Cálculo em construção

Hugo Cattarucci Botós (ICMC - USP)
hugocbotos@gmail.com

Sumário

Capítulo 1

Números reais

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk. [1]

Leopold Kronecker

René Descartes pensou ser uma boa ideia representar pontos de um plano usando eixos coordenados, que costumeiramente chamamos de eixo x e eixo y. Não seria exagero dizer que a partir daí os números reais se tornaram centrais na matemática, pois esses aritmetizaram a geometria, tópico de grande interesse dos matemáticos desde a antiguidade.

1.1 Base decimal

Por termos dez dedos nas mãos, utilizamos o sistema decimal para representar números. Os números naturais são

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad \cdots$$

e formam o conjunto denotado por $\mathbb{N}$.

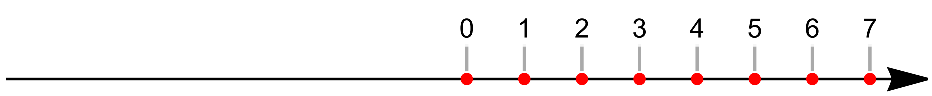

Figura 1.1: *Números naturais*

Representar um número natural no sistema decimal significa escrevê-lo usando potências de dez: $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, etc. Por exemplo, ao escrevermos 11, queremos dizer que esse número é $1 \times 10^0 + 1 \times 10^1$. O número 12 é $2 \times 10^0 + 1 \times 10^1$. Já 2022 é $2 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^3$. De forma geral, o número $a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, onde os dígitos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$ são números naturais de 0 a 9, é

$$a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + a_3 \times 10^3 + \cdots + a_k \times 10^k.$$

[1] Deus criou os números inteiros, todo o resto é obra do homem.

Adicionando os negativos dos números naturais à nossa lista de números, obtemos os inteiros, que formam o conjunto $\mathbb{Z}$.

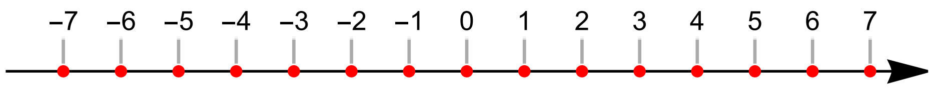

Figura 1.2: *Números Inteiros*

Denotamos o conjunto dos inteiros positivos $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ por $\mathbb{Z}_{>0}$, onde o subscrito > 0 nos diz que consideramos apenas os elementos de $\mathbb{Z}$ maiores que zero.

Números racionais são frações m/n, onde m e n são inteiros e $n \neq 0$, e formam o conjunto $\mathbb{Q}$. A fim de representar frações positivas no sistema decimal, utilizamos as potências de 10 com expoente inteiros

$$\cdots 10^3, \quad 10^2, \quad 10^1, \quad 10^0, \quad 10^{-1}, \quad 10^{-2}, \quad 10^{-3} \cdots$$

Lembrando que

$$\begin{array}{ll} 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1, & 10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0.0001, \\ 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01, & 10^{-5} = \frac{1}{100000} = 0.00001, \\ 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0.001, & 10^{-6} = \frac{1}{1000000} = 0.000001, \end{array}$$

e assim por diante.

Exemplo 1.1

- $1/4 = 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 0.25$ *;*
- $2/5 = 4 \times 10^{-1} = 0.4$*;*
- $90/8 = 1 \times 10 + 1 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 11.25$*.*

Já $1/3$ é $0.3333\ldots$ com infinitos $3'$s aparecendo em sua representação.

$$\frac{1}{3} = 3 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} + \cdots .$$

Algo similar ocorre com $1/7$. Calculemos seus dígitos. A ideia é trocar frações menores que 1 por maiores que 1 multiplicando por 10 em cima e em baixo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= \frac{10}{7} \times 10^{-1} \\ &= 10^{-1} + \frac{3}{7} \times 10^{-1} \\ &= 10^{-1} + \frac{30}{7} \times 10^{-2} \\ &= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + \frac{2}{7} \times 10^{-2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + \frac{20}{7} \times 10^{-3} \\
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + \frac{6}{7} \times 10^{-3} \\
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + \frac{60}{7} \times 10^{-4} \\
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + \frac{4}{7} \times 10^{-4} \\
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + \frac{40}{7} \times 10^{-5} \\
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-5} + \frac{5}{7} \times 10^{-5} \\
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-5} + \frac{50}{7} \times 10^{-6} \\
&= 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-5} + 7 \times 10^{-6} + \frac{1}{7} \times 10^{-6}
\end{aligned}
$$

As frações menores que 1 destacadas em vermelho nos cálculos acima seguem um padrão: elas se repetem. Começamos com $1/7$ e obtemos o ciclo de frações

$$\frac{1}{7} \to \frac{3}{7} \to \frac{2}{7} \to \frac{6}{7} \to \frac{4}{7} \to \frac{5}{7} \to \frac{1}{7}$$

Porque essas frações eventualmente começam a se repetir, temos que ao continuarmos o procedimento acima obteremos $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857142857142857\cdots$ com uma lista de dígitos repetindo-se periodicamente. Isso sempre ocorre para frações, suas representações em base 10 tem uma lista de dígitos que se repete. Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = 0.5000000000\cdots$$

$$\frac{1}{11} = 0.09090909090909\cdots$$

$$\frac{12}{13} = 0.923076923076\cdots$$

O padrão repetido pode não surgir de imediato. Na fração

$$\frac{7}{12} = 0.583333333333333\cdots,$$

por exemplo, o 58 não faz parte da lista de dígitos que se repete. No entanto, a partir de certo ponto, o digito 3 passa a se repetir.

Geometricamente, o procedimento descrito se manifesta da seguinte maneira: se temos uma fração $r > 0$, tome q como sendo o maior número natural menor que ou igual a r. Tome a_{-1} como sendo o maior número natural tal que $q + a_{-1} \times 10^{-1} \leq r$. Como $0 \leq r - q < 1$,

a_{-1} tem de ser um número natural de 0 a 9. Similarmente, a_{-2} é o maior número natural satisfazendo $q + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} \leq r$. Como $0 \leq r - (q + a_{-1} \times 10^{-1}) < 10^{-1}$, o número a_{-2} é um natural de 0 a 9. Repetindo tal algoritmo, obtemos

$$q + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \cdots + a_{-n} \times 10^{-n} \leq r$$

com a diferença entre esses dois números sendo menor que 10^{-n}. Os cálculos para $1/7$ feitos anteriormente podem ser vistos geometricamente de acordo com a Figura 1.3 a seguir. Observe que os intervalos em preto vão ficando cada vez menor. O primeiro segmento em preto tem comprimento 1, o segundo tem comprimento 10^{-1}, o terceiro tem comprimento 10^{-2}, etc.

O padrão de repetição descrito anteriormente aparece na figura a seguir da seguinte forma. O ponto em roxo oscila entre os intervalos delimitados por pontos vermelhos, até que volta novamente para o segundo intervalo (da esquerda para direita).

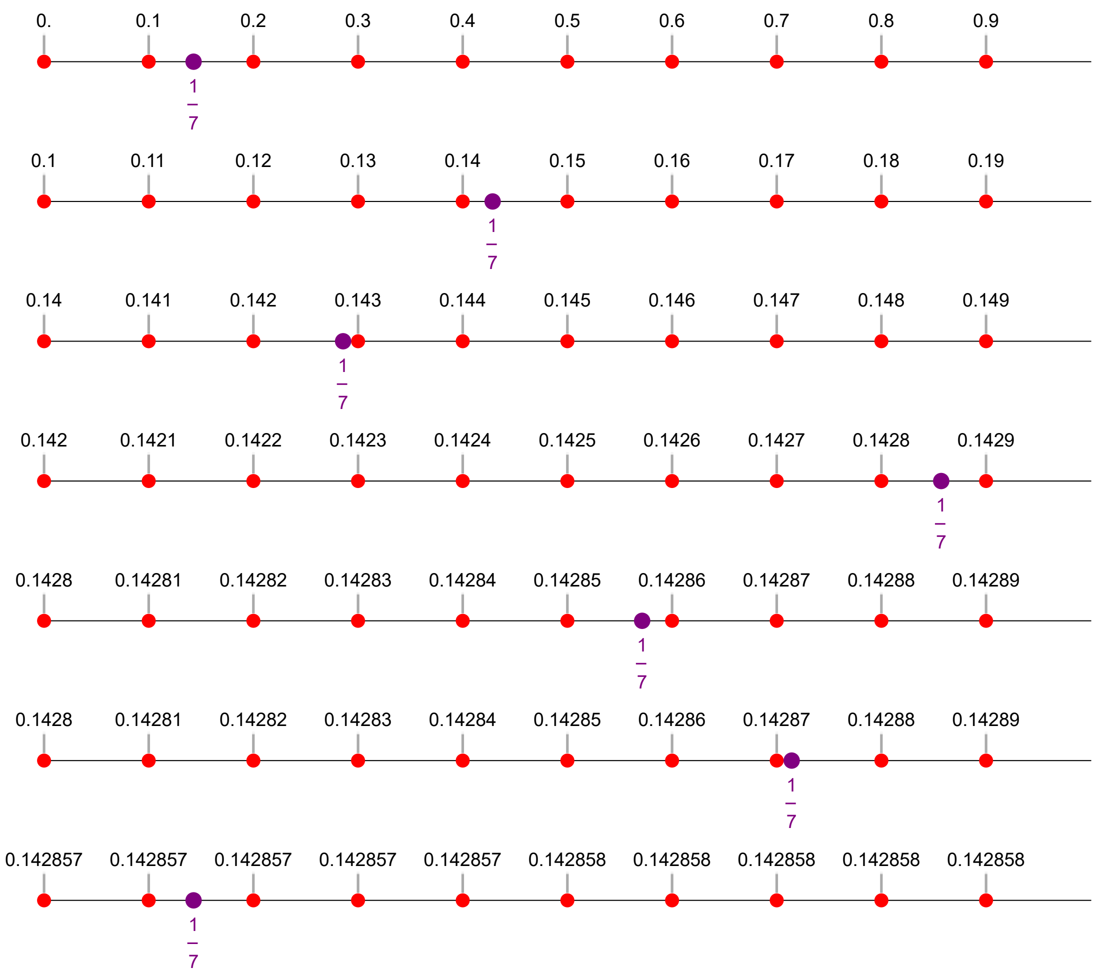

Figura 1.3: *Fração* $1/7$ *na base* 10

Voltando ao caso geral. Como 10^{-n} decresce conforme n cresce, temos que a soma de infinitos termos

$$q + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \cdots + a_{-n} \times 10^{-n} + \cdots$$

é igual a r.

Como q é um natural positivo,

$$q = a_0 + a_1 \times 10 + \cdots + a_l \times 10^l,$$

ou seja,

$$r = a_l \times 10^l + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \cdots + a_{-k} \times 10^{-n} + \cdots,$$

que escrevemos abreviadamente como sendo

$$r = a_l a_{l-1} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots .$$

O mesmo método de aproximação funciona se r for um número irracional positivo (como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π). Você sempre consegue escrevê-lo no sistema decimal seguindo o mesmo algoritmo descrito. Se o número for racional, essa representação apresenta um padrão que se repete periodicamente. Reciprocamente, se um número apresenta uma lista de número que se repete periodicamente, então esse deve ser racional. Verificar tal afirmação, que não farei, segue de generalizar o exemplo a seguir.

Exemplo 1.2 *Se* $r = 0.314232323232323232\cdots$, *então temos*

$$r - 0.314 = 0.000232323232323232\cdots$$

e multiplicando por 10^2 *obtemos*

$$100r - 31.4 = 0.0232323232323232\cdots = 0.023 + 0.0002323232323232\cdots = 0.023 + (r - 0.314),$$

$$r = \frac{31.109}{99} = \frac{31109}{99000},$$

que é racional.

Desta forma, um número irracional não possui uma lista de dígitos consecutivos que se repete periodicamente.

Exemplo 1.3 *O número irracional*

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769\ldots$$

não apresenta um padrão em seus dígitos que se repete periodicamente.

Até então, representamos decimalmente apenas números positivos. Se o número real r for negativo, então podemos escrever $-r$ na representação decimal e depois colocar um $-$ na frente. Por exemplo, $-3/4 = -0.75$ porque $3/4 = 0.75$. Mais precisamente, se r for negativo, podemos aproximar $s = -r$ por termos s_n e definindo $r_n = -s_n$ temos $|r - r_n| < 10^{-n}$.

Os números r_n's construídos são racionais independentemente se r é real ou somente racional. Assim, como para todo r real temos $|r - r_n| < 10^{-n}$, podemos aproximar qualquer número por um racional com a precisão que quisermos.

Exemplo 1.4 *Para o número*

$$\sqrt{3} = 1.7320508075688772935274463415058723669428052538104\cdots,$$

temos

$$|\sqrt{3}-1| < 1$$
$$|\sqrt{3}-1.7| < 0.1$$
$$|\sqrt{3}-1.73| < 0.01$$
$$|\sqrt{3}-1.732| < 0.001$$

e assim por diante.

Observação 1.5 *O procedimento descrito anteriormente nos dá uma representação decimal para qualquer número. No entanto, certos números têm duas representações decimais. Por exemplo,*

$$1 = 1.0000\cdots = 0.9999\cdots$$

A primeira representação é a fornecida pelo algoritmo que descrevemos. Por outro lado, $0.9999\cdots$ *de fato outra é representação de 1, pois*

$$\begin{aligned} 0.9999 &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots \\ &= \frac{9}{10}\overbrace{\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right)}^{=\frac{1}{1-1/10}=\frac{10}{9}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Esse fenômeno ocorre apenas quando o número tem uma representação decimal finita:

$$0.1 = 0.09999\cdots \qquad 12.7 = 12.69999\cdots \qquad 0.219 = 0.2189999\cdots$$

1.2 Sequência e convergência

Definição 1.6 *Uma sequência* r_n *é uma lista de números reais indexada por números inteiros positivos.*

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$$

Exemplo 1.7

- *Os* r_n'*s construídos para a representação decimal de um número real* r *formam uma sequência de números racionais;*

- *outros exemplos básicos de sequências são*

$$\frac{1}{n}, \qquad \frac{n^2+2}{n}, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

  onde ! *denota o fatorial*[2].

