)$  ou

$$\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

e chama-se **exponencial natural**. Certamente é uma das funções mais importantes de toda matemática<sup>5</sup>.

**Proposição 1.46.** A sequência  $r_n(x)$  é de Cauchy para cada  $x$  e assim converge.

**Demonstração.** Fixe  $M \in \mathbb{Z}_{>0}$  tal que  $|x|/(M+1) < 1/2$ . Considere  $M < k < l$ . Temos

$$|r_l(x) - r_k(x)| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{|x|^{k+2}}{(k+2)!} + \dots + \frac{|x|^l}{l!}$$

Como

$$(k+1)! = (k+1) \times k \times (k-1) \times \dots \times (M+1) \times M!,$$

segue que

$$\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} = \underbrace{\frac{\overset{\leq \frac{1}{2}}{|x|}}{k+1} \times \frac{\overset{\leq \frac{1}{2}}{|x|}}{k} \times \dots \times \frac{\overset{\leq \frac{1}{2}}{|x|}}{M+2} \times \frac{\overset{\leq \frac{1}{2}}{|x|}}{M+1}}_{k-M+1 \text{ termos}} \times \frac{|x|^M}{M!} \leq \frac{1}{2^{k-M+1}} \times \frac{|x|^M}{M!}$$

pois

$$\frac{|x|}{k+1} < \frac{|x|}{k} < \dots < \frac{|x|}{M+2} < \frac{|x|}{M+1} < 1/2.$$

De modo mais geral, para  $i = 1, 2, 3, \dots, l-k$  temos

$$\frac{|x|^{k+i}}{(k+i)!} = \frac{|x|}{k+i} \times \frac{|x|}{k+i-1} \times \dots \times \frac{|x|}{M+2} \times \frac{|x|}{M+1} \times \frac{|x|^M}{M!} \leq \frac{1}{2^{k-M+i}} \times \frac{|x|^M}{M!}$$

e daí segue que

$$\begin{aligned} |r_l(x) - r_k(x)| &< \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{|x|^{k+2}}{(k+2)!} + \dots + \frac{|x|^l}{l!} \\ &\leq \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{2^{k-M+1}} + \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{2^{k-M+2}} + \dots + \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{2^{l-M}} \\ &= \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{2^{k-M+1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{l-k-1}} \right) \\ &< 2^M \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{2^{k+1}} \underbrace{\left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right)}_{=2} \\ &= 2^M \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

Assim, considerando a constante<sup>6</sup>

$$C = 2^M \frac{|x|^M}{M!},$$

<sup>5</sup>O leitor com alguma sensatez talvez se pergunte: por que diabos definir esse animal medonho? Bem, seja insensato por um tempo, em breve esse animal fará sentido! Tenha fé! Se você não tem fé, então lhe direi que essa exponencial é importante porque é a mais simples de se trabalhar e as demais exponenciais podem ser escritas a partir da exponencial natural, ou seja, na prática, só há uma exponencial e essa é  $e^x$ .

<sup>6</sup> $C$  é constante porque  $x$  e  $M$  são fixados ao longo da demonstração inteira.



conseguimos a estimativa

$$|r_l(x) - r_k(x)| < \frac{C}{2^k}$$

para  $M < k < l$ . Similarmente, se  $M < l < k$ ,

$$|r_k(x) - r_l(x)| < \frac{C}{2^l}.$$

De toda forma, dado  $\varepsilon > 0$  podemos tomar  $N$  grande o suficiente tal que  $N > M$  e  $\frac{C}{2^N} < \varepsilon$ . Para tal  $N$  temos que  $|r_k(x) - r_l(x)| < \varepsilon$  quando  $k, l > N$ . Logo, a sequência  $r_n(x)$  converge por ser de Cauchy. ■

Obviamente,  $e^0 = 1$  e  $e^1 = e$ . Além disso, a notação  $e^x$  sugere a propriedade  $e^{x+y} = e^x e^y$ , isto é,  $e^x$  de fato se comporta como uma exponencial. Esse de fato é o caso.

**Proposição 1.47.** A identidade  $e^{x+y} = e^x e^y$  vale para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Efetuando o produto termo a termo obtemos

$$\begin{aligned} e^x e^y &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right) \\ &= 1 + (x + y) + \left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!}y + x\frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^3}{3!}y + \frac{x^2}{2!}\frac{y^2}{2!} + x\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!}\right) + \dots \\ &= 1 + (x + y) + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2!} + \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{3!} + \\ &\quad + \frac{x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + (x + y) + \frac{(x + y)^2}{2!} + \frac{(x + y)^3}{3!} + \frac{(x + y)^4}{4!} + \dots \\ &= e^{x+y}. \end{aligned}$$

■

**Observação 1.48.** Um argumento mais preciso pode ser feito realizando a conta com todos os fatoriais escritos explicitamente junto com fatorações usando binômio de Newton.

**Proposição 1.49.** A função  $x \mapsto e^x$  é estritamente crescente, isto é,  $e^x < e^y$  quando  $x < y$ .

**Demonstração.** Por definição

$$e^{y-x} = 1 + (y - x) + \frac{(y - x)^2}{2!} + \frac{(y - x)^3}{3!} + \dots$$

Como  $y - x > 0$ , temos  $e^{y-x} > 1$  por causa da expressão acima. Multiplicando  $e^{y-x} > 1$  por  $e^x$  obtemos  $e^y > e^x$ . ■



## Capítulo 2

# Continuidade

Calculus required continuity, and continuity was supposed to require the infinitely little; but nobody could discover what the infinitely little might be.<sup>1</sup>

**Bertrand Russell**

Nosso objetivo nesse capítulo é estudar funções e usaremos nossos conhecimentos de sequências a esse fim.

Nem sempre entender numericamente o comportamento de uma função é viável, porque ela simplesmente pode ser complicada demais, muitas vezes sequer é explícita. Nesses casos, é de interesse entender o seu comportamento qualitativo, ou seja, um desenho grosseiro de seu gráfico. As técnicas aqui desenvolvidas permitem tal feito.

A maioria das modelagens reais (para não dizer todas) são descritas em termos de funções. Listarei algumas só por ilustração. Não espero que as compreenda. Apenas contemple a diversidade.

- A energia potencial em um sistema massa-mola é dada por

$$U(x) = \frac{kx^2}{2},$$

onde  $x$  é a deformação da mola e  $k$  é uma constante.

- se uma central telefônica recebe em média  $\lambda$  telefonemas por minuto, então a probabilidade de obtermos dois telefonemas consecutivos com tempo entre eles menor que  $t$  minutos é

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

- em relatividade restrita, a energia cinética de uma partícula de massa  $m$  com velocidade  $v$  é dada por

$$K(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

onde  $c$  é a velocidade da luz.

---

<sup>1</sup>Cálculo exigia continuidade, e supunha-se que a continuidade exigisse o infinitamente pequeno; mas ninguém conseguia descobrir o que era o infinitamente pequeno.

- o Urânio 235 decai com o tempo exponencialmente, isto é, se  $m_0$  é sua massa inicial então  $m(t)$ , a massa depois  $t$  anos, é dada por  $m(t) = m_0 e^{-\mu t}$ . O tempo de meia vida do U-235 é  $t_{1/2} = 7.04 \times 10^8$  anos (700 milhões de anos), o que quer dizer que  $m(t_{1/2}) = 0.5 \times m_0$  e daí temos

$$e^{-\mu \times 7.04 \times 10^8} = 0.5 \implies \mu \approx 9.8 \times 10^{-10}.$$

**Observação 2.1.** Para resolver essa equação no Mathematica podemos usar

```
sol = Solve[E^{-7.04*10^8 x} == 0.5, x];
x /. sol[[1]]
```

onde `sol` é uma variável. O comando `x /. sol[[1]]` nos dá o valor de  $x$  que resolve a equação.

Dos exemplos descritos acima é obvio que problemas de mínimo, máximo e resolver equações aparecem naturalmente: “quando a energia do sistema é mínima?” “quão improvável é ficarmos 2 horas sem receber ligação telefônica em nossa central?”

De modo mais geral, considere uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $X$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Algumas perguntas de interesse são:

- a função atinge máximo ou mínimo em algum local?
- a equação  $f(x) = 0$  tem solução?
- como encontrar numericamente a solução de  $f(x) = 0$  caso exista?
- qual a geometria do gráfico de  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ ?
  - ★ é esse feito de um ou mais pedaços?
  - ★ possui retas tangentes?
  - ★ o gráfico delimita uma região convexa?
  - ★ qual é a área de certa região delimitada pelo gráfico?

e assim por diante.

## 2.1 Limite de funções

**Definição 2.2.** Um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é **bom** se é união de intervalos não triviais<sup>2</sup>.

**Exemplo 2.3.**  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\mathbb{R}_{> 0}$ ,  $[0, 1]$ ,  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $[0, 1] \cup (2, 3]$  são todos bons.

Na pratica, todo conjunto onde temos o mais remoto interesse em trabalhar é bom, então essa definição é uma formalidade.

<sup>2</sup>Estamos supondo que o extremo direito e o esquerdo de cada intervalo são diferentes, pois senão obtemos conjuntos como  $[a, a] = a$  e  $[a, a) = \emptyset$ .

**Definição 2.4.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em um conjunto bom. Considere  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , que não necessariamente se encontra em  $X$ , mas que pode ser atingido por uma sequência  $x_n$  de  $X \setminus \{a\}$ , isto é, existe  $x_n \in X \setminus \{a\}$  satisfazendo  $x_n \rightarrow a$ .

Dizemos que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  é  $L$  se para toda sequência  $x_n$  de  $X \setminus \{a\}$  tendendo para  $a$  temos  $f(x_n) \rightarrow L$ .

Denotamos tal limite por

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Na definição acima, nada impede que  $a$  ou  $L$  sejam valores infinitos.

**Observação 2.5.** Na definição de limite, fique atento no seguinte: consideramos apenas sequências de  $X$  que têm termos diferentes de  $a$ . Essa condição é necessária porque  $f$  pode não estar definida em  $a$ .

**Exemplo 2.6.** A função  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$  não está definida para  $x = 1$  ou  $-1$  (veja Figura 2.1).

Computemos os limites nos pontos reais. Note primeiramente que

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Assim, se  $x_n$  é uma sequência de  $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$  que converge para 1, temos que  $f(x_n) \rightarrow 1/2$ , ou seja,

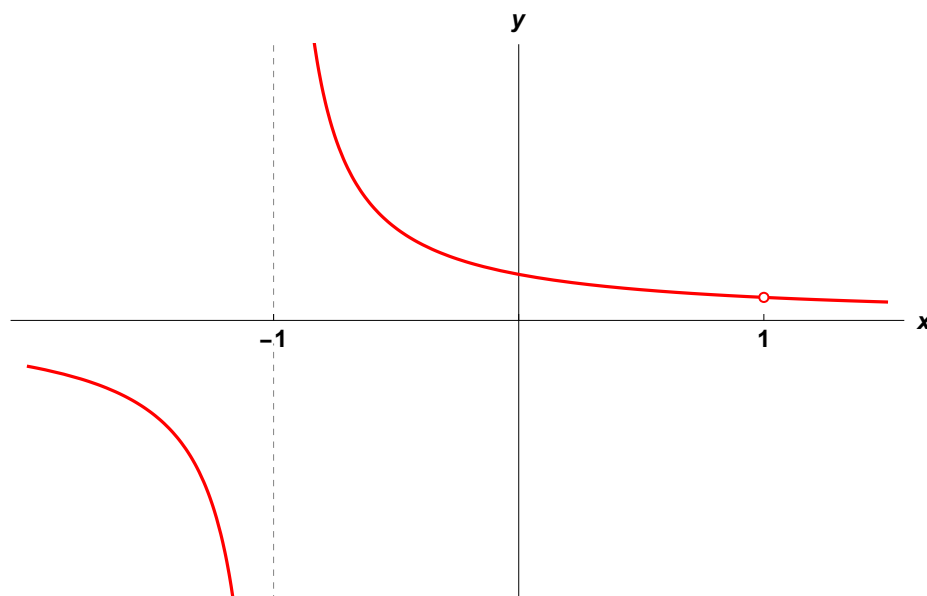
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, se  $x_n$  é uma sequência de pontos de  $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$  convergindo para  $-1$ , o limite  $f(x_n)$  vai depender da sequência. Para  $x_n = -1 + 1/n$  temos  $f(x_n) \rightarrow \infty$ . Para  $x_n = -1 - 1/n$  temos  $f(x_n) \rightarrow -\infty$ . De toda forma, o limite

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

não existe. O limite existe sem problemas quando  $a \neq 1$  e  $a \neq -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$



**Figura 2.1:** Gráfico da função  $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ .

**Observação 2.7.** O comando `Plot[ (x-1)/(x^2-1), {x, -2, 1.5}]` nos fornece um gráfico tal como o acima.

**Exemplo 2.8.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  para o qual  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  não existe em nenhum ponto  $a$  é

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{if } x \text{ é irracional} \end{cases} \quad (2.9)$$

Se  $a$  é racional, então  $x_n = a + 1/n$  satisfaz  $f(x_n) \rightarrow 0$  e  $x_n = a + \sqrt{2}/n$  satisfaz  $f(x_n) \rightarrow 1$ . Por outro lado, se  $a$  é irracional,  $x_n = a + 1/n$  satisfaz  $f(x_n) \rightarrow 1$  e tomando  $x_n$  como sendo a aproximação decimal de  $a$  obtemos  $f(x_n) \rightarrow 0$ . Em todo caso,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

nunca existe!

