

# Geometrias Clássicas

Hugo Cattarucci Botós (ICMC - USP)  
[hugobotos@gmail.com](mailto:hugobotos@gmail.com)

Copyright © 2020 de Hugo Cattarucci Botós. Autorizo reprodução e distribuição do texto para fins não-lucrativos desde que a autoria seja citada. Se encontrar erros, agradeço se me notificar via e-mail: [hugobotos@gmail.com](mailto:hugobotos@gmail.com).

# Sumário

<b>1</b>	<b>Uma visão geral, mas não entre em pânico!</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Formas Hermitianas</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Propriedades Básicas do Espaço Projetivo</b>	<b>19</b>
3.1	Espaço Projetivo . . . . .	19
3.2	Topologia e Estrutura Suave . . . . .	20
3.3	Projetivo em Coordenadas . . . . .	23
3.4	Espaço Tangente . . . . .	24
3.5	Campos Vetoriais . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Geometria no Espaço Projetivo</b>	<b>29</b>
4.1	Conexão de Levi-Civita . . . . .	29
4.2	Curvatura . . . . .	35
4.3	Geodésicas . . . . .	38
4.4	Espaço Hiperbólico Real . . . . .	44
4.5	Espaço Hiperbólico Complexo . . . . .	47
4.6	Espaço de Fubini-Study . . . . .	53
4.7	Espaço Euclidiano . . . . .	55
4.8	Transporte Paralelo . . . . .	56
4.9	Dualidade projetiva no espaço hiperbólico . . . . .	68
4.10	Curvas especiais de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ . . . . .	71
4.11	Bissetores em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Grupos Discretos</b>	<b>82</b>
5.1	Ações de grupos em espaços topológicos . . . . .	82
5.2	Grupos Fuchsianos . . . . .	91
5.2.1	Propriedades algébricas de grupos Fuchsianos . . . . .	94
5.2.2	Grupos elementares . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Teorema Poliedral de Poincaré</b>	<b>99</b>
6.1	Cíclo de Vértices . . . . .	99
6.2	Ladrilhamentos regulares . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Geometria de superfícies compactas orientada</b>	<b>108</b>

# 1 Uma visão geral, mas não entre em pânico!

Esse texto é em essência um texto sobre geometrias clássicas, onde por clássicas quero dizer que são geometrias que se manifestam a partir da álgebra linear. Isso inclui espaços como Espaço Euclidiano, Espaço Hiperbólico real, complexo ou quaterniônico, Esfera usual, Espaço projetivo complexo com métrica de Fubini-Study, Grassmanianos com métrica natural, e esses são alguns espaços com métrica Riemanniana. Essa abordagem também nos fornece uma enorme classe de espaços com métricas pseudo-Riemannianas. Além disso, podemos considerar quocientes desses espaços por grupos de isometrias discretos, obtendo uma enorme e rica família de espaços. Mas não se preocupe que definirei esses animais ao longo do texto.

Nosso objetivo aqui é criar um framework para tratar dessas geometrias de um ponto de vista moderno e geral. Com a tecnologia desenvolvida aqui podemos falar de geometria hiperbólica (real, complexa ou quaterniônica) sem grandes problemas e com linguagem que em essência se resume a álgebra linear básica. A filosofia desse texto é fugir de coordenadas como o diabo da cruz, pois coordenadas normalmente mascaram o fenômeno que realmente está a ocorrer.

Como eu sou geômetra hiperbólico complexo, me restringirei aos casos reais e complexos, não tratando do quaterniônico, além disso vou focar mais na geometria hiperbólica que nas demais geometrias.

**Observação 1** *Gostaria de alertar o leitor de duas coisas. A primeira é que todos espaços vetoriais aqui considerados tem dimensão finita. A segunda é que as vezes farei abusos de escrita como escrever  $fg$  no lugar de  $f \circ g$  ou  $fx$  no lugar de  $f(x)$ .*

**Lembrete 2** *Dado um espaço vetorial real  $V$  de dimensão  $n$ , existe um isomorfismo linear  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ . A partir desse isomorfismo linear podemos colocar a topologia de  $\mathbb{R}^n$  em  $V$ . Essa topologia não depende do isomorfismo escolhido, pois se temos outro isomorfismo  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ , então  $B^{-1}A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é isomorfismo linear, e portanto homeomorfismo. Além disso, você pode usar tais isomorfismos lineares como cartas para  $V$ , ou seja,  $V$  tem estrutura suave. Na prática, isso quer dizer que para ver se uma função é suave, basta fixar uma base e olhar como tal função é em coordenadas.*

Para ilustrar a filosofia que seguirei, estudemos um exemplo. Façamos um pouco da geometria da esfera. No entanto, não se assuste! Falarei de várias coisas complicadas aqui, mas definirei elas com mais detalhe nas seções a seguir. Usualmente pensamos na esfera como um objeto métrico no sentido que precisamos ter um produto interno em um espaço vetorial para defini-la. Mais precisamente, se temos o espaço vetorial real  $V$  munido de produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , então podemos escrever a esfera

$$\mathbb{S}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \{v \in V : \langle v, v \rangle = 1\}.$$

Note que essa definição claramente depende do produto interno. Escolhendo outro produto interno  $(\cdot, \cdot)$  obtemos outra esfera  $\mathbb{S}(V, (\cdot, \cdot)) = \{v \in V : (v, v) = 1\}$  e temos que

essas duas esferas são difeomorfas pelo mapa

$$f : \mathbb{S}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow \mathbb{S}(V, (\cdot, \cdot))$$

dado por  $f(x) = x / \sqrt{(x, x)}$ .

Moralmente, deveria existir uma definição de esfera como variedade suave que não depende dessa escolha arbitrária de produtos internos, já que diferentes escolhas de produtos internos nos fornecem a mesma variedade do ponto vista suave.

**Lembrete 3** *Um grupo  $G$  agir em um conjunto  $M$  quer dizer que existe uma aplicação  $A : G \times M \rightarrow M$ , chamada ação, satisfazendo  $A(g, A(h, x)) = A(gh, x)$  e  $A(1, x) = x$ . Normalmente denotamos  $A(g, x)$  por  $gx$ . Assim, as propriedades descritas se traduzem na associatividade  $g(hx) = (gh)x$  e em  $1x = x$ . Além disso, essa ação nos permite quocientar  $M$  por  $G$ . Mais precisamente, definimos a relação de equivalência  $x \sim y$  se existe  $g$  em  $G$  tal que  $y = gx$  e o quociente  $M/G$  é  $M/\sim$ . A classe de equivalência dada por  $x$ , denotada por  $\mathbf{x}$ , é o que chamamos de órbita de  $x$ , denotada também por  $Gx$ . Note que  $Gx = \{gx : g \in G\}$ .*

Definamos então a esfera sem escolha arbitrárias, somente dependendo do nosso espaço vetorial. A esfera é o conjunto das semi-retas partindo de zero. Mais precisamente, temos que em  $V^\times := V \setminus 0$  age  $\mathbb{R}_{>0}$  por multiplicação, e cada órbita dessa ação é uma semi-reta em  $V^\times$  partindo da origem, assim, o conjunto dessas órbitas é o quociente

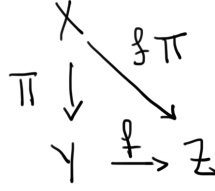
$$\mathbb{S}(V) := V^\times / \mathbb{R}_{>0},$$

ou seja,  $\mathbb{S}(V)$  é o quociente de  $V^\times$  pela relação de equivalência  $\sim$ , onde  $u \sim v$  quando existe  $a > 0$  tal que  $u = av$ .



**Figura 1:** Semi-retas partindo da origem, sem incluí-la.

**Lembrete 4** *Dado um espaço topológico  $X$  e uma sobrejeção  $\pi : X \rightarrow Y$ , onde  $Y$  é um conjunto, podemos definir em  $Y$  a topologia quociente, isto é,  $U \subset Y$  é aberto se  $\pi^{-1}U$  é aberto, ou seja, a maior topologia que deixa  $\pi$  contínua. Além disso, com essa topologia temos a seguinte propriedade universal: Se  $f : Y \rightarrow Z$  é uma função e  $Z$  é espaço topológico, então  $f$  é contínua se, e só se,  $f\pi$  é contínua.*

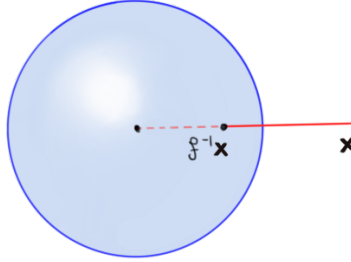


**Figura 2:** Propriedade universal do quociente.

O conjunto  $\mathbb{S}(V)$  é espaço topológico com topologia quociente e é homeomorfo as esferas consideradas anteriormente. De fato, considere o mapa  $f : \mathbb{S}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow \mathbb{S}(V)$  dado por  $f(x) = \mathbf{x}$ . Esse mapa é bijetivo e é restrição do mapa  $\pi : V^\times \rightarrow \mathbb{S}(V)$ , que é contínuo pela definição de topologia quociente. A inversa de  $f$  é a função  $f^{-1} : \mathbb{S}(V) \rightarrow \mathbb{S}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  explicitamente dada por  $f^{-1}\mathbf{x} = x / \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Note que essa função está bem definida, pois trocando  $x$  por  $ax$ , com  $a > 0$ , temos

$$\frac{ax}{\sqrt{\langle ax, ax \rangle}} = \frac{x}{\sqrt{\langle x, x \rangle}}.$$

Além disso,  $f^{-1}$  é contínua pela propriedade universal do quociente, pois  $\pi f^{-1} : V^\times \rightarrow \mathbb{S}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é contínua. Assim,  $f$  é homeomorfismo e de brinde sabemos que  $\mathbb{S}(V)$  é compacta e Hausdorff.



**Figura 3:** Cada semi-reta de  $\mathbb{S}(V)$  corresponde a um ponto de  $\mathbb{S}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  e vice-versa.

Portanto, temos que esfera é objeto que não é a priori métrico.

Como colocar estrutura suave em  $\mathbb{S}(V)$ ? Precisamos de um atlas. Para isso usamos hiperplanos não passando pela origem. Para cada funcional linear  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  não nulo temos o hiperplano  $H_\phi$  dado pelos pontos  $v$  de  $V$  satisfazendo  $\phi(v) = 1$ . Esse hiperplano define a parametrização

$$\pi|_{H_\phi} : H_\phi \rightarrow \mathbb{S}(V)$$

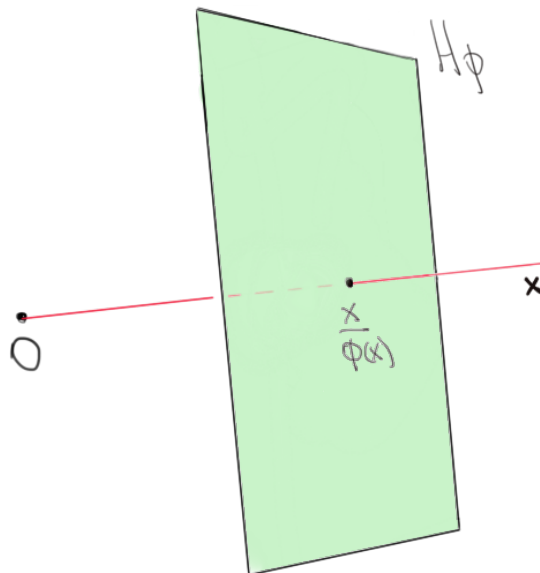
dada por

$$\pi|_{H_\phi}(v) = \mathbf{v}.$$

Note que  $H_\phi$  é uma cópia de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , onde  $n = \dim V$ , e portanto tem estrutura suave, como subvariedade de  $V$ . Mais explicitamente, podemos tomar uma base  $e_1, \dots, e_{n-1}$  do

núcleo de  $\phi$  e um ponto  $v_0 \in H_\phi$  assim definindo o difeomorfismo  $\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow H_\phi$  dado por

$$(t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto v_0 + \sum_{j=1}^{n-1} t_j e_j.$$



**Figura 4:** Cartas da esfera.

Além disso a função  $\pi|_{H_\phi}$  é contínua, por ser restrição de  $\pi$ , e tem imagem

$$U_\phi := \{v \in \mathbb{S}(V) : \phi(v) > 0\}.$$

O conjunto  $U_\phi$  está bem definido, pois a condição  $\phi(v) > 0$  não depende de representante, isto é, se trocarmos  $v$  por  $av$ , com  $a > 0$ , então continuamos tendo  $\phi(av) > 0$ . Além disso, é fácil verificar que  $U_\phi$  é aberto. De fato,  $\pi^{-1}U_\phi = \{v \in V^\times : \phi(v) > 0\}$  é aberto, pois todo funcional linear em espaço de dimensão vetorial finita é contínuo.

Então, temos que  $\pi|_{H_\phi}$  tem imagem  $U_\phi$ , que é aberto em  $\mathbb{S}(V)$ . Além disso, esse mapa tem inversa  $\Phi v = v/\phi(v)$ . Note que essa função está bem definida, por não depender de representante de  $v$ , e é contínua pela propriedade universal da topologia quociente, pois a função  $\pi \Phi : V^\times \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $v \mapsto v/\phi(v)$ , é contínua.

Assim,  $\Phi : U_\phi \rightarrow H_\phi$  é homeomorfismo. Desta forma, temos um atlas para  $\mathbb{S}(V)$ . De fato, se temos dois funcionais lineares não nulos  $\phi$  e  $\psi$ , então a mudança de carta é dada por  $\Psi \circ \Phi^{-1}(v) = v/\psi(v)$ , que é suave.

Portanto, a esfera  $\mathbb{S}(V)$  é variedade suave de dimensão  $n - 1$ . Ok. Mas por que tanta complicação? Não podemos simplesmente considerar a esfera em  $\mathbb{R}^n$ ? Sim, mas esse tipo de abordagem funciona bem para vários tipos de espaços como projetivos e grassmanianos que são mais complicados de descrever em coordenadas. Além disso, a linguagem da teoria fica

mais linear. Por exemplo, quem é o plano tangente de  $\mathbb{S}(V)$  no ponto  $v$ ? É simplesmente o espaço de transformações lineares de  $\mathbb{R}v$  em  $V/\mathbb{R}v$ , o que provarei depois no contexto projetivo.

$$T_v \mathbb{S}(V) = \text{Lin}(\mathbb{R}v, V/\mathbb{R}v)$$

**Observação 5** *Isso é mais uma curiosidade: Se você for uma pessoa que gosta de fibrados você possivelmente vai gostar disso. Temos o fibrado de linha tautológico  $L \rightarrow \mathbb{S}(V)$  cujas fibras são  $L_v = \mathbb{R}v$ , e temos o fibrado trivial  $T = V \times \mathbb{S}(V) \rightarrow \mathbb{S}(V)$ . Note o fibrado tangente é*

$$T\mathbb{S}(V) = \text{Lin}(L, T/L) := L^* \otimes (T/L).$$

Em suma, podemos fazer toda geometria de variedades da esfera sem colocar métrica em lugar algum. Esfera é um objeto não métrico. Mas ao colocarmos uma métrica, temos então uma geometria. Todos objetos dessa geometria se manifestarão de forma linear, como geodésicas, campos de Jacobi, etc. Mas não farei isso aqui. Meu objetivo é aplicar essa filosofia para estudar geometria hiperbólica.

É interessante ver também que essa abordagem nos dá naturalmente a fibração de Hopf. Mais precisamente, se temos  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ , onde esse último é o "corpo" dos quaternions, então temos o espaço vetorial real  $V = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . No entanto,  $V$  também é espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , assim, podemos obter o projetivo  $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(V)$  dado pelos subespaços 1-dimensionais de  $V$ . Equivalentemente, temos

$$\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(V) := V^\times / \mathbb{K}^\times.$$

Quando temos  $V = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  denotamos  $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(V)$  por  $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}^1$ , que é a reta projetiva com respeito ao corpo  $\mathbb{K}$ . Colocando em coordenadas e usando projeção estereográfica é possível provar que

$$\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{S}^1, \quad \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{S}^2 \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_{\mathbb{H}}^1 = \mathbb{S}^4.$$

Além disso, como  $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{K}^\times$ , temos a sobrejeção suave

$$V^\times / \mathbb{R}_{>0} \rightarrow V^\times / \mathbb{K}^\times,$$

que é

$$\mathbb{S}(\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{K}}^1.$$

Esse mapa se chama fibração de Hopf dada por  $\mathbb{K}$ .

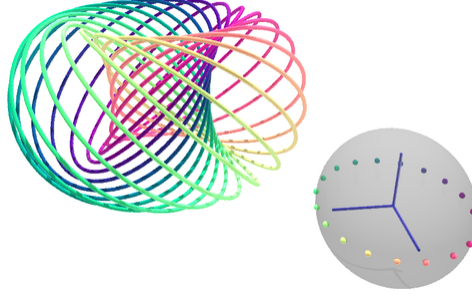
Para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  esse mapa é um recobrimento duplo  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , ou seja, esse mapa é um fibrado cujas fibras são modeladas por  $\mathbb{S}^0 := \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\} = \{1, -1\}$ .

Para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  a fibração é um fibrado  $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  cujas fibras são modeladas por  $\mathbb{S}^1$ .

Para  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$  a fibração é um fibrado  $\mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^4$  cujas fibras são modeladas por  $\mathbb{S}^3$ .

Esses dois últimos casos são extremamente legais. Para visualizar o caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , a fibração de círculos  $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , dê uma olhada no site do matemático Niles Johnson (<https://nilesjohnson.net/hopf.html>), onde você encontrará imagens maravilhosas como essa:





**Figura 5:** *Fibração de Hopf  $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  dada pelos números complexos.*

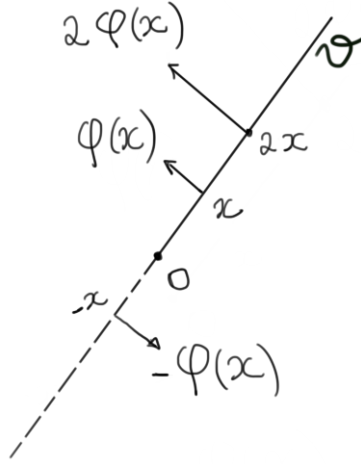
Para chegar em tal imagem você faz o seguinte, você identifica  $\mathbb{S}^3$  com  $\mathbb{R}^3 \cup \infty$  usando projeção estereográfica. Assim, pré-imagens de pontos de  $\mathbb{S}^2$ , representado no canto inferior direito, nos fornece círculos em  $\mathbb{R}^3$ , com exceção de um caso que é uma reta (um círculo passando por  $\infty$ ). Repare também que ao tomarmos fibras de pontos sobre um círculo de  $\mathbb{S}^2$ , obtemos um toro, como ilustra a figura. Assim, pré-imagem de círculos são toros! Essa é a fibração que usualmente se chama de fibração de Hopf.

O caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$  é interessante também porque foi modificando esse fibrado que Milnor mostrou a existência de esferas  $S^7$  com estrutura exótica. Mais precisamente, ele mostrou que existem atlas  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  em  $S^7$  tais que não existe difeomorfismo entre  $(S^7, \mathcal{A}_1)$  e  $(S^7, \mathcal{A}_2)$ , ou seja,  $S^7$  tem mais de uma estrutura suave. Dê uma olhada em [https://en.wikipedia.org/wiki/Exotic\\_sphere](https://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_sphere) para mais detalhes. Infelizmente não vou conseguir explicar a intuição de  $S^7$ , minha intuição geométrica só vai até dimensão 4.

Voltemos a esfera  $\mathbb{S}(V)$ . Vamos considerar geometria nela agora. Considere um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $V$ . Note que temos o isomorfismo linear natural  $(\mathbb{R}v)^\perp \rightarrow V/\mathbb{R}v$  dado por  $u \mapsto u + \mathbb{R}v$ . Assim, o espaço tangente é dado por

$$T_v \mathbb{S}(V) = \text{Lin}(\mathbb{R}v, (\mathbb{R}v)^\perp)$$

Com isso eu posso explicar heurísticamente o porquê de podermos identificar o espaço tangente com esse espaços de transformações lineares. A forma como eu penso nisso é em termos de física. Mais precisamente, um ponto da nossa esfera é uma semi-reta partindo de 0. Ao move-la pelo espaço cada um de seus pontos terá uma velocidade, que é perpendicular a semi-reta. Se o ponto  $x$  da semi-reta  $\mathbf{v}$  tem velocidade  $\phi(x) \in (\mathbb{R}v)^\perp$ , então um ponto  $ax$ , com  $a > 0$ , tem velocidade  $a\phi(x)$ . Mais intuitivamente, se  $x$  tem uma velocidade, então o ponto  $2x$ , que está duas vezes mais longe do centro de rotação 0, tem o dobro de velocidade. Assim, se para cada  $x$  em  $\mathbf{v}$  temos a velocidade  $\phi(x) \in (\mathbb{R}v)^\perp$ , então podemos definir o mapa  $\phi : \mathbf{v} \rightarrow (\mathbb{R}v)^\perp$  que satisfaz  $\phi(ax) = a\phi(x)$  para  $x \in \mathbf{v}$  e  $a > 0$ . Note que podemos estender  $\phi$  da semi-reta  $\mathbf{v}$  para a reta  $\mathbb{R}v$  toda simplesmente usando  $a \leq 0$ . Daí, temos que a velocidade de uma semi-reta  $\mathbf{v}$  movendo-se pelo espaço é dada por uma transformação de  $\text{Lin}(\mathbb{R}v, (\mathbb{R}v)^\perp)$ .



**Figura 6:** Velocidade de uma semi-reta se movendo no espaço.

Cada espaço tangente  $T_v\mathbb{S}(V)$  tem o produto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle := \frac{\langle \phi(v), \psi(v) \rangle}{\langle v, v \rangle},$$

que é uma fórmula balanceada, no sentido que não depende do representante de  $v$ .

Assim, sobre  $\mathbb{S}(V)$  temos uma métrica riemanniana, e portanto geometria.

Note que tudo feito até então tem caráter algébrico, então você pode encarar isso como uma algebrização da geometria da esfera, e o mesmo ocorrerá com as demais geometrias que estudaremos.

Uma geodésica de  $\mathbb{S}(V)$  é simplesmente  $\mathbb{S}(W)$ , onde  $W$  é subespaço real de dimensão 2 de  $V$ . Fica ao leitor entender que isso corresponde aos grandes círculos que consideramos normalmente na esfera usual  $\mathbb{S}^{n-1}$ , isto é, círculos obtidos ao intersectarmos a esfera com subespaços de dimensão 2 de  $\mathbb{R}^n$ .

E por fim gostaria de discutir sobre distância do ponto de vista algébrico. A distância entre dois pontos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{S}(V)$  é simplesmente o ângulo entre as semi-retas, isto é,

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos \left( \sqrt{\text{ta}(\mathbf{u}, \mathbf{v})} \right),$$

onde  $\text{ta}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  é o que chamamos de **tância** entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e é definida por

$$\text{ta}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

No entanto, a distância nunca é útil na prática no contexto de geometrias clássicas, e a tância tem o hábito de aparecer em todo canto. Assim, na prática, a tância é "distância" certa em geometrias clássicas. Tudo o que foi feito aqui se repete para geometria hiperbólica real

e complexa, com uma ou outra modificação, ou seja, podemos tratar dessas geometrias por meios puramente algébricos, não envolvendo funções transcendentais como  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\sinh$  e  $\cosh$ . De jeito mais poético

There is no **sin** south of the equator - Chico Buarque

como brincam meus mestres Grossi e Sasha nas notas [\[1\]](#).

## 2 Formas Hermitianas

Nosso objetivo nesse secção é falar um pouco sobre formas Hermitianas. Essencialmente, as usaremos para cozinhar métricas Riemannianas e coisas do tipo em regiões do espaço projetivo.

No que segue, o corpo em questão será sempre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Além disso, estabeleceremos que o conjugado de um número  $x \in \mathbb{R}$  é ele mesmo.

Gostaria de estabelecer também a notação  $[x]$  para denotar  $\mathbb{K}x$ .

**Definição 6** Considere o espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $V$  munido de uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  satisfazendo

1. para cada  $u \in V$  a aplicação  $\langle \cdot, u \rangle$  é linear;
2.  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$  para todo  $u, v \in V$ .

Dizemos que essa função  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é uma forma hermitiana em  $V$ .

Repare que no caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , o segundo item nos diz que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é simétrica, isto é,

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

para todo  $u, v \in V$ .

**Exemplo 7** O produto interno  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$  é forma hermitiana em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 8** A função área  $\langle x, y \rangle = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$  em  $\mathbb{R}^2$  não é forma hermitiana porque  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  não vale para todo  $x, y \in \mathbb{R}^2$ .

De fato, tomando  $x = (1, 0)$  e  $y = (0, 1)$ , obtêm-se  $\langle x, y \rangle = 1$  e  $\langle y, x \rangle = -1$ .

Repare que para uma forma hermitiana qualquer  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sempre vale

$$\langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle}$$

e daí segue que  $\langle u, u \rangle$  é sempre um número real.

Da definição de forma hermitiana conclui-se que

$$\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, u \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \bar{\lambda} \overline{\langle v, u \rangle} = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$$

e

$$\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \overline{\langle v_1 + v_2, u \rangle} = \overline{\langle v_1, u \rangle} + \overline{\langle v_2, u \rangle} = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle,$$

ou seja,  $\langle u, \cdot \rangle$  é funcional anti-linear<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Uma função  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  é funcional anti-linear se  $f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \bar{\lambda}f(v_2)$ .

**Observação 9** *Explicitemos uma forma hermitiana genérica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em coordenadas. Se  $V$  tem uma base  $b_1, \dots, b_n$ , então, escrevendo  $g_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$ , obtêm-se a identidade*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} x_i \overline{y_j},$$

onde  $x = \sum_i x_i b_i$  e  $y = \sum_j y_j b_j$ . De fato,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_i x_i b_i, \sum_j y_j b_j \right\rangle \\ &= \sum_i \sum_j x_i \overline{y_j} \langle b_i, b_j \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} x_i \overline{y_j}. \end{aligned}$$

**Definição 10** *Dizemos que  $u, v \in V$  são ortogonais ou perpendiculares se  $\langle u, v \rangle = 0$ . De forma mais geral, pode-se dizer que um vetor  $u$  é perpendicular ao subespaço linear  $W \subset V$  se for perpendicular a cada elemento de  $W$ . Se  $W \subset V$  é subespaço linear, então o ortogonal de  $W$  é o espaço*

$$W^\perp = \{u \in V : \langle u, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in W\}$$

*formado pelos vetores perpendiculares a  $W$ . O conjunto  $W^\perp$  é claramente subespaço linear de  $V$ .*

**Definição 11** *Se o único vetor perpendicular a todos os vetores é o vetor 0, então dizemos que a forma é não-degenerada e se  $\langle u, u \rangle > 0$  para todo  $u \neq 0$ , então dizemos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é forma positiva definida ou produto interno. Se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é produto interno, então definimos a norma de  $u$  como sendo o número real não negativo  $|u| = \langle u, u \rangle^{1/2}$ . Verificaremos mais tarde que  $|\cdot|$  é de fato uma norma.*

Repare que se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é produto interno, então é também não degenerada, porque o único vetor perpendicular a si mesmo é o vetor nulo.

**Definição 12** *Dizemos que o subespaço  $W$  é não degenerado se a restrição  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W}$  é não degenerada.*

**Observação 13** *Se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é produto interno em  $V$ , então todo subespaço  $W$  é espaço com produto interno com a forma  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzida. Em particular, todo subespaço é não degenerado.*

**Exemplo 14** *A forma hermitiana  $\langle z, w \rangle = z\overline{w}$  em  $\mathbb{C}$  é um produto interno e portanto é não degenerada. A forma  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$  em  $\mathbb{R}^3$  é não degenerada mas não é produto interno. A forma hermitiana  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1$  em  $\mathbb{R}^2$  é degenerada.*

**Exemplo 15** *No caso em que temos a forma hermitiana não degenerada  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$  em  $\mathbb{R}^3$ , existem subespaços degenerados com respeito a essa forma. Por exemplo, se  $W = [(0, 1, 1)]$ , então temos que a forma induzida em  $W$  é a função nula e, portanto, degenerada.*

**Proposição 16** *Seja  $W$  subespaço de  $V$ . Temos que  $W$  é não degenerado se, e só se,  $W \cap W^\perp = \{0\}$ .*

**Demonstração:** Provaremos tanto a ida quanto a volta usando a contra-positiva.

Se  $W$  é degenerado, então há  $u \in W \setminus \{0\}$  perpendicular a  $W$ , ou seja,  $u \in W \cap W^\perp$ . Como  $u \neq 0$  segue que  $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ . Logo,

$$W \cap W^\perp \neq \{0\} \Rightarrow W \text{ é não degenerado.}$$

Por outro lado, se  $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ , então existe  $u \in W \setminus \{0\}$  perpendicular a  $W$ , ou seja,  $\langle u, v \rangle = 0$  para todo  $v \in W$ , implicando que  $W$  é degenerado. Logo,

$$W \cap W^\perp \neq \{0\} \Leftarrow W \text{ é não degenerado.}$$

■

**Corolário 17** *Uma forma é não degenerada se, e só se,  $V^\perp = \{0\}$ .*

**Definição 18** *Uma família de vetores  $b_1, \dots, b_n$  é ortonormal se*

$$\langle b_i, b_j \rangle = 0 \quad \text{quando} \quad i \neq j$$

e

$$\langle b_i, b_i \rangle \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ao invés de escrever  $\langle b_i, b_i \rangle \in \{-1, 1\}$  toda hora, escreveremos  $\langle b_i, b_i \rangle = \pm 1$ .

**Proposição 19** *Seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  uma forma hermitiana em  $V$  e seja  $W$  subespaço de  $V$  não degenerado. Vale a identidade  $W \oplus W^\perp = V$ .*

**Demonstração:** Considere uma base  $b_1, \dots, b_k$  de  $W$  e os funcionais

$$f_i(x) := \langle x, b_i \rangle.$$

Podemos definir a aplicação linear  $f : V \rightarrow \mathbb{K}^k$  dada por  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ .

Claramente  $\ker f = W^\perp$ .

Portanto, pelo teorema do núcleo e imagem,

$$\dim V - \dim W^\perp \leq k = \dim W,$$

ou seja,

$$\dim W + \dim W^\perp \geq \dim V.$$

Como  $W$  é não degenerado, temos que  $W \cap W^\perp = \{0\}$  e daí segue a identidade  $W \oplus W^\perp = V$ . ■

**Proposição 20** *Suponha que  $V$  é não degenerado e  $W \subset V$  é subespaço não degenerado. Então  $W^\perp$  é não degenerado.*

**Demonstração:** Se  $x \in W^\perp$  é perpendicular a todo vetor de  $W^\perp$ , então  $x$  é perpendicular a todo vetor de  $V$ , porque pela proposição 19  $V = W \oplus W^\perp$  e  $x$  é perpendicular a todo vetor de  $W$ . Logo,  $x = 0$  porque  $V$  é não degenerado. ■

Em particular, ainda assumindo as hipóteses da proposição anterior, como  $W \subset W^{\perp\perp}$  e  $W^\perp \oplus W^{\perp\perp} = V$ , por causa da proposição 19, obtêm-se  $W = W^{\perp\perp}$ .

**Proposição 21** *Se  $V \neq \{0\}$  é não degenerado, então existe  $u \in V$  não nulo tal que  $\langle u, u \rangle = \pm 1$ .*

**Demonstração:** Suponha por absurdo que para todo  $u$  tenhamos  $\langle u, u \rangle = 0$ . Se  $u \in V \setminus \{0\}$  e  $h$  é um vetor qualquer, então temos

$$\langle u + h, u + h \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, h \rangle + \langle h, u \rangle + \langle h, h \rangle,$$

de onde segue que  $\langle u, h \rangle + \langle h, u \rangle = 0$  para todo  $h \in V$ .

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , então temos  $\langle u, h \rangle = 0$  de onde segue que  $u \in V^\perp = 0$ , que é uma contradição.

Por outro lado, se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , então trocando  $h$  por  $ih$  temos  $\langle u, h \rangle - \langle h, u \rangle = 0$  para todo  $h \in V$ . Assim, concluímos que  $\langle u, h \rangle = 0$  para todo  $h \in V$  de onde segue que  $u \in V^\perp = 0$ , que é uma contradição.

Logo, sempre existe  $u \in V$  tal que  $\langle u, u \rangle \neq 0$ . Definindo  $u' = (|\langle u, u \rangle|)^{-1/2}u$ , temos que  $\langle u', u' \rangle = \pm 1$ , finalizando a prova. ■

**Proposição 22** *Suponha que  $V$  é espaço não degenerado e suponha que  $W \subset V$  é subespaço próprio não degenerado. Então existe  $b \in W^\perp$  satisfazendo  $\langle b, b \rangle = \pm 1$ .*

**Demonstração:** Pela proposição 20 concluímos que  $W^\perp$  é não degenerado. Como  $V = W \oplus W^\perp$  e  $W \neq V$ , então  $W^\perp \neq \{0\}$ . Pela proposição 21 concluímos que existe  $b \in W^\perp$  satisfazendo  $\langle b, b \rangle = \pm 1$ . ■

**Proposição 23** *Se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é uma forma hermitiana sobre  $V$  de dimensão  $n$ , então  $V$  admite uma base ortonormal.*

**Demonstração:** Suponha que a forma  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é não degenerada. Existe pela proposição 21 um vetor  $b_1$  tal que  $\langle b_1, b_1 \rangle = \pm 1$ .

Se  $\dim V = 1$ , então o resultado está provado. Caso contrário,  $W_1 = [b_1]$  é subespaço próprio de  $V$  e não degenerado. De fato, basta notar que  $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$ .

Como  $W_1 = [b_1]$  é subespaço próprio e não degenerado, temos pela proposição 22 que existe  $b_2$  perpendicular a  $W_1$  e satisfazendo  $\langle b_2, b_2 \rangle = \pm 1$ .

Se  $b_1, b_2$  geram o espaço  $V$ , então finalizamos a prova, caso contrário, repetimos o processo com  $W_2 = [b_1, b_2]$ . Repare que  $W_2$  é não degenerado, pois se  $u \in W_2 \cap W_2^\perp$ , então  $u = u_1 b_1 + u_2 b_2$  e  $u$  é perpendicular a  $W$ . Como  $\langle u, b_1 \rangle = \langle b_1, b_1 \rangle u_1 = 0$  e  $\langle u, b_2 \rangle = \langle b_2, b_2 \rangle u_2 = 0$ , concluímos que  $u = 0$ , já que  $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$  e  $\langle b_2, b_2 \rangle \neq 0$ .

Portanto, iterando o argumento acima conseguimos uma base ortonormal.

Agora tratemos o caso em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é degenerada.

Seja  $W = V^\perp$  e  $Z$  um subespaço vetorial de  $V$  satisfazendo  $V = W \oplus Z$ . Considere a restrição da forma hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ao subespaço  $Z$ . Essa forma hermitiana é não degenerada. De fato, se  $u \in Z$  e  $\langle u, v \rangle = 0$  para todo  $v \in Z$ , então  $\langle u, v \rangle = 0$  para todo  $v \in V$  pois  $\langle u, v \rangle = 0$  para todo  $v \in W$  e  $V = W \oplus Z$ . Daí segue que  $u = 0$  porque temos  $u \in Z \cap W = \{0\}$ . Assim,  $Z$  é não degenerado e, conseqüentemente, admite base ortonormal pelo caso em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é não degenerada. Juntando essa base de  $Z$  com uma base qualquer de  $W$  obtemos uma base ortonormal de  $V$ . ■

**Observação 24** Se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é forma hermitiana em  $V$ , então podemos induzi-la no quociente  $V/V^\perp$  pela fórmula  $([u], [v]) = \langle u, v \rangle$  e essa será forma hermitiana. É fácil ver que a forma hermitiana  $(\cdot, \cdot)$  é não degenerada. Em outras palavras, quocientamos por  $V^\perp$  para  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  deixar de ser degenerada.

**Definição 25** Diremos que um vetor  $v$  é positivo se  $\langle v, v \rangle > 0$ , nulo ou isotrópico se  $\langle v, v \rangle = 0$  e negativo se  $\langle v, v \rangle < 0$ .

**Observação 26** A terminologia "isotrópico" vem da física. Em relatividade restrita se estuda  $\mathbb{R}^{n+1}$  com a forma hermitiana  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_0 y_0$ , onde  $x = (x_0, \dots, x_n)$  e  $y = (y_0, \dots, y_n)$ . As coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  são tidas como coordenadas espaciais e a coordenada  $x_0$  é o tempo. Dizemos que o vetor  $x$  é tipo espaço se  $\langle x, x \rangle > 0$ , tipo tempo se  $\langle x, x \rangle < 0$  e isotrópico se  $\langle x, x \rangle = 0$ .

**Teorema 27 Teorema da Inercia de Sylvester:** Para toda base ortonormal existe um número  $l_+$  de vetores positivos e um número  $l_-$  de vetores negativos, e esses dois números não dependem da escolha de base ortonormal.

**Demonstração:** Suponha que a forma  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é não degenerada.

Afirmção: Nenhuma base ortonormal pode conter vetor isotrópico. De fato, suponha que  $b_1, \dots, b_n$  é uma base ortonormal e  $b_1$  é isotrópico. Como  $b_1$  é perpendicular aos demais vetores da base segue que  $b_1$  é perpendicular a todo vetor de  $V$ , o que não pode ocorrer porque a forma é não degenerada.