Definição 1.8 *Uma sequência r_n converge para o número real r se para $\varepsilon > 0$ temos que $|r - r_n| < \varepsilon$ para n suficientemente grande: existe um inteiro suficientemente grande N tal que $|r - r_n| < \varepsilon$ quando $n > N$.*

Geometricamente, isso quer dizer que não importa quão pequeno seja o $\epsilon > 0$, r_n fica dentro de $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$ a partir de algum n.

Frequentemente ***dizemos que*** r_n ***tende a*** r ***ou tende para*** r *e denotamos esse fato por*

$$r_n \to r \quad \text{ou por} \quad \lim_{n\to\infty} r_n = r.$$

O número r é o ***limite*** *de r_n.*

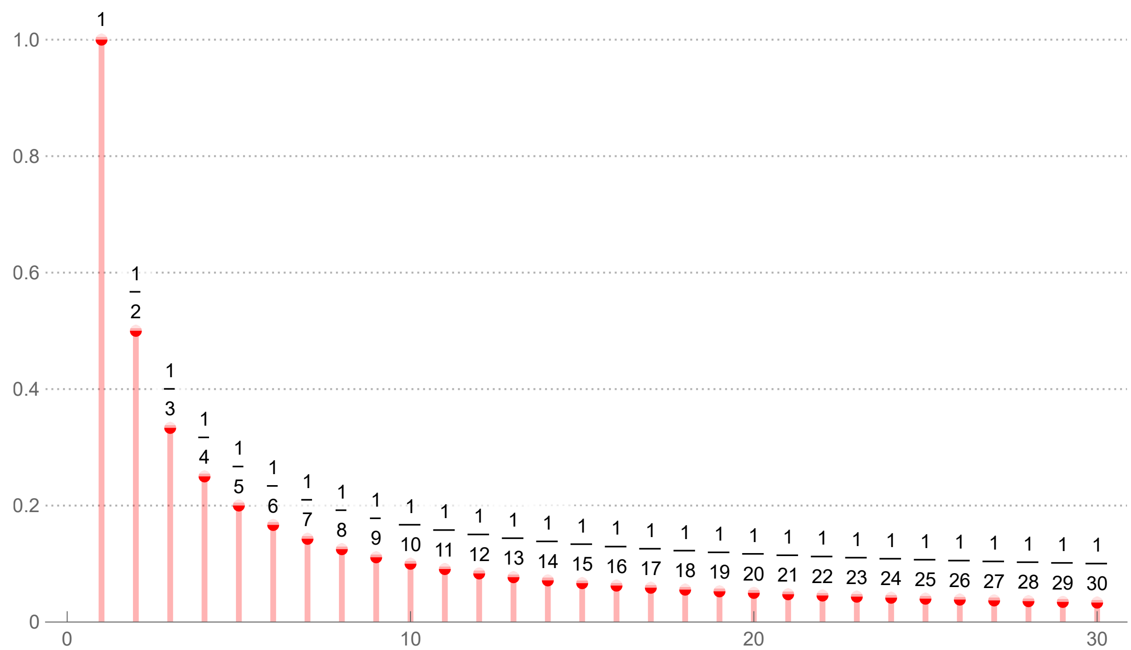

Figura 1.4: *Sequência $r_n = \frac{1}{n}$*

Exemplo 1.9 *A sequência $r_n = 1/n$ tende a 0 (veja a Figura 1.4). De fato, dado $\varepsilon > 0$, tão pequeno quanto se queira, temos que $|r_n| < \epsilon$ para n suficientemente grande. Isso mostra que $r_n \to 0$.*

[2]Lembre-se que $0! = 1$ por definição e $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.

Mais formalmente, tome N suficientemente grande[3] *satisfazendo* $1/N < \varepsilon$*. Para* $n > N$ *temos que*

$$|0 - r_n| = 1/n < 1/N < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Observação 1.10 *Gráficos como na Figura 1.4 podem ser feitos no software* ***Mathematica****. De fato, todas figuras desse livro foram feitas no Mathematica. Uma versão online básica e gratuita se encontra no Wolfram cloud* `https://wolframcloud.com/`*. Para fazer gráficos de sequências, usa-se o comando* ***DiscretePlot****. O gráfico na Figura 1.4 (com menos enfeites) é gerado pelo comando* `DiscretePlot[1/n, {n, 1, 30}]` *A documentação da linguagem Wolfram encontra-se em* `https://reference.wolfram.com/language`*. Há também bastante informação disponível em* `https://mathematica.stackexchange.com`*. Para uma introdução ao Mathematica voltada à análise real (um nome chique para cálculo), veja o fascinante livro* ***Analysis With Mathematica*** *de G. Filipuk e A. Kozłowski [FKo].*

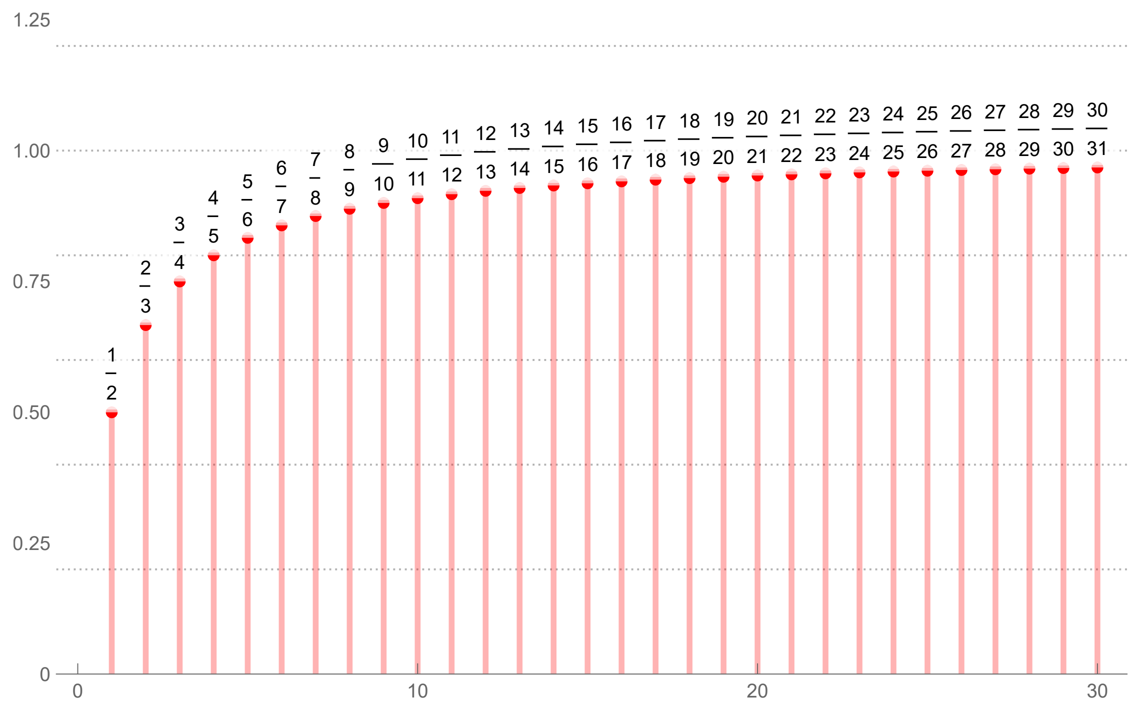

Figura 1.5: *Sequência* $r_n = \frac{n}{n+1}$

Exemplo 1.11 *Considere* $r_n = \frac{n}{n+1}$ *(veja Figura 1.5). Essa sequência converge para* 1*. De fato,*

$$1 - r_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

[3] N pode ser um inteiro positivo qualquer maior que $1/\epsilon$

$$r_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Como $1/(n+1) \to 0$, *temos que* $r_n \to 1$. *Mais precisamente, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* N *tal que* $1/(1+N) < \varepsilon$. *Como*

$$|1 - r_n| = \frac{1}{1+n} < \frac{1}{1+N} < \varepsilon$$

quando $n > N$, *temos que* $r_n \to 1$.

Observação 1.12 *A fim de calcular o limite de uma sequência computacionalmente no Mathematica, utilizamos o comando* `Limit[n/(n+1),n->Infinity]`.

Lembrete 1.13 (Binômio de Newton) *Para* n *natural e* x *real,*

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n,$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Exemplo 1.14 *Mostremos que se* $0 < a < 1$, *então* $a^n \to 0$ *(veja Figura 1.6). Como* $0 < a < 1$, *temos que* $a^{-1} > 1$. *Tomando* $b = a^{-1} - 1$, *que é positivo, temos* $1/a = 1 + b$. *Pelo binômio de Newton (veja Lembrete 1.13),*

$$(1+b)^n \geq \binom{n}{0}b^0 + \binom{n}{1}b^1 = 1 + nb,$$

ou seja,

$$\frac{1}{a^n} = (1+b)^n \geq 1 + nb.$$

Daí segue que

$$a^n \leq \frac{1}{1+nb},$$

e o resultado desejado.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, *podemos tomar* N *tal que* $1/(1+Nb) < \varepsilon$. *Para* $n > N$ *temos*

$$a^n \leq \frac{1}{1+nb} < \frac{1}{1+Nb} < \varepsilon,$$

que justifica $a^n \to 0$.

Exemplo 1.15 *Na mesma linha do exemplo anterior, mostremos que se* $0 < a < 1$, *então* $na^n \to 0$. *Pelo mesmo truque do binômio de Newton, com* $b = a^{-1} - 1 > 0$, *temos*

$$\frac{1}{a^n} = (1+b)^n \geq 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 = 1 + n\left(b - \frac{b^2}{2}\right) + \frac{n^2b^2}{2},$$

para $n \geq 2$. Daí segue que

$$|na^n| \leq \frac{n}{1 + n\left(b - \frac{b^2}{2}\right) + \frac{n^2b^2}{2}} = \frac{2}{\left(\frac{2}{n^2} + \frac{(2b-b^2)}{n} + b^2\right)}\frac{1}{n} \to 0,$$

pois

$$\frac{2}{n^2} + \frac{(2b-b^2)}{n} + b^2 \to b^2 \quad e \quad \frac{1}{n} \to 0.$$

Por argumento similar, $n^k a^n \to 0$ para qualquer número natural k . Isso quer dizer que a^n tende a zero rápido demais, mais rápido que $1/n^k$.

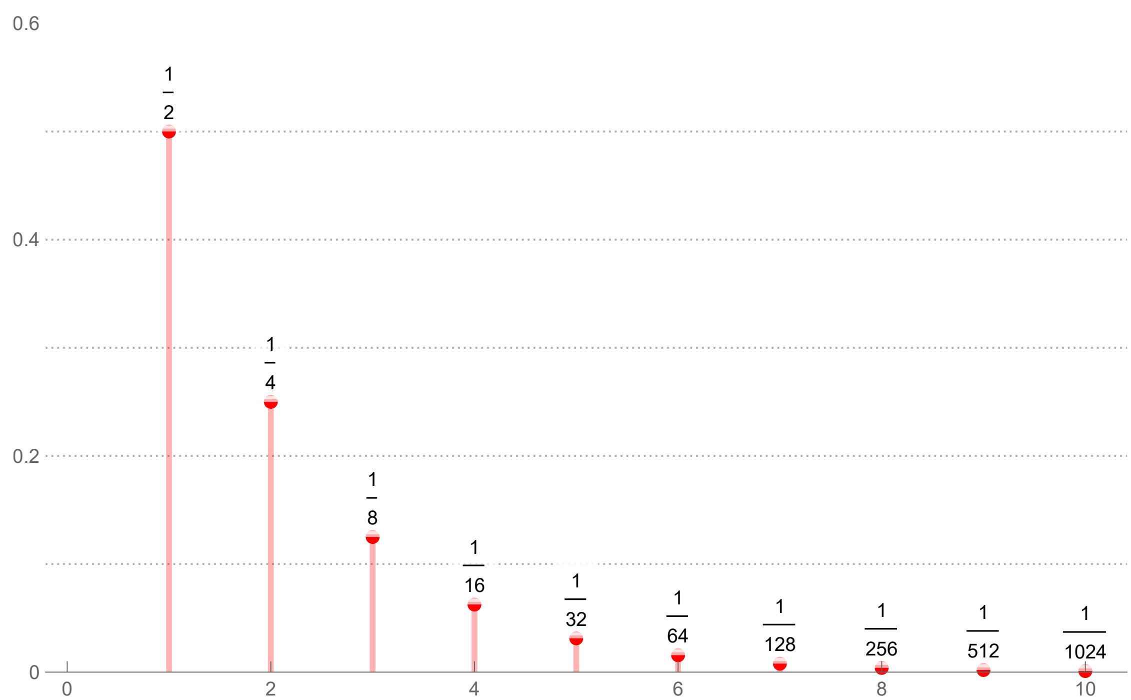

Figura 1.6: *Sequência $r_n = \frac{1}{2^n}$*

Observação 1.16 *O comando*

```
Limit[a^n, n -> Infinity, Assumptions -> 0 <= a < 1]
```

retorna o número 0 no Mathematica. A parte `Assumptions -> 0 <= a < 1` *declara à maquina que estamos assumindo $0 \leq a < 1$. Similarmente, usando* `Assumptions -> a>1`*, obtemos ∞.*

Definição 1.17 *Se $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ é definido a partir da soma de termos a_k's, então denotamos o limite de s_n, se esse existir, por*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

*Chamamos essa soma de infinitos termos de **série**.*

Exemplo 1.18 *A sequência*

$$s_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$

converge para $1/(1-a)$ *quando* $-1 < a < 1$. *Em outras palavras, a* ***série geométrica dada por*** *a*