**Exercício 2.10.** Calcule os limites

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)}{x-1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^4-24x^3+1)}{x^4+12}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3-8)}{x^2-4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^{35}-2x)}{23x^{30}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x)$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+\sin(x))}{x+25}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x^2+1/x^2)}{x^3}$$

**Lema 2.11** (Limite fundamental da exponencial). Para  $x \in (-1, 1)$  temos

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Demonstração.** Suponhamos  $x \in [0, 1)$ . Como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

temos  $e^x \geq 1 + x$ . Por outro lado, como

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \leq 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

temos as desigualdades para  $x \in [0, 1)$ . Para  $x \in (-1, 0)$  temos

$$1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x},$$

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

Logo, as desigualdades valem para  $-1 < x < 1$ . Note que para  $x \in (-1, 1)$  vale a desigualdade

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1/(1-x) - 1}{x} = \frac{1}{1-x},$$

de onde segue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

■

**Proposição 2.12.** A exponencial natural pode ser escrita como

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

**Demonstração.** Pelo Lema 2.11, temos que para  $n$  suficientemente grande

$$1 + \frac{x}{n} \leq e^{x/n},$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

Por outro lado,

$$1 + \frac{x}{n} = \frac{n+x}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n+x}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{x+n}}$$

que é maior que ou igual a  $e^{x/(x+n)}$  pelo Lema 2.11. Portanto,

$$e^{x/(x+n)} \leq 1 + \frac{x}{n},$$

$$e^{nx/(x+n)} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Assim, as desigualdades

$$e^{nx/(x+n)} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

valem para  $n$  suficientemente grande. Mostraremos que o termo da esquerda converge para  $e^x$  conforme  $n$  tende para infinito, provando o resultado.

De fato, como

$$\frac{nx}{n+x} = x - \frac{x^2}{n+x} \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} e^h = 1,$$

concluimos que

$$e^{nx/(x+n)} = e^x e^{-x^2/(n+x)} \rightarrow e^x$$

quando  $n$  tende a infinito. Portanto,

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

■

**Exemplo 2.13** (Decaimento radioativo). A seguir, modelaremos o decaimento de massa de um material radioativo. Obteremos que a massa é descrita por uma exponencial, o que de fato concorda com dados experimentais.

Seja  $m(t)$  a massa de certo material radioativo em um instante  $t$ . Dividindo  $[0, t]$  em  $n$  intervalos iguais de comprimento  $\Delta = t/n$  temos as seguintes massas

$$m(0), m(\Delta), m(2\Delta), \dots, m((n-1)\Delta), m(n\Delta) = m(t).$$

No que segue assumiremos que  $n$  é enorme, infinitamente grande.

Como a taxa (velocidade) com que a massa do material diminui depende somente da quantidade de material disponível no dado instante, é razoável supor em nossa modelagem que existe uma constante  $\mu > 0$  para a qual

$$\frac{m((k+1)\Delta) - m(k\Delta)}{\Delta} = -\mu m(k\Delta).$$

Isolando  $m((k+1)\Delta)$ , obtemos

$$m((k+1)\Delta) = m(k\Delta)(1 - \mu\Delta) = m(k\Delta) \left(1 + \frac{-\mu t}{n}\right),$$

que nos permite deduzir

$$m((k+1)\Delta) = m(0) \left(1 + \frac{-\mu t}{n}\right)^{k+1}.$$

Em particular, pela fórmula da proposição 2.12,

$$m(t) = m(n\Delta) = m(0) \left(1 + \frac{-\mu t}{n}\right)^n \approx m(0)e^{-\mu t}.$$

A mesma modelagem acima funciona para descrever o crescimento no número de infectados em uma pandemia nos estágios iniciais (quando a taxa de crescimento do número de infectados depende apenas da quantia de infectados e de que cada um desses pode infectar outros). O modelo exponencial de fato descreve muito precisamente esse primeiro estágio de uma pandemia. No entanto, conforme medidas a fim de desacelerar a propagação da doença são implantadas, nossa hipótese de modelagem deixa de valer e o modelo exponencial falha (dando espaço a outros modelos, como o logístico).

**Proposição 2.14.** A exponencial  $e^x$  cresce mais rápido que qualquer polinômio.

**Demonstração.** Considere  $p(x)$  um polinômio de grau  $n$ . Suponha que  $x > 0$ .

$$e^{\frac{x}{n+1}} = 1 + \frac{x}{n+1} + \frac{\left(\frac{x}{n+1}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x}{n+1}\right)^3}{3!} + \dots \geq 1 + \frac{x}{n+1},$$

ou seja,

$$e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.$$

Como  $p(x)$  tem grau  $n$ ,

$$\frac{|p(x)|}{e^x} \leq (n+1)^{n+1} \frac{|p(x)|}{x^{n+1}}$$

tende a zero quando  $x$  tende infinito. ■

**Exercício 2.15.** Calcule os limites



$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x^{100}}$$

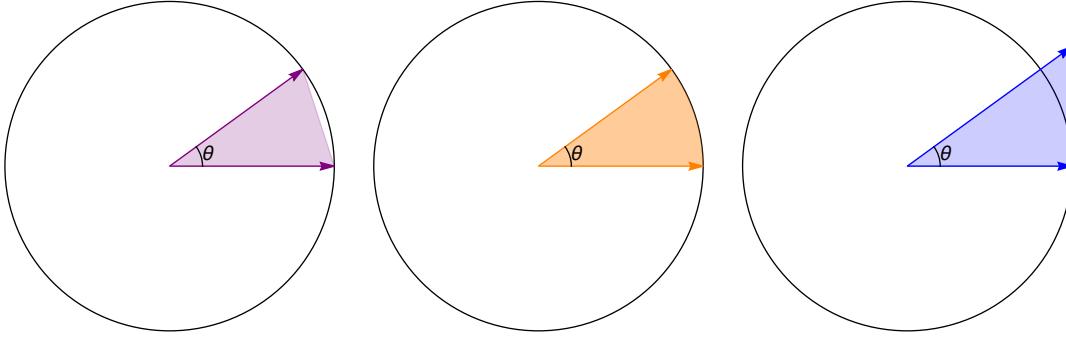
$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - e^{2-x}}{x-2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x}$$

**Lema 2.16** (Limite fundamental trigonométrico). O seguinte limite é válido:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$$

**Demonstração.** Nas figuras abaixo, há três regiões em destaque.



**Figura 2.2:** *Círculo de raio 1.*

A área da primeira região (em roxo) é  $\frac{1}{2}|\sin(\theta)|$  porque tem base 1 e altura  $|\sin(\theta)|$ . A área da segunda região (em laranja) é  $\frac{1}{2}|\theta|$ . A área da terceira região (em azul) é  $\frac{1}{2}|\tan(\theta)|$  porque tem base 1 e altura  $|\tan(\theta)|$ .

Comparando as áreas temos

$$\frac{1}{2}|\sin(\theta)| \leq \frac{1}{2}|\theta| \leq \frac{1}{2}|\tan(\theta)|,$$

$$|\sin(\theta)| \leq |\theta| \leq |\tan(\theta)|.$$

Para  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  e  $\theta \neq 0$ , simplificando a desigualdade acima, obtemos

$$1 \leq \frac{|\theta|}{|\sin(\theta)|} \leq \frac{1}{|\cos(\theta)|},$$

$$1 \leq \frac{\theta}{\sin(\theta)} \leq \frac{1}{\cos(\theta)},$$

$$\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1$$

e como  $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$ , temos o resultado.

De fato, tome uma sequência de termos não nulos  $\theta_n$  convergindo para 0. Das desigualdades acima

$$|\sin(\theta_n)| \leq |\theta_n| \rightarrow 0$$

de onde obtemos

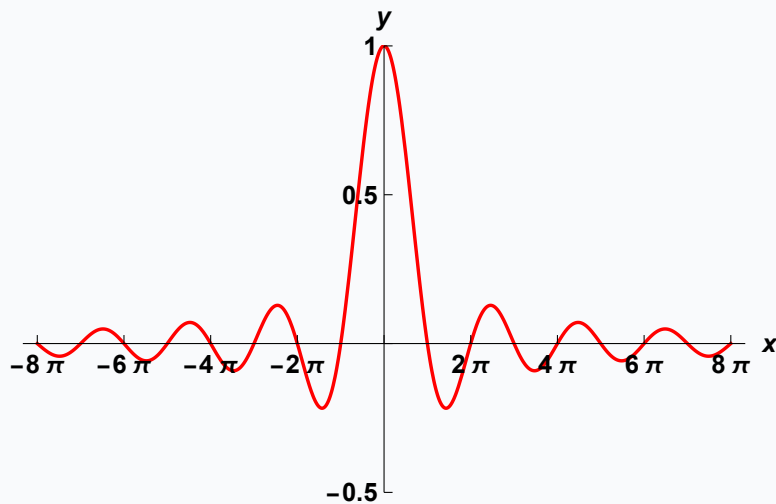
$$\cos(\theta_n) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_n)} \rightarrow 1,$$

(que é válido pela Proposição 2.27) e, conseqüentemente,

$$\frac{\sin(\theta_n)}{\theta_n} \rightarrow 1,$$

finalizando a prova. ■

**Observação 2.17.** A função  $\sin(x)/x$  ocorre com tanta frequência em aplicações práticas (em análise de sinais elétricos, por exemplo) que tem sua própria notação  $\text{sinc}(x)$ . A priori, essa função faz sentido apenas para  $x \neq 0$ , mas definindo  $\text{sinc}(0) = 1$  obtemos uma função definida em toda reta real. Seu gráfico é dado por



**Figura 2.3:**  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ .

**Exercício 2.18.** Compute os limites

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(1/x) \sin(x^2)}{x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(2x)}$

Calculemos a área delimitada por um círculo de raio  $r$ . Considere um  $n$ -ágono<sup>3</sup> regular inscrito em tal círculo (veja a figura 2.4).

Como cada  $n$ -ágono regular é formado por  $n$  triângulos isósceles de lados  $r$ . O ângulo dentre os lados de comprimento  $r$  de cada um desses triângulos isósceles é  $2\pi/n$ . Desta forma, a área de cada um desses triângulos é

$$\frac{r^2 \sin(2\pi/n)}{2}$$

e a área do  $n$ -ágono é

$$A_n = n \frac{r^2 \sin(2\pi/n)}{2} = \pi r^2 \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n}$$

que converge para  $\pi r^2$  pelo limite fundamental trigonométrico (lema 2.16). Portanto, a área do disco de raio  $r$  é  $\pi r^2$ .

**Observação 2.19.** Para  $r = 1$ , a sequência  $A_n$  aproxima  $\pi$ . Para  $n = 96$ , obtemos  $|A_n - \pi| \approx 2.2 \times 10^{-3}$ , ou seja, a aproximação é muito lenta. Para obtermos algumas casas de precisão necessitamos de polígonos grotescamente complicados.