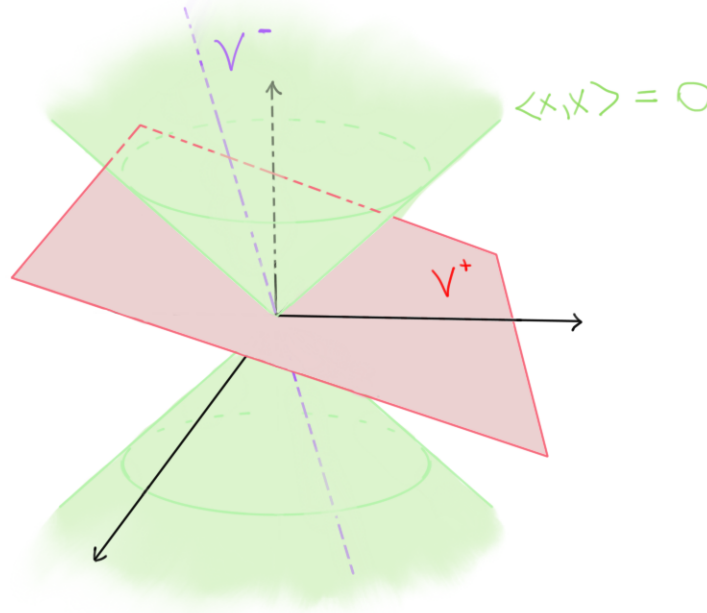
Considere uma base ortonormal  $b_1, \dots, b_n$ , que existe pela proposição 23, e suponhamos que  $b_1, \dots, b_k$  são os vetores positivos e os demais vetores  $b_{k+1}, \dots, b_n$  são negativos.

Seja  $V_+$  um subespaço de dimensão máxima satisfazendo  $\langle u, u \rangle > 0$  para todo  $u \in V_+ \setminus \{0\}$  e seja  $V_-$  um subespaço de dimensão máxima tal que  $\langle u, u \rangle < 0$  para todo  $u \in V_- \setminus \{0\}$ . Claramente

$$V_+ \cap V_- = \{0\}, \quad \dim V_+ \geq k \quad \text{e} \quad \dim V_- \geq n - k$$



por causa da nossa base escolhida, ou seja,  $V = V_+ \oplus V_-$ . Logo,  $\dim V_+ = k$  e  $\dim V_- = n - k$ . Como os espaços  $V_-$  e  $V_+$  independem da escolha de base, temos que para toda base ortonormal a quantidade de termos positivos é  $\dim V_+$  e a quantidade de termos negativos é  $\dim V_-$ . Em outras palavras,  $l_+ = \dim V_+$  e  $l_- = \dim V_-$ .



**Figura 7:**  $\mathbb{R}^3$  com a forma hermitiana do exemplo 15. O cone é feito de vetores isotrópicos, a parte de fora é feita de vetores positivos e a parte de dentro é feita de vetores negativos.

Agora tratemos o caso em que a forma é degenerada. Considere o quociente  $V/V^\perp$  e a forma não degenerada  $(\cdot, \cdot)$  em  $V/V^\perp$  obtida de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Se  $b_1, \dots, b_l, \dots, b_n$  é base ortonormal tal que os vetores isotrópicos são  $b_1, \dots, b_l$ , então temos que esses  $l$  vetores pertencem a  $V^\perp$  e os vetores  $[b_{l+1}], \dots, [b_n]$  formam um conjunto linearmente independente e ortonormal em  $V/V^\perp$ . Como todo vetor de  $V$  é combinação de  $b_1, \dots, b_n$  e  $[b_i] = 0$  para  $i = 1, \dots, l$ , concluímos que os vetores  $[b_{l+1}], \dots, [b_n]$  geram  $V/V^\perp$ , ou seja,  $\dim V/V^\perp = n - l$  e, portanto,  $\dim V^\perp = l$ .

Em outras palavras,  $\dim V^\perp$  é a quantidade de vetores isotrópicos de uma base qualquer. Como para toda base ortonormal os vetores não isotrópicos fornecem uma base ortonormal para  $V/V^\perp$  concluímos, pelo caso não degenerado, que a quantidade de vetores positivos e a quantidade de vetores negativos independem da escolha de base ortonormal. ■

**Definição 28** Se  $b_1, \dots, b_n$  é uma base ortonormal de  $V$ , então denotaremos por  $l_+, l_0$  e  $l_-$  a quantidade de vetores positivos, isotrópicos e negativos dessa base, respectivamente. Como vimos esses números independem da escolha de base. Chamaremos a terna  $(l_+, l_0, l_-)$  de assinatura da forma  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Muitas vezes, denotamos a assinatura usando os símbolos  $+$ ,  $-$  e  $0$ . Por exemplo, se escrevermos que a assinatura é  $+++$ , então queremos dizer que  $l_+ = 3$ ,  $l_0 = 0$  e  $l_- = 0$ , se escrevermos  $++-$ , então queremos dizer que  $l_+ = 2$ ,  $l_0 = 0$  e  $l_- = 1$ , e se escrevermos  $+0$ , queremos dizer que  $l_+ = 1$ ,  $l_0 = 1$  e  $l_- = 0$ . A quantidade de  $+$ 's simboliza  $l_+$ , a quantidade de  $0$ 's simboliza  $l_0$  e a quantidade de  $-$ 's simboliza  $l_-$ .

Uma base ortonormal  $b_1, \dots, b_n$  nos permite escrever  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} \langle b_i, b_j \rangle x_i \overline{y_j},$$

onde  $x = \sum_i x_i b_i$  e  $y = \sum_j y_j b_j$ . Como a base é ortonormal segue que  $\langle b_i, b_j \rangle = 0$  se  $i \neq j$  e  $\langle b_i, b_i \rangle$  é sempre 1, 0 ou  $-1$ . Assim podemos escrever

$$\langle x, y \rangle = \sum_i c_i x_i \overline{y_i},$$

onde  $c_i \in \{-1, 0, 1\}$ . A quantidade de sinais positivos nessa representação é  $l_+$  e a quantidade de sinais negativos é  $l_-$ .

Por exemplo, se temos a forma  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$  em  $\mathbb{R}^3$ , então a sua assinatura é  $++-$ .

Considere a base  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , não necessariamente ortonormal, de  $V$  e defina  $g_{ij}^B = \langle b_i, b_j \rangle$ . A **matriz de Gram** da base  $B$  é a matriz  $G^B = (g_{ij}^B)$ .

**Proposição 29** Se  $B$  e  $C$  são bases de  $V$ , então  $\text{sign det } G^B = \text{sign det } G^C$ .

**Demonstração:** Temos que  $b_j = \sum_i A_{ji} c_i$  para alguma matriz invertível  $A = (A_{ij})$ . Assim temos  $g_{a,b}^B = \sum_{i,j} A_{ai} g_{ij}^C \overline{A_{bj}}$ , ou seja,  $G^B = A G^C A^*$ . Portanto,  $\det(G^B) = |\det A|^2 \det(G^C)$ , de onde segue o resultado. ■

**Proposição 30** A matriz de Gram  $G^B$  tem determinante nulo para alguma base  $B$  se, e só se,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é forma hermitiana degenerada.

**Demonstração:** Basta notar que a matriz de Gram de uma base ortonormal tem determinante nulo se, e só se,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é degenerada. Daí basta usar a proposição anterior juntamente com o fato de que todo espaço admite base ortonormal. ■

**Proposição 31** Se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é produto interno, então a matriz de Gram  $G^B$  tem determinante positivo para qualquer base  $B$ .

**Demonstração:** Numa base ortonormal  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  sempre temos  $\langle b_i, b_i \rangle = 1$  e  $\langle b_i, b_j \rangle = 0$  para  $i \neq j$ , ou seja,

$$\det G^B = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

■

**Proposição 32 Critério de Sylvester:** Seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  uma forma hermitiana sobre  $V$  não degenerada e seja  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  uma base tal que as submatrizes de Gram  $G_k^B := (g_{ij}^B)_{1 \leq i, j \leq k}$  de tamanho  $k$  tenham determinante não nulo para  $k = 1, \dots, n$ .

A quantidade de termos positivos e negativos na sequência

$$\det(G_1^B), \frac{\det(G_2^B)}{\det(G_1^B)}, \dots, \frac{\det(G_n^B)}{\det(G_{n-1}^B)}$$

são, respectivamente,  $l_+$  e  $l_-$ .

**Demonstração:** A ideia da prova é construir uma base ortonormal  $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$  tal que

$$[b_1] + [b_2] + [b_3] + \dots + [b_k] = [b'_1] + [b'_2] + [b'_3] + \dots + [b'_k]$$

para todo  $k = 1, \dots, n$ .

Como  $\det G_1^B \neq 0$  temos  $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$ . Definindo  $b'_1 = (|\langle b_1, b_1 \rangle|)^{-1/2} b_1$  obtemos  $\langle b'_1, b'_1 \rangle = \pm 1$ . Trivialmente temos

$$[b_1] + [b_2] + [b_3] + \dots + [b_k] = [b'_1] + [b_2] + [b_3] + \dots + [b_k]$$

para  $k = 1, \dots, n$ .

Os espaços  $[b'_1]$  e  $[b_1] + [b_2]$  são não degenerados, pois  $\det(G_1^B) \neq 0$  e  $\det(G_2^B) \neq 0$ . Pela proposição 22 existe um vetor  $b'_2 \in [b_1] + [b_2]$  ortogonal a  $b'_1$  e satisfazendo  $\langle b'_2, b'_2 \rangle = \pm 1$ . Desta forma  $b'_1, b'_2$  é base de  $[b_1] + [b_2]$  e, portanto,

$$[b_1] + [b_2] + [b_3] + \dots + [b_k] = [b'_1] + [b'_2] + [b_3] + \dots + [b_k]$$

para  $k = 1, \dots, n$ .

Novamente usando a proposição 22 nos espaços  $[b'_1] + [b'_2] \subsetneq [b_1] + [b_2] + [b_3]$  concluímos que existe  $b'_3$  satisfazendo  $\langle b'_3, b'_3 \rangle = \pm 1$  e perpendicular a  $[b'_1] + [b'_2]$  tal que  $b'_1, b'_2, b'_3$  é base de  $[b_1] + [b_2] + [b_3]$ . Portanto,

$$[b_1] + [b_2] + [b_3] + [b_4] + \dots + [b_k] = [b'_1] + [b'_2] + [b'_3] + [b_4] + \dots + [b_k]$$

para  $k = 1, \dots, n$ .

Seguindo esse processo, obtemos a base ortonormal  $B' = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_n\}$  desejada. Como

$$[b_1] + [b_2] + [b_3] + \dots + [b_k] = [b'_1] + [b'_2] + [b'_3] + \dots + [b'_k]$$

para todo  $k$ , concluímos que  $\text{sign}(\det(G_k^B)) = \text{sign}(\det(G_k^{B'}))$ . Assim a quantidade de fatores positivos e negativos da sequência

$$\det(G_1^B), \frac{\det(G_2^B)}{\det(G_1^B)}, \dots, \frac{\det(G_n^B)}{\det(G_{n-1}^B)}$$

coincide com a quantidade de fatores positivos e negativos da sequência

$$\det(G_1^{B'}), \frac{\det(G_2^{B'})}{\det(G_1^{B'})}, \dots, \frac{\det(G_n^{B'})}{\det(G_{n-1}^{B'})},$$

que é a sequência

$$\langle b_1, b_1 \rangle, \langle b_2, b_2 \rangle, \dots, \langle b_n, b_n \rangle,$$

pois

$$G^{B'} = \begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle b_2, b_2 \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle b_n, b_n \rangle \end{bmatrix},$$

de onde segue o resultado. ■

A seguir apresentamos uma bela prova da desigualdade de Cauchy-Schwartz.

**Proposição 33** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é produto interno, então*

$$|\langle a, b \rangle| \leq |a||b|$$

para todo  $a, b \in V$ .

**Demonstração:** Note que se  $a, b$  são linearmente dependentes, então a afirmação é trivialmente verdadeira. Suponha que  $a, b$  são linearmente independentes. Se  $B = \{b_1, b_2\}$  é base ortonormal de  $[a] + [b]$ , então  $\langle b_1, b_1 \rangle = 1$  e  $\langle b_2, b_2 \rangle = 1$ , ou seja, a assinatura de  $[a] + [b]$  é  $++$ . Pela proposição 32 concluímos que

$$\langle a, a \rangle, \quad \det \begin{bmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle \\ \langle b, a \rangle & \langle b, b \rangle \end{bmatrix} / \langle a, a \rangle$$

são números positivos, ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle \\ \langle b, a \rangle & \langle b, b \rangle \end{bmatrix} > 0,$$

de onde segue o resultado. ■

Uma norma no espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $V$  é uma função  $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $|\lambda x| = |\lambda||x|$  para todo  $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times V$ ;
2.  $|x + y| \leq |x| + |y|$  para todo  $x, y \in V$ ;
3.  $|x| > 0$  para todo  $x \in V^\times$ .

A desigualdade no segundo item se chama desigualdade triangular.

Se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é produto interno, então a função  $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  é uma norma. De fato, a primeira e a última propriedade são triviais e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq |x|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2, \end{aligned}$$

ou seja, obtemos a desigualdade triangular  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

### 3 Propriedades Básicas do Espaço Projetivo

#### 3.1 Espaço Projetivo

Fixe um espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $V$  de dimensão finita  $n$ . O espaço projetivo  $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(V)$  é o conjunto de todos os subespaços de  $V$  de dimensão 1. Se não houver ambiguidade, escreveremos  $\mathbf{P}(V)$  no lugar de  $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(V)$ . Assim como na esfera, onde denotamos semi-retas por letras em negrito, aqui denotaremos subespaços unidimensionais em negrito. Se  $x$  é um vetor não nulo, então  $\mathbf{x}$  é o subespaço de dimensão um  $\mathbb{K}x$ .

Repare que existe a aplicação natural  $\pi : V^{\times} \rightarrow \mathbf{P}(V)$  dada por  $\pi(x) = \mathbf{x}$ . Podemos projetivizar também subconjuntos de  $V^{\times}$ : Se  $W \subset V^{\times}$ , então definimos  $\mathbf{P}(W) := \pi(W)$ .

**Definição 34** Considere o espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $Y$  e a função  $h : V^{\times} \rightarrow Y$ . A função  $h$  é homogênea de grau  $l \in \mathbb{R}$  se

$$h(kx) = k^l h(x) \quad \forall (k, x) \in \mathbb{K}^{\times} \times V^{\times}.$$

Repare que podemos definir função homogênea de grau 0 para funções de  $V^{\times}$  em  $Y$ , onde  $Y$  é um conjunto arbitrário.

**Definição 35** Considere o conjunto  $Y$  e a função  $h : V^{\times} \rightarrow Y$ . A função  $h$  é homogênea de grau 0 (ou  $\mathbb{K}^{\times}$ -invariante) se

$$h(kx) = h(x) \quad \forall (k, x) \in \mathbb{K}^{\times} \times V^{\times}.$$

Se  $h$  é uma função homogênea de grau 0, então podemos definir a função  $\tilde{h} : \mathbf{P}(V) \rightarrow Y$  a partir da fórmula  $\tilde{h}(\mathbf{x}) = h(x)$ , onde  $x$  é um vetor qualquer de  $\mathbf{x}$ . Não é difícil ver que a definição de  $\tilde{h}(\mathbf{x})$  independe da escolha de  $x$ . Com efeito, se  $x$  e  $x'$  são vetores de  $\mathbf{x}$ , então existe  $k \neq 0$  satisfazendo  $x' = kx$  e daí segue que

$$h(x') = h(kx) = h(x).$$

Denotaremos  $h$  e  $\tilde{h}$  pela mesma letra.

Fica claro a partir dessa observação que uma função homogênea de grau 0 nada mais é que uma função do projetivo. Com isso em mente adotaremos o seguinte "slogan":

**Funções homogêneas de grau 0 de  $V^{\times}$  em  $Y$  = Funções de  $\mathbf{P}(V)$  em  $Y$ .**

**Definição 36** Um cone  $C$  em  $V^{\times}$  é um subconjunto de  $V^{\times}$  tal que  $kx \in C$  para todo  $x \in C$  e todo  $k \in \mathbb{K}^{\times}$ . Podemos definir o que é uma função homogênea de grau  $l$  em  $C$  analogamente ao que fizemos acima: Uma função  $h : C \rightarrow Y$  é homogênea de grau  $l$  se

$$h(kx) = k^l h(x) \quad \forall (k, x) \in \mathbb{K}^{\times} \times C.$$

Sempre que temos uma função  $h : C \rightarrow Y$  homogênea de grau 0, podemos definir  $h : \mathbf{P}(C) \rightarrow Y$  pela fórmula  $h(\mathbf{x}) = h(x)$ , onde  $x \in \mathbf{x}^\times$ .

Além disso, se temos a função  $h : C \rightarrow \mathbb{R}$  e se existe  $l \in \mathbb{R}$  tal que  $h(kx) = |k|^l h(x)$  para todo  $(k, x) \in \mathbb{K}^\times \times C$ , ainda faz sentido escrever  $h(\mathbf{x}) > 0$ ,  $h(\mathbf{x}) = 0$  e  $h(\mathbf{x}) < 0$  para pontos  $\mathbf{x} \in \mathbf{P}(C)$ . Dizemos que  $h(\mathbf{x}) > 0$  quando  $h(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbf{x}^\times$ ,  $h(\mathbf{x}) < 0$  quando  $h(x) < 0$  para todo  $x \in \mathbf{x}^\times$  e  $h(\mathbf{x}) = 0$  quando  $h(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbf{x}^\times$ .

A aplicação  $\pi : V^\times \rightarrow \mathbf{P}(V)$  nos fornece uma bijeção entre os cones de  $V^\times$  e os subespaços de  $\mathbf{P}(V)$ . De fato, se  $C$  é um cone de  $V^\times$ , então  $\mathbf{P}(C)$  é um subconjunto de  $\mathbf{P}(V)$  e  $\pi^{-1}(\mathbf{P}(C)) = C$ . Por outro lado, se  $S \subset \mathbf{P}(V)$ , então  $\pi^{-1}(S)$  é um cone e  $\pi(\pi^{-1}(S)) = S$ . Logo, a aplicação  $C \mapsto \mathbf{P}(C)$  é uma bijeção entre cones de  $V^\times$  e subconjuntos de  $\mathbf{P}(V)$ .

### 3.2 Topologia e Estrutura Suave

**Proposição 37** *Existe uma norma em  $V$  e toda norma em  $V$  induz a mesma topologia.*

**Demonstração:** Considere uma base  $b_1, \dots, b_n$  em  $V$  e defina a norma

$$|x|_V = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2},$$

onde  $x = \sum_k x_k b_k$ . Assim,  $V$  admite uma norma.

Se considerarmos o isomorfismo linear  $\phi : \mathbb{K}^n \rightarrow V$  dado por

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k b_k,$$

então a aplicação  $\phi : (\mathbb{K}^n, |\cdot|_{\mathbb{K}^n}) \rightarrow (V, |\cdot|_V)$  é isometria, onde sobre  $\mathbb{K}^n$  se considera a norma usual

$$|(x_1, \dots, x_n)|_{\mathbb{K}^n} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

Como a esfera em  $\mathbb{K}^n$  é compacta, obtemos que a esfera  $S = \{x \in V : |x|_V = 1\}$  é um conjunto compacto.