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$$

vale $1/(1-a)$, *o que é conhecido da escola.*

O truque para mostrar isso é multiplicar s_n *por* a*:*

$$s_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n \quad e \quad as_n = a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^{n+1},$$

de onde segue que

$$s_n - as_n = 1 - a^{n+1}$$

e, consequentemente,

$$s_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Como $0 < |a| < 1$, *o termo* a^{n+1} *na expressão acima tende a zero e* $s_n \to 1/(1-a)$. *Portanto,*

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a}.$$

Observação 1.19 *Para somarmos séries no Mathematica usamos o seguinte comando* `Sum[1/n^2,{n,1,Infinity}]`, *que computa a soma dos termos* $1/n^2$ *com* n *indo de* 1 *a infinito. O Mathematica nos fornece* $\pi^2/6$, *que de fato é a resposta correta.*

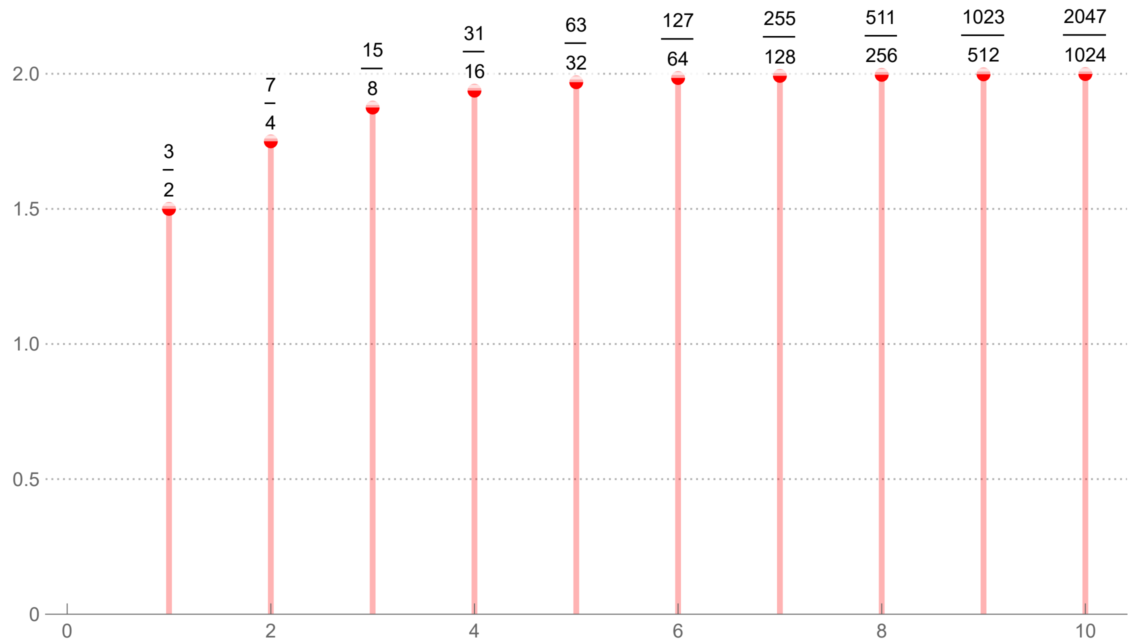

Figura 1.7: *Sequência* $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ *tende a* $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Exemplo 1.20 *Para os* r_n'*s que construímos ao representarmos* r *na base decimal, temos que* $|r - r_n| < 10^{-n}$*. Assim, dado* $\varepsilon > 0$*, existe um* N *inteiro suficientemente grande para o qual* $10^{-N} < \varepsilon$*. Desta forma, temos que* $|r - r_n| < 10^{-n} < 10^{-N} < \varepsilon$ *para* $n > N$*. Em outras palavras, temos que* r_n *tende para* r*.*

1.3 Sequências convergentes

Nessa seção, assumiremos que os limites das sequências sejam finitos (isto é, não são $\pm\infty$). Comecemos provando que sequências convergentes são limitadas.

Proposição 1.21 *Se* $r_n \to r$*, então* r_n *é limitada.*

Demonstração: Para $\varepsilon = 1$, existe N tal que $|r_n - r| < 1$ para $n > N$. Somente para finitos n's a distância de r_n a r não é menor que 1. Logo, r_n é limitada.

Proposição 1.22 *Suponha* $r_n \to r$ *e* $s_n \to s$*.*

1. *Se* $\alpha \in \mathbb{R}$*, então* $\alpha r_n \to \alpha r$*;*

2. $r_n + s_n \to r + s$*;*

3. $r_n s_n \to rs$*.*

Demonstração:

1. Para $\varepsilon > 0$, existe N suficientemente grande tal que $|r - r_n| < \varepsilon$ para $n > N$. De onde segue que
$$|\alpha r - \alpha r_n| < |\alpha|\varepsilon$$
para $n > N$. Isso prova o primeiro item, pois podemos tomar $|\alpha|\varepsilon$ tão pequeno quanto for necessário.

2. Para $\varepsilon > 0$ existe N suficientemente grande tal que
$$|r - r_n| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |s - s_n| < \varepsilon$$
para $n > N$. Assim,
$$|r + s - r_n - s_n| = |(r - r_n) + (s - s_n)| \leq |r - r_n| + |s - s_n| < 2\varepsilon$$
para $n > N$, provando o segundo item.

3. O terceiro item é o mais complicado. Como r_n é limitada, existe $M > 0$ tal que $|r_n| \leq M$. Para $\varepsilon > 0$, existe N tal que
$$|r - r_n| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |s - s_n| < \varepsilon$$
para $n > N$. Daí, obtemos
$$|rs - r_n s_n| = |s(r - r_n) + (s - s_n)r_n| \leq |s||r - r_n| + |s - s_n||s_n| \leq \varepsilon(|s| + M)$$
para $n > N$. Como $\varepsilon(|s| + M)$ pode ser tomado tão pequeno quanto necessário (fazendo ε pequeno) temos que o terceiro item é valido. ∎

Exemplo 1.23

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1 + 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 1;$
- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{(4n + 100)^3}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(4 + \frac{100}{n}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} 4 + \frac{100}{n}\right)^3 = 4^3 = 64.$

Proposição 1.24 *Se $s_n \to s$ com $s \neq 0$, então*

1. *$|s_n| > |s|/2$ para n suficientemente grande. Em particular, a partir de algum n a sequência não se anula;*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$.

Demonstração: Provemos o primeiro item. Como $s \neq 0$, o número $\epsilon = |s|/2$ é positivo. Assim, para n suficientemente grande $|s - s_n| < |s|/2$. Como

$$|s| = |(s - s_n) + s_n| \leq |s - s_n| + |s_n| \leq |s_n| + \frac{|s|}{2},$$

temos

$$|s_n| \geq |s|/2 > 0$$

para n suficientemente grande.

Provemos o segundo item. Para $\epsilon > 0$, devido ao primeiro item,

$$|s_n - s| < \epsilon \quad \text{e} \quad |s_n| > |s|/2$$

para n suficientemente grande.

Logo,

$$\left|\frac{1}{s} - \frac{1}{s_n}\right| = \frac{|s_n - s|}{|s||s_n|} \leq \frac{2\epsilon}{|s|^2} \to 0,$$

nos garantindo $s_n^{-1} \to s^{-1}$. ∎

Exemplo 1.25

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n^3 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n^2}} = 0.$$
- $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - 1)(\sqrt{n+1} + 1)}{n(\sqrt{n+1} + 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + 1)}$$

que vale 1 *porque*

$$\frac{n}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1$$

Exercício 1.26 *Calcule os limites*

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(2n+3)}{5n^3+1}$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{|100-n|}{|150-n|}$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1+\cos(n^{21}+7))}{n}$

Exercício 1.27 *Considere $a \in \mathbb{R}$ e uma sequência convergente $x_n \to x$. Prove que se $x_n \leq a$ para todo n, então $x \leq a$.*

Dica: Use a ideia empregada ao mostramos o primeiro item da proposição 1.24.

Analogamente, se $x_n \geq a$, então $x \geq a$.

1.4 Sequências divergentes

Uma sequência divergente é aquela que não converge para um número real.

Exemplo 1.28 *A sequência* $r_n = (-1)^n$ *diverge porque fica oscilando entre* 1 *e* -1 *conforme* n *cresce.*

Exemplo 1.29 *As sequências* n, $-n^2$, $n + \frac{1}{n}$ *divergem porque vão para* ∞ *ou* $-\infty$ *quando* $n \to \infty$.

Definição 1.30 *A sequência* r_n *tende para* ∞ *se para cada* $R > 0$ *existe* N *tal que* $r_n > R$ *para* $n > N$. *Em bom português, isso quer dizer que não importa quão grande queremos* r_n, *isso ocorre desde que* n *seja suficientemente grande. Nesse caso escrevemos*

$$r_n \to \infty \quad \textit{ou} \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty.$$

Analogamente, r_n *tende para* $-\infty$ *se para cada* $R > 0$ *existe* N *tal que* $r_n < -R$ *para* $n > N$. *Denotamos esse segundo caso por*

$$r_n \to -\infty \quad \textit{ou} \quad \lim_{n\to\infty} r_n = -\infty.$$

Exemplo 1.31 *Para* $a > 1$ *temos que* $a^n \to \infty$. *De fato, tomando* $b = a - 1 > 0$, *temos* $a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb$. *Para* $R > 0$ *tão grande quanto quisermos, existe* N *satisfazendo* $1 + Nb > R$, *de onde segue que para* $n > N$ *vale* $a^n > R$. *Desta forma,* $a^n \to \infty$.

Observação 1.32 *Pode ser tentador dizer que* r_n *converge para* ∞ *em vez de diverge e isso não está errado. No entanto, evitaremos tal nomenclatura. Quando dizermos que algo converge, estaremos assumindo que o limite é um número real.*

A sequência a^n, com $a > 1$, cresce muito rápido para infinito, o que é ilustrado pelo seguinte exercício.

Exercício 1.33 *Mostre que*

- *para qualquer* $k \in \mathbb{Z}_{>0}$,
$$\frac{a^n}{n^k} \to \infty;$$
- *para todo polinômio* $p(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$ *não nulo,*
$$\frac{a^n}{p(n)} \to \infty.$$

Exemplo 1.34 *Mostremos que o fatorial cresce mais rápido que a exponencial, isto é, para qualquer* a *real*
$$\frac{a^n}{n!} \to 0.$$

Fixe N tal que

$$\frac{|a|}{N} < \frac{1}{2}.$$

Para $n > N$

$$\frac{a^n}{n!} = \underbrace{\overbrace{\frac{a}{n}}^{\leq\frac{1}{2}} \times \overbrace{\frac{a}{n-1}}^{\leq\frac{1}{2}} \times \cdots \times \overbrace{\frac{a}{N+1}}^{\leq\frac{1}{2}}}_{n-N \text{ vezes}} \times \frac{a^N}{N!} \leq \frac{1}{2^{n-N}} \times \frac{a^N}{N!} = \frac{2^N a^N}{N!} \times \frac{1}{2^n} \to 0,$$

de onde segue o resultado. Por outro lado, n^n cresce mais rápido que $n!$

$$\frac{n^n}{n!} \to \infty,$$

o que deixarei de exercício ao leitor.

Por outro lado, $\log(n)$ cresce muito devagar. De fato, para todo expoente real $k > 0$

$$\frac{\log(n)}{n^r} \to 0.$$

Como não temos definição precisa de log ainda, deixemos para justificar tais fatos mais a frente.

Abaixo temos sequências que tendem para infinito. Quanto mais à direita, mais velozmente ela cresce.

$$\cdots \qquad \log(\log(n)) \qquad \log(n) \qquad \sqrt{n} \qquad n \qquad n^2 \qquad a^n \qquad n! \qquad n^n \qquad \cdots$$

onde $a > 1$.

Exercício 1.35 *Calcule os limites quando existir:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(2n+3)}{2n^2+3}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{3n+1}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{3n+1} n^3$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} n + \sin((n^2+n)\pi)n$

1.5 Aritmética dos infinitos

É fácil verificar que se $r_n \to r$ e $s_n \to s$, então

- $r_n s_n \to \infty$ quando $r = \infty$ e $s > 0$;
- $r_n s_n \to \infty$ quando $r = -\infty$ e $s < 0$;
- $r_n s_n \to \infty$ quando $r = s = \infty$;
- $r_n s_n \to \infty$ quando $r = s = -\infty$.

- $r_n s_n \to -\infty$ quando $r = -\infty$ e $s > 0$;
- $r_n s_n \to -\infty$ quando $r = \infty$ e $s < 0$;
- $r_n s_n \to -\infty$ quando $r = -s = \infty$.

Verifiquemos o primeiro item por descargo de consciência. Para $R > 0$ tão grande quanto for necessário, como $r_n \to \infty$, temos que existe N tal que $r_n > R$ para $n > N$. Aumentando N se preciso, temos que $s_n > s/2$ para $n > N$ pela proposição 1.24. Logo, $r_n s_n > Rs/2$ para $n > N$, finalizando o argumento.

É duro lembrar todas essas regras. No entanto, operações com infinitos são fáceis de executar: considere r, s, ambos não nulos, com um deles ao menos sendo ∞ ou $-\infty$. Se r, s tem o mesmo sinal, então $rs = \infty$, e se tem sinais opostos, $rs = -\infty$. Assim, nos exemplos acima temos sempre $r_n s_n \to rs$. Por exemplo, se $r_n = n^2 + \sin(n)$, que tende a ∞ porque $|\sin(n)| \leq 1$, e $s_n = n/(2n+3)$, que tende a $1/2$, então

$$\lim_{n\to\infty} r_n s_n = \infty \times 1/2 = \infty.$$

Exemplo 1.36 *Já a expressão rs com $r = 0$ e $s = \infty$ não está bem definida.*

- *Para $r_n = 1/n$ e $s_n = n$ temos $r_n s_n \to 1$;*
- *para $r_n = 1/n^2$ e $s_n = n$ temos $r_n s_n = 1/n \to 0$;*
- *para $r_n = 1/n$ e $s_n = n^2$ temos $r_n s_n = n \to \infty$.*

Algo similar ocorre com a soma de duas sequências $r_n \to \infty$ e $s_n \to s$. Desde que s não seja $-\infty$, temos que $r_n + s_n \to \infty$. Em outras palavras, $\infty + s = \infty$ para $s \neq -\infty$. Similarmente, $-\infty + s = -\infty$ para $s \neq \infty$.