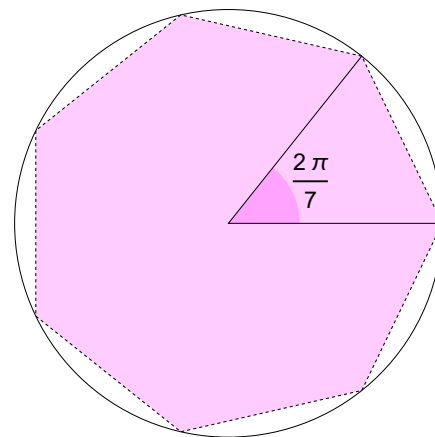
Já o perímetro do  $n$ -ágono regular é

$$P_n = n \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos(2\pi/n)}$$

pela lei dos cossenos. Como  $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ , temos

$$\begin{aligned} P_n &= \sqrt{2}nr \sqrt{1 - \cos(2\pi/n)} \\ &= \sqrt{2}nr \sqrt{1 - (1 - 2\sin^2(\pi/n))} \\ &= 2nr \sin(\pi/n) \\ &= 2\pi r \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \rightarrow 2\pi r \end{aligned}$$

que é o perímetro do círculo.



**Figura 2.4:** 7-ágono regular inscrito.

É bem interessante que técnicas como as descritas acima foram usadas para calcular  $\pi$  numericamente da antiguidade — nos tempos de Arquimedes em 250 a.C. — até a primeira metade do século 17 por todos os cantos do mundo. Arquimedes, por exemplo, utilizando um 96-ágono regular mostrou que  $223/71 < \pi < 22/7$ , aproximando  $\pi$  em duas casas decimais.

Com o avanço do cálculo e a descoberta de diversas séries que computam  $\pi$  essa abordagem geométrica foi abandonada por ser muito ineficiente. Na infância do cálculo,

<sup>3</sup>Um  $n$ -ágono é um polígono de  $n$  lados. Regular quer dizer que os lados são iguais entre si e o mesmo ocorre com os ângulos internos.

ainda no século 17, Issac Newton estabeleceu uma série que aproxima  $\pi$  muito rápido (matando de vez a ideia de usar polígonos para calcular  $\pi$ ). A série milagrosa, obtida de um truque simples com integrais, tem os seguintes primeiros termos

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left( \frac{2}{3 \times 2^3} - \frac{1}{5 \times 2^5} - \frac{1}{28 \times 2^7} - \frac{1}{72 \times 2^9} - \frac{5}{704 \times 2^{11}} - \frac{7}{1664 \times 2^{13}} - \dots \right).$$

Utilizando somente os termos escritos acima (7 termos da série), obtemos uma aproximação que concorda com  $\pi$  nas cinco primeiras casas decimais.

## 2.2 Funções contínuas

**Definição 2.20.** Considere um subconjunto  $X$  bom de  $\mathbb{R}$ . Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $a \in X$  se leva sequências que convergem para  $a$  em sequências que convergem para  $f(a)$ . Simbolicamente,  $f$  é contínua em  $a$  se

$$(x_n \rightarrow a) \implies (f(x_n) \rightarrow f(a)).$$

**Observação 2.21.** Lembre-se que na definição de limite, ao contrário da feita para continuidade, consideramos apenas sequências  $x_n \in X \setminus \{a\}$  convergindo para  $a$ , isto é, estamos supondo  $x_n \neq a$  para todo  $n$ .

No entanto, para verificar continuidade, não precisamos de todas sequências convergentes. Basta tomar sequências  $x_n$  em  $X \setminus \{a\}$  tendendo para  $a$ .

Em termos simbólicos, isso quer dizer que  $f$  é contínua em  $a$  se o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

existe e vale  $f(a)$ , o que provamos a seguir.

**Proposição 2.22.** Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe e vale  $f(a)$ , então  $f$  é contínua em  $a$ .

**Demonstração.** Considere  $x_n \rightarrow a$ . Se  $x_n = a$  para  $n$  suficientemente grande, então  $f(x_n) = f(a)$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

Por outro lado, se existem infinitos  $n$ 's para os quais  $x_n \neq a$ , então podemos listá-los  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  e temos a subsequência  $x_{n_k}$  convergindo para  $a$ .

Fixe  $\varepsilon > 0$ . Como  $x_{n_k} \neq a$ , temos  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(a)$  (que existe e assume esse valor por hipótese). Assim,  $|f(x_{n_k}) - f(a)| < \varepsilon$  para  $n_k$  suficientemente grande. Por outro lado, para os  $m$ 's em que  $x_m = a$ , a desigualdade  $|f(x_m) - f(a)| < \varepsilon$  é trivialmente verdadeira. Logo, para  $n$  suficientemente grande,  $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ . Portanto,  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . ■

**Proposição 2.23.** Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas em  $a$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então  $\alpha f$ ,  $f + g$  e  $fg$  são contínuas em  $a$ . Além disso, se  $g$  não se anula em  $X$ , então  $f/g$  é contínua em  $a$ .

**Demonstração.** Se  $x_n \rightarrow a$ , então  $f(x_n) \rightarrow f(a)$  e  $g(x_n) \rightarrow g(a)$ . Os resultados seguem das proposições 1.23 e 1.25. Temos

$$\alpha f(x_n) \rightarrow \alpha f(a), \quad f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(a) + g(a), \quad f(x_n)g(x_n) \rightarrow f(a)g(a)$$

e, assumindo que  $g$  não se anula em  $X$ ,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(a)}{g(a)}.$$

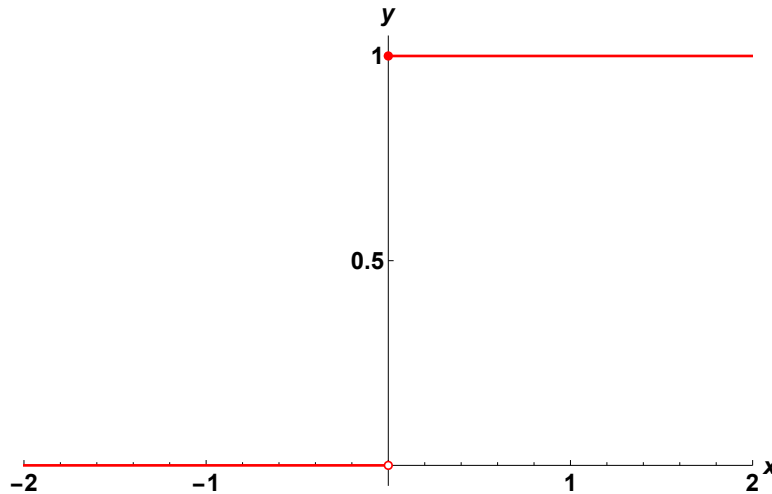
■

**Definição 2.24.** Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua se for contínua em cada ponto de  $X$ .

**Exemplo 2.25.** Funções polinomiais em  $\mathbb{R}$  são obviamente contínuas. O mesmo ocorre para a função  $f(x) = |x|$ . Se temos uma função definida em um intervalo, ela é contínua se geometricamente pode ser desenhada sem tirar o lápis do papel. A função

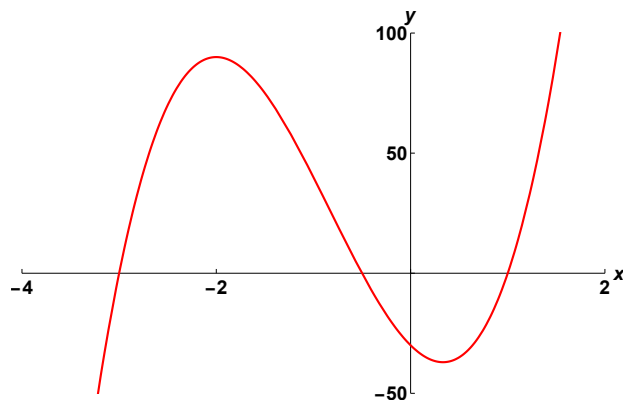
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

definida no intervalo  $\mathbb{R}$  é contínua em todos os pontos exceto 0. De fato, tomando a sequência  $x_n = -1/n$ , temos que  $x_n \rightarrow 0$  e  $f(x_n) \rightarrow 0 \neq f(0)$ . Graficamente, essa descontinuidade é vista como um salto.



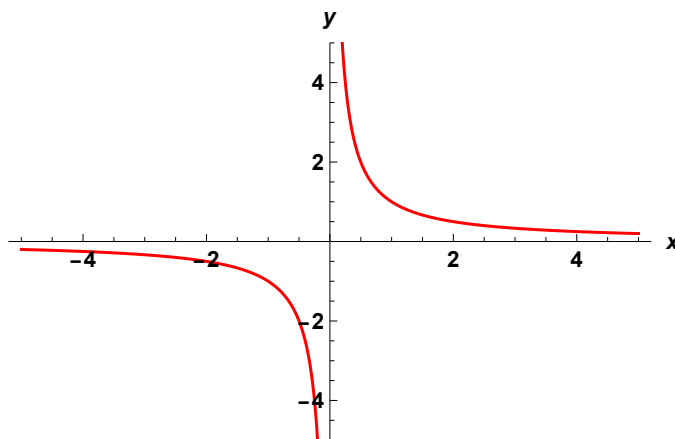
**Figura 2.5:** A função é descontinua em 0. Contínua em seus demais pontos.

Já a função  $f(x) = 20x^3 + 50x^2 - 40x - 30$  definida no intervalo  $\mathbb{R}$  é contínua em todos seus pontos. Não apresenta saltos em seu gráfico.



**Figura 2.6:** A função  $x \mapsto 20x^3 + 50x^2 - 40x - 30$  é contínua e não tem saltos em seu gráfico.

Por outro lado, a função  $f(x) = 1/x$  definida em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  é contínua em todos os pontos. No entanto, como seu domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  não é um intervalo, o gráfico não é feito de um único pedaço (não dá para desenhar o gráfico dessa função sem tirar o lápis do papel). Note que não faz sentido falar de continuidade de  $f$  em 0, pois a função nem sequer está definida em tal ponto.



**Figura 2.7:** A função  $x \mapsto 1/x$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , mas seu gráfico apresenta salto porque o domínio não é um intervalo.

**Proposição 2.27.** A função  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sqrt{x}$  é contínua.

**Demonstração.** Se  $x_n \rightarrow 0$  é uma sequência convergente de  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , então temos  $\sqrt{x_n} \rightarrow 0$  por conta direta com a definição. Logo,  $f$  é contínua em 0.

Agora, tome  $x_n \rightarrow x$ , com  $a > 0$ , temos

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} \rightarrow 0.$$

■

**Proposição 2.28.** As funções sin e cos definidas em  $\mathbb{R}$  são contínuas.

**Demonstração.** Pelo limite fundamental trigonométrico (lema 2.16), sabemos que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$$

Em particular

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} \theta = 1 \times 0 = 0$$

e

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} = 1.$$

De modo geral, para  $\theta \rightarrow \theta_0$ , temos

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \sin((\theta - \theta_0) + \theta_0) \\ &= \sin(\theta - \theta_0) \cos(\theta_0) + \cos(\theta - \theta_0) \sin(\theta_0) \end{aligned}$$

de onde segue

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \sin(\theta) = \sin(\theta_0).$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos((\theta - \theta_0) + \theta_0) \\ &= \cos(\theta - \theta_0) \cos(\theta_0) - \sin(\theta - \theta_0) \sin(\theta_0) \end{aligned}$$

dando sequência a

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \cos(\theta) = \cos(\theta_0).$$

■

**Proposição 2.29.** A exponencial natural  $x \mapsto e^x$  é contínua.

**Demonstração.** Pelo limite fundamental (lema 2.11), temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x-x_0} = e^{x_0},$$

onde usamos que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} e^h - 1 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} h = 1 \times 0 = 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} e^h &= 1. \end{aligned}$$

■

**Observação 2.30.** No exercício a seguir temos funções definidas por partes. Para plotarmos seus gráficos no Mathematica usamos o comando `Piecewise` para definir a função. No segundo item do exercício temos a função

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } 1 \leq x < 4 \\ x^2 - 16 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

Para plotarmos seu gráfico usamos o código

```
f[x_] = Piecewise[{{-x + 1, x < 1}, {0, 1 <= x < 4}, {x^2 - 16, x >= 4}}];
Plot[f[x], {x, -2, 5}]
```

**Exercício 2.31.** Mostre que

1.  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .
2.  $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } 1 \leq x < 4 \\ x^2 - 16 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$  é contínua em  $\mathbb{R}$
3.  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$  é contínua em  $\mathbb{R}$
4.  $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$  é contínua em  $\mathbb{R}_{>0}$ , mas não é contínua em 0.