Considere outra norma  $|\cdot|$  em  $V$ . Se  $x = \sum_k x_k b_k$ , então usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtêm-se

$$|x| \leq \sum_k |b_k| |x_k| \leq \left( \sum_k |b_k|^2 \right)^{1/2} |x|_V,$$

de onde segue que  $|\cdot|$  é uma função contínua em  $(V, |\cdot|_V)$ .

Como  $|\cdot|$  é contínua,  $S$  é compacto e  $|x| \neq 0$  para todo  $x \in S$ , já que  $0 \notin S$ , existem  $0 < c_1 < c_2$  tais que  $c_1 \leq |x| \leq c_2$  para todo  $x \in S$ . Assim, dado que  $x \neq 0$ , sabemos que  $x/|x|_V \in S$  e, portanto,

$$c_1 \leq \frac{|x|}{|x|_V} \leq c_2,$$

de onde segue que  $c_1 |x|_V \leq |x| \leq c_2 |x|_V$  para todo  $x \neq 0$ . Como a desigualdade vale trivialmente para  $x = 0$ , concluímos que  $|\cdot|_V$  e  $|\cdot|$  induzem a mesma topologia. ■

Portanto,  $V$  é naturalmente um espaço topológico e desta forma podemos induzir em  $\mathbf{P}(V)$  a topologia quociente do mapa  $\pi : V^\times \rightarrow \mathbf{P}(V)$ , isto é,  $U$  é aberto em  $\mathbf{P}(V)$  se, e só se,  $\pi^{-1}(U)$  é aberto em  $V^\times$ .

**Proposição 38** *A aplicação  $\pi : V^\times \rightarrow \mathbf{P}(V)$  é contínua e aberta.*

**Demonstração:** Que  $\pi$  é contínua é trivial por causa da definição da topologia de  $\mathbf{P}(V)$ . Considere um aberto  $U$  aberto em  $V^\times$ , o conjunto  $\pi(U)$  é aberto em  $\mathbf{P}(V)$  porque  $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{K}^\times} \alpha U$  é aberto em  $V^\times$  (basta notar que é união de abertos). ■

**Proposição 39** *Considere uma aplicação  $f : \mathbf{P}(V) \rightarrow Z$ , onde  $Z$  é um espaço topológico. Temos que  $f$  é contínua se, e só se,  $f \circ \pi$  é contínua.*

**Demonstração:** Se  $f$  é contínua, então claramente  $f \circ \pi$  é contínua. Agora mostremos a recíproca, ou seja, suponha que  $f \circ \pi$  é contínua e mostremos que  $f$  é contínua. Considere um aberto  $W$  em  $Z$ . Como  $\pi^{-1}(f^{-1}(W)) = (f \circ \pi)^{-1}(W)$  é aberto em  $V^\times$ , temos que  $\pi(\pi^{-1}(f^{-1}(W)))$  é aberto em  $\mathbf{P}(V)$ , pois a aplicação  $\pi$  é aberta. Como  $\pi(\pi^{-1}(f^{-1}(W))) = f^{-1}(W)$ , finalizamos a prova. ■

Para toda função  $f : U \rightarrow \mathbb{K}$  contínua, onde  $U \subset \mathbf{P}(V)$  é aberto, existe uma função contínua  $g = f \circ \pi$  em  $\pi^{-1}(U)$  homogênea de grau 0. Por outro lado, se  $g : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{K}$  é contínua e homogênea de grau 0, então podemos definir  $f(\mathbf{x}) := g(x)$ ,  $x \in \mathbf{x}^\times$ , e teremos  $g = f \circ \pi$ . Por argumento análogo ao feito na proposição anterior, fazendo uso de que  $\pi$  é aberta, concluímos que  $f$  é contínua. Logo, podemos fazer a seguinte identificação:

$$C(U) = \{f \in C(\pi^{-1}(U)) : f \text{ é homogêneo de grau } 0\}.$$

**Proposição 40** *O espaço projetivo é compacto.*

**Demonstração:** Fixe uma base  $b_1, \dots, b_n$  e defina a norma

$$|x|_V = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2},$$

onde  $x = \sum_k x_k b_k$ .

A esfera  $S = \{x \in V : |x|_V = 1\}$  é compacta e a aplicação  $\pi : S \rightarrow \mathbf{P}(V)$  é contínua e sobrejetora, ou seja,  $\mathbf{P}(V)$  é imagem de um compacto por uma função contínua e, portanto, é compacto. ■

**Proposição 41** *O espaço projetivo é Hausdorff.*

**Demonstração:** Considere a norma  $|\cdot|_V$  e a esfera  $S$  como na prova da proposição anterior. Considere dois pontos  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  distintos em  $\mathbf{P}(V)$ . Existem  $x_1$  e  $x_2$  em  $S$  tais que  $x_i \in \mathbf{x}_i^\times$ . Como  $\mathbf{x}_i \cap S = \{kx_i : |k| = 1\}$ , concluímos que  $\mathbf{x}_1 \cap S$  e  $\mathbf{x}_2 \cap S$  são compactos. Como

$\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ , então temos que  $\mathbf{x}_1 \cap S$  e  $\mathbf{x}_2 \cap S$  são fechados disjuntos. Pelo lema de Urysohn existe  $g : S \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $g|_{\mathbf{x}_1} = 0$  e  $g|_{\mathbf{x}_2} = 1$ . A partir dessa função queremos definir uma função no projetivo, mas primeiro devemos fazer um argumento de média para deixá-la homogênea de grau 0.

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , então defina

$$h(x) = \frac{g(x) + g(-x)}{2},$$

e se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , então defina

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}x) d\theta.$$

Em todo caso,  $h$  é contínua e  $h(kx) = h(x)$  sempre que  $|k| = 1$ . Definindo  $\hat{h}(x) = h(x/|x|)$  obtemos uma função homogênea de grau 0 e contínua de  $V^\times$  em  $[0, 1]$  tal que  $\hat{h}(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbf{x}_1^\times$  e  $\hat{h}(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbf{x}_2^\times$ . Defina para cada  $\mathbf{x} \in \mathbf{P}(V)$  a função  $\tilde{h}(\mathbf{x}) = \hat{h}(x)$ , onde  $x \in \mathbf{x}^\times$ . Sabemos que essa aplicação está bem definida e é contínua, por causa da proposição 39. Tomando as vizinhanças  $U_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{P}(V) : \tilde{h}(\mathbf{x}) < 1/2\}$  e  $U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{P}(V) : \tilde{h}(\mathbf{x}) > 1/2\}$  de  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ , respectivamente, obtêm-se  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , que é o resultado desejado. ■

**Proposição 42** *O espaço projetivo tem base enumerável.*

**Demonstração:** Repare que  $V$  tem base enumerável porque é homeomorfo a  $\mathbb{K}^n$ . Existe então uma base  $\mathcal{B}$  enumerável para  $V^\times$ . Defina  $\tilde{\mathcal{B}}$  como sendo o conjunto dos abertos<sup>2</sup>  $\pi(B)$  com  $B \in \mathcal{B}$ . Se  $U$  é aberto em  $\mathbf{P}(V)$ , então  $V = \pi^{-1}(U)$  é aberto em  $V^\times$ . Temos que  $V = \cup_i B_i$  para uma família  $\{B_i\}$  de abertos de  $\mathcal{B}$ . Assim temos  $U = \pi(V) = \cup_i \pi(B_i)$ , finalizando a prova. ■

Discutamos o projetivo como variedade suave.

Primeiramente, um espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$  é variedade em que as cartas são isomorfismos lineares de  $V$  em  $\mathbb{K}^n$ . De fato, basta notar que se  $\phi_1 : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  e  $\phi_2 : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  são isomorfismos lineares, então  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  é isomorfismo linear, que é função suave.

Assim, do ponto de vista de variedades suaves, um espaço vetorial  $n$ -dimensional  $V$  e  $\mathbb{K}^n$  são iguais.

Considere o funcional linear não nulo  $\phi : V \rightarrow \mathbb{K}$  e defina

$$U_\phi = \{\mathbf{x} \in \mathbf{P}(V) : \phi(\mathbf{x}) \neq 0\} \quad \text{e} \quad H_\phi = \{x \in V : \phi(x) = 1\}.$$

O conjunto  $H_\phi$  é subespaço afim de  $V$ .

**Observação 43** *Um subconjunto  $S$  de  $V$  é um subespaço afim se existem  $b \in S$  e um subespaço vetorial  $W$  de  $V$  tal que  $S = b + W$ , ou seja, se  $S$  é um subespaço vetorial*

---

<sup>2</sup>A aplicação  $\pi$  é aberta.



transladado. No caso em que  $S = H_\phi$ , temos que  $b$  é um vetor qualquer satisfazendo  $\phi(b) = 1$  e  $W = \ker \phi$ . Assim,  $H_\phi = b + \ker \phi$ .

Do ponto de vista suave,  $H_\phi$ ,  $\ker \phi$  e  $\mathbb{K}^{n-1}$  são a mesma variedade suave. Com isso em mente, podemos usar  $H_\phi$  para fazer as cartas do espaço projetivo.

A seguinte aplicação

$$\Phi : U_\phi \rightarrow H_\phi,$$

dada por

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{x}{\phi(x)},$$

é homeomorfismo cuja inversa é  $\Phi^{-1}(x) = \mathbf{x}$ . Se  $\psi : V \rightarrow \mathbb{K}$  é outro funcional linear não nulo, então podemos considerar o homeomorfismo

$$\Psi : U_\psi \rightarrow H_\psi$$

e assim temos

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(x) = \frac{x}{\psi(x)},$$

que é uma função suave. Assim,  $\mathbf{P}(V)$  é variedade suave de dimensão real  $(n-1) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$  com as cartas  $\Phi$ , onde  $\phi \in V^* \setminus \{0\}$ .

Claramente  $\mathbf{P}(V)$  é variedade complexa de dimensão complexa  $n-1$  quando  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Em particular,  $\mathbf{P}(V)$  tem dimensão  $2(n-1)$  como variedade real.

Com a estrutura de variedade suave temos que a aplicação  $\pi : V^\times \rightarrow \mathbf{P}(V)$  é suave, já que para toda carta  $\Phi$  temos  $\Phi \circ \pi(x) = \frac{x}{\phi(x)}$ . Assim, se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave no aberto  $U$  de  $\mathbf{P}(V)$ , então  $g = f \circ \pi$  é suave em  $\pi^{-1}(U)$  e homogênea de grau 0. Por outro lado, se  $U \subset \mathbf{P}(V)$  é aberto e  $g : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave e homogênea de grau 0, então existe uma única função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  suave satisfazendo  $g = f \circ \pi$ . Para ver que tal  $f$  é suave, basta notar que na carta  $\Phi$  podemos escrever  $f$  como  $f \circ \Phi^{-1}(x) = f(\mathbf{x}) = g(x)$ , que é suave, ou seja,  $f$  é suave em  $U$ . Desta forma, temos a seguinte identificação:

$$C^\infty(U) \cong \{f \in C^\infty(\pi^{-1}(U)) : f \text{ é homogênea de grau } 0\}.$$

No caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , pode-se considerar o resultado análogo para funções holomorfas.

### 3.3 Projetivo em Coordenadas

Na seção anterior explicamos como se define a estrutura suave em  $\mathbf{P}(V)$ . Faremos a seguir uma breve discussão sobre o caso em que  $V$  tem uma base pré-fixada.

Tome uma base  $b_1, \dots, b_n$  de  $V$ . Se  $x = \sum_i x_i b_i$  é um vetor não nulo de  $V$ , então denotaremos  $[x]$  por  $[x_1, \dots, x_n]$ . Desta forma,

$$\mathbf{P}(V) = \{[x_1, \dots, x_n] : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\}.$$

Como vimos, funcionais não nulos de  $V$  nos dão cartas de  $\mathbf{P}(V)$ . Considere a base dual  $\xi_1, \dots, \xi_n$  associada a base  $b_1, \dots, b_n$ , i.e., o funcional  $\xi_k$  é dado por  $\xi_k(x) = x_k$ .

Assim, temos o espaço afim

$$H_{\xi_k} = \left\{ \sum_i x_i b_i : x_i \in \mathbb{K} \text{ e } x_k = 1 \right\}$$

e o aberto

$$U_{\xi_k} = \{[x_1, \dots, x_n] : x_k \neq 0\}$$

de  $\mathbf{P}(V)$ , como foi discutido na seção anterior.

Para cada  $k$ , a carta  $\phi_{\xi_k} : U_{\xi_k} \rightarrow H_{\xi_k}$  é dada por

$$\phi_{\xi_k}([x_1, \dots, x_n]) = \sum_i \frac{x_i}{x_k} b_i,$$

cujas inversas são as funções

$$\phi_{\xi_k}^{-1} \left( \sum_i x_i b_i \right) = [x_1, \dots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n].$$

Denotaremos  $\phi_{\xi_k}$  por  $\phi_k$ ,  $U_{\xi_k}$  por  $U_k$  e identificaremos  $H_{\xi_k}$  com  $\mathbb{K}^{n-1}$ . Podemos desta forma escrever a carta  $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{K}^{n-1}$  como

$$\phi_k([x_1, \dots, x_n]) = \left( \frac{x_1}{x_k}, \dots, \frac{x_{k-1}}{x_k}, \frac{x_{k+1}}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k} \right),$$

cujas inversas são dadas por

$$\phi_k^{-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n].$$

Não é difícil ver que  $\cup_k U_k = \mathbf{P}(V)$  e, portanto, as cartas  $\phi_1, \dots, \phi_n$  formam um atlas de  $\mathbf{P}(V)$ .

### 3.4 Espaço Tangente

No que segue sempre pensaremos em  $\mathbf{P}(V)$  como variedade suave. Estudemos agora o espaço tangente de  $\mathbf{P}(V)$ .

Considere um ponto  $\mathbf{x}$  do projetivo, uma aplicação  $\mathbb{K}$ -linear  $t : \mathbf{x} \rightarrow V/\mathbf{x}$  e uma função suave  $f \in C^\infty(\mathbf{P}(V))$ . Para cada  $x \in \mathbf{x}^\times$  e para cada representante  $v$  de  $t(x)$  defina

$$tf = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v).$$

Essa aplicação  $f \mapsto tf$  será uma derivação em  $\mathbf{x}$ , isto é, um funcional linear de  $C^\infty(\mathbf{P}(V))$  que satisfaz a regra de Leibniz:

$$t(fg) = f(\mathbf{x})t(g) + g(\mathbf{x})t(f).$$

Precisamos mostrar que a definição de  $tf$  independe da escolha de  $x$  e  $v$ .

Se  $v'$  é outro representante de  $t(x)$ , então  $h := v - v' \in \mathbf{x}$ . Daí segue que

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v') + \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon h),$$

pois o diferencial<sup>3</sup>  $d_x f$  é linear, isto é,  $d_x f(v) = d_x f(v' + h) = d_x f(v') + d_x f(h)$ .

Como  $h \in \mathbf{x}$ , existe  $\alpha \in \mathbb{K}$  satisfazendo  $h = \alpha x$  e, portanto,

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon h) = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f((1 + \alpha\epsilon)x) = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x) = 0,$$

pois  $f(x) = f((1 + \epsilon\alpha)x)$ . Desta forma concluímos que

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v'),$$

ou seja, nossa definição não depende da escolha de representante de  $t(x)$ . Se  $y$  é outro vetor de  $\mathbf{x}^\times$ , então há  $\alpha \neq 0$  satisfazendo  $y = \alpha x$ . Se  $v$  é representante de  $t(x)$ , então  $u = \alpha v$  é representante de  $t(y)$ . Assim,

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(\alpha x + \epsilon \alpha v) = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(y + \epsilon u),$$

ou seja, não há dependência da escolha de  $x$  na definição de  $tf$ .

Repare que  $t$  é derivação, ou seja, temos o mapa  $\mathbb{R}$ -linear

$$T : \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbf{p}, V/\mathbf{p}) \rightarrow T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$$

dado por  $T(t) = t$ .

**Proposição 44** Se  $\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = 0$  para toda  $f \in C^\infty(\mathbf{P}(V))$ , então  $v$  é paralelo a  $x$ .

**Demonstração:** Considere uma base  $b_1, \dots, b_n$ , onde  $b_1 = x$ . Temos que  $v = \sum_i \alpha_i b_i$ . Claramente, se  $v' = \sum_{i \neq 1} \alpha_i b_i$ , então temos

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v').$$

Considere a função

$$f_i(u) = \frac{|u_1 + u_i|^2}{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2}$$

de  $C^\infty(\mathbf{P}(V))$ , com  $i = 2, \dots, n$ , onde  $u = u_1 b_1 + \dots + u_n b_n$ .

Para  $i = 2, \dots, n$  temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f_i(x + \epsilon v') &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \frac{1 + 2\epsilon\alpha_i + \epsilon^2|\alpha_i|^2}{1 + [\alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2]\epsilon^2} \\ &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} (1 + 2\epsilon\alpha_i + \epsilon^2|\alpha_i|^2) \left(1 - \epsilon^2[\alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2] + o(\epsilon^2)\right) = 2\alpha_i, \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Lembre-se do cálculo que  $d_x f(v) := \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v)$ .

de onde se conclui que  $\alpha_i = 0$ , pois  $\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f_i(x + \epsilon v') = 0$ .

Assim,  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$ , implicando que  $v$  é paralelo a  $x$ . ■

**Proposição 45** *A aplicação linear  $T : \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbf{x}, V/\mathbf{x}) \rightarrow T_{\mathbf{x}}\mathbf{P}(V)$  é isomorfismo  $\mathbb{R}$ -linear.*

**Demonstração:** Mostremos primeiramente que  $T$  é injetora. Isso seguirá imediatamente da proposição anterior. Se

$$t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbf{x}, V/\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad tf = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = 0$$

para toda  $f \in C^\infty(\mathbf{P}(V))$ , onde  $x \in \mathbf{x}^\times$  e  $v$  é representante de  $t(x)$ , então  $v$  é paralelo a  $x$ , ou seja,  $t(x) = 0$  e, conseqüentemente,  $t = 0$ , o que garante a injetividade de  $T$ .

Como  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbf{x}, V/\mathbf{x}) = (n-1) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} = \dim_{\mathbb{R}} T_{\mathbf{x}}\mathbf{P}(V)$ , segue que  $T$  é isomorfismo. ■

Logo, podemos realizar a seguinte identificação

$$T_{\mathbf{x}}\mathbf{P}(V) \cong \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbf{x}, V/\mathbf{x}).$$

O projetivo  $\mathbf{P}(V)$  herda a geometria de  $V$ . Dada uma forma Hermitiana não degenerada<sup>4</sup>  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $V$ , podemos estudar como essa forma funciona no projetivo.