Exemplo 1.37 *O "número" $\infty - \infty$ não faz sentido.*

- *Para $r_n = n$ e $s_n = -n$, temos $r_n + s_n \to 0$;*
- *para $r_n = n^2$ e $s_n = -n$, temos $r_n + s_n \to \infty$;*
- *para $r_n = n + 2$ e $s_n = -n$, temos $r_n + s_n \to 2$;*
- *para $r_n = n + 2$ e $s_n = -n^2$, temos $r_n + s_n \to -\infty$.*

Quanto a divisão, é fácil verificar que se $|r_n| \to \infty$, então $1/r_n \to 0$.

Exemplo 1.38 *A série divergente mais famosa provavelmente é a* ***série harmônica***

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

que é o limite da sequência

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Mostremos que $H = \infty$. De fato, se $H < \infty$, então vale a desigualdade

$$\frac{1}{2}H = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

e somando $\frac{1}{2}H$, que é a soma dos inversos dos números pares, a ambos os lados, obtemos $H < H$, o que é uma contradição. Assim, nossa hipótese de que $H < \infty$ não pode ser verdadeira. Logo, $H = \infty$.

1.6 Sequências de Cauchy, completude e o número de Euler

Considere uma sequência r_n convergindo para r. Por definição, para $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$|r - r_n| < \varepsilon$$

para $n > N$. Se $k, l > N$, temos

$$|r - r_k| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |r - r_l| < \varepsilon$$

e daí segue que

$$|r_k - r_l| = |(r - r_l) - (r - r_k)| \leq |r - r_l| + |r - r_k| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

para $k, l > N$.

Isso quer dizer o seguinte, se uma sequência converge, então os números r_k e r_l podem ser tomados tão próximos quanto for necessário desde que k e l sejam suficientemente grandes.

Definição 1.39 *Uma sequência r_n é de **Cauchy** se para $\varepsilon > 0$ existe N suficientemente grande tal que $|r_k - r_l| < \varepsilon$ para $k, l > N$*

Como foi observado, toda sequência convergente é de Cauchy. A mágica nos números reais é que o oposto também vale. A fim de provar isso, deveríamos investigar a fundo a axiomatização dos números reais. No entanto, não faremos isso. Simplesmente assumiremos que a propriedade a seguir é verdadeira a priori. Discussões profundas e detalhadas sobre a estrutura dos números reais podem ser encontradas em [Zor] e [Sta].

Postulado 1.40 (Propriedade dos intervalos encaixados) *Considere uma sequência de intervalos $I_0, I_1, I_2, \ldots$ e assuma que esses são limitados e fechados (têm seus extremos). Se os intervalos são encaixados, isto é,*

$$I_0 \supset I_1 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

então existe um $r \in \mathbb{R}$ comum a todos os I_n' s. Mais formalmente, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.41 *Se r_n é uma sequência de Cauchy, então existe um número real r tal que $r_n \to r$. Essa propriedade se chama* ***completude****.*

Demonstração: Primeiramente, toda sequência de Cauchy é limitada. De fato, para $\varepsilon = 1$, existe N tal que $|r_k - r_l| < 1$. Em particular, fazendo $l = N+1$, temos $r_{N+1} - 1 < r_k < r_{N+1} + 1$ para $k > N$. Desta forma, a sequência é limitada, pois exceto finitos pontos da sequência r_n distam menos que 1 de r_{N+1}. De toda forma, r_n está contido em um intervalo fechado e limitado $I_0 = [a_0, b_0]$.

Agora o truque é dividir e conquistar: fabricar intervalos encaixados de acordo com algum critério. Seja c o ponto médio do intervalo I_0. Temos que $r_n \in [a_0, c]$ ocorre para infinitos $n's$ ou $r_n \in [c, b_0]$ ocorre para infinitos $n's$. Note que ambas coisas podem acontecer, o que não ocorre é ambas afirmações serem falsas. Se $r_n \in [a_0, c]$ ocorre para infinitos n's, então definimos $I_1 = [a_0, c]$. Se isso não ocorre, então $r_n \in [c, b_0]$ ocorre para infinitos n's e nesse caso definimos $I_1 = [c, b_0]$. Em outras palavras, dividimos I_0 ao meio e tomamos para ser I_1 uma das metades que contem r_n para infinitos n's. Recursivamente, I_2 é uma das metades de I_1 que contém r_n para infinitos n's. Já I_3 é uma das metades de I_2 que contém r_n para infinitos n's, e assim por diante. Por construção, temos a sequência

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

de intervalos fechados, limitados e encaixados, de modo que o comprimento $|I_n|$ do intervalo I_n tenda a zero.

$$|I_n| = \frac{|I_0|}{2^n} \to 0.$$

Comum a todos esses intervalos há um ponto r, pela propriedade dos intervalos encaixados. E porque o comprimento desses intervalos tende a zero, esse ponto é único. Tome $\varepsilon > 0$ e n_0 tal que $|I_{n_0}| < \varepsilon$. Por outro lado, existe N natural tal que $|r_k - r_l| < \varepsilon$ para $k, l > N$. Como $r_n \in I_{n_0}$ ocorre para infinitos n's (por construção), temos que existe $l_0 > N$ tal que $r_{l_0} \in I_{n_0}$. Desta forma, para $k > N$ temos $|r_k - r_{l_0}| < \varepsilon$ e, por outro lado, $|r - r_{l_0}| < \varepsilon$. Logo, $|r - r_k| < 2\varepsilon$ para $k > N$, isto é, $r_n \to r$. ∎

Usamos a completude para fabricar novos números (e funções) a partir de sequências de Cauchy.

Exemplo 1.42 *Para cada inteiro positivo k considere $a_{-k} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Considere também um número natural q. Desses ingredientes, obtemos a sequência*

$$r_n = q + \frac{a_{-1}}{10} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \frac{a_{-3}}{10^3} + \cdots + \frac{a_{-n}}{10^n},$$

que pode ser escrita na representação decimal como $q + 0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\cdots a_{-n}$. A priori, não há evidência de que o número $q + 0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\cdots$, com todos seus infinitos dígitos, faz sentido. A existência desse número é consequência da completude dos reais.

Mostremos que a sequência r_n é de Cauchy e assim existe r tal que $r_n \to r$. Considere k e l, e suponhamos $k < l$. Usando que $a_i \leq 9$ e

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{l-k-1}} < 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

obtemos a seguinte estimativa.

$$\begin{aligned}
r_l - r_k &= \frac{a_{-k-1}}{10^{k+1}} + \frac{a_{-k-2}}{10^{k+2}} + \cdots \frac{a_{-l}}{10^l} \\
&\leq \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} + \cdots \frac{9}{10^l} \\
&= \frac{9}{10^{k+1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{l-k-1}}\right) \\
&< \frac{9}{10^{k+1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{9}{10^{k+1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{9}{10^{k+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= \frac{9}{10^{k+1}} \frac{10}{9} \\
&= \frac{1}{10^k}
\end{aligned}$$

Se $k > l$, então pelo mesmo raciocínio $r_k - r_l < 10^{-l}$. Em todo caso, para $\varepsilon > 0$ podemos tomar N tal que $10^{-N} < \varepsilon$. Se $k, l > N$, temos que $|r_k - r_l| < 10^{-N} < \varepsilon$. Em outras palavras, a sequência r_n é de Cauchy e, consequentemente, ela converge para algum número real r. Esse é $q + 0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\cdots$.

Que fique claro o seguinte: sequências de Cauchy são convergentes em $\mathbb{R}$, isto é, garantimos que ela converge para um número real. No entanto, se uma sequência r_n de números racionais é de Cauchy, não é em geral verdade que seu limite é racional. Um exemplo que escancara isso é aproximar $\sqrt{2}$ truncando sua representação decimal.

Exemplo 1.43 *A sequência $r_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ é convergente, o que provaremos mostrando que r_n é de Cauchy.*

Considere $k < l$. Temos

$$r_l - r_k = \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \cdots + \frac{1}{l!}$$

Como

$$(k+1)! = \underbrace{\overbrace{(k+1)}^{\geq 2} \times \overbrace{k}^{\geq 2} \times \overbrace{(k-1)}^{\geq 2} \times \cdots \times \overbrace{3}^{\geq 2} \times \overbrace{2}^{=2}}_{k \text{ termos}} \times 1 \geq 2^k,$$

temos

$$\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Similarmente,

$$\frac{1}{(k+i)!} \leq \frac{1}{2^{k+i-1}},$$

de onde segue que

$$r_l - r_k \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdot \frac{1}{2^{l-1}} < \frac{1}{2^k}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Analogamente, se $l < k$,

$$r_k - r_l < \frac{1}{2^{l-1}}.$$

De toda forma, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|r_k - r_l| < \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$ para $k, l > N$. Logo, a sequência r_n converge por ser de Cauchy e seu limite é a série (soma infinita)

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Esse número é, junto com π, excepcionalmente importante em matemática. Ele se chama número de Euler e o denotamos por e. Em base decimal

$$e = 2.71828182845904523 54 \cdots .$$

Além disso, e é irracional, o que mostraremos a frente.

Observação 1.44 *O número e é representado por E maiúsculo no Mathematica. Utilizamos o comando N para obtermos E com quantos dígitos desejarmos. Por exemplo,* `N[E,10]` *nos fornece* 10 *dígitos:* $e \approx 2.718281828$.
Similarmente, `N[Pi,3]` *nos fornece* $\pi \approx 3.14$.
Podemos também aproximar e usando a série que o define. Somando os 10 *primeiros termos da série com* `N[Sum[1/Factorial[n],{n,0,9}],7]`*, obtemos* $e \approx 2.718282$.

De modo mais geral, para cada $x \in \mathbb{R}$, a sequência $r_n(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ é convergente, seguindo argumento similar ao feito anteriormente, isto é, mostrando que tal sequência é Cauchy. O limite dessa sequência é denotado por e^x ou $\exp(x)$ ou

$$\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

e chama-se **exponencial natural**. Certamente é uma das funções mais importantes de toda matemática[4].

Proposição 1.45 *A sequência $r_n(x)$ é de Cauchy para cada x e assim converge.*

Demonstração: Fixe $M \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $|x|/(M+1) < 1/2$. Considere $M < k < l$. Temos

$$|r_l(x) - r_k(x)| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{|x|^{k+2}}{(k+2)!} + \ldots + \frac{|x|^l}{l!}$$

[4] O leitor com alguma sensatez talvez se pergunte: por que diabos definir esse animal medonho? Bem, seja insensato por um tempo, em breve esse animal fará sentido! Tenha fé! Se você não tem fé, então lhe direi que essa exponencial é importante porque é a mais simples de se trabalhar e as demais exponenciais podem ser escritas a partir da exponencial natural, ou seja, na prática, só há uma exponencial e essa é e^x.

Como

$$(k+1)! = (k+1) \times k \times (k-1) \times \cdots \times (M+1) \times M!,$$

segue que

$$\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} = \underbrace{\overbrace{\frac{|x|}{k+1}}^{\leq \frac{1}{2}} \times \overbrace{\frac{|x|}{k}}^{\leq \frac{1}{2}} \times \cdots \times \overbrace{\frac{|x|}{M+2}}^{\leq \frac{1}{2}} \times \overbrace{\frac{|x|}{M+1}}^{\leq \frac{1}{2}}}_{k-M+1 \text{ termos}} \times \frac{|x|^M}{M!} \leq \frac{1}{2^{k-M+1}} \times \frac{|x|^M}{M!}$$

pois

$$\frac{|x|}{k+1} < \frac{|x|}{k} < \cdots < \frac{|x|}{M+2} < \frac{|x|}{M+1} < 1/2.$$

De modo mais geral, para $i = 1, 2, 3, \ldots, l-k$ temos

$$\frac{|x|^{k+i}}{(k+i)!} = \frac{|x|}{k+i} \times \frac{|x|}{k+i-1} \times \cdots \times \frac{|x|}{M+2} \times \frac{|x|}{M+1} \times \frac{|x|^M}{M!} \leq \frac{1}{2^{k-M+i}} \times \frac{|x|^M}{M!}$$

e daí segue que

$$\begin{aligned}
|r_l(x) - r_k(x)| &< \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{|x|^{k+2}}{(k+2)!} + \ldots + \frac{|x|^l}{l!} \\
&\leq \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{2^{k-M+1}} + \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{2^{k-M+2}} + \cdots + \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{2^{l-M}} \\
&= \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{2^{k-M+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{l-k-1}}\right) \\
&< 2^M \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{2^{k+1}} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)}_{=2} \\
&= 2^M \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{2^k}
\end{aligned}$$

Assim, considerando a constante[5]

$$C = 2^M \frac{|x|^M}{M!},$$

conseguimos a estimativa

$$|r_l(x) - r_k(x)| < \frac{C}{2^k}$$

para $M < k < l$. Similarmente, se $M < l < k$,

$$|r_k(x) - r_l(x)| < \frac{C}{2^l}.$$

[5] C é constante porque x e M são fixados ao longo da demonstração inteira.

De toda forma, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar N grande o suficiente tal que $N > M$ e $\frac{C}{2^N} < \varepsilon$. Para tal N temos que $|r_k(x) - r_l(x)| < \varepsilon$ quando $k, l > N$. Logo, a sequência $r_n(x)$ converge por ser de Cauchy. ∎

Obviamente, $e^0 = 1$ e $e^1 = e$. Além disso, a notação e^x sugere a propriedade $e^{x+y} = e^x e^y$, isto é, e^x de fato se comporta como uma exponencial. Esse de fato é o caso.