**Exercício 2.32.** Mostre que composição de funções contínuas é contínua: se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas com  $f(X) \subset Y$ , então  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.

**Exercício 2.33.** Descreva quais funções contínuas estão sendo composta e mostre que

1.  $f(x) = \sin(x^2 + e^{-x})$  está bem definida e é contínua em  $\mathbb{R}$ .
2.  $f(x) = \frac{\sin(x^3)e^{-\cos(x^2)}}{x^2 - 1}$  está bem definida e é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .
3.  $f(x) = \sin(1/x)$  está bem definida e é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
4.  $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$  é contínua em  $\mathbb{R}$

## 2.3 Funções contínuas em intervalos: zeros de funções

Um subconjunto  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo se para quaisquer  $a, b$  em  $I$ , com  $a \leq b$ , temos  $[a, b] \subset I$ . Em outras palavras, se  $I$  tem dois pontos, então tem também os demais pontos entre esses dois.

**Exercício 2.34.** Prove que os intervalos segundo a definição acima são exatamente aqueles que conhecemos da escola.<sup>4</sup>

**Dica:** o argumento é dividir e conquistar. Se o intervalo é limitado a direita, por exemplo, podemos tomar  $r_0 \in I$  e  $s_0$  a direita de  $I$ .

Defina  $J_0 = [r_0, s_0]$ . Se o ponto médio  $m_1$  de  $J_0$  estiver em  $I$ , defina  $J_1 = [m_1, s_0]$ , caso contrário, defina  $J_1 = [r_0, m_1]$ . Prossiga o algoritmo, encontre os  $J'_k$ s e o extremo direito de  $I$ , que é o ponto comum a todos os  $I'_k$ s.

<sup>4</sup>Pessoa de pouca fé! Por quê provar se um desenho já convence?



**Teorema 2.35** (Teorema do valor intermediário). Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua,  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ , então existe  $a < c < b$  tal que  $f(c) = 0$ .

**Demonstração.** A ideia é dividir e conquistar. Suponhamos que não existe  $c \in I$  satisfazendo  $f(c) = 0$ .

Seja  $m_1$  o ponto médio do intervalo  $I_0 = [a, b]$ . Se  $f(m_1) > 0$ , defina  $I_1 = [a, m_1]$ , caso contrário, se  $f(m_1) < 0$ , defina  $I_1 = [m_1, b]$ . O importante aqui é que  $I_1$  é um intervalo com metade do comprimento de  $I_0$  no qual  $f$  em seus extremos é positivo à direita e negativo à esquerda.

Repete o procedimento anterior: seja  $m_2$  o ponto médio do intervalo  $I_1 = [a_1, b_1]$ . Se  $f(m_2) > 0$ , defina  $I_2 = [a_1, m_2]$ , caso contrário, defina  $I_2 = [m_2, b_1]$ . Obtemos  $|I_2| = |I_1|/2$  e o sinal de  $f$  nos extremos de  $I_2$  é positivo à direita e negativo à esquerda. Os demais intervalos  $I_3, I_4, \dots$  são construídos da mesma forma.

O algoritmo acima nos fornece intervalos  $I_n$ 's com as seguintes propriedades:

- $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \cdots \supset I_n \supset \cdots$
- $f$  é negativa no extremo esquerdo de  $I_n$  e positiva no extremo direito;
- $|I_n| = (b - a)/2^n \rightarrow 0$ .

Pela propriedade dos intervalos encaixados 1.41, existe  $c$  comum a todos os intervalos  $I_n$ 's. Sejam  $a_n$  o extremo esquerdo de  $I_n$  e  $b_n$  o extremo direito. Por construção,

$$|a_n - c| \leq \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad |b_n - c| \leq \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0,$$

ou seja,  $a_n \rightarrow c$  e  $b_n \rightarrow c$ . Pelo Exercício 1.28, como  $f(a_n) < 0$ , temos que

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0.$$

Similarmente,  $f(c) \geq 0$  porque  $f(b_n) > 0$ . Portanto,  $f(c) = 0$ , contradizendo a hipótese de que tal  $c$  não existe. ■

**Exemplo 2.36** (Aproximando  $\sqrt{2}$  computacionalmente). A demonstração do teorema do valor intermediário de fato nos fornece um algoritmo para aproximarmos raízes de equações. Considere  $f(x) = x^2 - 2$ . Temos que  $f(1) < 0$  e  $f(2) > 0$ . Assim, tomemos  $[1, 2]$  como sendo o domínio de  $f$ . A solução de  $f(x) = 0$  em  $[1, 2]$  tem de ser  $\sqrt{2}$ .

Seja  $a = 1$  e  $b = 2$ . Calcule  $c = (a + b)/2$ . Se  $f(c) < 0$ , então trocamos o valor de  $a$  pelo de  $c$ , se  $f(c) > 0$  então trocamos o valor de  $b$  pelo de  $c$ . Os novos  $a, b$  definem um intervalo com metade do comprimento original. Com respeito a esses novos  $a$  e  $b$  podemos recalculá-lo  $c = (a + b)/2$  e reobter novos  $a$  e  $b$ , assim por diante. Podemos executar tal algoritmo em Mathematica com o código:

```
a = 1;
b = 2;
f[x_] = x^2 - 2;
i = 1;
While[i <= 10,
  c = (a + b)/2;
```

```

If[f[c] < 0, a = c];
If[f[c] > 0, b = c];
If[f[c] == 0, Break[]];
i = i + 1
]

```

no qual repetimos 10-vezes o procedimento descrito. Como a distância dentre  $a$  e  $b$  é 1 inicialmente. Depois de 10 iterações, temos que a distância dentre  $a$  e  $b$  é  $1/2^{10} < 0.001$ . O número  $c$  obtido depois de 10 iterações vale

$$c = \frac{1449}{1024} \quad \text{e} \quad |c - \sqrt{2}| < 0.001.$$

Note que esse método (conhecido como **método da bisseção**) pode ser usado para aproximar a raiz de qualquer número. De modo mais geral, pode ser usado para computar raízes reais de polinômios.

**Exercício 2.37.** Com respeito ao teorema 2.35. Verifique que o mesmo resultado vale se trocarmos  $f(a) < 0$  por  $f(a) > 0$  e  $f(b) > 0$  por  $f(b) < 0$ . De fato, basta aplicar o teorema enunciado para função  $-f$ .

**Exercício 2.38.** Mostre que todo polinômio de grau ímpar tem uma solução real. Dica: calcule seu limite para quando  $x$  tende para  $-\infty$  e  $\infty$ .

**Proposição 2.39.** Se  $I$  é intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então  $f(I)$  é intervalo.

**Demonstração.** Tome  $\alpha = f(a)$  e  $\beta = f(b)$ . Se  $\gamma$  é um número real entre  $\alpha$  e  $\beta$ , mas diferente de tais números, então  $g(x) = f(x) - \gamma$ , definida em  $[a, b]$ , é positiva em um dos extremos e negativa no outro. Pelo teorema do valor intermediário 2.35, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g(c) = 0$ , ou seja,  $f(c) = \gamma$ . Assim, para  $\alpha$  e  $\beta$  em  $f(I)$ , todos os valores entre tais números encontram-se em  $f(I)$ , ou seja,  $f(I)$  é um intervalo. ■

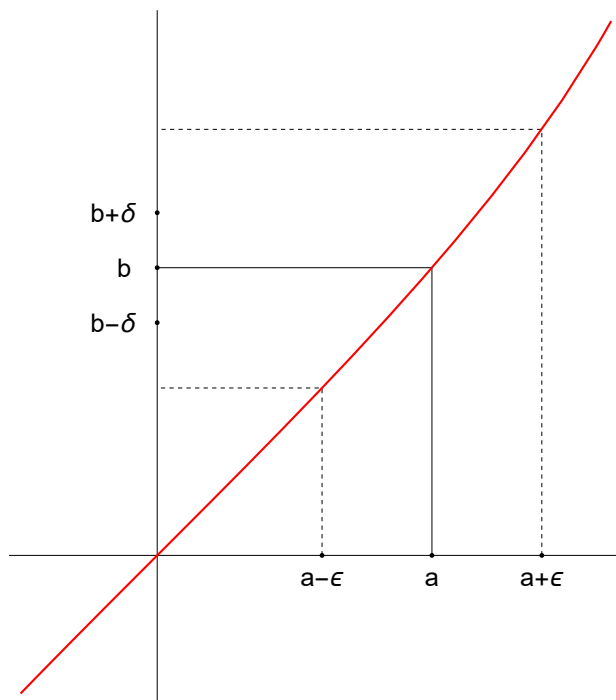
**Teorema 2.40** (Versão contínua do teorema da função inversa). Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e estritamente crescente<sup>5</sup>. Se  $J = f(I)$  e  $g : J \rightarrow I$  é dada por  $g(y) = f^{-1}(y)$ , então, além de ser estritamente crescente,  $g$  é contínua.

**Demonstração.** Pela proposição 2.39, o conjunto  $J$  é um intervalo, pois  $f$  é contínua. Mostremos que  $g$  é contínua em  $b \in J$ .

Seja  $a = g(b)$ . Como  $f$  é estritamente crescente, temos que  $a$  é extremo de  $I$  se, e só se,  $b$  é extremo de  $J$ .

---

<sup>5</sup> Isso quer dizer que  $x > y \implies f(x) > f(y)$ . Em particular,  $f$  é injetora.



**Figura 2.8:** Encontrando  $\delta$  para função estritamente crescente.

Se  $b$  não for extremo, tome  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que  $a - \varepsilon$  e  $a + \varepsilon$  pertencem a  $I$ . Existe  $\delta > 0$  tal que

$$\delta \leq f(a + \varepsilon) - b \quad \text{e} \quad \delta \leq b - f(a - \varepsilon).$$

Se  $y_n \rightarrow b$ , então  $|b - y_n| < \delta$  para  $n$  suficientemente grande. Assim,

$$|g(y_n) - g(b)| = |g(y_n) - a| < \varepsilon$$

para  $n$  suficientemente grande, de onde segue que  $g(y_n) \rightarrow g(b) = a$ .

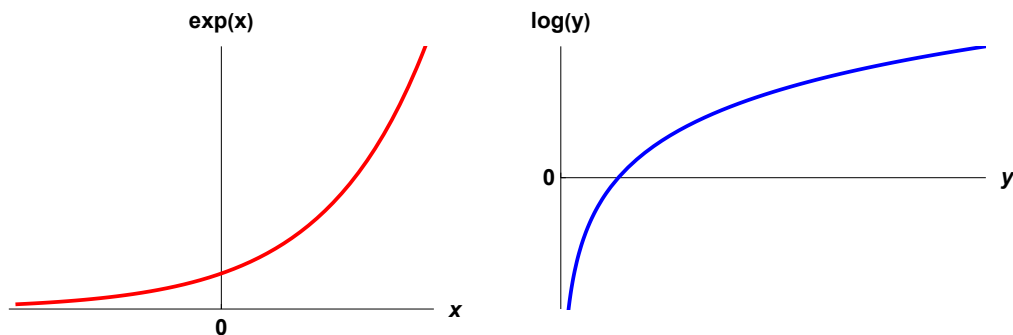
Portanto,  $g$  é contínua nos pontos não extremos de  $J$ .