Definimos

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(V) &= \{p \in \mathbf{P}(V) : \langle p, p \rangle < 0\}; \\ \mathbf{S}(V) &= \{p \in \mathbf{P}(V) : \langle p, p \rangle = 0\}; \\ \mathbf{E}(V) &= \{p \in \mathbf{P}(V) : \langle p, p \rangle > 0\}. \end{aligned}$$

Assim temos

$$\mathbf{P}(V) = \mathbf{B}(V) \sqcup \mathbf{S}(V) \sqcup \mathbf{E}(V).$$

Os pontos de  $\mathbf{B}(V)$  são os negativos, os pontos de  $\mathbf{S}(V)$  são os isotrópicos e os pontos de  $\mathbf{E}(V)$  são os positivos. A notação  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{E}$  se referem ao caso em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tem assinatura  $- + \dots +$ . Nesse caso, como veremos mais para frente,  $\mathbf{B}(V)$  é um "Ball",  $\mathbf{S}(V)$  é um "Sphere" e  $\mathbf{E}(V)$  se refere a "Elsewhere".

**Proposição 46** *Se  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V)$  não é isotrópico, então  $V/\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}^\perp$  são naturalmente  $\mathbb{K}$ -isomorfos.*

**Demonstração:** Considere a aplicação  $\mathbb{K}$ -linear  $S : \mathbf{p}^\perp \rightarrow V/\mathbf{p}$  dada por  $T(v) = v + \mathbf{p}$ . Mostremos que  $T$  é injetora. Se  $T(v) = v + \mathbf{p} = 0 + \mathbf{p}$ , então  $v \in \mathbf{p}$  e, portanto,  $v \in \mathbf{p} \cap \mathbf{p}^\perp$ . Pela proposição 16 temos que  $\mathbf{p} \cap \mathbf{p}^\perp = 0$ , pois  $\mathbf{p}$  é subespaço não degenerado, já que  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \neq 0$ . Daí segue que  $v = 0$  e, portanto,  $S$  é injetora.

---

<sup>4</sup>Sempre assumiremos que as formas Hermitianas são não degeneradas a menos que seja dito o contrário.

Por  $S$  ser injetora, concluímos que é isomorfismo, pois  $\dim_{\mathbb{K}} \mathbf{p}^\perp = \dim_{\mathbb{K}} V/\mathbf{p} = n - 1$ . ■

Logo, no caso em que  $\mathbf{p}$  é não isotrópico podemos escrever

$$V/\mathbf{p} \cong \mathbf{p}^\perp$$

e, portanto,

$$\text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}^\perp) \cong \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbf{p}, V/\mathbf{p}).$$

Desta forma, se  $t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}^\perp)$ , então podemos derivar  $f \in C^\infty(\mathbf{P}(V))$  da seguinte forma:

$$tf = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(p + \epsilon tp).$$

Para todo ponto não isotrópico  $\mathbf{p}$  também podemos definir a forma hermitiana

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V) \times T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V) \rightarrow \mathbb{K} \quad (47)$$

dada por

$$\langle t_1, t_2 \rangle_{\mathbf{p}} := \frac{\langle t_1 p, t_2 p \rangle}{\langle p, p \rangle}$$

ou por

$$\langle t_1, t_2 \rangle_{\mathbf{p}} := -\frac{\langle t_1 p, t_2 p \rangle}{\langle p, p \rangle}.$$

Assim, a aplicação  $\mathbf{p} \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{p}}$  é uma métrica hermitiana em  $\mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ . Quando não houver ambiguidade, omitiremos o índice  $\mathbf{p}$  da fórmula  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{p}}$ .

Normalmente escolhemos o sinal que for mais conveniente no contexto.

A parte real  $g_{\mathbf{p}} = \text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{p}}$  é uma métrica pseudo-Riemanniana.

### 3.5 Campos Vetoriais

**Definição 48** Considere o ponto  $\mathbf{p}$  não isotrópico de  $\mathbf{P}(V)$ . Temos as seguintes projeções:

$$\begin{aligned} \pi'[\mathbf{p}] : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi[\mathbf{p}] : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v - \pi'[\mathbf{p}]v. \end{aligned}$$

A projeção  $\pi'$  projeta vetores na direção de  $\mathbf{p}$  e  $\pi$  projeta vetores em  $\mathbf{p}^\perp$ .

**Observação 49** A aplicação  $\pi'[\mathbf{p}]$  está bem definida porque para cada  $v \in V$  a função

$$p \mapsto \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p$$

de  $V^\times$  em  $V$  é homogênea de grau 0.

Se  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V) = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}^\perp)$ , então podemos estender  $t$  para  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$  definindo  $t|_{\mathbf{p}^\perp} = 0$ . Assim, temos

$$T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V) \subset \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V).$$

De agora em diante, sempre pensaremos em  $T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$  como subespaço de  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$ .

Se  $t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$ , então podemos definir o vetor  $t_{\mathbf{p}} \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$  pela fórmula

$$t_{\mathbf{p}} = \pi[\mathbf{p}] \circ t \circ \pi'[\mathbf{p}].$$

Repare que essa aplicação  $t \mapsto t_{\mathbf{p}}$  de  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$  em  $T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$  é uma projeção linear.

Para  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$  valem as seguintes propriedades:

1.  $t \circ \pi'[\mathbf{p}] = \pi[\mathbf{p}] \circ t = t$ ,
2.  $\pi'[\mathbf{p}] \circ t = t \circ \pi[\mathbf{p}] = 0$ .

O interessante é que essas duas propriedades caracterizam  $T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ .

**Proposição 50** Se  $t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$  satisfaz os itens 1 e 2 acima, então  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ .

**Demonstração:** Como  $t \circ \pi[\mathbf{p}] = 0$ , temos que  $t|_{\mathbf{p}^\perp} = 0$ .

Além disso, de  $\pi[\mathbf{p}] \circ t = t$  e  $\pi'[\mathbf{p}] \circ t = 0$ , concluímos que  $\text{Im } t \subset \mathbf{p}^\perp$ . Assim, lembrando que  $t = t \circ \pi'[\mathbf{p}]$ , temos que  $t$  é extensão da transformação linear  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^\perp$  dada por  $p \mapsto t(p)$  e  $t|_{\mathbf{p}^\perp} = 0$ . Logo,  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ . ■

**Definição 51** Seja  $U \subset \mathbf{P}(V)$  aberto sem pontos isotrópicos. Um campo vetorial  $A$  em  $U$  é uma função suave  $A : U \rightarrow \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$  tal que  $A(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$  para todo  $\mathbf{p} \in U$ . Denotaremos o conjunto dos campos vetoriais em  $U$  por  $\mathfrak{X}(U)$ .

Claramente temos a seguinte identificação:

$$\mathfrak{X}(U) = \{A : \text{proj}^{-1}(U) \rightarrow \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V) : A \text{ é homogêneo de grau 0 e } A(x) \in T_{\mathbf{x}}\mathbf{P}(V)\},$$

onde  $\text{proj} : V^\times \rightarrow \mathbf{P}(V)$  é a projeção natural, dada por  $x \mapsto \mathbf{x}$ .

Entre os campos vetoriais existem os seguintes campos especiais.

**Definição 52** O campo espalhado de  $t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$  é o campo suave definido pela fórmula

$$T(\mathbf{p}) := t_{\mathbf{p}}.$$

Mais explicitamente,

$$T(\mathbf{p}) = \pi[\mathbf{p}] \circ t \circ \pi'[\mathbf{p}].$$

## 4 Geometria no Espaço Projetivo

No que segue usaremos campos de acordo com a definição 51. Se temos um campo  $A$ , então  $A(\mathbf{p}) \in \text{Lin}(\mathbf{p}, \mathbf{p}^\perp)$  e  $A(\mathbf{p})p \in \mathbf{p}^\perp$ . Ao fixarmos um ponto  $\mathbf{p}$  do projetivo, que a priori é só um subespaço 1 dimensional de nosso espaço vetorial, fixarei também um vetor arbitrário não nulo em  $\mathbf{p}$ , que denotarei por  $p$ . Isso pode causar confusão a primeira vista, mas do contexto fica claro o que queremos dizer. Ao escrevermos  $A(\mathbf{p})$  esse  $\mathbf{p}$  é um ponto do projetivo. Ao escrevermos  $A(\mathbf{p})p$  o primeiro  $\mathbf{p}$  é ponto do projetivo e o segundo  $p$  é o representante escolhido para esse ponto do projetivo. Isso pode parecer errado, mas nossas fórmulas são balanceadas, no sentido que elas não dependem da escolha de representantes, ou seja, tudo vai estar bem definido, embora eu tenha de dizer que levei um tempo para me acostumar com isso.

No entanto, podemos ver campos  $A$  como funções homogêneas de grau 0 em um cone aberto de  $V^*$ . Assim, faz sentido escrever  $A(p)p$ . No entanto, repare que  $A(\mathbf{p})p = A(p)p$ . Aconselho o leitor a sempre pensar em  $A$  como função homogênea de grau 0, para evitar confusões.

Assim, a derivada  $d_p A(t)$  de  $A$  na direção do vetor tangente  $t$  em  $\mathbf{p}$  está bem definida e pertence a  $\text{Lin}(V, V)$ . Mais precisamente:

$$d_p A(t) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} A(p + \epsilon t p).$$

Repare que tal derivada não depende do representante  $p$ , e de fato é simplesmente  $tA$ .

Em essência, o que quero dizer é que derivadas de matrizes são matrizes, se assim preferir. Ao escrevermos, por exemplo,  $[d_p A(t)]p$  queremos dizer que  $d_p A(t)$  é uma aplicação linear de  $V$  em  $V$  e estamos aplicando-lá a  $p$ .

Da mesma forma, como  $\pi$  e  $\pi'$  são funções homogêneas de grau 0, podemos denotar  $\pi[\mathbf{p}]$  e  $\pi'[\mathbf{p}]$  por  $\pi[p]$  e  $\pi'[p]$ . Assim, campos espalhados, definidos em 52, podem ser denotados por  $T(p) = t_p$  no lugar de  $T(\mathbf{p}) = t_{\mathbf{p}}$ . O mesmo ocorre com a métrica, definida em 47, podemos denotar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{p}}$  e  $g_{\mathbf{p}}$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  e  $g_p$ .

### 4.1 Conexão de Levi-Civita

Relembre que quando temos forma Hermitiana não-degenerada sobre um espaço vetorial  $V$ , temos uma estrutura Hermitiana no espaço  $\mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$  dada por

$$\langle t, s \rangle_p = \pm \frac{\langle tp, sp \rangle}{\langle p, p \rangle} \quad \forall t, s \in T_{\mathbf{p}} \mathbf{P}(V),$$

onde escolhemos o sinal  $+$  ou  $-$  de acordo com espaço que queremos descrever.

Tomando  $g_p := \text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  temos uma métrica pseudo-Riemanniana.

Nosso primeiro objetivo nessa secção é entender alguns espaços que vivem em  $\mathbf{P}(V)$  do ponto de vista Riemanniano. Começamos por estabelecer quem é a conexão de Levi-Civita em  $\mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ .

**Definição 53** Considere  $t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$  e o campo vetorial suave  $A$  em um aberto  $U$  de  $\mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ . Definimos

$$\nabla_t A(\mathbf{p}) = \left( \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} A(p + \epsilon tp) \right)_p \quad \forall \mathbf{p} \in U.$$

Repare que para cada  $\mathbf{p} \in U$  temos o vetor tangente  $\nabla_t A(\mathbf{p})$  em  $T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ . Repare que podemos denotar  $\nabla_t A(\mathbf{p})$  simplesmente por  $\nabla_t A(p)$  por se tratar de uma função 0-homogênea. Além disso, como  $\nabla_t A(p)$  claramente depende suavemente de  $p$ , temos  $\nabla_t A \in \mathfrak{X}(U)$ .

**Proposição 54** O operador  $\nabla$  é uma conexão afim em  $\mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ .

**Demonstração:** Seja  $M = \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ . Se  $T$  e  $S$  são campos suaves em  $M$ , então definimos

$$\nabla_S T(p) := \left( \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} T(p + \epsilon S(p)p) \right)_p \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V).$$

Assim, temos

$$\nabla_S T(p) = [d_p T(S(p)p)]_p = \pi[p] \circ d_p T(S(p)p) \circ \pi'[p],$$

que é uma função suave em  $p$ . Logo, temos a aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

dada por  $(T, S) \mapsto \nabla_S T$ . Repare que  $\phi \mapsto \phi_p$  é uma aplicação linear de  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$  em  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$ .

Tome  $f \in C^\infty(M)$  e  $S_1, S_2, T \in \mathfrak{X}(M)$ . Temos

$$\begin{aligned} \nabla_{S_1 + f S_2} T(p) &= [d_p T(S_1(p)p + f(p)S_2(p)p)]_p \\ &= [d_p T(S_1(p)p) + f(p)d_p T(S_2(p)p)]_p \\ &= [d_p T(S_1(p)p)]_p + f(p)[d_p T(S_2(p)p)]_p \\ &= \nabla_{S_1} T(p) + f(p)\nabla_{S_2} T(p). \end{aligned}$$

Tome  $f \in C^\infty(M)$  e  $T, S \in \mathfrak{X}(M)$ . Como  $d_p(fT)[S(p)p] = f(p)d_p T(S(p)p) + [S(p)f]T(p)$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla_S fT(p) &= [f(p)d_p T(S(p)p) + [S(p)f]T(p)]_p \\ &= f(p)[d_p T(S(p)p)]_p + [S(p)f]T(p)_p \\ &= f(p)\nabla_S T(p) + [S(p)f]T(p), \end{aligned}$$

onde usamos que  $T(p)_p = T(p)$ , que vale porque  $T(p) \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ .

O argumento que garante a identidade  $\nabla_S(T_1 + T_2) = \nabla_S T_1 + \nabla_S T_2$  para campos  $T_1, T_2, S \in \mathfrak{X}(M)$  é análogo aos dois argumentos acima.

Logo,  $\nabla$  é conexão afim. ■

A seguir mostraremos que a conexão em questão é de Levi-Civita e calcularemos a curvatura em alguns exemplos.



**Lema 55** Se  $p \in P(V) \setminus S(V)$  e  $t \in T_p P(V)$ , então a função  $t^* : V \rightarrow V$  dada por

$$t^*v = \frac{\langle v, tp \rangle}{\langle p, p \rangle} p$$

é uma transformação linear de  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$  satisfazendo

$$\langle tx, y \rangle = \langle x, t^*y \rangle \quad \forall x, y \in V.$$

Se a forma Hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $V$  é não degenerada, então  $t^*$  é determinada por essa propriedade, isto é, se  $g \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$  satisfaz

$$\langle tx, y \rangle = \langle x, gy \rangle \quad \forall x, y \in V,$$

então  $g = t^*$ .

Chamaremos essa aplicação  $t^*$  de adjunta de  $t$ .

**Demonstração:** Considere

$$t^*v := \frac{\langle v, tp \rangle}{\langle p, p \rangle} p.$$

Para  $x, y \in V$  temos

$$\begin{aligned} \langle tx, y \rangle &= \langle t \circ \pi'[p]x, y \rangle \\ &= \left\langle \frac{\langle x, p \rangle}{\langle p, p \rangle} tp, y \right\rangle \\ &= \frac{\langle x, p \rangle \langle tp, y \rangle}{\langle p, p \rangle} \\ &= \left\langle x, \frac{\langle tp, y \rangle}{\langle p, p \rangle} p \right\rangle \\ &= \left\langle x, \frac{\langle y, tp \rangle}{\langle p, p \rangle} p \right\rangle \\ &= \langle x, t^*y \rangle. \end{aligned}$$

Agora mostremos que no caso em que  $V$  é espaço não degenerado a função  $t^*$  é a única transformação linear de  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$  satisfazendo

$$\langle tx, y \rangle = \langle x, t^*y \rangle \quad \forall x, y \in V.$$

Considere uma transformação linear  $g \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$  satisfazendo

$$\langle tx, y \rangle = \langle x, gy \rangle \quad \forall x, y \in V.$$

Para cada  $y \in V$  temos  $\langle x, gy - t^*y \rangle = 0$  para todo  $x \in V$ , garantindo que  $gy = t^*y$  porque a forma Hermitiana é não degenerada, de onde segue o resultado. ■

**Lema 56** Considere  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ , com  $p$  não isotrópico. As seguintes identidades são válidas:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \pi'[p + \epsilon tp] = - \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \pi[p + \epsilon tp] = t + t^*.$$

**Demonstração:** Considere  $v \in V$ . Por definição

$$\pi'[p + \epsilon tp]v = \frac{\langle v, p + \epsilon tp \rangle}{\langle p + \epsilon tp, p + \epsilon tp \rangle} (p + \epsilon tp)$$

e usando que  $\langle p, tp \rangle = 0$  obtêm-se

$$\begin{aligned} \pi'[p + \epsilon tp]v &= \frac{\langle v, p + \epsilon tp \rangle}{\langle p, p \rangle + \epsilon^2 \langle tp, tp \rangle} (p + \epsilon tp) \\ &= \frac{\langle v, p + \epsilon tp \rangle}{\langle p, p \rangle} (p + \epsilon tp) + o(\epsilon) \\ &= \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} + \epsilon \left( \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} tp + \frac{\langle v, tp \rangle}{\langle p, p \rangle} p \right) + o(\epsilon). \end{aligned}$$

Logo,

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \pi'[p + \epsilon tp]v = \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} tp + \frac{\langle v, tp \rangle}{\langle p, p \rangle} p.$$

O primeiro termo do lado direito na identidade acima pode ser escrito como  $t \circ \pi'[p]v$  e sabendo que  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$  concluímos que esse termo é  $tv$ , porque  $t \circ \pi'[p] = t$ .

O segundo termo é dado pelo lema 55.

Portanto,

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \pi'[p + \epsilon tp] = t + t^*$$

e, como  $\pi[q] + \pi'[q] = \text{Id}$  para todo  $q \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ , obtemos que

$$- \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \pi[p + \epsilon tp] = t + t^*.$$

■

Nosso próximo passo é mostrar que a conexão  $\nabla$  é de Levi-Civita. Primeiro mostremos que  $\nabla$  é livre de torção.

**Proposição 57** Considere  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$  e  $t, s \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ . Sejam  $T$  e  $S$  os campos espalhados de  $t$  e  $s$ , respectivamente. Temos que

$$\nabla_T S(q) = [s\pi[q]t - t\pi'[q]s]_q \quad \forall q \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V).$$

Em particular,  $\nabla_T S(p) = 0$ .