Proposição 1.46 *A identidade $e^{x+y} = e^x e^y$ vale para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Efetuando o produto termo a termo obtemos

$$\begin{aligned} e^x e^y &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) \\ &= 1 + (x+y) + \left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!}y + x\frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right) + \\ &\qquad + \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^3}{3!}y + \frac{x^2}{2!}\frac{y^2}{2!} + x\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!}\right) + \cdots \\ &= 1 + (x+y) + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2!} + \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{3!} + \\ &\qquad + \frac{x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \frac{(x+y)^4}{4!} + \cdots \\ &= e^{x+y}. \end{aligned}$$

∎

Observação 1.47 *Um argumento mais preciso pode ser feito realizando a conta com todos os fatoriais escritos explicitamente junto com fatorações usando binômio de Newton.*

Proposição 1.48 *A função $x \mapsto e^x$ é estritamente crescente, isto é, $e^x < e^y$ quando $x < y$.*

Demonstração: Por definição

$$e^{y-x} = 1 + (y-x) + \frac{(y-x)^2}{2!} + \frac{(y-x)^3}{3!} + \cdots.$$

Como $y - x > 0$, temos $e^{y-x} > 1$ por causa da expressão acima. Multiplicando $e^{y-x} > 1$ por e^x obtemos $e^y > e^x$. ∎

Capítulo 2

Limite para funções e continuidade

> Calculus required continuity, and continuity was supposed to require the infinitely little; but nobody could discover what the infinitely little might be.[1]
>
> **Bertrand Russell**

Nosso objetivo nesse capítulo é estudar funções e usaremos nossos conhecimentos de sequências a esse fim.

Nem sempre entender numericamente o comportamento de uma função é viável, porque ela simplesmente pode ser complicada demais, muitas vezes sequer é explicita. Nesses casos, é de interesse entender o seu comportamento qualitativo, ou seja, um desenho grosseiro de seu gráfico. As técnicas aqui desenvolvidas permitem tal feito.

A maioria das modelagens reais (para não dizer todas) são descritas em termos de funções. Listarei algumas só por ilustração. Não espero que as compreenda. Apenas contemple a diversidade.

- A energia potencial em um sistema massa-mola é dada por
$$U(x) = \frac{kx^2}{2},$$
onde x é a deformação da mola e k é uma constante.

- se uma central telefônica recebe em média λ telefonemas por minuto, então a probabilidade de obtermos dois telefonemas consecutivos com tempo entre eles menor que t minutos é
$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

- em relatividade restrita, a energia cinética de uma partícula de massa m com velocidade v é dada por
$$K(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

[1]Cálculo exigia continuidade, e supunha-se que a continuidade exigisse o infinitamente pequeno; mas ninguém conseguia descobrir o que era o infinitamente pequeno.

onde c é a velocidade da luz.

- o Urânio 235 decai com o tempo exponencialmente, isto é, se m_0 é sua massa inicial então $m(t)$, a massa depois t anos, é dada por $m(t) = m_0 e^{-\mu t}$. O tempo de meia vida do U-235 é $t_{1/2} = 7.04 \times 10^8$ anos (700 milhões de anos), o que quer dizer que $m(t_{1/2}) = 0.5 \times m_0$ e daí temos

$$e^{-\mu \times 7.04 \times 10^8} = 0.5 \Longrightarrow \mu \approx 9.8 \times 10^{-10}.$$

Observação 2.1 *Para resolver essa equação no Mathematica podemos usar*

```
sol = Solve[E^{-7.04*10^8 x} == 0.5, x];
x /. sol[[1]]
```

onde `sol` *é uma variável. O comando* `x /. sol[[1]]` *nos dá o valor de x que resolve a equação.*

Dos exemplos descritos acima é obvio que problemas de mínimo, máximo e resolver equações aparecem naturalmente: "quando a energia do sistema é mínima?" "quão improvável é ficarmos 2 horas sem receber ligação telefônica em nossa central?"

De modo mais geral, considere uma função $f : X \to \mathbb{R}$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Algumas perguntas de interesse são:

- a função atinge máximo ou mínimo em algum local?
- a equação $f(x) = 0$ tem solução?
- como encontrar numericamente a solução de $f(x) = 0$ caso exista?
- qual a geometria do gráfico de f em $\mathbb{R}^2$?
    - ⋆ é esse feito de um ou mais pedaços?
    - ⋆ possuí retas tangentes?
    - ⋆ o gráfico delimita uma região convexa?
    - ⋆ qual é a área de certa região delimitada pelo gráfico?

e assim por diante.

2.1 Limite de funções

Definição 2.2 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função definida em um conjunto não vazio X. Considere $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, que não necessariamente se encontra em X, mas que pode ser atingido por uma sequência x_n de X, isto é, existe $x_n \to a$ com $x_n \in X$.*

Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é L se para toda sequência x_n de X tendendo para a temos $f(x_n) \to L$.

Denotamos tal limite por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Na definição acima, nada impede que a ou L sejam valores infinitos.

Exemplo 2.3 *A função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ não está definida para $x = 1$ ou -1 (veja Figura 2.1). Computemos os limites nos pontos reais. Note primeiramente que*

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Assim, se x_n é uma sequência de $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ que converge para 1, temos que $f(x_n) \to 1/2$, ou seja,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, se x_n é uma sequência de pontos de $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ convergindo para -1, o limite $f(x_n)$ vai depender da sequência. Para $x_n = -1 + 1/n$ temos $f(x_n) \to \infty$. Para $x_n = -1 - 1/n$ temos $f(x_n) \to -\infty$. De toda forma, o limite

$$\lim_{x \to -1} f(x)$$

não existe. O limite existe sem problemas quando $a \neq 1$ e $a \neq -1$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

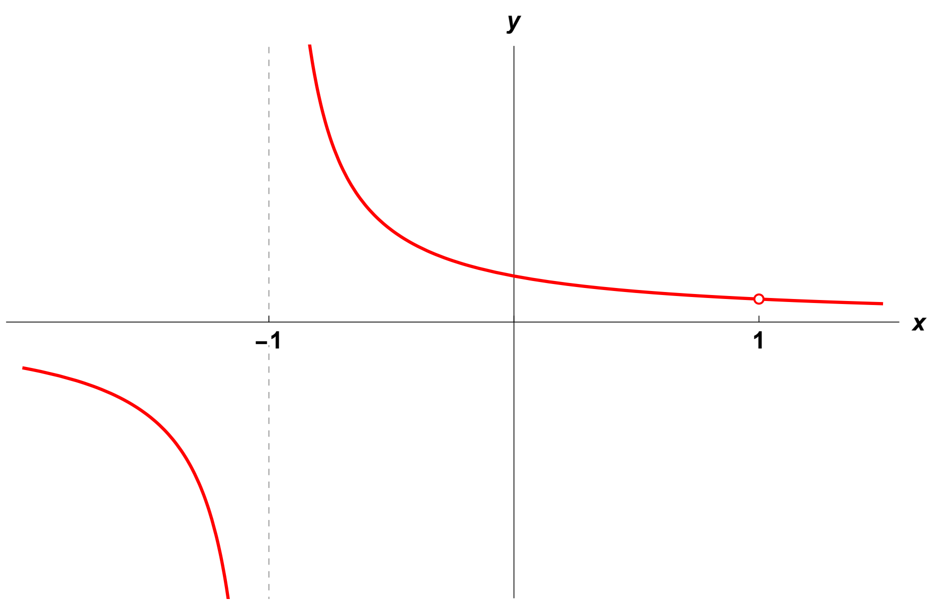

Figura 2.1: *Gráfico da função $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$.*

Observação 2.4 *O comando* `Plot[ (x-1)/(x^2-1), {x, -2, 1.5}]` *nos fornece um gráfico tal como o acima.*

Exemplo 2.5 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para o qual $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe em nenhum ponto a é*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{if } x \text{ é irracional} \end{cases} \tag{2.6}$$

Se a é racional, então $x_n = a + 1/n$ satisfaz $f(x_n) \to 0$ e $x_n = a + \sqrt{2}/n$ satisfaz $f(x_n) \to 1$. Por outro lado, se a é irracional, $x_n = a + 1/n$ satisfaz $f(x_n) \to 1$ e tomando x_n como sendo a aproximação decimal de a obtemos $f(x_n) \to 0$. Em todo caso,

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

nunca existe!

Exercício 2.7 *Calcule os limites*

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2-1)}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^3-8)}{x^2-4}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(x)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)$
5. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(x^4-24x^3+1)}{x^4+12}$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{(x^{35}-2x)}{23x^{30}}$
7. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(x+\sin(x))}{x+25}$
8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\cos(x^2+1/x^2)}{x^3}$

Lema 2.8 (Limite fundamental da exponencial) *Para $x \in (-1, 1)$ temos*

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

Em particular,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Demonstração: Suponhamos $x \in [0, 1)$. Como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

temos $e^x \geq 1 + x$. Por outro lado, como

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \leq 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

temos as desigualdades para $x \in [0, 1)$. Para $x \in (-1, 0)$ temos

$$1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x},$$

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

Logo, as desigualdades valem para $-1 < x < 1$. Note que para $x \in (-1, 1)$ vale a desigualdade

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1/(1-x) - 1}{x} = \frac{1}{1-x},$$

de onde segue que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

∎

Proposição 2.9 *A exponencial natural pode ser escrita como*

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Demonstração: Pelo Lema 2.8, temos que para n suficientemente grande

$$1 + \frac{x}{n} \leq e^{x/n},$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

Por outro lado,

$$1 + \frac{x}{n} = \frac{n+x}{n} = \frac{1}{\frac{n}{x+n}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{x+n}}$$

que é maior que ou igual a $e^{x/(x+n)}$ pelo Lema 2.8. Portanto,

$$e^{x/(x+n)} \leq 1 + \frac{x}{n},$$

$$e^{nx/(x+n)} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Assim, as desigualdades

$$e^{nx/(x+n)} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

valem para n suficientemente grande. Mostraremos que o termo da esquerda converge para e^x conforme n tende para infinito, provando o resultado.

De fato, como

$$\frac{nx}{n+x} = x - \frac{x^2}{n+x} \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0} e^h = 1,$$

concluímos que

$$e^{nx/(x+n)} = e^x e^{-x^2/(n+1)} \to e^x$$

quando n tende a infinito. Portanto,

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

∎

Exemplo 2.10 (Decaimento radioativo) *A seguir, modelaremos o decaimento de massa de um material radioativo. Obteremos que a massa é descrita por uma exponencial, o que de fato concorda com dados experimentais.*

Seja $m(t)$ a massa de certo material radioativo em um instante t. Dividindo $[0, t]$ em n intervalos iguais de comprimento $\Delta = t/n$ temos as seguintes massas

$$m(0),\ m(\Delta),\ m(2\Delta),\ \ldots\ m\left((n-1)\Delta\right),\ m(n\Delta) = m(t).$$

No que segue assumiremos que n é enorme, infinitamente grande.

Como a taxa (velocidade) com que a massa do material diminui depende somente da quantidade de material disponível no dado instante, é razoável supor em nossa modelagem que existe uma constante $\mu > 0$ para a qual

$$\frac{m\left((k+1)\Delta\right) - m(k\Delta)}{\Delta} = -\mu m(k\Delta).$$

Isolando $m\left((k+1)\Delta\right)$, obtemos

$$m\left((k+1)\Delta\right) = m\left(k\Delta\right)\left(1 - \mu\Delta\right) = m\left(k\Delta\right)\left(1 + \frac{-\mu t}{n}\right),$$

que nos permite deduzir

$$m\left((k+1)\Delta\right) = m(0)\left(1 + \frac{-\mu t}{n}\right)^{k+1}.$$

Em particular, pela fórmula da proposição 2.9,

$$m\left(t\right) = m\left(n\Delta\right) = m(0)\left(1 + \frac{-\mu t}{n}\right)^{n} \approx m(0)e^{-\mu t}.$$

A mesma modelagem acima funciona para descrever o crescimento no número de infectados em uma pandemia nos estágios iniciais (quando a taxa de crescimento do número de infectados depende apenas da quantia de infectados e de que cada um desses pode infectar outros). O modelo exponencial de fato descreve muito precisamente esse primeiro estágio de uma pandemia. No entanto, conforme medidas a fim de desacelerar a propagação da doença são implantadas, nossa hipótese de modelagem deixa de valer e o modelo exponencial falha (dando espaço a outros modelos, como o logístico).

Proposição 2.11 *A exponencial e^x cresce mais rápido que qualquer polinômio.*

Demonstração: Considere $p(x)$ um polinômio de grau n. Suponha que $x > 0$.

$$e^{\frac{x}{n+1}} = 1 + \frac{x}{n+1} + \frac{\left(\frac{x}{n+1}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x}{n+1}\right)^3}{3!} + \cdots \geq 1 + \frac{x}{n+1},$$

ou seja,

$$e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.$$

Como $p(x)$ tem grau n,

$$\frac{|p(x)|}{e^x} \leq (n+1)^{n+1}\frac{|p(x)|}{x^{n+1}}$$

tende a zero quando x tende infinito. ∎

Exercício 2.12 *Calcule os limites*

1. $\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1}$
2. $\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2} - e^{2-x}}{x-2}$
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x^{100}}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x}$

Lema 2.13 (Limite fundamental trigonométrico) *O seguinte limite é válido:*

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$$

Demonstração: Nas figuras abaixo, há três regiões em destaque.