Suponha que  $b$  é extremo direito. Tome  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que  $a - \varepsilon \in I$ . Tome  $\delta > 0$  satisfazendo  $f(a - \varepsilon) = b - \delta$ . Se  $y_n \rightarrow b$ , então para  $n$  suficientemente grande  $|y_n - b| < \delta$  e, conseqüentemente,  $|g(y_n) - a| < \varepsilon$ . Logo,  $g$  é contínua em  $b$ . Similarmente,  $g$  é contínua em seu extremo esquerdo, caso esse exista. ■

**Observação 2.41.** Trocando  $f$  por  $-f$  temos que se  $f$  é estritamente decrescente e contínua, então a sua inversa é também estritamente decrescente e contínua.

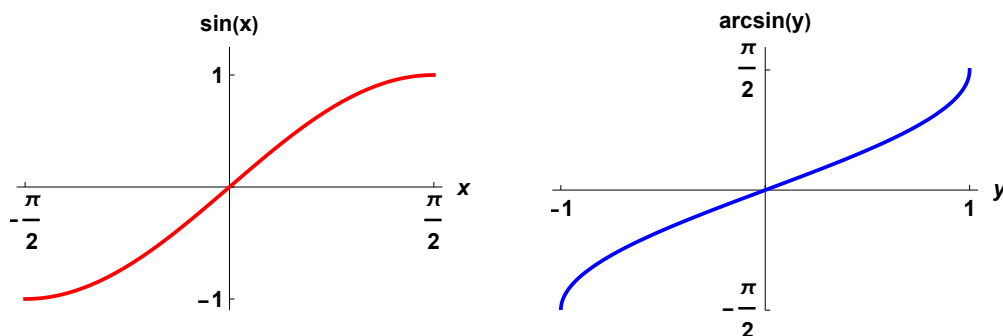
**Exemplo 2.42.** Pelo Teorema 2.40.

- A exponencial natural  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  é estritamente crescente e contínua. Sua inversa, o logaritmo natural  $\log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ , é estritamente crescente e contínua.



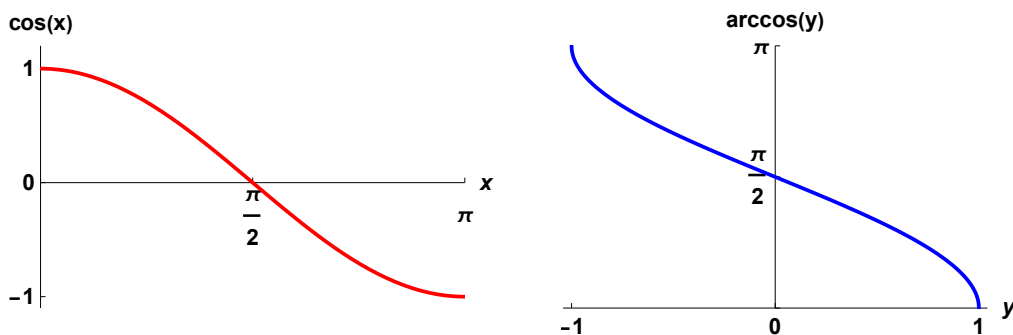
**Figura 2.9:**  $y = \exp(x)$  e  $x = \log(y)$ .

- A função seno  $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$  é estritamente crescente e contínua. Sua inversa, a função arco seno  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ , é estritamente crescente e contínua.



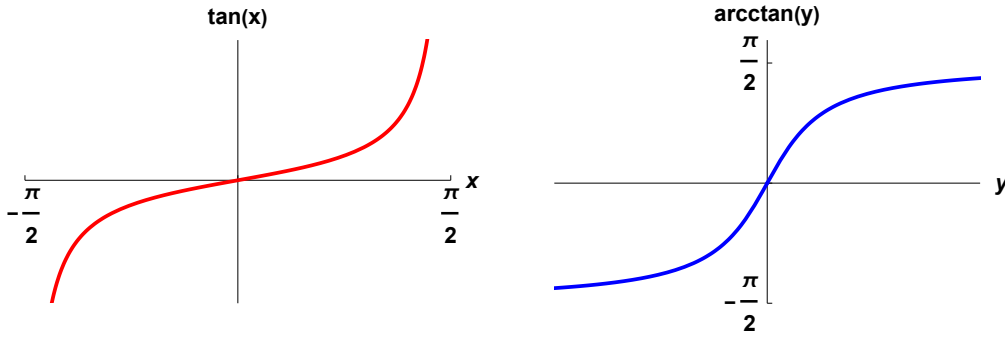
**Figura 2.10:**  $y = \sin(x)$  e  $x = \arcsin(y)$ .

- A função cosseno  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  é estritamente decrescente e contínua. Sua inversa, a função arco cosseno  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ , é estritamente decrescente e contínua.



**Figura 2.11:**  $y = \cos(x)$  e  $x = \arccos(y)$ .

- A função tangente  $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  é estritamente crescente e contínua. Sua inversa, a função arco tangente  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ , é estritamente crescente e contínua.



**Figura 2.12:**  $y = \tan(x)$  e  $x = \arctan(y)$ .

**Exemplo 2.43.** Calculemos

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin(y)}{y}$$

Para  $y_n \rightarrow 0$ , com  $y_n$  não nulo, definimos  $x_n = \arcsin(y_n)$  para  $n$  suficientemente grande<sup>6</sup>. Como  $\arcsin$  é contínua temos  $x_n \rightarrow 0$  e portanto

$$\frac{\arcsin(y_n)}{y_n} = \frac{x_n}{\sin(x_n)} = \frac{1}{\sin(x_n)/x_n} \rightarrow 1.$$

Logo,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin(y)}{y} = 1.$$

**Exercício 2.44.** Calcule os limites

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\lim_{y \rightarrow 0} \arccos(y)$          | 4. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan(y)}{y}$ |
| 2. $\lim_{y \rightarrow e} \log(y)$             | 5. $\lim_{y \rightarrow \infty} \arctan(y)$      |
| 3. $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log(y)}{y-1}$ | 6. $\lim_{y \rightarrow -\infty} \arctan(y)$     |

## 2.4 Exponencial natural

A exponencial natural  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , onde denotamos  $\exp(x)$  por  $e^x$  muitas vezes. Sua inversa é o logaritmo natural  $\log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  e ambas funções são estritamente crescentes e contínuas. As propriedades básicas da exponencial natural são

$$e^0 = 1 \quad \text{e} \quad \exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$$

de acordo com a Proposição 1.47.

Podemos elevar um número real positivo  $a$  a qualquer potência inteira sem problemas. Se  $m$  é positivo, simplesmente temos  $a^m$  como sendo o produto de  $m$  cópias de  $a$ . Se  $m = 0$ , então definimos  $a^0 = 1$ . Se  $m$  é negativo, então  $a^m = 1/a^{-m}$ .

<sup>6</sup>Precisa-se de  $n$  suficientemente grande para garantir que  $y_n$  está no domínio de  $\arcsin$ , o intervalo  $(-1, 1)$ . Para  $n$  pequeno, podemos definir  $x_n$  como sendo qualquer coisa, pois no cálculo de limites somente os  $n$  grandes importam.

Já para a fração  $\frac{m}{n}$ , com  $n$  positivo, o número  $a^{\frac{m}{n}}$  é a raiz positiva da equação  $x^n - a^m = 0$ . Por exemplo,  $5^{\frac{2}{3}}$  é a raiz positiva da equação  $x^3 - 5^2 = 0$ .

E para  $r$  real qualquer, como definimos  $a^r$ ? Poderíamos definir  $a^r$  como sendo o limite de  $a^{r_n}$  onde  $r_n \rightarrow r$  é uma sequência de números racionais. Porque isso é muito complicado, especialmente mostrar que  $a^{r_n}$  converge, não seguiremos essa rota. Usaremos as boas propriedades que exp tem a fim de resolver tal problema.

**Proposição 2.45.** O logarítmico natural tem as seguintes propriedades:

1.  $\log(1) = 0$ ;
2. Se  $a, b > 0$ , então  $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ ;
3. Se  $a > 0$  e  $n$  inteiro, então  $\log(a^n) = n \log(a)$ ;
4. Se  $a > 0$  e  $n/m$  é racional, então  $\log\left(a^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m} \log(a)$ .

**Demonstração.**

1. Repare que  $e^0 = 1$ .
2. Basta notar que  $\exp(\log(a) + \log(b)) = \exp(\log(a)) \exp(\log(b)) = ab$ .
3. Se  $\lambda = \log(a^n)$ , então  $e^\lambda = a^n$ , ou seja,  $e^{\frac{\lambda}{n}} = a$  e aplicando log obtemos

$$\frac{\lambda}{n} = \log(a),$$

$$\log(a^n) = n \log(a).$$

4. Pelo terceiro item temos

$$m \log\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = \log\left(\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^m\right) = \log(x^n) = n \log(x),$$

$$\log\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m} \log(x).$$

■

Se  $x$  é racional

$$a^x = e^{\log(a^x)} = e^{x \log(a)}.$$

A parte da direita faz sentido mesmo quando  $x$  é real.

**Definição 2.46.** Para  $a > 0$  e  $x$  real, definimos  $a^x = e^{x \log(a)}$ .

Em outras palavras, a partir da exponencial natural podemos definir todas as demais exponenciais, o que é bom porque já sabemos bastante sobre a exponencial natural (que é contínua, estritamente crescente e satisfaz a propriedades algébricas esperadas).

Note que  $a^x$  satisfaz a propriedades básicas de uma exponencial:

$$a^0 = e^{0 \log(a)} = e^0 = 1,$$

$$a^x a^y = e^{x \log(a)} e^{y \log(a)} = e^{(x+y) \log(a)} = a^{x+y}.$$

Além disso, a função  $x \mapsto a^x$  é contínua porque  $\exp$  é contínua.

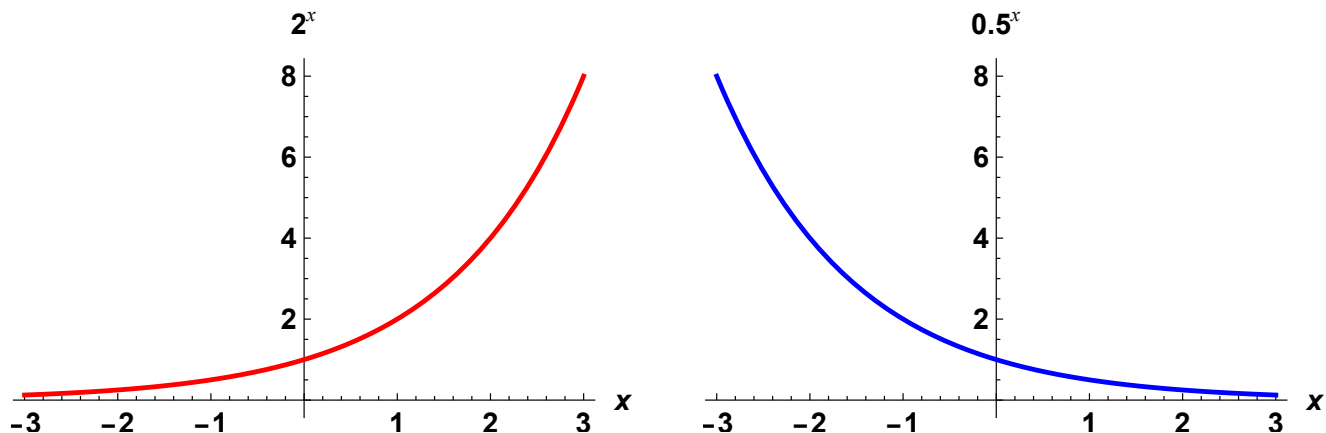


Figura 2.13: Curvas  $x \mapsto 2^x$  e  $x \mapsto 0.5^x$ .

**Exercício 2.47.** Considere a função  $f(x) = a^x$ . Mostre que  $f$  é estritamente crescente para  $a > 1$  e estritamente decrescente para  $0 < a < 1$ . Dica: Olhe o gráfico da função  $\log$ .

## 2.5 Máximos e mínimos de funções contínuas

**Definição 2.48.** Um intervalo compacto nada mais é que um intervalo da forma  $[a, b]$ , isto é, possui ambos extremos.

**Definição 2.49.** Um ponto  $x_0$  é um ponto de máximo de  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se  $f(x) \leq f(x_0)$  para todo  $x \in I$ . Nesse caso,  $f(x_0)$  é o máximo de  $f$ . Similarmente,  $x_0$  é um ponto de mínimo se  $f(x) \geq f(x_0)$  para todo  $x \in I$ . Aqui  $f(x_0)$  é o mínimo de  $f$ .