**Demonstração:** Por definição

$$\nabla_T S(q) = \left( \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} S(q + \epsilon T(q)q) \right)_q.$$

Aplicando o lema 56 obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} S(q + \epsilon T(q)q) &= \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \pi[q + \epsilon T(q)q] s\pi'[q + \epsilon T(q)q] \\ &= -(T(q) + T(q)^*) s\pi'[q] + \pi[q] s(T(q) + T(q)^*). \end{aligned}$$

Por definição de campo espalhado

$$T(q) = \pi[q] t\pi'[q]$$

e, como  $T(q)^* \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(q^\perp, q)$ , temos

$$\pi[q] T(q)^* = T(q) \pi'[q] = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \nabla_T S(q) &= [-(T(q) + T(q)^*) s\pi'[q] + \pi[q] s(T(q) + T(q)^*)]_q \\ &= -\pi[q] \pi[q] t\pi'[q] s\pi'[q] \pi'[q] + \pi[q] \pi[q] s\pi[q] t\pi'[q] \pi'[q] \\ &= -\pi[q] t\pi'[q] s\pi'[q] + \pi[q] s\pi[q] t\pi'[q] \\ &= [s\pi[q] t - t\pi'[q] s]_q, \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. ■

**Lema 58** *Considere vetores tangentes  $s$  e  $t$  em um ponto  $\mathbf{p}$  não isotrópico, os campos espalhados  $S$  e  $T$  satisfazem  $[S, T](p) = 0$ .*

**Demonstração:** Considere uma função suave  $f : \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ . Por definição,

$$S(f)q = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} f(q + \epsilon S(q)q) = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} f(q + \epsilon \pi[q]sq)$$

e, assim,

$$TS(f)p = \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} f\left(p + \delta tp + \epsilon \pi[p + \delta tp]s(p + \delta tp)\right).$$

Note que expandindo em Taylor na variável  $\delta$  e usando o lema 56 obtemos

$$\pi[p + \delta tp]s(p + \delta tp) = sp - \delta(t + t^*)sp + o(\delta) = sp - \delta t^* sp + o(\delta)$$

e daí concluímos que

$$\begin{aligned} TS(f)(p) &= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} f(p + \delta tp + \epsilon sp) \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} f(p + \delta tp + \epsilon sp) \\ &= ST(f)(p). \end{aligned}$$

Portanto,  $[S, T](p) = 0$ . ■

**Proposição 59** *A conexão  $\nabla$  é livre de torção.*

**Demonstração:** Considere o tensor de torção

$$\text{TOR}(S, T) = \nabla_S T - \nabla_T S - [S, T].$$

Como TOR é tensor, podemos calcular  $\text{TOR}(s, t) \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ , onde  $s$  e  $t$  são vetores tangentes no ponto não isotrópico  $\mathbf{p}$ . Considere os campos espalhados  $S$  e  $T$  de  $s$  e  $t$ .

Temos que

$$\text{TOR}(s, t) = \text{TOR}(S, T)(p) = \nabla_S T(p) - \nabla_T S(p) - [S, T](p) = 0$$

pela proposição 57 e pelo lema 58. ■

**Proposição 60** *A conexão  $\nabla$  é compatível com a métrica.*

**Demonstração:** Considere a expressão  $B(S, T_1, T_2) = S\langle T_1, T_2 \rangle - \langle \nabla_S T_1, T_2 \rangle - \langle T_1, \nabla_S T_2 \rangle$ , onde  $S, T_1$  e  $T_2$  são campos em  $\mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ . Repare que  $B$  é tensor. Então para mostrar que  $B = 0$  basta mostrarmos que isso ocorre em cada ponto. Considere  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$  e os vetores tangentes  $s, t_1, t_2$  em  $\mathbf{p}$ . Associado a esses vetores temos os campos espalhados  $S, T_1, T_2$ . Considere também os vetores

$$u = sp, \quad v_1 = t_1 p, \quad v_2 = t_2 p$$

em  $V$ .

Calculemos cada componente de  $B$ .

$$\begin{aligned} [S\langle T_1, T_2 \rangle]p &= u\langle T_1, T_2 \rangle = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \langle T_1(p + \epsilon u), T_2(p + \epsilon u) \rangle_{p+\epsilon u} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{\langle [T_1(p + \epsilon u)](p + \epsilon u), [T_2(p + \epsilon u)](p + \epsilon u) \rangle}{\langle p + \epsilon u, p + \epsilon u \rangle}. \end{aligned}$$

Como  $\langle p, u \rangle = 0$ , obtemos

$$[S\langle T_1, T_2 \rangle]p = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{\langle [T_1(p + \epsilon u)](p + \epsilon u), [T_2(p + \epsilon u)](p + \epsilon u) \rangle}{\langle p, p \rangle + \epsilon^2 \langle u, u \rangle}$$

e, portanto, usando a identidade

$$\frac{1}{\langle p, p \rangle + \epsilon^2 \langle u, u \rangle} = \frac{1}{\langle p, p \rangle} + o(\epsilon), \quad (61)$$

temos

$$[S\langle T_1, T_2 \rangle]p = \frac{1}{\langle p, p \rangle} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \langle [T_1(p + \epsilon u)](p + \epsilon u), [T_2(p + \epsilon u)](p + \epsilon u) \rangle. \quad (62)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} [T_i(p + \epsilon u)](p + \epsilon u) &= \pi[p + \epsilon u]t_i\pi[p + \epsilon u](p + \epsilon u) \\ &= \pi[p + \epsilon u]v_i \\ &= v_i - \frac{\langle v_i, p + \epsilon u \rangle}{\langle p + \epsilon u, p + \epsilon u \rangle} (p + \epsilon u) \\ &= v_i - \epsilon \frac{\langle v_i, u \rangle}{\langle p, p \rangle} p + o(\epsilon), \end{aligned}$$

onde usamos novamente a identidade (61).

Assim,

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} [T_i(p + \epsilon u)](p + \epsilon u) = -\frac{\langle v_i, u \rangle}{\langle p, p \rangle} p.$$

de onde segue das identidade (62) que

$$[S\langle T_1, T_2 \rangle]p = -\frac{1}{\langle p, p \rangle^2} \left( \langle v_1, u \rangle \langle p, v_2 \rangle + \overline{\langle v_1, u \rangle} \langle v_1, p \rangle \right),$$

que é zero, pois  $\langle v_i, p \rangle = 0$ .

Portanto,  $[S\langle T_1, T_2 \rangle]p = 0$ .

Por outro lado, pela proposição 57 temos  $\nabla_S T_i(p) = 0$ , ou seja,  $B(s, t_1, t_2) = 0$ , nos garantindo que o tensor  $B = 0$ . ■

Aliás, esse tensor  $B$  é conhecido. Em análise tensorial ele se escreve como  $\nabla \langle \cdot, \cdot \rangle$ . Com essa notação, a compatibilidade com a métrica se traduz em  $\nabla \langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ .

Das duas proposições anteriores obtêm-se que a métrica é Levi-Civita.

## 4.2 Curvatura

O tensor de curvatura é dado por

$$R(T_1, T_2)S = \nabla_{T_1} \nabla_{T_2} S - \nabla_{T_2} \nabla_{T_1} S - \nabla_{[T_1, T_2]} S,$$

onde  $T_1, T_2, S \in \mathfrak{X}(\mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V))$ .

**Proposição 63** *Se  $t_1, t_2, s \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ , com  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ , então a curvatura é dada por*

$$R(t_1, t_2)s = -st_1^*t_2 - t_2t_1^*s + st_2^*t_1 + t_1t_2^*s.$$

**Demonstração:** Considere os campos espalhados  $T_1, T_2$  e  $S$  associados a  $t_1, t_2$  e  $s$ .

Calculemos  $\nabla_{T_2} \nabla_{T_1} S$ . Como vimos na proposição 57 temos

$$\nabla_{T_1} S(q) = [s\pi[q]t_1 - t_1\pi'[q]s]_q \quad \forall q \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V).$$

Usando a definição de  $\nabla$  temos

$$\begin{aligned} \nabla_{T_2} \nabla_{T_1} S(p) &= \left[ \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \nabla_{T_1} S(p + \epsilon t_2 p) \right]_p \\ &= \left[ \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \{s\pi[p + \epsilon t_2 p]t_1 - t_1\pi'[p + \epsilon t_2 p]s\}_{p+\epsilon t_2 p} \right]_p \end{aligned}$$

que é

$$\left[ \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \pi[p + \epsilon t_2 p]s\pi[p + \epsilon t_2 p]t_1\pi'[p + \epsilon t_2 p] \right]_p - \left[ \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \pi[p + \epsilon t_2 p]t_1\pi'[p + \epsilon t_2 p]s\pi'[p + \epsilon t_2 p] \right]_p.$$

Calculemos o primeiro termo da expressão acima.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \pi[p + \epsilon t_2 p]s\pi[p + \epsilon t_2 p]t_1\pi'[p + \epsilon t_2 p] &= \\ -(t_2 + t_2^*)s\pi[p]t_1\pi'[p] - \pi[p]s(t_2 + t_2^*)t_1\pi'[p] + \pi[p]s\pi[p]t_1(t_2 + t_2^*). \end{aligned}$$

Como  $t_1, t_2$  e  $s$  são vetores em  $\mathbf{p}$ , temos que  $s\pi[p] = 0$ ,  $t_1 t_2 = t_2 t_1 = 0$  e, portanto, a expressão acima se torna

$$-\pi[p]st_2^*t_1\pi'[p].$$

Além disso, como  $\pi[p]s = s$  e  $t_1\pi'[p] = t_1$ , obtemos a seguinte identidade

$$\frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \pi[p + \epsilon t_2 p]s\pi[p + \epsilon t_2 p]t_1\pi'[p + \epsilon t_2 p] = -st_2^*t_1.$$

Por argumento análogo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \pi[p + \epsilon t_2 p]t_1\pi'[p + \epsilon t_2 p]s\pi'[p + \epsilon t_2 p] &= \\ -(t_2 + t_2^*)t_1\pi'[p]s\pi'[p] + \pi[p]t_1(t_2 + t_2^*)s\pi'[p] + \pi[p]t_1\pi'[p]s(t_2 + t_2^*) &= \\ t_1t_2^*s. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_{T_2} \nabla_{T_1} S(p) = -st_2^*t_1 - t_1t_2^*s.$$

Por simetria,

$$\nabla_{T_1} \nabla_{T_2} S(p) = -st_1^*t_2 - t_2t_1^*s.$$

Pelo lema 58 temos  $[T_1, T_2](p) = 0$ , de onde segue que  $\nabla_{[T_1, T_2]} S(p) = 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2)s &= R(T_1, T_2)S(p) \\ &= \nabla_{T_1} \nabla_{T_2} S(p) - \nabla_{T_2} \nabla_{T_1} S(p) - \nabla_{[T_1, T_2]} S(p) \\ &= -st_1^*t_2 - t_2t_1^*s + st_2^*t_1 + t_1t_2^*s, \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. ■

Para um  $W$  subespaço real de  $T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ , com  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ , de dimensão 2 e não degenerado com respeito a métrica pseudo-Riemanniana  $g$  podemos definir a curvatura seccional

$$K(W) = \frac{g(R(t_1, t_2)t_2, t_1)}{g(t_1, t_1)g(t_2, t_2) - g(t_1, t_2)^2},$$

onde  $t_1, t_2$  é base de  $W$ . Assim como se prova em geometria Riemanniana, pode-se demonstrar que essa curvatura independe da escolha de base  $t_1, t_2$ . Além disso, a expressão acima está bem definida, porque o termo  $g(t_1, t_1)g(t_2, t_2) - g(t_1, t_2)^2$  é o determinante da matriz de Gram  $\{g(t_i, t_j)\}$ , que é não nulo porque  $W$  é não degenerado por hipótese.

Escrevamos a métrica Hermitiana como

$$\langle s, t \rangle = \sigma \frac{\langle sp, tp \rangle}{\langle p, p \rangle},$$

onde  $\sigma \in \{-1, +1\}$ .

Pela proposição anterior

$$R(t_1, t_2)t_2 = -t_2t_1^*t_2 - t_2t_1^*t_2 + t_2t_2^*t_1 + t_1t_2^*t_2$$

e como, pelo lema 55,

$$t_i^*v = \frac{\langle v, t_i p \rangle}{\langle p, p \rangle} p,$$

obtêm-se

$$t_2t_1^*t_2v = \frac{\langle t_2v, t_1p \rangle}{\langle p, p \rangle} t_2p$$

e, conseqüentemente,

$$\langle t_2t_1^*t_2, t_1 \rangle = \sigma \frac{\langle t_2p, t_1p \rangle}{\langle p, p \rangle} \frac{\langle t_2p, t_1p \rangle}{\langle p, p \rangle} = \sigma \langle t_2, t_1 \rangle^2.$$

Por cálculo análogo ao acima, obtemos

$$\langle t_2t_2^*t_1, t_1 \rangle = \sigma |\langle t_1, t_2 \rangle|^2$$

e

$$\langle t_1t_2^*t_2, t_1 \rangle = \sigma \langle t_1, t_1 \rangle \langle t_2, t_2 \rangle.$$

Portanto,

$$\langle R(t_1, t_2)t_2, t_1 \rangle = \sigma (\langle t_1, t_1 \rangle \langle t_2, t_2 \rangle - 2\langle t_1, t_2 \rangle^2 + |\langle t_1, t_2 \rangle|^2).$$

Assim, temos a curvatura seccional explícita.

**Proposição 64** *A curvatura seccional é dada por*

$$K(W) = \sigma \frac{g(t_1, t_1)g(t_2, t_2) - 2\operatorname{Re}\langle t_1, t_2 \rangle^2 + |\langle t_1, t_2 \rangle|^2}{g(t_1, t_1)g(t_2, t_2) - g(t_1, t_2)^2}$$

**Corolário 65** Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , então a curvatura é  $\sigma$ .

Analisemos agora o que ocorre com  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Como a base  $t_1, t_2$  de  $W$  é arbitrária, podemos supor que essa é ortonormal, isto é,  $g(t_1, t_2) = 0$  e  $g(t_i, t_i) \in \{-1, +1\}$ .

Considere os números  $a_i = \langle t_i, t_i \rangle$  e  $b = \langle t_1, t_2 \rangle$ . Como  $\operatorname{Re} b = g(t_1, t_2) = 0$ , temos que  $b^2 = -|b|^2$ . Assim, usando a fórmula da curvatura seccional acima, obtemos:

$$K(W) = \sigma \frac{a_1 a_2 + 3|b|^2}{a_1 a_2} = \sigma \left( 1 + 3 \frac{|b|^2}{a_1 a_2} \right).$$

**Proposição 66** Se  $\det(\langle t_i, t_j \rangle) \geq 0$ , então  $\sigma K(W) \in [1, 4]$ .

**Demonstração:** Basta notar que nesse caso o determinante da matriz de Gram de  $t_1$  e  $t_2$  é  $\det(\langle t_i, t_j \rangle) = a_1 a_2 - |b|^2 \geq 0$ , ou seja,  $a_1 a_2 = 1$  e  $|b|^2 \leq 1$ . Assim,

$$\sigma K(W) = 1 + 3|b|^2 \in [1, 4].$$

■

Outro resultado interessante é o seguinte. Se  $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$ , então  $\dim_{\mathbb{C}} T_{\mathbf{p}} \mathbf{P}(V) = 1$ . Assim, embora  $t_1, t_2$  sejam linearmente independentes em  $T_{\mathbf{p}} \mathbf{P}(V)$  no sentido real, são linearmente dependentes no sentido complexo e, portanto, a matriz de Gram de  $t_1$  e  $t_2$  com respeito a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é degenerada. Com isso em mente, vale a identidade  $a_1 a_2 - |b|^2 = 0$  e, consequentemente,  $K(W) = 4\sigma$ . Portanto, o seguinte resultado é válido.

**Proposição 67** Se  $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$ , então  $\sigma K(W) = 4$ .

Esse fato nos garantirá que  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  e  $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$  com suas métricas Riemannianas usuais têm curvaturas constantes iguais a  $-4$  e  $4$ , respectivamente.

No caso em que  $\dim V > 2$  e a forma hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  em  $T_{\mathbf{p}} \mathbf{P}(V)$  é positiva definida, existem dois vetores  $t, s \in T_{\mathbf{p}} \mathbf{P}(V)$  ortonormais com respeito a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ . Considere

$$t_1 := t \quad \text{e} \quad t_2(\theta) = \cos(\theta)s + i \sin(\theta)t.$$

Assim,  $a_1 = a_2 = 1$  e  $b = -i \sin(\theta)$ . Logo,  $t_1, t_2$  são ortonormais com respeito a métrica Riemanniana  $g_p$ . Se  $W = \mathbb{R}t_1 + \mathbb{R}t_2$ , então  $K(W) = \sigma(1 + 3 \sin^2(\theta))$ .

Deste modo, a curvatura assume todos os valores entre  $\sigma$  e  $4\sigma$ . Os espaços  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  e  $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n$ , com  $n \geq 2$ , com suas métricas Riemannianas usuais terão curvaturas variando entre  $[-4, -1]$  e  $[1, 4]$ , respectivamente, por causa do raciocínio acima, ou seja, não terão curvatura constante.

### 4.3 Geodésicas

Quando estudamos geometria diferencial descobrimos que uma geodésica da esfera em  $\mathbb{R}^3$  é sempre um círculo grande, isto é, a intersecção de um plano bidimensional passando pela origem e  $\mathbb{S}^2$ . Assim, as geodésicas se manifestam a partir de objetos lineares. O mesmo fenômeno se repete aqui.



**Definição 68** Se  $W \subset V$  é um subespaço bidimensional real e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  restrita a  $W$  é uma forma real e não nula, então chamamos  $G = \mathbf{P}(W)$  de geodésica.

O subespaço  $W$  pode ter as seguintes possíveis assinaturas:  $++$ ,  $--$ ,  $+-$ ,  $+0$  ou  $-0$ .

A geodésica  $G = \mathbf{P}(W)$  é uma variedade real de dimensão 1. Mais precisamente,  $G$  é um círculo. De fato, considere uma base  $b, b'$  de  $W$ . Temos que  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow G$  dado por  $f(e^{i2\theta}) = [\cos(\theta)b + \sin(\theta)b']$  é difeomorfismo<sup>5</sup>.

Usaremos a notação  $\mathbb{K}W$  para denotar  $W$  se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $W \oplus iW$  quando  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Nosso objetivo primário nessa secção é mostrar que essas geodésicas são de fato geodésicas no sentido (pseudo-)Riemanniano. Isto é, parametrizaremos essas geodésicas ou parte delas por curvas  $c$  satisfazendo  $\nabla_{c'} c' = 0$ .

**Proposição 69** Dado dois pontos  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{P}(V)$  distintos e não ortogonais. Existe uma geodésica passando por  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  e ela é única, que é a geodésica

$$G = \mathbf{P}(\mathbb{R}p + \mathbb{R}\langle p, q \rangle q).$$

**Demonstração:** Considere os representantes  $p$  e  $q$  de  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , respectivamente. Seja  $c = \langle p, q \rangle$ . Definindo  $W = \mathbb{R}p + \mathbb{R}cq$ , obtemos que  $W$  é um subespaço real de  $V$  com  $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$ . Além disso, como  $\langle p, cq \rangle = |c|^2 \neq 0$ , temos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W}$  é uma forma real e não nula. Logo, temos a geodésica  $G = \mathbf{P}(W)$  passando por  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ . Repare que  $G$  não depende dos representantes de  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ . Por exemplo, ao trocarmos  $p$  por  $ap$ , onde  $a \in \mathbb{K}^\times$ , temos que

$$\mathbf{P}(\mathbb{R}ap + \langle ap, q \rangle q) = \mathbf{P}(a(\mathbb{R}p + \mathbb{R}\langle p, q \rangle q)) = G.$$

Da mesma forma, trocando  $q$  por  $bq$ , onde  $b \in \mathbb{K}^\times$ , temos

$$\mathbf{P}(\mathbb{R}p + \langle p, bq \rangle bq) = \mathbf{P}(\mathbb{R}p + \mathbb{R}|b|^2 \langle p, q \rangle q) = G,$$

pois  $|b|^2$  é um número real não nulo.