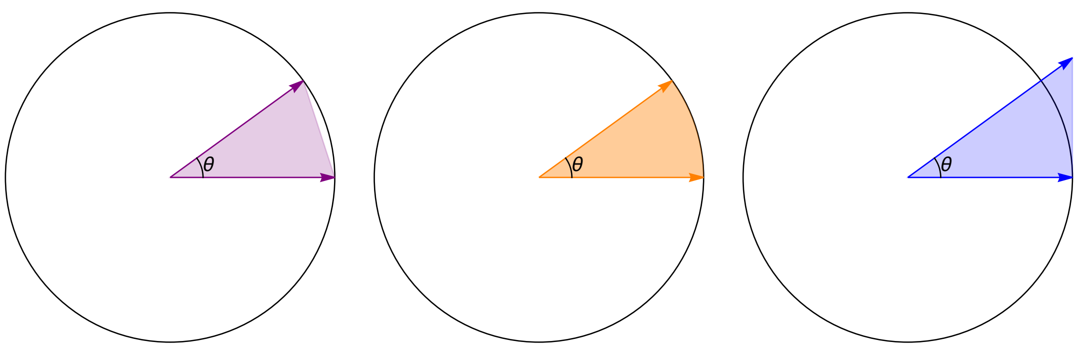

Figura 2.2: *Círculo de raio 1.*

A área[2] da primeira região (em roxo) é $\frac{1}{2}|\sin(\theta)|$. A área da segunda região (em laranja) é $\frac{1}{2}|\theta|$. A área da terceira região (em azul) é $\frac{1}{2}|\tan(\theta)|$, pois esse triângulo tem base 1 e altura $|\tan(\theta)|$.

Comparando as áreas temos

$$\frac{1}{2}|\sin(\theta)| \leq \frac{1}{2}|\theta| \leq \frac{1}{2}|\tan(\theta)|,$$

$$|\sin(\theta)| \leq |\theta| \leq |\tan(\theta)|.$$

Para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ e $\theta \neq 0$, simplificando a desigualdade acima, obtemos

$$1 \leq \frac{|\theta|}{|\sin(\theta)|} \leq \frac{1}{|\cos(\theta)|},$$

[2]Um triângulo com lados a e b e com ângulo θ entre esses lados tem área $ab\sin(\theta)/2$.

$$1 \leq \frac{\theta}{\sin(\theta)} \leq \frac{1}{\cos(\theta)},$$

$$\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1$$

e como $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$, temos o resultado.

De fato, tome uma sequência de termos não nulos θ_n convergindo para 0. Das desigualdades acima

$$|\sin(\theta_n)| \leq |\theta_n| \to 0$$

de onde obtemos

$$\cos(\theta_n) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_n)} \to 1,$$

(que é valido pela Proposição 2.22) e, consequentemente,

$$\frac{\sin(\theta_n)}{\theta_n} \to 1,$$

finalizando a prova. ∎

Observação 2.14 *A função* $\sin(x)/x$ *ocorre com tanta frequência em aplicações práticas (em análise de sinais elétricos, por exemplo) que tem sua própria notação* $sinc(x)$*. A priori, essa função faz sentido apenas para* $x \neq 0$*, mas definindo* $sinc(0) = 1$ *obtemos uma função definida em toda reta real. Seu gráfico é dado por*

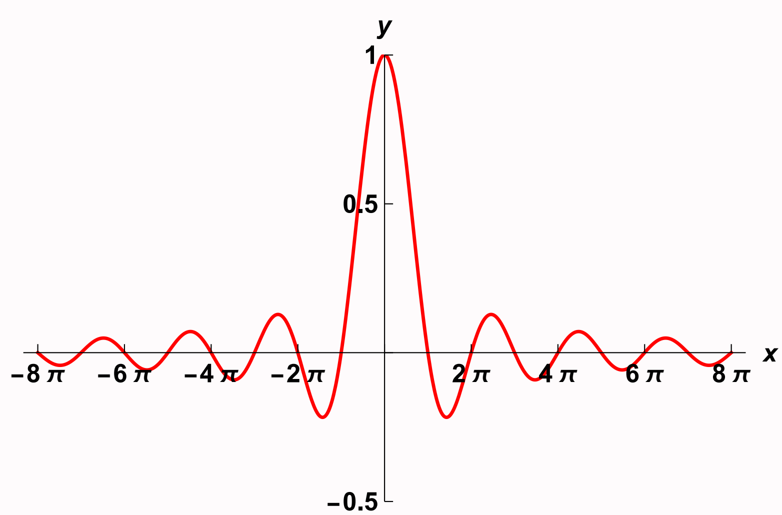

Figura 2.3: $sinc(x) = \sin(x)/x$.

Exercício 2.15 *Compute os limites*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(1/x)\sin(x^2)}{x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{e^x-1}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin(2x)}$

Calculemos a área delimitada por um círculo de raio r. Considere um n-ágono[3] regular inscrito em tal círculo (veja a figura 2.4).

Como cada n-ágono regular é formado por n triângulos isósceles de lados r. O ângulo dentre os lados de comprimento r de cada um desses triângulos isósceles é $2\pi/n$. Desta forma, a área de cada um desses triângulos é

$$\frac{r^2\sin(2\pi/n)}{2}$$

e a área do n-ágono é

$$A_n = n\frac{r^2\sin(2\pi/n)}{2} = \pi r^2\frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n}$$

que converge para πr^2 pelo limite fundamental trigonométrico (lema 2.13). Portanto, a área do disco de raio r é πr^2.

Observação 2.16 *Para $r = 1$, a sequência A_n aproxima π. Para $n = 96$, obtemos $|A_n - \pi| \approx 2.2\times 10^{-3}$, ou seja, a aproximação é muito lenta. Para obtermos algumas casas de precisão necessitamos de polígonos grotescamente complicados.*

Já o perímetro do n-ágono regular é

$$P_n = n\sqrt{2r^2 - 2r^2\cos(2\pi/n)}$$

pela lei dos cossenos. Como $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$, temos

$$\begin{aligned} P_n &= \sqrt{2}nr\sqrt{1-\cos(2\pi/n)} \\ &= \sqrt{2}nr\sqrt{1-(1-2\sin^2(\pi/n))} \\ &= 2nr\sin(\pi/n) \\ &= 2\pi r\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \to 2\pi r \end{aligned}$$

que é o perímetro do círculo.

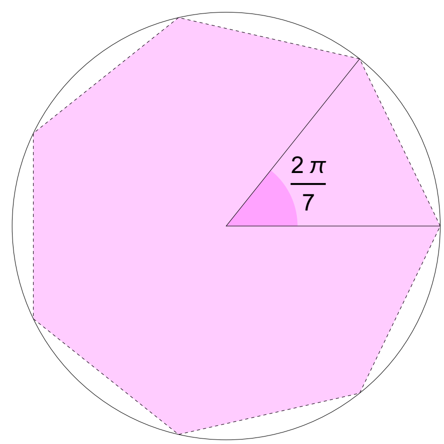

Figura 2.4: *7-ágono regular inscrito.*

É bem interessante que técnicas como as descritas acima foram usadas para calcular π numericamente da antiguidade — nos tempos de Arquimedes em 250 a.C. — até a primeira metade do século 17 por todos os cantos do mundo. Arquimedes, por exemplo, utilizando

[3]Um n-ágono é um polígono de n lados. Regular quer dizer que os lados são iguais entre si e o mesmo ocorre com os ângulos internos.

um 96-ágonos regulares mostrou que $223/71 < \pi < 22/7$, aproximando π em duas casas decimais.

Com o avanço do cálculo e a descoberta de diversas séries que computam π essa abordagem geométrica foi abandonada por ser muito ineficiente. Na infância do cálculo, ainda no século 17, Issac Newton estabeleceu uma série que aproxima π muito rápido (matando de vez a ideia de usar polígonos para calcular π). A série milagrosa, obtida de um truque simples com integrais, tem os seguintes primeiros termos

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3\times 2^3} - \frac{1}{5\times 2^5} - \frac{1}{28\times 2^7} - \frac{1}{72\times 2^9} - \frac{5}{704\times 2^{11}} - \frac{7}{1664\times 2^{13}} - \cdots\right).$$

Utilizando somente os termos escritos acima (7 termos da série), obtemos uma aproximação que concorda com π nas cinco primeiras casas decimais.

2.2 Funções contínuas

Definição 2.17 *Considere um subconjunto X não vazio de $\mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $x \in X$ se leva sequências que convergem para x em sequências que convergem para $f(x)$. Simbolicamente, f é contínua em x se*

$$(x_n \to x) \Longrightarrow (f(x_n) \to f(x)).$$

Proposição 2.18 *Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas em x e $\alpha \in \mathbb{R}$, então αf, $f+g$ e fg são contínuas em x. Além disso, se g não se anula em X, então f/g é contínua em x.*

Demonstração: Se $x_n \to x$, então $f(x_n) \to f(x)$ e $g(x_n) \to g(x)$. Os resultados seguem das proposições 1.22 e 1.24. Temos

$$\alpha f(x_n) \to \alpha f(x), \quad f(x_n) + g(x_n) \to f(x) + g(x), \quad f(x_n)g(x_n) \to f(x)g(x)$$

e, assumindo que g não se anula em X,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x)}{g(x)}.$$

∎

Definição 2.19 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua se for contínua em cada ponto de X.*

Exemplo 2.20 *Funções polinomiais em $\mathbb{R}$ são obviamente contínuas. O mesmo ocorre para a função $f(x) = |x|$. Se temos uma função definida em um intervalo, ela é contínua se geometricamente pode ser desenhada sem tirar o lápis do papel. A função*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ 1 & se\ x \geq 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

definida no intervalo $\mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos exceto 0. De fato, tomando a sequência $x_n = -1/n$, temos que $x_n \to 0$ e $f(x_n) \to 0 \neq f(0)$. Graficamente, essa descontinuidade é vista como um salto.

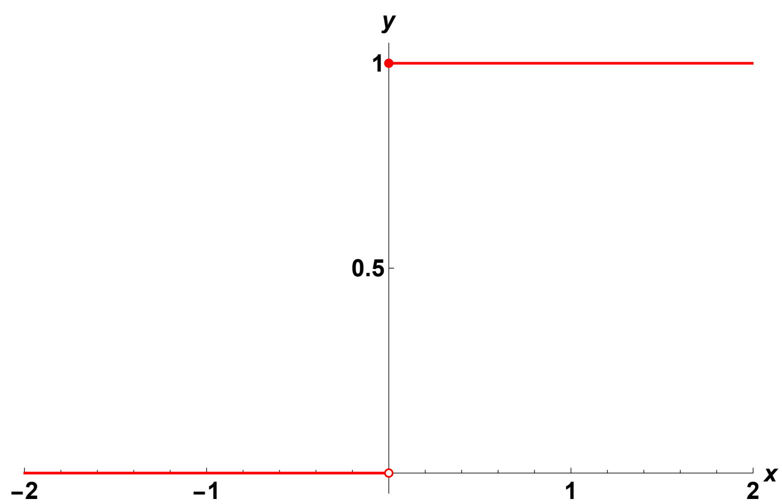

Figura 2.5: *A função é descontínua em* 0. *Contínua em seus demais pontos.*

Já a função $f(x) = 20x^3 + 50x^2 - 40x - 30$ definida no intervalo $\mathbb{R}$ é contínua em todos seus pontos. Não apresenta saltos em seu gráfico.

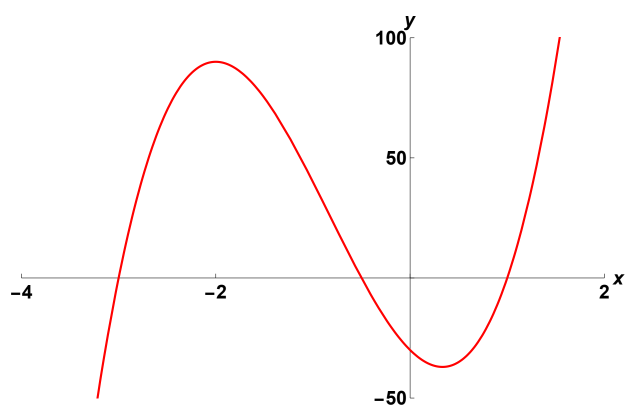

Figura 2.6: *A função* $x \mapsto 20x^3 + 50x^2 - 40x - 30$ *é contínua e não tem saltos em seu gráfico.*

Por outro lado, a função $f(x) = 1/x$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é contínua em todos os pontos. No entanto, como seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ não é um intervalo, o gráfico não é feito de um único pedaço (não dá para desenhar o gráfico dessa função sem tirar o lápis do papel). Note que não faz sentido falar de continuidade de f em 0, pois a função nem sequer está definida em tal ponto.

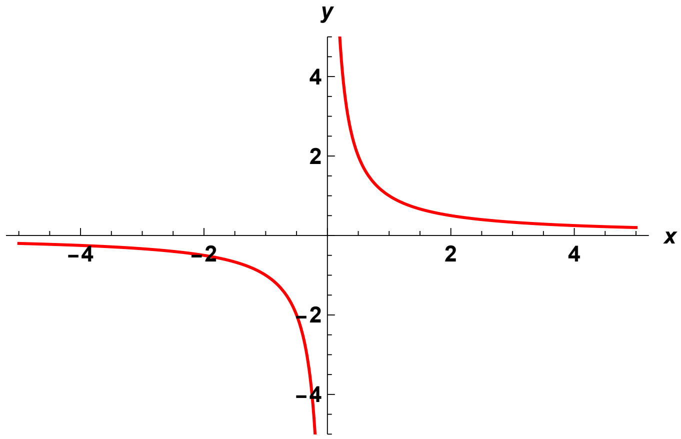

Figura 2.7: *A função $x \mapsto 1/x$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, mas seu gráfico apresenta salto porque o domínio não é um intervalo.*

Proposição 2.22 *A função $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua.*

Demonstração: Se $x_n \to 0$ é uma sequência convergente de $\mathbb{R}_{\geq 0}$, então temos $\sqrt{x_n} \to 0$ por conta direta com a definição. Logo, f é contínua em 0.