Em geral, funções contínuas podem não admitir máximo ou mínimo. Por exemplo, a função  $f(x) = x^2$  em  $\mathbb{R}$  não possui máximo, pois

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty.$$

Por outro lado, no intervalo compacto  $[-1, 1]$  a função  $f(x) = x^2$  possui dois pontos de máximo, 1 e  $-1$ . Já no intervalo  $(-1, 1)$  a função não atinge máximo.

A fim de provar o teorema central dessa seção, o Teorema de Weierstrass (2.54), precisamos de dois lemas, que são muito importantes (talvez devesse chama-los de teoremas), pois caracterizam intervalos compactos do ponto de vista sequencial.

**Definição 2.50.** Considere uma sequência  $x_n$ .

Se temos os números inteiros positivos  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  em ordem crescente, podemos definir a sequência  $x_{n_k}$ , com  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

Quando isso ocorre, dizemos que  $x_{n_k}$  é subsequência de  $x_n$ .

**Exemplo 2.51.** • A sequência  $x_n = (-1)^n$  tem subsequências como  $x_{2k} = (-1)^{2k} = 1$  e  $x_{2k+1} = -1$ . Embora a sequência  $x_n$  não convirja, ambas subsequências convergem.

- A sequência

$$x_n = \begin{cases} 1/n & \text{se } n \text{ é múltiplo de } 3 \\ (n+1)/n^2 & \text{se } n \text{ não é múltiplo de } 3 \end{cases}$$

tem

$$x_{3k} = 1/(3k), \quad x_{3k+1} = (3k+2)/(3k+1)^2, \quad x_{3k+2} = (3k+3)/(3k+2)^2$$

como subsequências.

**Lema 2.52** (Teorema de Bolzano-Weierstrass). Toda sequência em  $[a, b]$  possui uma subsequência convergente.

**Demonstração.** A prova é novamente dividir e conquistar. Considere uma sequência  $x_n$  em  $[a, b]$ . Começamos com  $I_0 = [a, b]$ . Uma das metades de  $I_0$  contem  $x_n$  para infinitos  $n$ 's. Tomamos essa metade para ser  $I_1$ . Novamente, dividindo  $I_1$  ao meio temos que uma de suas metades contem  $x_n$  para infinitos  $n$ 's. Tomamos essa metade para ser  $I_2$ , e assim por diante. Assim, temos a sequência de intervalos compactos

- $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$
- Para cada  $I_k$  temos que há infinitos valores de  $n$  para os quais  $x_n \in I_k$ ;
- $|I_k| \leq (b-a)/2^k$ .

Pela propriedade dos intervalos encaixados, há  $x$  comum a todos os intervalos  $I_k$ 's. Escolha  $n_1$  tal que  $x_{n_1} \in I_1$ . Agora escolha  $n_2 > n_1$  tal que  $x_{n_2} \in I_2$ . Similarmente, tome  $n_3 > n_2$  tal que  $x_{n_3} \in I_3$ , e assim por diante. Temos que a subsequência  $x_{n_k}$  de  $x_n$  converge para  $x$ , pois  $|x - x_{n_k}| < (b-a)/2^k$ . ■

**Lema 2.53.** Se  $I$  é um intervalos não compacto, então existe uma sequência  $x_n \in I$  que não admite subsequência que converge para um ponto de  $I$ .

**Demonstração.** Se o intervalo for ilimitado a direita, a sequência  $x_n = n$  não tem subsequência convergente. O mesmo ocorre se o intervalo  $I$  for ilimitado a esquerda. Assim, o intervalo tem de ser  $[a, b)$  ou  $(a, b]$  ou  $(a, b)$ . Vamos supor que  $I = [a, b)$ : a sequência  $x_n = b - (b-a)/2^n$  em  $[a, b)$  não possui uma subsequência convergente com limite em  $[a, b)$ , pois toda subsequência tem limite  $b$ , que não pertence ao intervalo. O argumento é análogo para os demais intervalos. ■

**Teorema 2.54** (Teorema de Weierstrass). Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma contínua, então  $f$  admite máximo. Observe que o domínio da função  $f$  é um intervalo compacto.

**Demonstração.** Pela Proposição 2.39,  $J = f([a, b])$  é um intervalo. Considere uma sequência  $y_n$  de  $J$ .

Para cada  $n$  escolha  $x_n \in [a, b]$  tal que  $f(x_n) = y_n$ . Existe uma subseqüência  $x_{n_k}$  tendendo para algum  $x \in \mathbb{R}$ , porque o intervalo  $[a, b]$  é compacto (Lema 2.52). Como  $a \leq x_{n_k} \leq b$ , o limite  $x$  dessa subseqüência quando  $k \rightarrow \infty$  tem de satisfazer  $a \leq x \leq b$  (veja Exercício 1.28), ou seja,  $x \in [a, b]$ .

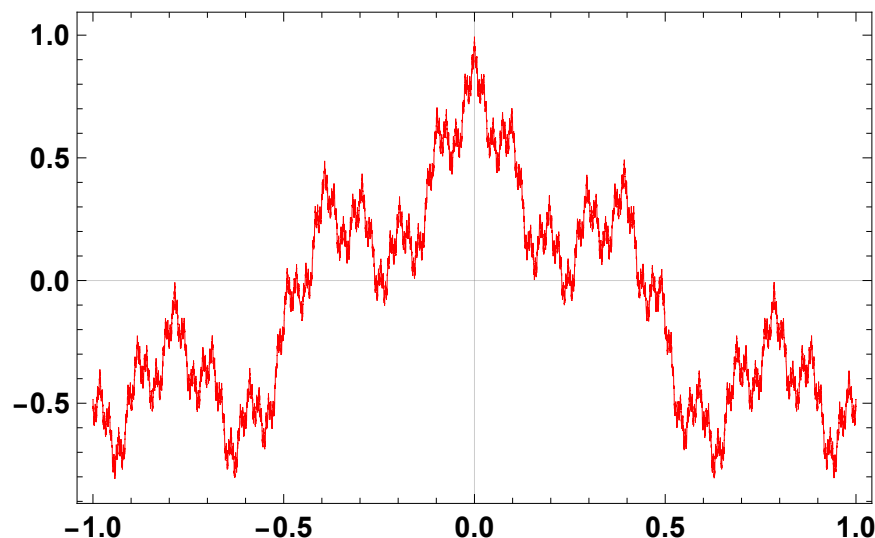
Assim,  $y_{n_k} = f(x_{n_k})$  converge para  $f(x) \in J$ , pois  $f$  é contínua. Logo, toda sequência  $y_n$  de  $J$  admite uma subsequência que converge para um ponto de  $J$ . Portanto,  $J$  é um intervalo compacto (Lema 2.53): existem  $c_0$  e  $c_1$  em  $[a, b]$  tais que  $J = [f(c_0), f(c_1)]$ . Em outras palavras,  $c_0$  é um ponto de mínimo e  $c_1$  é um ponto de máximo. ■



Porque os exemplos que discutimos até agora possuem gráficos relativamente simples, pode parecer que teoremas como o do valor intermediário e o de Weierstrass sejam apenas justificativas pomposas de coisas simples. No entanto, funções contínuas são em geral extremamente selvagens. A função

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos(4x) + \frac{1}{2^2} \cos(4^2 x) + \cdots + \frac{1}{2^k} \cos(4^k x) + \cdots$$

é contínua em  $\mathbb{R}$  e é conhecida como função de Weierstrass.



**Figura 2.14:** *Função de Weierstrass.*

O gráfico dessa função é uma curva fractal (google it!) e não está representado com todo sua complexidade na Figura 2.14, pois isso seria impossível. Além disso, nenhum de seus pontos possuem a noção de tangência (isso quer dizer que a derivada, que veremos a frente, não existe em ponto algum).

Apesar da função de Weierstrass ser extremamente patológica, o teorema do valor intermediário nos garante que ela tem um zero ao menos e o teorema de Weierstrass nos garante que essa função possui ponto de máximo e de mínimo no intervalo compacto  $[-1, 1]$ . Em resumo, essa curva abala nossa confiança (mas só um pouquinho) de que funções contínuas em intervalos são as que podemos desenhar o gráfico sem tirar o lápis do papel.

Via de regra, quando procuramos por zeros ou pontos de máximo/mínimo em algum problema matemático, primeiro mostramos que solução para esse existe. Em geral, não conseguimos uma solução explícita, apenas mostramos que ela tem que existir. A segunda etapa é descobrir métodos para aproximar a solução desses problemas da forma mais eficaz possível.

O teorema de Weierstrass, apesar de garantir que a função tem um ponto de máximo (ou mínimo), não nos diz como encontrá-lo (ao contrário da nossa prova do Teorema do valor intermediário). Técnicas para efetivamente encontrar máximo e mínimo serão discutidas ao estudarmos cálculo diferencial.



## Capítulo 3

# Cálculo diferencial

### 3.1 Introdução informal com infinitesimais e cálculo de reta tangente

#### 3.1.1 Velocidade e aceleração

Considere um carro viajando em uma estrada, que modelamos como um ponto se movendo ao longo da reta real  $\mathbb{R}$  com o passar do tempo.

Em um instante  $t$ , a posição do ponto é  $q(t)$ . Já sua posição no instante  $t + \Delta t$  é  $q(t + \Delta t)$ . A velocidade média nesse intervalo de tempo é

$$v_{\text{média}} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}.$$

Denotamos a variação na posição  $q(t + \Delta t) - q(t)$  por  $\Delta q$ , onde fica subentendido que esse número depende de  $t$  e  $\Delta t$ .

$$v_{\text{média}} = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

O significado da velocidade média é o seguinte: se eu movesse com velocidade constante  $v_{\text{média}}$  partindo de  $q(t)$ , eu demoraria o tempo  $\Delta t$  para chegar em  $q(t + \Delta t)$ , ou seja,

$$q(t + \Delta t) = q(t) + v_{\text{média}} \Delta t.$$

A velocidade no velocímetro de um carro não é a média. A velocidade que o ponteiro mede no instante  $t$  é o limite

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}.$$


Esse limite é conhecido como **derivada de  $q$  com respeito a  $t$**  e é denotado por

$$\frac{dq}{dt}$$

e o porquê em dessa notação vai ficar claro a seguir, quando falarmos de infinitesimais.

Se nosso incremento de tempo for um número  $\delta t$  bem pequeno e  $\delta q = q(t + \delta t) - q(t)$ , então, como no processo de limite acima estamos fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos

$$v(t) \approx \frac{\delta q}{\delta t}. \quad (\text{1})$$

**Nota histórica 3.1.** É costumeiro pensar em  $dt$  e  $dq$  como sendo “números” infinitamente pequenos, **infinitesimais**. Tão pequenos que a fórmula  se torna uma igualdade, mas ainda não nulos porque não se pode dividir por zero. Infinitesimais foram descobertos/inventados por Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII e serviram de alicerce ao cálculo até o século XIX (que é quando sequências foram usadas para dar uma base sólida ao cálculo). Eles não são números reais e por muito tempo se acreditou que eles não passavam de uma ficção útil. Somente nos anos 60, com a descoberta da análise não padrão por Abraham Robinson, que uma teoria decente de infinitesimais foi estabelecida. Ao longo desse livro, empregarei infinitesimais para modelar problemas, porque são úteis, fáceis de manipular e comumente usados em ciências naturais, mas não adentrarei no seu formalismo.

Ilustremos o uso de infinitesimais: solta-se uma pedra de uma altura  $q_0$  em metros. Sua posição é descrita por

$$q(t) = q_0 - \frac{gt^2}{2},$$

onde  $t$  é em segundos e  $g \approx 10m/s^2$  é a aceleração gravitacional.