Agora considere uma geodésica  $G' = \mathbf{P}(W')$  passando por  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , onde  $W'$  é subespaço real de  $V$  com  $\dim_{\mathbb{R}} W' = 2$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W' \times W'}$  real e não nula. Tomando representantes  $p'$  e  $q'$  de  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  em  $W' \cap \mathbf{p}$  e  $W' \cap \mathbf{q}$ , temos que  $W' = \mathbb{R}p' + \mathbb{R}q'$ . Existem  $a, b \in \mathbb{K}^\times$  satisfazendo  $p' = ap$  e  $q' = bq$ . Como  $\langle p', q' \rangle$  é real e  $\langle p', q' \rangle = a\bar{b}\langle p, q \rangle = a\bar{b}c$ , devemos ter  $a\bar{b}c \in \mathbb{R}^\times$ .

Logo,

$$W' = \mathbb{R}p' + \mathbb{R}q' = \mathbb{R}ap + \mathbb{R}bq = \mathbb{R}ap + \mathbb{R}a\bar{b}cbq = a(\mathbb{R}p + \mathbb{R}cq) = aW$$

e, portanto,  $G = G'$ . ■

No caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , basta mostrar que uma geodésica que liga dois pontos existe. Sua unicidade é garantida pelo fato que dois pontos determinam unicamente uma reta projetiva.

Já no caso complexo a situação é diferente. Podem existir infinitas geodésicas ligando dois pontos. Lembre-se que ao fazermos  $\mathbf{P}(W)$  nesse caso estamos tomando a projetivização no sentido complexo de um subespaço real.

<sup>5</sup> Talvez seja interessante verificar isso usando o recobrimento  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dado por  $\theta \mapsto e^{2i\theta}$

**Proposição 70** Considere o caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Dados dois pontos  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in P(V)$  distintos e ortogonais tais que  $\mathbf{p}$  é não isotrópico, existem infinitas geodésicas passando por  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , que são as geodésicas

$$G_t = P(\mathbb{R}p + \mathbb{R}e^{it}q).$$

**Demonstração:** Considere os representantes  $p$  e  $q$  de  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , respectivamente. Definindo  $W_t = \mathbb{R}p + \mathbb{R}e^{it}q$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , obtemos que  $W_t$  é um subespaço real de  $V$  com  $\dim_{\mathbb{R}} W_t = 2$ . Além disso, temos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_t \times W_t}$  é uma forma real e não nula, pois  $\langle p, p \rangle \neq 0$ . Logo, temos a geodésica  $G_t = P(W_t)$  passando por  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ .

Repare que

$$G_t = G_{t'} \Leftrightarrow t = t' \pmod{2\pi},$$

ou seja, existem infinitas geodésicas passando por  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ .

Por outro lado, essas são todas as geodésicas.

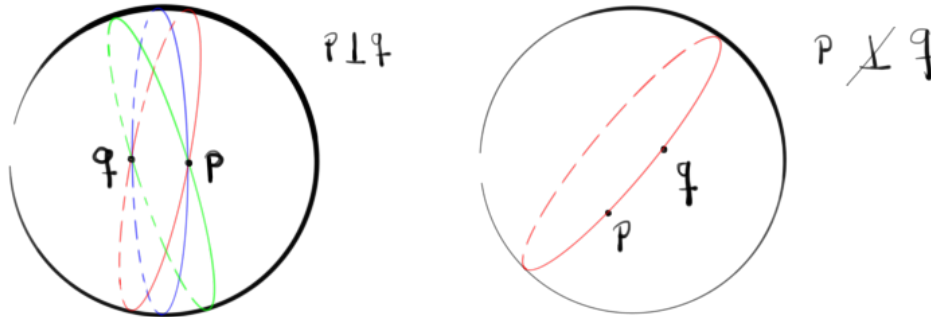
Considere uma geodésica  $G' = P(W')$  passando por  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , onde  $W'$  é subespaço real de  $V$  com  $\dim_{\mathbb{R}} W' = 2$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W' \times W'}$  real e não nula. Tomando representantes  $p'$  e  $q'$  de  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  em  $W' \cap \mathbf{p}$  e  $W' \cap \mathbf{q}$ , temos que  $W' = \mathbb{R}p' + \mathbb{R}q'$ . Existem  $a, b \in \mathbb{C}^\times$  satisfazendo  $p' = ap$  e  $q' = bq$ . Considere o número  $e^{it} = (b/a)/(|b|/|a|)$  de  $\mathbb{S}^1$ .

Temos que

$$W' = \mathbb{R}p' + \mathbb{R}q' = \mathbb{R}ap + \mathbb{R}bq = a \left( \mathbb{R}p + \mathbb{R}\frac{b}{a}q \right) = a(\mathbb{R}p + \mathbb{R}e^{it}q) = aW_t$$

e, portanto,  $G' = G_t$ . ■

**Observação 71** Esse fenômeno de termos infinitas geodésicas passando por um par de pontos não é tão estranha. Se considerarmos  $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  com forma  $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2$ , então  $P_{\mathbb{C}}^1 := P(V)$  é a esfera de Riemann e o produto interno acima nos fornece a métrica de curvatura constante igual a 4, pela proposição 67. Pontos ortogonais  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  se traduzem na esfera como pontos antipodais. E sabemos por um par de pontos antipodais passam infinitas geodésicas.



**Figura 8:** Esfera de Riemann  $P_{\mathbb{C}}^1$  com sua métrica usual

Considere uma curva  $c : I \rightarrow \mathbf{P}(V)$  passando por  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$  em  $t_0 \in I$ . Calculemos  $c'(t_0)$ . Com isso em mente, mostremos que se pode levantar essa curva em  $V$  em uma vizinhança pequena de  $t_0$ .

Considere o funcional  $\xi = \langle \cdot, p \rangle$ . Sabemos que  $\pi|_{H_\xi} : H_\xi \rightarrow \mathbf{P}(V)$ , com  $H_\xi = \{y \in V : \xi(y) = 1\}$ , é uma parametrização de  $\mathbf{P}(V)$ . Assim, defina a curva  $c_0(t) = \pi|_{H_\xi}^{-1} \circ c(t)$  em uma vizinhança de  $t_0$ .

Logo, dada a curva  $c$  existe uma curva  $c_0$  em  $V$  tal que  $\pi \circ c_0(t) = c(t)$  em uma vizinhança de  $t_0$ .

**Proposição 72** *Considere a curva  $c : I \rightarrow \mathbf{P}(V)$  passando pelo ponto não isotrópico  $\mathbf{p}$  como foi descrita acima e considere uma curva  $c_0$  definida em  $V$  tal que  $c(t) = \pi \circ c_0(t)$  em uma vizinhança de  $t_0$ , que existe pelo argumento acima. Temos que*

$$c'(t_0) = \frac{\langle \cdot, c_0(t_0) \rangle}{\langle c_0(t_0), c_0(t_0) \rangle} \pi[p]c'_0(t_0).$$

**Demonstração:** Considere uma função suave  $f$  de  $\mathbf{P}(V)$ .

$$c'(t_0)f = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(c(t_0 + \epsilon)) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(c_0(t_0 + \epsilon)) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(c_0(t_0) + \epsilon c'_0(t_0))$$

e, usando que a componente de  $c'_0(t_0)$  em  $p^\perp$  é  $\pi[p]c'_0(t_0)$ , obtemos

$$c'(t_0)f = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(c_0(t_0) + \epsilon c'_0(t_0)) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(c_0(t_0) + \epsilon \pi[p]c'_0(t_0)),$$

de onde segue que

$$c'(t_0) = \frac{\langle \cdot, c_0(t_0) \rangle}{\langle c_0(t_0), c_0(t_0) \rangle} \pi[p]c'_0(t_0).$$

■

**Proposição 73** *A reta tangente da geodésica  $G = \mathbf{P}(W)$  em  $\mathbf{p} \in G$  não isotrópico é dada por*

$$T_{\mathbf{p}}G = \{t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V) : tx \in W \quad \forall x \in W \cap \mathbf{p}\}.$$

**Demonstração:** Seja  $p \in \mathbf{p} \cap W$  um vetor não nulo, ou seja, podemos supor que  $\langle p, p \rangle = 1$  ou  $-1$ . Como a forma Hermitiana restrita a  $W$  é real e não nula, existe um vetor  $q$  ortonormal a  $p$  tal que  $p$  e  $q$  formam uma base de  $W$ . Considere a curva  $c(t) = [p + tq]$  passando por  $\mathbf{p}$  e repare que  $c_0(t) = p + tq$  é um levantamento de  $c$ . Temos que

$$c'(0) = \frac{\langle \cdot, p \rangle}{\langle p, p \rangle} q$$

é um vetor não nulo de  $T_{\mathbf{p}}G$ , ou seja,  $T_{\mathbf{p}}G = \mathbb{R}c'(0)$ .

Logo,

$$T_{\mathbf{p}}G \subset \{t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V) : tx \in W \quad \forall x \in W \cap \mathbf{p}\}.$$

Agora considere  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$  tal que  $tb \in W$ . Temos que  $tp = cq$  para algum  $c \in \mathbb{R}$ . Logo,

$$t = c \frac{\langle \cdot, p \rangle}{\langle p, p \rangle} q \in T_{\mathbf{p}}G.$$

Portanto,

$$T_{\mathbf{p}}G = \{t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V) : tx \in W \quad \forall x \in W \cap \mathbf{p}\}.$$

■

**Proposição 74** *Considere  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$  e  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V) \setminus \{0\}$ . Existe uma única geodésica passando por  $\mathbf{p}$  tal que  $t \in T_{\mathbf{p}}G$ .*

**Demonstração:** Considere o representante  $p$  de  $\mathbf{p}$  e defina  $W = \mathbb{R}p + \mathbb{R}tp$ . Temos que  $G = \mathbf{P}(W)$  é geodésica. Além disso,  $c(\epsilon) = [p + \epsilon tp]$  é a parametrização de uma curva passando por  $\mathbf{p}$  em  $G$  com velocidade  $t$ , ou seja,  $t \in T_{\mathbf{p}}G$ .

Agora mostremos a unicidade de  $G$ . Se  $G' = \mathbf{P}(W')$  é uma geodésica passando por  $p$  e  $t \in T_{\mathbf{p}}G'$ , então existe representante  $p'$  de  $\mathbf{p}$  em  $W'$ . Temos que  $tp' \in W'$  é um vetor não nulo ortogonal a  $p'$ . Assim,  $W' = \mathbb{R}p' + \mathbb{R}tp'$ . Como  $p' = ap$  para algum  $a \in \mathbb{K}^\times$ , temos que  $W' = aW$  e, portanto,  $G = G'$ . ■

Agora discutamos sobre curva geodésica, isto é, discutamos quem são as curvas  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$  satisfazendo  $\nabla_{c'} c' = 0$ . Uma curva geodésica nunca passará pelo absoluto  $\mathbf{S}(V)$  como veremos.

Tome a geodésica  $G = \mathbf{P}(W)$  com  $\mathbf{p} \in G \setminus \mathbf{S}(V)$ . Sem perda de generalidade, suporemos que  $W$  tem assinatura  $++$ ,  $+-$  ou  $+0$ . Seja  $q \neq 0$  um ponto ortogonal a  $p$  em  $W$ .

Se  $W$  tem assinatura  $++$ , então podemos supor que  $\langle p, p \rangle = \langle q, q \rangle = 1$  e considerar a curva  $c(t) = [\cos(t)p + \sin(t)q]$ . Essa curva será uma curva geodésica.

Se  $W$  tem assinatura  $+-$ , então podemos supor que  $-\langle p, p \rangle = \langle q, q \rangle = 1$  e considerar a curva  $c(t) = [\cosh(t)p + \sinh(t)q]$ . Essa curva será uma curva geodésica.

Se  $W$  tem assinatura  $+0$ , então podemos supor que  $\langle p, p \rangle = 1$  e  $\langle q, q \rangle = 0$  e considerar a curva  $c(t) = [p + tq]$ . Essa curva será uma curva geodésica.

Repare que nos três casos  $c(t)$  nunca é isotrópico. De fato, repare que  $c$  parametriza a componente de  $G \setminus \mathbf{S}(V)$  que contém  $\mathbf{p}$ .

Mostremos que  $\nabla_{c'} c' = 0$  nesses 3 casos. Nos 3 casos, seja  $c_0$  a curva em  $V^\times$  satisfazendo  $c = [c_0]$  como descrito acima. Em todos os casos temos  $\langle c_0(t), c'_0(t) \rangle = 0$ .

Se  $X$  é um campo de vetores em  $\mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ , então

$$\begin{aligned} \nabla_{c'} X(t) &= \left[ \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{t=0} X(c_0(t) + \epsilon c'_0(t)) \right]_{c_0(t)} \\ &= \left[ \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{t=0} X(c_0(t + \epsilon)) \right]_{c(t)}. \end{aligned}$$

Assim, se  $X$  é campo ao longo de  $c$ , temos que a derivada covariante de  $X$  é dada por

$$\nabla_{c'} X(t) = \left[ \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{t=0} X(t + \epsilon) \right]_{c(t)}.$$

Em particular, tomando o campo  $X = c'$  temos

$$X(t) = c'(t) = \frac{\langle \cdot, c_0(t) \rangle}{\langle c_0(t), c_0(t) \rangle} \pi[c(t)] c'_0(t).$$

Calculando  $\nabla_{c'} c'(t)$  no ponto  $c_0(t)$  obtemos

$$\frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{\langle c_0(t), c_0(t + \epsilon) \rangle}{\langle c_0(t + \epsilon), c_0(t + \epsilon) \rangle} \pi[c(t)] \pi[c(t + \epsilon)] c'_0(t + \epsilon).$$

Tratemos o caso em que  $W$  tem assinatura  $++$ . Temos que  $c_0(t) = \cos(t)p + \sin(t)q$ . Assim, a derivada acima se torna

$$\frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \langle c_0(t), c_0(t + \epsilon) \rangle \pi[c(t)] (-\sin(t + \epsilon)p + \cos(t + \epsilon)q) =$$

$$\langle c_0(t), c'_0(t) \rangle \pi[c(t)] (-\sin(t)p + \cos(t)q) - \langle c_0(t), c_0(t) \rangle \pi[c(t)] (\cos(t)p + \sin(t)q) = 0.$$

Portanto,  $\nabla_{c'} c'(t)$  aplicado em  $c_0(t)$  obtemos 0 e como  $c_0(t) \neq 0$ , temos  $\nabla_{c'} c'(t) = 0$ .

Logo,  $c$  é uma curva geodésica. Os casos em que a assinatura é  $+-$  e  $+0$  são análogos.

Repare que essas são essencialmente todas as geodésicas. De fato, se  $p \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$  e  $v \in T_p \mathbf{P}(V)$  é não nulo, então pela proposição 74 existe uma geodésica  $G$  passando por  $p$  com  $v \in T_p G$ . Assim, considerando a geodésica  $c$  passando por  $p$  no instante 0 estudada acima temos que  $c'(0) \neq 0$  e, portanto, existe  $a \in \mathbb{R}^\times$  satisfazendo  $v = ac'(0)$ , pois  $\dim_{\mathbb{R}} T_p G = 1$ . Assim,  $\tilde{c}(t) := c(at)$  é uma geodésica passando por  $p$  com velocidade  $v$ . Portanto, conhecemos todas as possíveis geodésicas passando pelo ponto  $p$  explicitamente.

Como as geodésicas estão definidas em  $\mathbb{R}$ , temos que as variedades estudadas aqui são sempre completas.

No caso em que  $W$  tem assinatura  $++$ , temos que dois pontos quaisquer de  $G$  podem ser ligados por duas curvas geodésicas, que são  $c(t)$  e  $c(-t)$ . No caso em que  $W$  tem assinatura  $+0$ , dois pontos não isotrópico podem ser ligados por uma única geodésica.

No caso em que  $W$  tem assinatura  $+-$ , temos que dois pontos ortonormais nunca podem ser ligados por geodésicas. De fato, se  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  são pontos ortonormais de  $G$ , então, supondo que  $p, q \in W$  e  $-\langle p, p \rangle = \langle q, q \rangle = 1$ , temos que a geodésica passando por  $p$  é  $c(t) = [\cosh(t)p + \sinh(t)q]$ . Repare que nunca ocorre  $c(t) = q$ , pois  $\cosh(t) \neq 0$  para todo  $t$ .

Se  $V$  é espaço complexo de dimensão 2 e a assinatura da forma hermitiana é  $++$ , então dado dois pontos  $p, q$  temos a geodésica  $G = \mathbf{P}(W)$  passando por  $p$  e  $q$ . Podemos supor que  $p, q \in W$  com  $\langle p, p \rangle = \langle q, q \rangle = 1$  e temos a geodésica  $c(t) = [\cos(t)p + \sin(t)p']$ , onde  $p'$  é o ortogonal de  $p$  em  $W$  e  $\langle p', p' \rangle = 1$ . Assim, existe um único  $a \in [0, \pi/2]$  tal que  $c(a) = q$ . Se esse não for o caso, basta trocar  $p'$  por  $-p'$ . Assim, como  $c'(t)$  tem norma 1, temos que a distância entre  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  é dada por

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = a.$$

Repare que devemos ter  $\cos(a)p + \sin(a)p' = \pm q$ , ou seja,  $a = \arccos(|\langle p, q \rangle|)$ , que pode ser escrito como

$$a = \arccos \left( \sqrt{\frac{\langle p, q \rangle \langle q, p \rangle}{\langle p, p \rangle \langle q, q \rangle}} \right).$$

**Definição 75** Dado dois pontos  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ , definimos a *tância* de  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  como sendo o número real

$$\text{ta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\langle p, q \rangle \langle q, p \rangle}{\langle p, p \rangle \langle q, q \rangle}.$$

Assim, nos projetivos  $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n$  e  $\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^n$  com métrica de Fubini-Study temos que

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \arccos \left( \sqrt{\text{ta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \right).$$

Similarmente, em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  e  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  temos que para quaisquer pontos  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  se obtém a fórmula

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{arcosh} \left( \sqrt{\text{ta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \right).$$

Assim, a menos de uma função transcendente crescente, a distância entre dois pontos é dada pela tância. A tância é um conceito de distância generalizada e ela aparece em muitas das fórmulas de geometria hiperbólica.