Agora, tome $x_n \to x$, com $x > 0$, temos

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| = \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}} \to 0.$$

∎

Proposição 2.23 *As funções* sin *e* cos *definidas em $\mathbb{R}$ são contínuas.*

Demonstração: Pelo limite fundamental trigonométrico (lema 2.13), sabemos que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$$

Em particular

$$\lim_{\theta \to 0} \sin(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta}\theta = 1 \times 0 = 0$$

e

$$\lim_{\theta \to 0} \cos(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} = 1.$$

De modo geral, para $\theta \to \theta_0$, temos

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \sin\left((\theta - \theta_0) + \theta_0\right) \\ &= \sin(\theta - \theta_0)\cos(\theta_0) + \cos(\theta - \theta_0)\sin(\theta_0) \end{aligned}$$

de onde segue

$$\lim_{\theta \to \theta_0} \sin(\theta) = \sin(\theta_0).$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos\left((\theta-\theta_0)+\theta_0\right)\\ &= \cos(\theta-\theta_0)\cos(\theta_0)-\sin(\theta-\theta_0)\sin(\theta_0)\end{aligned}$$

dando sequência a

$$\lim_{\theta\to\theta_0}\cos(\theta)=\cos(\theta_0).$$

∎

Proposição 2.24 *A exponencial natural $x \mapsto e^x$ é contínua.*

Demonstração: Pelo limite fundamental (lema 2.8), temos

$$\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}\lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} = e^{x_0},$$

onde usamos que

$$\lim_{h\to 0} e^h - 1 = \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}h = 1\times 0 = 0,$$
$$\lim_{h\to 0} e^h = 1.$$

∎

Observação 2.25 *No exercício a seguir temos funções definidas por partes. Para plotarmos seus gráficos no Mathematica usamos o comando* `Piecewise` *para definir a função. No segundo item do exercício temos a função*

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & se\ x<1\\ 0 & se\ 1\le x<4\\ x^2-16 & se\ x\ge 4\end{cases}$$

Para plotarmos seu gráfico usamos o código

```
f[x_] = Piecewise[{{-x + 1, x < 1}, {0, 1 <= x < 4}, {x^2 - 16, x >= 4}}];
Plot[f[x], {x, -2, 5}]
```

Exercício 2.26 *Mostre que*

1. $f(x)=\begin{cases}0 & se\ x<0\\ x & se\ x\ge 0\end{cases}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$.

2. $f(x)=\begin{cases}-x+1 & se\ x<1\\ 0 & se\ 1\le x<4\\ x^2-16 & se\ x\ge 4\end{cases}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$

4. $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ *é contínua em* $\mathbb{R}_{>0}$*, mas não é contínua em* 0.

Exercício 2.27 *Mostre que composição de funções contínuas é contínua: se* $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $g : Y \to \mathbb{R}$ *são contínua com* $f(X) \subset Y$*, então* $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ *é contínua.*

Exercício 2.28 *Descreva quais funções contínuas estão sendo composta e mostre que*

1. $f(x) = \sin(x^2 + e^{-x})$ *está bem definida e é contínua em* $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \frac{\sin(x^3)e^{-\cos(x^2)}}{x^2-1}$ *está bem definida e é contínua em* $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
3. $f(x) = \sin(1/x)$ *está bem definida e é contínua em* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
4. $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$

2.3 Funções contínuas em intervalos: zeros de funções

Um subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se para quaisquer a, b em I, com $a \leq b$, temos $[a, b] \subset I$. Em outras palavras, se I tem dois pontos, então tem também os demais pontos entre esses dois.

Exercício 2.29 *Prove que os intervalos segundo a definição acima são exatamente aqueles que conhecemos da escola.*[4]

> ***Dica:*** *o argumento é dividir e conquistar. Se o intervalo é limitado a direita, por exemplo, podemos tomar* $r_0 \in I$ *e* s_0 *a direita de* I.
> *Defina* $J_0 = [r_0, s_0]$*, Se o ponto médio* m_1 *de* J_0 *estiver em* I*, defina* $J_1 = [m_1, s_0]$*, caso contrário, defina* $J_1 = [r_0, m_1]$*. Prossiga o algorítimo, encontre os* $J_k's$ *e o extremo direito de* I*, que é o ponto comum a todos os* $I_k's$ *.*

Teorema 2.30 (Teorema do valor intermediário) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua,* $f(a) < 0$ *e* $f(b) > 0$*, então existe* $a < c < b$ *tal que* $f(c) = 0$.

Demonstração: A ideia é dividir e conquistar. Suponhamos que não existe $c \in I$ satisfazendo $f(c) = 0$.

Seja m_1 o ponto médio do intervalo $I_0 = [a, b]$. Se $f(m_1) > 0$, defina $I_1 = [a, m_1]$, caso contrário, se $f(m_1) < 0$, defina $I_1 = [m_1, b]$. O importante aqui é que I_1 é um intervalo com

[4] Pessoa de pouca fé! Por quê provar se um desenho já convence?

metade do comprimento de I_0 no qual f em seus extremos é positivo à direita e negativo à esquerda.

Repete o procedimento anterior: seja m_2 o ponto médio do intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$. Se $f(m_2) > 0$, defina $I_2 = [a_1, m_2]$, caso contrário, defina $I_2 = [m_2, b_1]$. Obtemos $|I_2| = |I_1|/2$ e o sinal de f nos extremos de I_2 é positivo à direita e negativo à esquerda. Os demais intervalos $I_3, I_4, \ldots$ são construídos da mesma forma.

O algoritmo acima nos fornece intervalos I_n's com as seguintes propriedades:

- $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \cdots \supset I_n \supset \cdots$
- f é negativa no extremo esquerdo de I_n e positiva no extremo direito;
- $|I_n| = (b-a)/2^n \to 0$.

Pela propriedade dos intervalos encaixados 1.40, existe c comum a todos os intervalos I_n's. Sejam a_n o extremo esquerdo de I_n e b_n o extremo direito. Por construção,

$$|a_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n} \to 0 \quad \text{e} \quad |b_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n} \to 0,$$

ou seja, $a_n \to c$ e $b_n \to c$. Pelo Exercício 1.27, como $f(a_n) < 0$, temos que

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0.$$

Similarmente, $f(c) \geq 0$ porque $f(b_n) > 0$. Portanto, $f(c) = 0$, contradizendo a hipótese de que tal c não existe. ∎

Exemplo 2.31 (Aproximando $\sqrt{2}$ computacionalmente) *A demonstração do teorema do valor intermediário de fato nos fornece um algoritmo para aproximarmos raízes de equações. Considere $f(x) = x^2 - 2$. Temos que $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$. Assim, tomemos $[1, 2]$ como sendo o domínio de f. A solução de $f(x) = 0$ em $[1, 2]$ tem de ser $\sqrt{2}$.*

Seja $a = 1$ e $b = 2$. Calcule $c = (a+b)/2$. Se $f(c) < 0$, então trocamos o valor de a pelo de c, se $f(c) > 0$ então trocamos o valor de b pelo de c. Os novos a, b definem um intervalo com metade do comprimento original. Com respeito a esses novos a e b podemos recalcular $c = (a+b)/2$ e reobter novos a e b, assim por diante. Podemos executar tal algoritmo em Mathematica com o código:

```
a = 1;
b = 2;
f[x_] = x^2 - 2;
i = 1;
While[i <= 10,
 c = (a + b)/2;
 If[f[c] < 0, a = c];
 If[f[c] > 0, b = c];
```

```
 If[f[c] == 0, Break[]];
 i = i + 1
]
```

no qual repetimos 10*-vezes o procedimento descrito. Como a distância dentre a e b é* 1 *inicialmente. Depois de* 10 *iterações, temos que a distância dentre a e b é* $1/2^{10} < 0.001$*. O número c obtido depois de* 10 *iterações vale*

$$c = \frac{1449}{1024} \quad e \quad |c - \sqrt{2}| < 0.001.$$

*Note que esse método (conhecido como **método da bisseção**) pode ser usado para aproximar a raiz de qualquer número. De modo mais geral, pode ser usado para computar raízes reais de polinômios.*

Exercício 2.32 *Com respeito ao teorema 2.30. Verifique que o mesmo resultado vale se trocarmos $f(a) < 0$ por $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$ por $f(b) < 0$. De fato, basta aplicar o teorema enunciado para função $-f$.*

Exercício 2.33 *Mostre que todo polinômio de grau impar tem uma solução real. Dica: calcule seu limite para quando x tende para $-\infty$ e ∞.*

Proposição 2.34 *Se I é intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f(I)$ é intervalo.*

Demonstração: Tome $\alpha = f(a)$ e $\beta = f(b)$. Se γ é um número real entre α e β, mas diferente de tais números, então $g(x) = f(x) - \gamma$, definida em $[a, b]$, é positiva em um dos extremos e negativa no outro. Pelo teorema do valor intermediário 2.30, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, $f(c) = \gamma$. Assim, para α e β em $f(I)$, todos os valores entre tais números encontram-se em $f(I)$, ou seja, $f(I)$ é um intervalo. ∎

Teorema 2.35 (Versão contínua do teorema da função inversa) *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente*[5]*. Se $J = f(I)$ e $g : J \to I$ é dada por $g(y) = f^{-1}(y)$, então, além de ser estritamente crescente, g é contínua.*

Demonstração: Pela proposição 2.34, o conjunto J é um intervalo, pois f é contínua. Mostremos que g é contínua em $b \in J$.

Seja $a = g(b)$. Como f é estritamente crescente, temos que a é extremo de I se, e só se, b é extremo de J.

[5] Isso quer dizer que $x > y \Longrightarrow f(x) > f(y)$. Em particular, f é injetora.

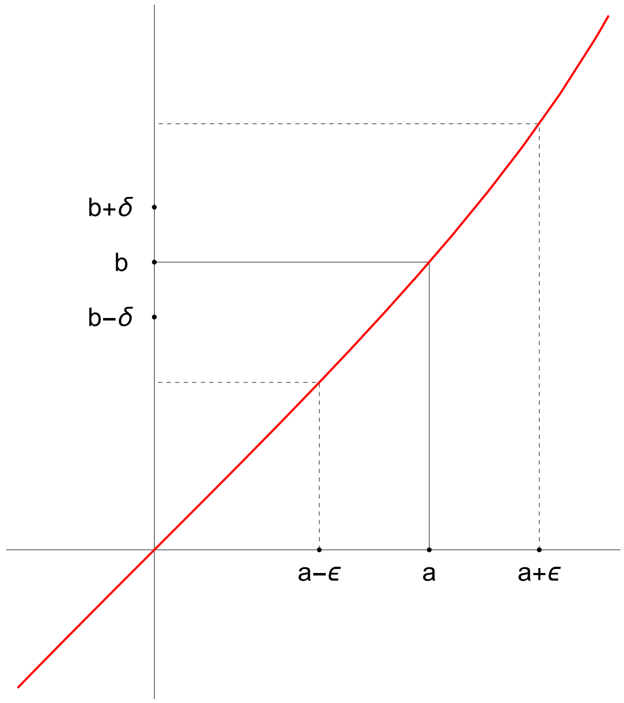

Figura 2.8: *Encontrando δ para função estritamente crescente.*

Se b não for extremo, tome $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $a-\epsilon$ e $a+\epsilon$ pertencem a I. Existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta \leq f(a+\epsilon) - b \quad \text{e} \quad \delta \leq b - f(a-\epsilon).$$

Se $y_n \to b$, então $|b - y_n| < \delta$ para n suficientemente grande. Assim,

$$|g(y_n) - g(b)| = |g(y_n) - a| < \epsilon$$

para n suficientemente grande, de onde segue que $g(y_n) \to g(b) = a$.

Portanto, g é contínua nos pontos não extremos de J.

Suponha que b é extremo direito. Tome $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $a - \epsilon \in I$. Tome $\delta > 0$ satisfazendo $f(a-\epsilon) = b - \delta$. Se $y_n \to b$, então para n suficientemente grande $|y_n - b| < \delta$ e, consequentemente, $|g(y_n) - a| < \epsilon$. Logo, g é contínua em b. Similarmente, g é contínua em seu extremo esquerdo, caso esse exista. ∎

Observação 2.36 *Trocando f por $-f$ temos que se f é estritamente decrescente e contínua, então a sua inversa é também estritamente decrescente e contínua.*

Exemplo 2.37 *Pelo Teorema 2.35.*

- *A exponencial natural* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ *é estritamente crescente e contínua. Sua inversa, o logaritmo natural* $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, *é estritamente crescente e contínua.*

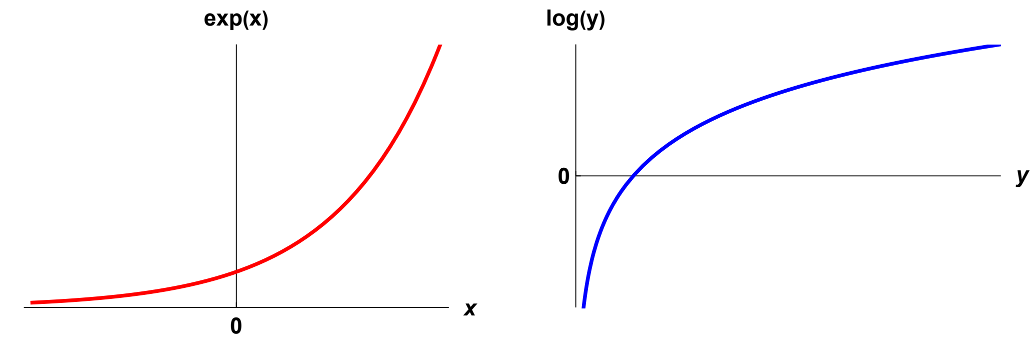

Figura 2.9: $y = \exp(x)$ *e* $x = \log(y)$.