Para o infinitesimal  $dt$  temos

$$dq = q(t + dt) - q(t) = -\frac{g(t + dt)^2}{2} + \frac{gt^2}{2} = -gtdt - \frac{gdt^2}{2},$$

ou seja, passando  $dt$  dividindo,

$$\frac{dq}{dt} = -gt - \frac{gdt}{2}.$$

O número  $gt$  é real e, por isso, não desprezível. Por outro lado,  $-\frac{gdt}{2}$  é infinitesimal, infinitamente pequeno, e assim podemos descartá-lo. Portanto, a velocidade  $v(t)$  é

$$\frac{dq}{dt} = -gt.$$

Embora faça sentido, esse é um argumento bastante informal. O  $dt$  é não nulo quando convém, ao fazermos a divisão, mas quando queremos descartar  $dt$  simplesmente fingimos que é nulo com respeito às demais variáveis.

A “velocidade” com que a velocidade muda é a aceleração. Como  $dv = -gdt$ , temos

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\frac{gdt}{dt} = -g.$$

Note que de fato a aceleração é  $-g$ , a aceleração gravitacional com o sinal trocado. O sinal de  $-$  se deve ao fato da força gravitacional estar apontando para baixo, na direção oposta do eixo coordenado que aponta para cima. A aceleração é a segunda derivada da posição e a notação dada é

$$\frac{d^2q}{dt^2}.$$

Refaçamos as contas acima rigorosamente, fazendo uso de limites. Temos

$$\Delta q = -gt\Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2},$$

de onde segue que

$$\frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -gt - \frac{g\Delta t}{2} = -gt,$$

onde não precisamos de infinitesimais. Similarmente,

$$\Delta v = -g\Delta t,$$

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -g = -g.$$

**Nota histórica 3.2.** O cálculo começou a tomar sua forma moderna no século XVII com os trabalhos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, que estavam interessados em problemas de tangência e área: para uma curva  $y = f(x)$ , queria-se determinar suas retas tangentes (cálculo diferencial) e a área delimitada por seu gráfico e o eixo  $x$  (cálculo integral). A relação entre esses dois problemas já era razoavelmente compreendida, mas Newton e Leibniz sistematizaram o cálculo em uma linguagem limpa e apresentaram a tal conexão dentre esses problemas de maneira clara.

Ambos intelectuais fizeram suas descobertas independentemente um do outro, o que é um tanto óbvio se você comparar os escritos de cada um. No entanto, na época, houve um grande e longo escândalo na comunidade matemática disputando quem descobriu o cálculo primeiro. Esse conflito foi bem feio e patético (com difamações e acusações de plágio), e terminou numa rivalidade amarga entre os dois matemáticos. Hoje o crédito da descoberta é dada aos dois.

Anteriormente utilizamos a notação de Leibniz, que recorre aos infinitesimais. Isaac Newton denotava velocidade e aceleração por  $\dot{q}$  e  $\ddot{q}$ . Tal notação é frequentemente usada em física, engenharia e certas partes da matemática (como equações diferenciais e física matemática).

	Leibniz	Newton
Velocidade	$\frac{dq}{dt}$	$\dot{q}$
Aceleração	$\frac{d^2q}{dt^2}$	$\ddot{q}$

Taxa de crescimento de uma grandeza com respeito ao tempo, nada mais é que sua derivada com respeito ao tempo, como velocidade é derivada da posição.

Analisemos o exemplo 2.13 sobre decaimento radioativo novamente, mas agora com a ótica do cálculo diferencial. Se  $m(t)$  é a massa do material no instante  $t$ , então após um tempo  $dt$ , que é infinitamente pequeno, infinitesimal, devemos ver uma mudança  $dm$  na massa. Na modelagem, supomos que esse  $dm$  é proporcional a população no instante  $t$ : existe uma constante  $\mu > 0$  para a qual  $dm = -\mu m(t)dt$ . Repare que colocamos o número negativo  $-\mu$  na expressão porque esperamos que a massa decresça com o tempo. Assim, temos a equação

$$\frac{dm}{dt} = -\mu m(t),$$

que quer dizer que a taxa de variação da massa é proporcional a massa.

Equações envolvendo derivadas como a acima se chamam equações diferenciais. Um chute educado de solução é  $m(t) = m_0 e^{-\mu t}$  (ver Exemplo 2.13).

De fato, como

$$dm = m(t + dt) - m(t) = m_0 e^{-\mu t} (e^{-\mu dt} - 1)$$

e

$$e^{dt} = 1 + (-\mu dt) + \frac{(-\mu dt)^2}{2!} + \frac{(-\mu dt)^3}{3!} \dots$$

obtemos

$$\frac{dm}{dt} = -\mu m_0 e^{-\mu t} + dt \times \heartsuit = -\mu m(t) + dt \times \heartsuit,$$

onde  $\heartsuit$  é uma expressão muito complicada e que não importa.

Como  $dt$  é infinitesimal, desprezamos  $dt \times \heartsuit$ , por ser infinitamente pequeno. Assim, a equação diferencial

$$\frac{dm}{dt} = -\mu m(t)$$

é satisfeita por  $m(t) = m_0 e^{-\mu t}$ .

Agora façamos as contas acima rigorosamente usando limites. Temos

$$\Delta m = m_0 e^{-\mu t} (e^{-\mu \Delta t} - 1)$$

e pela definição de derivada temos

$$\frac{dm}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = m_0 e^{-\mu t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{-\mu \Delta t} - 1}{\Delta t} = -\mu m_0 e^{-\mu t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{-\mu \Delta t} - 1}{-\mu \Delta t}.$$

Pelo limite fundamental para exponencial (Lema 2.11), temos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{-\mu \Delta t} - 1}{-\mu \Delta t} = 1$$

de onde segue

$$\frac{dm}{dt} = -\mu m_0 e^{-\mu t} = -\mu m(t).$$

### 3.1.2 Reta tangente

Dada uma função  $y = f(x)$  e um ponto  $p_0 = (x_0, f(x_0))$  no seu gráfico, gostaríamos de encontrar a reta que tangencia tal curva no ponto dado.

Considere outro ponto  $p = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$  no gráfico (veja Figura 3.1). A reta que corta o gráfico em  $p_0$  e  $p$  tem coeficiente angular

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Quando fazemos  $\Delta x \rightarrow 0$ , que geometricamente quer dizer  $p \rightarrow p_0$ , temos que o coeficiente angular acima tende a derivada e a reta determinada pelo par de pontos tende a reta tangente. Assim sendo, a derivada

$$\frac{df}{dx}$$

computada em  $x_0$  é o coeficiente angular da reta tangente passando por  $p_0$ . Como aqui estamos computando a derivada em  $x_0$  e queremos deixar isso explicito para evitar confusão, escrevemos

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \quad \text{ou} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Assim, a equação da reta tangente é

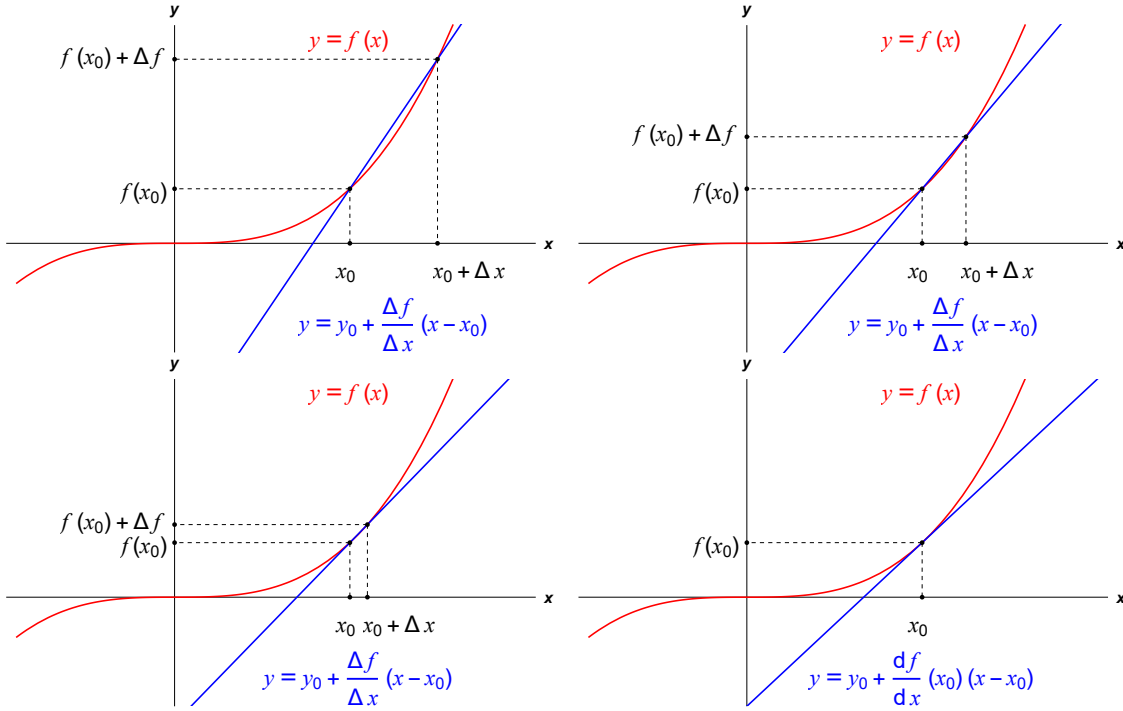
$$y = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)$$

Para  $f(x) = x^3$ , por exemplo, temos

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + 3x_0^2\Delta x^3}{\Delta x} = 3x_0^2.$$

e assim a reta tangente passando por  $(x_0, x_0^3)$  é

$$y = x_0^3 + 2x_0^2(x - x_0).$$

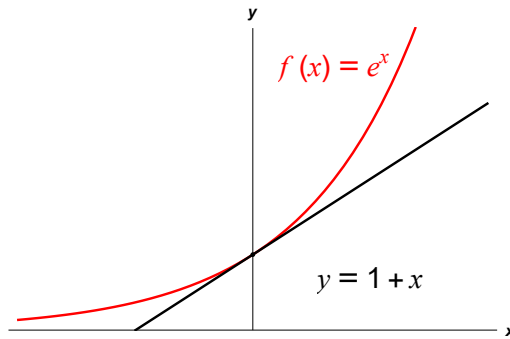


**Figura 3.1:** Derivada em  $x_0$  é o coeficiente angular da reta tangente em  $(x_0, f(x_0))$ .

Como vimos na subseção 3.1.1, a derivada de  $f(x) = e^x$  com respeito a  $x$  é  $e^x$  (embora a conta lá esteja um tanto poluída). De fato, pelo limite fundamental para exponencial,

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x.$$

Assim, o coeficiente angular da reta tangente a  $y = e^x$  em  $(0, 1)$  é 1.



**Figura 3.2:** Derivada de  $e^x$  em 0 é 1.

De modo mais geral, se  $f(x) = a^x$  com  $a > 0$ , então, lembrando que  $a^x = e^{x \log(a)}$  e refazendo o cálculo acima, obtemos

$$\frac{df}{dx} = \log(a)f(x).$$

O único  $a$  para o qual a reta tangente passante no ponto  $(0, 1)$  tem coeficiente angular 1 é  $a = e$ . Essa é a propriedade que distingue a exponencial natural das demais, sua derivada em 0 é 1.

É interessante observar que poderíamos ter descoberto  $e$  dessa forma. Suponha que  $f(x) = a^x$  é uma exponencial para a qual a reta tangente em  $(0, 1)$  é  $y = 1 + x$  e se pergunte: quem tem de ser  $a$ ? Para  $N$  infinitamente grande, temos graficamente

$$e^{1/N} \approx 1 + \frac{1}{N}$$

e elevando a  $N$  temos

$$a \approx \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N.$$

É importante dizer aqui que o argumento acima é meio perigoso, se duas coisas são próximas, então ao elevarmos ambos lados a uma potência grande não obtemos necessariamente coisas próximas. No entanto, no caso acima, tal argumento vale.

Noutras palavras, se estivéssemos procurando por uma exponencial  $x \mapsto a^x$  cuja reta tangente em  $(0, 1)$  é  $y = 1 + x$ , seria natural tomar  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , que é o número  $e$  pela proposição 2.12.