- *A função seno* $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ *é estritamente crescente e contínua. Sua inversa, a função arco seno* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, *é estritamente crescente e contínua.*

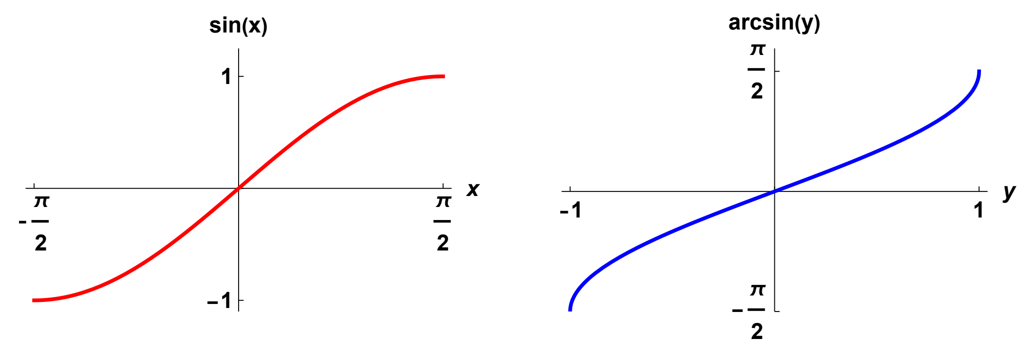

Figura 2.10: $y = \sin(x)$ *e* $x = \arcsin(y)$.

- *A função cosseno* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *é estritamente decrescente e contínua. Sua inversa, a função arco cosseno* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, *é estritamente decrescente e contínua.*

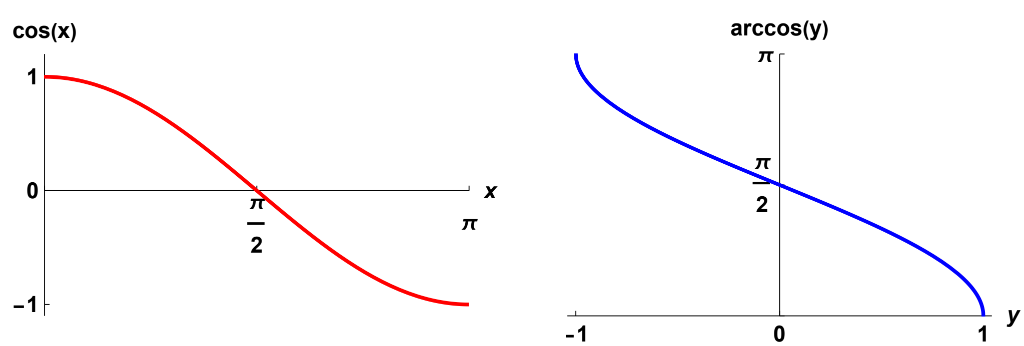

Figura 2.11: $y = \cos(x)$ *e* $x = \arccos(y)$.

- *A função tangente* $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ *é estritamente crescente e contínua. Sua inversa, a função arco tangente* $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$*, é estritamente crescente e contínua.*

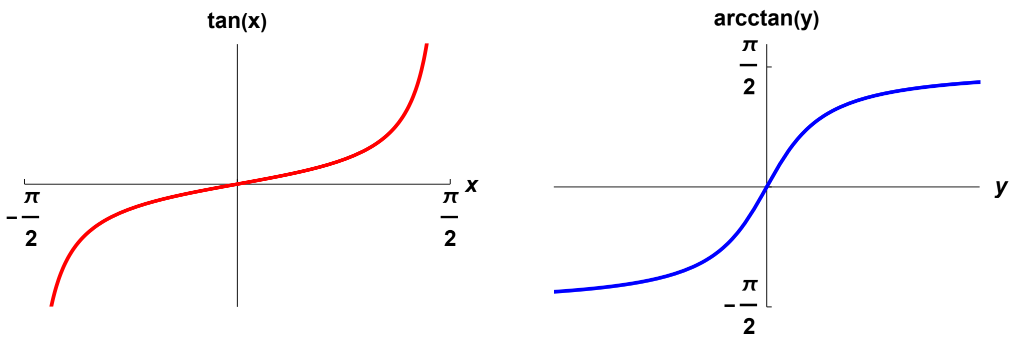

Figura 2.12: $y = \tan(x)$ *e* $x = \arctan(y)$.

Exemplo 2.38 *Calculemos*

$$\lim_{y\to 0} \frac{\arcsin(y)}{y}$$

Para $y_n \to 0$*, com* y_n *não nulo, definimos* $x_n = \arcsin(y_n)$ *para* n *suficientemente grande*[6]. *Como* $\arcsin$ *é contínua temos* $x_n \to 0$ *e portanto*

$$\frac{\arcsin(y_n)}{y_n} = \frac{x_n}{\sin(x_n)} = \frac{1}{\sin(x_n)/x_n} \to 1.$$

Logo,

$$\lim_{y\to 0} \frac{\arcsin(y)}{y} = 1.$$

Exercício 2.39 *Calcule os limites*

1. $\lim_{y\to 0} \arccos(y)$
2. $\lim_{y\to e} \log(y)$
3. $\lim_{y\to 1} \frac{\log(y)}{y-1}$
4. $\lim_{y\to 0} \frac{\arctan(y)}{y}$
5. $\lim_{y\to \infty} \arctan(y)$
6. $\lim_{y\to -\infty} \arctan(y)$

2.4 Máximos e mínimos de funções contínuas

Definição 2.40 *Um intervalo compacto nada mais é que um intervalo da forma* $[a, b]$*, isto é, possuí ambos os extremos.*

[6] Precisa-se de n suficientemente grande para garantir que y_n está no domínio de arcsin, o intervalo (-1,1). Para n pequeno, podemos definir x_n como sendo qualquer coisa, pois no cálculo de limites somente os n grandes importam.

Definição 2.41 *Um ponto x_0 é um ponto de máximo de $f : I \to \mathbb{R}$ se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in I$. Nesse caso, $f(x_0)$ é o máximo de f. Similarmente, x_0 é um ponto de mínimo se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in I$. Aqui $f(x_0)$ é o mínimo de f.*

Em geral, funções contínuas podem não admitir máximo ou mínimo. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$ não possui máximo, pois

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.$$

Por outro lado, no intervalo compacto $[-1, 1]$ a função $f(x) = x^2$ possui dois pontos de máximo, 1 e -1. Já no intervalo $(-1, 1)$ a função não atinge máximo.

A fim de provar o teorema central dessa seção, o Teorema de Weierstrass (2.46), precisamos de dois lema, que são muito importantes (talvez devesse chama-los de teolemas), pois caracterizam intervalos compactos do ponto de vista sequencial.

Definição 2.42 *Considere uma sequência x_n.*

Se temos os números inteiros positivos $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ em ordem crescente, podemos definir a sequência x_{n_k}, com $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Quando isso ocorre, dizemos que x_{n_k} é subsequência de x_n.

Exemplo 2.43

- *A sequência $x_n = (-1)^n$ tem subsequencias como $x_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ e $x_{2k+1} = -1$. Embora a sequência x_n não convirja, ambas subsequências convergem.*
- *A sequência*
$$x_n = \begin{cases} 1/n & \text{se } n \text{ é múltiplo de } 3 \\ (n+1)/n^2 & \text{se } n \text{ não é múltiplo de } 3 \end{cases}$$
tem
$$x_{3k} = 1/(3k), \quad x_{3k+1} = (3k+2)/(3k+1)^2, \quad x_{3k+2} = (3k+3)/(3k+2)^2$$
como subsequências.

Lema 2.44 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência em $[a, b]$ possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: A prova é novamente dividir e conquistar. Considere uma sequência x_n em $[a, b]$. Comecemos com $I_0 = [a, b]$. Uma das metades de I_0 contem x_n para infinitos n's. Tomamos essa metade para ser I_1. Novamente, dividindo I_1 ao meio temos que uma de suas metades contem x_n para infinitos n's. Tomamos essa metade para ser I_2, e assim por diante. Assim, temos a sequência de intervalos compactos

- $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$
- Para cada I_k temos que há infinitos valores de n para os quais $x_n \in I_k$;
- $|I_k| \leq (b - a)/2^k$.

Pela propriedade dos intervalos encaixados, há x comum a todos os intervalos I_k's. Escolha n_1 tal que $x_{n_1} \in I_1$. Agora escolha $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in I_2$. Similarmente, tome $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \in I_3$, e assim por diante. Temos que a subsequência x_{n_k} de x_n converge para x, pois $|x - x_{n_k}| < (b-a)/2^k$. ∎

Lema 2.45 *Se I é um intervalos não compacto, então existe uma sequência $x_n \in I$ que não admite subsequência que converge para um ponto de I.*

Demonstração: Se o intervalo for ilimitado a direita, a sequência $x_n = n$ não tem subsequência convergente. O mesmo ocorre se o intervalo I for ilimitado a esquerda. Assim, o intervalo tem de ser $[a,b)$ ou $(a,b]$ ou (a,b). Vamos supor que $I = [a,b)$: a sequência $x_n = b - (b-a)/2^n$ em $[a,b)$ não possui uma subsequência convergente com limite em $[a,b)$, pois toda subsequência tem limite b, que não pertence ao intervalo. O argumento é análogo para os demais intervalos. ∎

Teorema 2.46 (Teorema de Weierstrass) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma contínua, então f admite máximo. Observe que o domínio da função f é um intervalo compacto.*

Demonstração: Pela Proposição 2.34, $J = f([a,b])$ é um intervalo. Considere uma sequência y_n de J.

Para cada n escolha $x_n \in [a,b]$ tal que $f(x_n) = y_n$. Existe uma subsequencia x_{n_k} tendendo para algum $x \in \mathbb{R}$, porque o intervalo $[a,b]$ é compacto (Lema 2.44). Como $a \leq x_{n_k} \leq b$, o limite x dessa subsequencia quando $k \to \infty$ tem de satisfazer $a \leq x \leq b$ (veja Exercício 1.27), ou seja, $x \in [a,b]$.

Assim, $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ converge para $f(x) \in J$, pois f é contínua. Logo, toda sequência y_n de J admite uma subsequência que converge para um ponto de J. Portanto, J é um intervalo compacto (Lema 2.45): existem c_0 e c_1 em $[a,b]$ tais que $J = [f(c_0), f(c_1)]$. Em outras palavras, c_0 é um ponto de mínimo e c_1 é um ponto de máximo. ∎

Porque os exemplos que discutimos até agora possuem gráficos relativamente simples, pode parecer que teoremas como o do valor intermediário e o de Weierstrass sejam apenas justificativas pomposas de coisas simples. No entanto, funções contínuas são em geral extremamente selvagens. A função

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{1}{2^2}\cos(4^2x) + \cdots + +\frac{1}{2^k}\cos(4^kx) + \cdots$$

é contínua em $\mathbb{R}$ e é conhecida como função de Weierstrass.

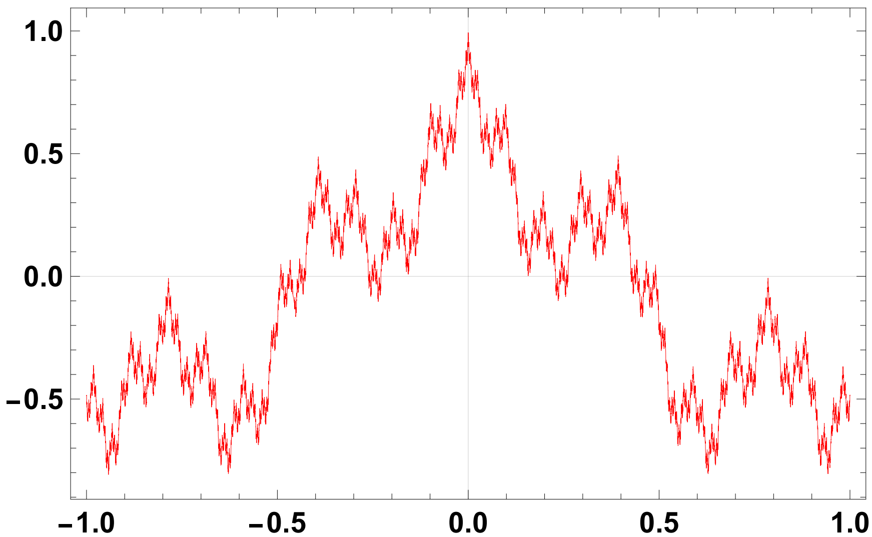

Figura 2.13: *Função de Weierstrass.*

O gráfico dessa função é uma curva fractal (google it!) e não está representado com todo sua complexidade na Figura 2.13, pois isso seria impossível. Além disso, nenhum de seus pontos possuem a noção de tangencia (isso quer dizer que a derivada, que veremos a frente, não existe em ponto algum).

Apesar da função de Weierstrass ser extremamente patológica, o teorema do valor intermediário nos garante que ela tem um zero ao menos e o teorema de Weierstrass nos garante que essa função possuí ponto de máximo e de mínimo no intervalo compacto $[-1, 1]$. Em resumo, essa curva abala nossa confiança (mas só um pouquinho) de que funções contínuas em intervalos são as que podemos desenhar o gráfico sem tirar o lápis do papel.

Via de regra, quando procuramos por zeros ou pontos de máximo/mínimo em algum problema matemático, primeiro mostramos que solução para esse existe. Em geral, não conseguimos uma solução explicita, apenas mostramos que ela tem que existir. A segunda etapa é descobrir métodos para aproximar a solução desses problemas da forma mais eficaz possível.

O teorema de Weierstrass, apesar de garantir que a função tem um ponto de máximo (ou mínimo), não nos diz como encontrá-lo (ao contrário da nossa prova do Teorema do valor intermediário). Técnicas para efetivamente encontrar máximo e mínimo serão discutidas ao estudarmos cálculo diferencial.

Referências Bibliográficas

[Cou] Richard Courant. Differential and Integral Calculus – Volume 1. Wiley. 1937.

[Lag] Elon Lages Lima. Análise Real – Volume 1. IMPA, 10ª edição. 2009.

[FKo] Galina Filipuk e Andrzej Kozlowski. Analysis With Mathematica. De Gruyter. 2019.

[Pis] Nikolai Piskunov. Calculo Diferencial e Integral – Tomo I. MIR, 3ª edição. 1977;

[Sta] Saul Stahl. Real Analysis: A Historical Approach. Wiley, 2ª edição. 2011.

[Zor] Vladimir Zorich. Mathematical Analysis I. Springer, 2ª edição. 2016.