## 3.2 Formalização e regras básicas

**Definição 3.3.** Suponha que  $X$  é bom (veja Definição 2.2). A função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável ou derivável em  $a$  se o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe. Denotamos esse limite por

$$\frac{df}{dx}(a) \quad \text{ou} \quad f'(a).$$

Algumas observações sobre a definição acima. No lugar de  $\Delta x$ , como usamos anteriormente, utilizamos  $h$  ou outra letra porque é mais conciso. Além disso, empregaremos bastante a notação  $f'$  de agora em diante.

Vamos destrinchar mais o limite acima:  $f$  ser derivável em  $a$  quer dizer que para toda sequência não nula  $h_n$  que tende a 0 e satisfaz  $a + h_n \in X$  temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n}.$$

Fazendo  $x_n = a + h_n$ , que pertence a  $X \setminus \{a\}$  e tende a  $a$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a},$$

ou seja,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



**Proposição 3.4.** Se  $f$  é diferenciável em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$ .

**Demonstração.** Pela Observação 2.21, tome  $x_n \rightarrow a$  com  $x_n \in X \setminus \{a\}$ . Temos

$$f(x_n) - f(a) = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}(x_n - a) \rightarrow f'(a) \times (a - a) = 0.$$

■

**Definição 3.5.** A função é diferenciável ou derivável em  $X$  se possui derivada em todos os pontos de  $X$ .

**Exemplo 3.6.** A derivada de  $x^n$  é  $nx^{n-1}$ , onde  $n$  é inteiro positivo. Temos de trabalhar com o quociente

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Aqui podemos usar o binômio de Newton para expandir  $(x+h)^n$  ou usarmos a soma geométrica

$$\frac{b^n - a^n}{b - a} = b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \dots + a^{n-2}b + a^{n-1}.$$

Utilizemos o segundo. Fazendo  $b = x+h$  e  $a = x$ , obtemos

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} = (x+h)^{n-1} + x(x+h)^{n-2} + x^2(x+h)^{n-3} + \dots + x^{n-2}(x+h) + x^{n-1}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (x+h)^{n-1} + x(x+h)^{n-2} + x^2(x+h)^{n-3} + \dots + x^{n-2}(x+h) + x^{n-1} \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

**Exercício 3.7.** A derivada de  $e^x$  é  $e^x$ .

**Exemplo 3.8.** Derivada de  $\sin$  e  $\cos$  e a derivada de  $\cos$  é  $-\sin$ .

Note que

$$\begin{aligned} (\sin(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h}. \end{aligned}$$

Do limite fundamental trigonométrico (Lemma 2.16)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin^2(h)} - 1}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left( \sqrt{1 - \sin^2(h)} - 1 \right)}{h} \frac{\left( \sqrt{1 - \sin^2(h)} + 1 \right)}{\left( \sqrt{1 - \sin^2(h)} + 1 \right)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(h)}{h} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(h)} + 1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,  $(\sin(x))' = \cos(x)$ .

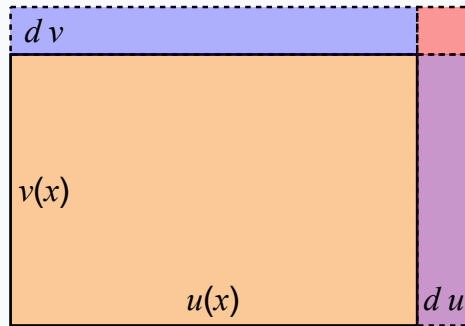
De modo análogo,

$$\begin{aligned}
(\cos(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\sin(x).
\end{aligned}$$

**Proposição 3.9.** Se  $f$  e  $g$  são diferenciáveis e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então temos

- $(\alpha f)' = \alpha f'$
- $(f + g)' = f' + g'$ ;
- $(fg)' = f'g + fg'$  (Regra de Leibniz, veja Figura 3.3);
- se  $g$  não se anula, então  $(1/g)' = g'/g^2$ .

**Observação 3.10.** Vamos interpretar geometricamente a regra de Leibniz presente na Proposição 3.9. Considere as funções  $u(x)$  e  $v(x)$  de  $x$ . Queremos derivar o produto  $uv$ .



**Figura 3.3:** Explicação geométrica da regra de Leibniz.

O produto  $u(x)v(x)$  é a área do retângulo laranja na Figura 3.3. Já

$$u(x+du)v(x+dv) = (u(x) + du)(v(x) + dv)$$

é a área dos quatro retângulos coloridos juntos. Assim:

$$d(uv) = (u(x) + du)(v(x) + dv) - u(x)v(x) = u(x)dv + v(x)du + dudv$$

que é a área dos três triângulos menores. O triângulo vermelho tem ambos lados infinitesimais e portanto é muito menor que os demais. Logo, descartamos ele.

$$d(uv) = u(x)dv + v(x)du$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u(x)\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v(x).$$

**Demonstração.** Provemos o terceiro e quarto itens (os dois primeiros são fáceis). Em ambos argumentos usaremos que funções diferenciáveis são contínuas (Proposição 3.4). A regra de Leibniz segue da conta a seguir.

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$

Agora computemos  $(1/g)'$ :

$$(1/g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/g(x+h) - 1/g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

■

**Exercício 3.11.** Utilize os dois últimos itens a fim de provar

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

**Exemplo 3.12.**

- $(x^2 \sin(x))' = (x^2)' \sin(x) + x^2(\sin(x))' = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x);$
- $\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x x'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2};$
- $\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$

**Exercício 3.13.** O seno e o cosseno hiperbólicos são, respectivamente, as funções

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Mostre que  $(\sinh(x))' = \cosh(x)$  e  $(\cosh(x))' = \sinh(x)$ .

**Exercício 3.14.** Calcule as derivadas

1.  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ;
2.  $e^{-x} \cos(x) + \sin(x)$ ;
3.  $\frac{e^x}{1+x^2}$ ;
4.  $\sin(x)(\cosh(x) + x)$ ;
5.  $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ ;
6.  $x(x+1)(x+2)(x+3)$ .

### 3.3 Derivada da composta: Regra da cadeia

Agora vamos ver como derivar a composta de duas funções. Pensando em infinitesimais: se temos  $y = f(x)$  e  $z = g(y)$ , então temos que  $z = g(f(x))$ , isto é,  $z$  como função de  $x$ . Portanto, usando

$$dz = \frac{dz}{dy} dy \quad \text{e} \quad dy = \frac{dy}{dx} dx$$

temos

$$dz = \frac{dz}{dy} dy = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} dx,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Em termos de  $x$  temos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad \frac{dz}{dy} = g'(y) = g'(f(x)) \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = (g \circ f)'(x),$$

ou seja, deve valer a identidade

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x),$$

que se chama **regra da cadeia** e provaremos a seguir. Mas antes, alguns exemplos.

#### Exemplo 3.15.

- Para  $z = \cos(2x + 3)$  temos  $z = \cos(y)$  e  $y = 2x + 3$ . Assim,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = (-\sin(y)) \times 2 = -2\sin(2x + 3);$$

- para  $z = e^{-x^2}$  tomamos  $y = -x^2$  e  $z = e^y$ . Temos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = e^y(-2x) = -2xe^{-x^2};$$

- para  $z = a^x$ , onde  $a > 0$ , temos  $z = e^{x \log(a)}$ . Tomando  $y = x \log(a)$ , temos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = e^y \log(a) = \log(a)a^x;$$

- para  $z = x^k$ , onde  $k$  é real qualquer e  $x > 0$ , temos que  $z = e^{k \log(x)} = e^y$  com  $y = k \log(x)$  (relembre isso na Seção 2.4). Utilizando que a derivada de  $\log(x)$  é  $1/x$ , que verificaremos em breve mas que o leitor pode computar tal resultado se quiser (não é difícil), temos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = e^y \frac{k}{x} = kx^{k-1}.$$

Logo, a derivada de  $x^k$  é  $kx^{k-1}$ , generalizando o que vimos na Observação 3.6;

- se  $z = 1/\sqrt{1-x^2}$  com  $x \in (-1, 1)$ , então, tomando  $z = 1/\sqrt{y} = y^{-1/2}$  e  $y = 1 - x^2$ , temos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = (-1/2)y^{-1/2-1}(-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

**Proposição 3.16** (Regra da cadeia). Se  $f$  e  $g$  são diferenciáveis e a imagem de  $f$  está contida no domínio de  $g$ , então  $g \circ f$  é diferenciável e  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ .

**Demonstração.** Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}$$

existe e vale  $g'(f(a))f'(a)$ . Considere  $x_n \rightarrow a$  com  $x_n \neq a$  para todo  $n$ . Defina  $y_n = f(x_n)$ .

1. Se  $y_n \neq f(a)$  para  $n$  suficientemente grande, então

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \frac{g(y_n) - g(f(a))}{y_n - f(a)} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \rightarrow g'(f(a))f'(a).$$

2. Se  $y_n = f(a)$  para  $n$  suficientemente grande, então

$$\frac{f(g(x_n)) - f(g(a))}{x_n - a} = 0 = g'(f(a))f'(a),$$

$$\text{pois } f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = 0.$$

3. No caso que sobrou,  $y_n$  tem infinitos  $n$ 's para os quais  $y_n \neq f(a)$ , denotados por

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots,$$

e infinitos  $n$ 's para os quais  $y_n = f(a)$ , denotados por

$$m_1 < m_2 < m_3 < \cdots.$$

Por um lado temos

$$\frac{f(g(x_{n_k})) - f(g(a))}{x_{n_k} - a} = \frac{g(y_{n_k}) - g(f(a))}{y_{n_k} - f(a)} \frac{f(x_{n_k}) - f(a)}{x_{n_k} - a} \rightarrow g'(f(a))f'(a).$$

Esse limite é zero porque  $x_{m_k} \rightarrow a$  e  $f(x_{m_k}) = f(a)$  para  $k$  suficientemente grande, o que garante que  $f'(a) = 0$ . Assim,

$$\frac{f(g(x_{n_k})) - f(g(a))}{x_{n_k} - a} \rightarrow 0.$$

Por outro lado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(g(x_{m_k})) - f(g(a))}{x_{m_k} - a} = 0$$

e coincide com  $g'(f(a))f'(a) = 0$ .

Desta forma, como todo número inteiro positivo é um  $n_k$  ou um  $m_k$ , temos que dado  $\varepsilon > 0$  a desigualdade

$$\left| \frac{f(g(x_n)) - f(g(a))}{x_n - a} \right| < \varepsilon$$

vale para  $n$  suficientemente grande. Em outras palavras,

$$\frac{f(g(x_n)) - f(g(a))}{x_n - a} \rightarrow 0 = g'(f(a))f'(a).$$

Portanto, não importa qual seja a sequência  $x_n \rightarrow a$  com  $x_n \neq a$  para todo  $n$ , temos que

$$\frac{f(g(x_n)) - f(g(a))}{x_n - a} \rightarrow g'(f(a))f'(a),$$

ou seja,

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = g'(f(a))f'(a).$$

■

**Exercício 3.17.** Calcule as derivadas de

1.  $5e^{-x^5}x^4$

3.  $\frac{1}{27}e^{-\frac{x^2}{18}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^2;$

2.  $\sin^2(x+2);$

4.  $\frac{1-x^2}{\sin(x^2)}.$

**Exercício 3.18.** Prove que se  $f, g, h$  são funções diferenciáveis e a composição  $h \circ g \circ f$  está bem definida, então essa composta é diferenciável e

$$(h \circ g \circ f)'(x) = h'(g(f(x)))g'(f(x))f'(x).$$

## 3.4 Teorema de função inversa

# Referências Bibliográficas

- [Cou] Richard Courant. Differential and Integral Calculus – Volume 1. Wiley. 1937.
- [Lag] Elon Lages Lima. Análise Real – Volume 1. IMPA, 10<sup>a</sup> edição. 2009.
- [FKo] Galina Filipuk e Andrzej Kozłowski. Analysis With Mathematica. De Gruyter. 2019.
- [Pis] Nikolai Piskunov. Calculo Diferencial e Integral – Tomo I. MIR, 3<sup>a</sup> edição. 1977;
- [Sta] Saul Stahl. Real Analysis: A Historical Approach. Wiley, 2<sup>a</sup> edição. 2011.
- [Zor] Vladimir Zorich. Mathematical Analysis I. Springer, 2<sup>a</sup> edição. 2016.