#### 4.4 Espaço Hiperbólico Real

Considere o espaço vetorial real  $V$  de dimensão 3 munido da forma hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de assinatura  $++-$ . Se  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ , então considere a métrica pseudo-Riemanniana

$$\langle t_1, t_2 \rangle = -\frac{\langle t_1 p, t_2 p \rangle}{\langle p, p \rangle} \quad \forall t_1, t_2 \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V).$$

Considere o ponto  $\mathbf{p}$  em  $\mathbf{B}(V)$ , isto é,  $p$  é negativo, e considere o vetor  $t$  em  $\mathbf{p}$ . Repare que  $tp$  é um vetor positivo, pois  $V = \mathbf{p} \oplus \mathbf{p}^{\perp}$  tem assinatura  $++-$  e, consequentemente,  $\mathbf{p}^{\perp}$  tem assinatura  $++$ . Similarmente, se  $\mathbf{p} \in \mathbf{E}(V)$ , então  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  tem assinatura  $+-$ .

Assim, a métrica é Riemanniana em  $\mathbf{B}(V)$  e Lorentziana em  $\mathbf{E}(V)$ .

Denotaremos o espaço  $\mathbf{B}(V)$  por  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  e o chamaremos de plano hiperbólico real. O espaço  $\mathbf{E}(V)$  será chamado de espaço de de Sitter.

O corolário 65 nos diz que a curvatura seccional, que é a curvatura gaussiana, de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  é  $-1$ .

É costumeiro representar o plano hiperbólico usando um hiperboloide em  $V$ .

Fixe  $z \in V$  negativo e defina o hiperboloide  $H$  como sendo <sup>6</sup>

$$H := \{x \in V : \langle x, x \rangle = -1, \quad \langle x, z \rangle < 0\}.$$

---

<sup>6</sup>Se estivéssemos trabalhando com  $V = \mathbb{R}^3$  e  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ , então poderíamos tomar  $H = \{(x, y, t) : x^2 + y^2 - t^2 = -1, t > 0\}$ .

O plano tangente de  $H$  em  $x$  é o subespaço  $T_x H = [x]^\perp$  em  $V$ . A métrica que se considera em  $H$  é dada no ponto  $x$  pela expressão

$$g(u, v) = \langle u, v \rangle,$$

onde  $u, v \in T_x H$ .

**Proposição 76** A aplicação  $I : H \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  dada por  $I(x) = [x]$  é isometria.

**Demonstração:** Claramente  $I$  é difeomorfismo.

Considere  $v \in T_x H$ . Se  $f \in C^\infty(\mathbf{P}(V))$ , então

$$d_x I(v)f = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(I(x + \epsilon v)) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = tf,$$

onde o funcional linear  $t : [x] \rightarrow [x]^\perp$  é dado por  $t(kx) = kv = \langle kx, x \rangle v$ . Portanto,  $d_x f(v) = \langle \cdot, x \rangle v$ .

Repare que

$$\begin{aligned} \langle d_x I(u), d_x I(v) \rangle_{I(x)} &= \langle \langle \cdot, x \rangle u, \langle \cdot, x \rangle v \rangle \\ &= - \frac{\langle \langle kx, x \rangle u, \langle kx, x \rangle v \rangle}{\langle kx, kx \rangle} \\ &= -\langle x, x \rangle \langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle = g(u, v), \end{aligned}$$

de onde segue que  $I$  é isometria. ■

Considere uma base ortonormal  $b_1, b_2, b_3$  em  $V$ , onde os dois primeiros vetores são positivos e o último é negativo. Nessa base temos

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 x_3.$$

Como vimos em 3.3 podemos escrever

$$\mathbf{P}(V) = \{[x_1, x_2, x_3] : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}.$$

O espaço  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  se torna

$$\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{P}(V) : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0\}.$$

Em coordenadas, fazendo  $x_3 = 1$ , obtemos que  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  é o disco

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

Induzindo a métrica de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  nesse disco, obtemos o famoso disco de Beltrami-Klein.

O conjunto  $\mathbf{S}(V)$  nessa mesma carta se torna o círculo

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Agora mostremos que  $\mathbf{E}(V)$  é uma faixa de Möbius e para isso se faz necessário defini-la precisamente. Considere a aplicação  $\gamma(t, s) = (t + \pi, -s)$ . O grupo  $G = \langle \gamma \rangle$  nos fornece uma ação livre e propriamente descontínua<sup>7</sup> em  $\mathbb{R}^2$ . A faixa de Möbius  $\mathbb{M}$  é a variedade dada pelo quociente de  $\mathbb{R}^2$  pelo grupo  $G$  e a aplicação  $\pi' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ , dada por  $\pi(t, s) = [(t, s)]$ , é recobrimento.

**Proposição 77** *O espaço  $\mathbf{E}(V)$  é difeomorfo a faixa de Möbius.*

**Demonstração:** Considere a função  $J : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{E}(V)$  dada por

$$J(t, s) = [\cos(t) \cosh(s), \sin(t) \cosh(s), \sinh(s)].$$

Repare que

$$\begin{aligned} J(t, s) &= [\cos(t) \cosh(s), \sin(t) \cosh(s), \sinh(s)] \\ &= [-\cos(t) \cosh(-s), -\sin(t) \cosh(-s), \sinh(-s)] \\ &= [\cos(t + \pi) \cosh(-s), \sin(t + \pi) \cosh(-s), \sinh(-s)] \\ &= J(t + \pi, -s) \\ &= J \circ \gamma(t, s). \end{aligned}$$

Assim, podemos definir  $H : \mathbb{M} \rightarrow \mathbf{E}(V)$  pela fórmula  $H([(t, s)]) = J(t, s)$ . Como  $J$  é suave e  $\pi'$  é difeomorfismo local, concluímos que  $H$  é suave.

Por um cálculo direto se mostra que  $H$  é bijeção. Calculando a matriz jacobina de  $J$  e mostrando que essa sempre tem posto 2, concluímos que  $J$  é difeomorfismo local pelo teorema da função inversa. Como  $H$  é uma bijeção, segue que é difeomorfismo. ■

Um jeito menos formal de ver que  $\mathbf{E}(V)$  é uma faixa de Möbius é o seguinte. Podemos supor, a menos de escolhermos uma base ortonormal, que  $V = \mathbb{R}^3$  e  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ . Note que  $E(\mathbb{R}^3)$  é a projetivização<sup>8</sup> de

$$\tilde{E} = \{x \in \mathbb{S}^2 : \langle x, x \rangle > 0\},$$

que é a esfera menos dois discos centrados nos polos Norte e Sul, respectivamente. Ao projetivizarmos  $\tilde{E}$ , estamos colando pontos antipodais de  $\tilde{E}$ . Não é difícil ver que o resultado dessa colagem é uma faixa de Möbius.

Desta forma, podemos escrever

$$\mathbf{P}(V) = \text{Plano hiperbólico real} \sqcup \text{Círculo} \sqcup \text{Faixa de Möbius}.$$

De forma mais geral, podemos considerar o espaço vetorial real  $V$  de dimensão  $n + 1$  e uma forma Hermitiana de assinatura  $+\cdots + -$ . Similar ao que foi feito antes,  $\mathbf{B}(V)$  é uma bola de dimensão  $n$  com estrutura Riemanniana,  $\mathbf{S}(V)$  é uma esfera de dimensão  $n - 1$  e  $\mathbf{E}(V)$  é uma variedade de Lorentz, chamada de espaço de de Sitter. Como variedade Riemanniana,  $\mathbf{B}(V)$  é denotado por  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  e se chama espaço hiperbólico real de dimensão  $n$ . Pelo corolário 65, a curvatura é novamente  $-1$ .

<sup>7</sup>No início do capítulo 5 falamos sobre ações de grupos.

<sup>8</sup>Isto é,  $E(\mathbb{R}^3) = \pi(\tilde{E})$



## 4.5 Espaço Hiperbólico Complexo

Considere um espaço vetorial complexo  $V$  de dimensão 2 munido de uma forma Hermitiana de assinatura  $+-$ . No projetivo  $\mathbf{P}(V)$  considere a métrica Hermitiana

$$\langle s, t \rangle = -\frac{\langle sp, tp \rangle}{\langle p, p \rangle} \quad \forall s, t \in T_p \mathbf{P}(V),$$

onde  $p$  é um ponto não isotrópico.

Podemos definir a métrica pseudo-Riemanniana  $g = \text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$ , que será Riemanniana.

Se  $p \in \mathbf{B}(V)$ , então  $p^\perp$  tem assinatura  $+$ . Assim,  $\langle s, s \rangle > 0$  quando  $s \in T_p \mathbf{P}(V) \setminus \{0\}$ . Em particular, a métrica  $g$  é Riemanniana. O espaço  $\mathbf{B}(V)$  munido com a métrica Riemanniana  $g$  é o espaço hiperbólico complexo de dimensão 1, que é denotado por  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^1$ .

Observe que  $\mathbf{E}(V)$  é essencialmente uma cópia de  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^1$ . Primeiramente, repare que se  $q \in \mathbf{E}(V)$  e  $s \in T_q \mathbf{P}(V) \setminus \{0\}$ , então  $\langle sq, sq \rangle < 0$  e, consequentemente,

$$\langle s, s \rangle = -\frac{\langle sq, sq \rangle}{\langle q, q \rangle} > 0.$$

Assim,  $\mathbf{E}(V)$  é variedade Riemanniana com a métrica  $g$ .

Mostremos que  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^1$  e  $\mathbf{E}(V)$  são isométricos no sentido Riemanniano.

A aplicação que transforma  $\mathbf{B}(V)$  em  $\mathbf{E}(V)$  é dada por  $\Lambda(p) = p^\perp$ . Note que essa aplicação faz sentido porque  $p^\perp$  tem dimensão 1.

Provemos que tal aplicação é suave. Considere uma base ortonormal  $b_1, b_2$ , onde  $\langle b_1, b_1 \rangle = 1$  e  $\langle b_2, b_2 \rangle = -1$ . Essa aplicação em coordenadas é dada por  $\Lambda([z_1, z_2]) = [\bar{z}_2, \bar{z}_1]$  e daí fica claro que ela é suave.

Além disso, essa aplicação é uma isometria Riemanniana. Mostremos que de fato esse é o caso.

**Lema 78** Se  $p \in \mathbf{B}(V)$  e  $s \in T_p \mathbf{P}(V)$ , então  $d_p \Lambda(s) = -s^*$ .

**Demonstração:** Tome  $f \in C^\infty(\mathbf{E}(V))$ . Por definição

$$d_p \Lambda(s)f = s[f \circ \Lambda] = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f \circ \Lambda(p + \epsilon sp).$$

Note que  $f \circ \Lambda(p + \epsilon sp) = f(p^\perp - \epsilon s^* p^\perp)$ , onde  $p^\perp$  é representante de  $p^\perp$ , pois

$$\langle p^\perp - \epsilon s^* p^\perp, p + \epsilon sp \rangle = \epsilon \langle p^\perp, sp \rangle - \epsilon \langle s^* p^\perp, p \rangle = 0,$$

sendo que a última passagem segue da definição de adjunto (veja 55).

Portanto,  $d_p \Lambda(s) = -s^*$ . ■

**Proposição 79** Para cada  $p \in \mathbf{B}(V)$  temos a identidade

$$\langle d_p \Lambda(s), d_p \Lambda(t) \rangle = \overline{\langle s, t \rangle} \quad \forall s, t \in T_p \mathbf{P}(V).$$

**Demonstração:** Considere  $s, t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ , e suponha  $\langle p, p \rangle = -1$  e  $\langle p^\perp, p^\perp \rangle = 1$ , onde  $p^\perp$  é um representante de  $\mathbf{p}^\perp$ .

Pelo lema acima, temos

$$\langle d_{\mathbf{p}}\Lambda(s), d_{\mathbf{p}}\Lambda(t) \rangle = \langle s^*, t^* \rangle = -\langle s^* p^\perp, t^* p^\perp \rangle.$$

Considerando  $k = sp/p^\perp$  e  $l = tp/p^\perp$ , temos

$$s^* p^\perp = \bar{k}p \quad \text{e} \quad t^* p^\perp = \bar{l}p$$

e, portanto,  $\langle d_{\mathbf{p}}\Lambda(s), d_{\mathbf{p}}\Lambda(t) \rangle = \bar{k}l$ .

Por outro lado,

$$\langle s, t \rangle = -\frac{\langle sp, tp \rangle}{\langle p, p \rangle} = k\bar{l}.$$

Assim,  $\langle d_{\mathbf{p}}\Lambda(s), d_{\mathbf{p}}\Lambda(t) \rangle = \overline{\langle s, t \rangle}$ . ■

Em suma, a aplicação  $\Lambda$  satisfaz

$$g\left(d_{\mathbf{p}}\Lambda(s), d_{\mathbf{p}}\Lambda(t)\right) = g(s, t) \quad \forall s, t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V),$$

ou seja,  $\Lambda$  é isometria.

Em coordenadas temos

$$\mathbf{B}(V) = \{[x, y] : |x|^2 - |y|^2 < 0\} = \{[x, 1] : |x|^2 < 1\} \cong \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\} = \mathbb{D}^2,$$

$$\mathbf{E}(V) = \{[x, y] : |x|^2 - |y|^2 > 0\} = \{[1, y] : |y|^2 < 1\} \cong \{y \in \mathbb{C} : |y| < 1\} = \mathbb{D}^2,$$

$$\mathbf{S}(V) = \{[x, y] : |x|^2 - |y|^2 = 0\} = \{[x, 1] : |x| = 1\} \cong \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\} = \mathbb{S}^1,$$

onde  $\mathbb{D}^2$  é o disco unitário em  $\mathbb{C}$ .

Induzindo a métrica de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  no disco  $\mathbb{D}^2$  obtemos o famoso disco de Poincaré, que veremos em breve.

Assim,  $\mathbf{P}(V)$  é feito de dois discos de Poincaré colados em um círculo pela fronteira. É de se esperar que esse objeto seja uma esfera.

**Proposição 80** *Temos  $\mathbf{P}(V) \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$ , onde  $\cong$  significa biholomorfismo.*

**Demonstração:** A equivalência  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$  é tradicionalmente estudada em análise complexa, onde a esfera  $\mathbb{S}^2$  munida de estrutura complexa é chamada de esfera de Riemann. Para ver a primeira equivalência simplesmente considere uma base e defina a aplicação  $f : \mathbf{P}(V) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  pela fórmula  $f([z, w]) = z/w$ . ■

Essa nova informação nos permite dar um nome novo para esse espaço em questão: Esfera de Riemann-Poincaré.

É interessante notar que o mapa  $\Lambda : \mathbf{B}(V) \rightarrow \mathbf{E}(V)$  é um velho conhecido nosso. Como vimos, ele é dado em coordenadas por  $\Lambda([z_1, z_2]) = [\bar{z}_2, \bar{z}_1]$ , ou seja, identificando  $\mathbf{P}(V)$  com  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , temos que o mapa  $\Lambda$  é o difeomorfismo da esfera de Riemann dado por

$$\Lambda(z) = \frac{1}{\bar{z}},$$

ou seja,  $\Lambda$  mapeia  $z$  em seu inverso com respeito ao círculo  $\mathbb{S}^1$ .

Estudaremos agora aspectos Riemannianos do  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Veremos que em algum sentido  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ .

Da proposição 67 se obtêm que a curvatura seccional de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  é  $-4$ .

Explicitemos a métrica de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  no disco  $\mathbb{D}^2$ . Fixe então uma base ortonormal  $b_1, b_2$  de  $V$  com  $\langle b_1, b_1 \rangle = 1$  e  $\langle b_2, b_2 \rangle = -1$ .

**Proposição 81** *Considere a carta  $\phi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  dada por  $\phi(z) = [z, 1]$ . A métrica  $h_z(u, v) := g(d_z\phi(u), d_z\phi(v))$  pode ser escrita como*

$$h = \frac{dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

**Demonstração:** Considere  $f \in C^\infty(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1)$ . Note que

$$d_z\phi(u)f = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f([z + \epsilon u, 1]) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(z + \epsilon u, 1) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f((z, 1) + \epsilon(u, 0)).$$

Projetemos  $(u, 0)$  na direção de  $(z, 1)$ :

$$\pi'[(z, 1)](u, 0) = \frac{u\bar{z}}{|z|^2 - 1}(z, 1)$$

e daí segue que

$$\pi[(z, 1)](u, 0) = (u, 0) - \frac{u\bar{z}}{|z|^2 - 1}(z, 1) = \frac{(u, u\bar{z})}{1 - |z|^2}.$$

Considere o vetor tangente  $t_u : [z, 1] \rightarrow [z, 1]^\perp$  dado por

$$t_u(k(z, 1)) = k \frac{(u, u\bar{z})}{1 - |z|^2}.$$

Logo, obtemos  $d_z\phi(u)f = t_u f$  e, conseqüentemente,  $d_z\phi(u) = t_u$ .

Assim, temos

$$h(u, v) = -\frac{g(t_u(z, 1), t_v(z, 1))}{|z|^2 - 1} = \frac{\operatorname{Re} u\bar{v}}{(1 - |z|^2)^2} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{(1 - |z|^2)^2},$$

que é o resultado desejado. ■

**Observação 82** Essa não é a métrica normalmente usada no disco  $\mathbb{D}^2$ . Normalmente tomamos a métrica

$$\frac{4dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}.$$

Se tivéssemos trabalhando com

$$\langle s, t \rangle := -4 \frac{\langle sp, tp \rangle}{\langle p, p \rangle},$$

então  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 = \mathcal{B}(V)$  com essa métrica teria curvatura seccional <sup>9</sup>  $-1$  e o argumento feito acima nos daria que  $h$  é a métrica acima com esse fator 4. Nesse caso, teríamos que  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  e  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  são isométricos pelo teorema de Killing-Hopf, pois ambos espaços são geodésicamente completos, simplesmente conexos (são discos) e possuem curvatura constante iguais. A seguir mostraremos a isometria explícita.

Considere o espaço  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  com forma Hermitiana  $\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle = z_1 \bar{z}_2 - t_1 t_2$ , onde  $\xi_i = (z_i, t_i)$ , o disco

$$\mathbb{D}^2 = \{(z, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z| < 1\}$$

e o hiperboloide

$$H = \{(z, t) \in \mathbb{R}^3 : |z|^2 - t^2 = -1, t > 0\}.$$

A métrica que consideraremos no disco é a acima

$$g_1 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$$

e a métrica que consideraremos em  $H$  é a dada por

$$g_2(u, v) = \langle u | v \rangle.$$

Como vimos na seção anterior,  $(H, g_2)$  é isométrico a  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

Para cada ponto  $(z, t)$  de  $H$ , consideraremos a reta passando por esse ponto e  $(0, -1)$ . Essa intersectará  $\mathbb{D}^2$  em um ponto  $T(z, t)$ . A isometria em questão será esse mapa

$$T : H \rightarrow \mathbb{D}^2.$$

**Observação 83** Se pensarmos em  $\mathbb{S} := \{(z, t) \in \mathbb{R}^3 : |z|^2 - t^2 = -1\}$  com um analogo da esfera, então a aplicação  $T^{-1}$  é a projeção estereográfica com respeito ao polo Sul  $(0, -1)$ .

Similar a projeção estereográfica, a fórmula explícita de  $T$  é dada por

$$T(z, t) = \frac{z}{1+t}.$$

Se escrevermos  $w = T(z, t)$ , temos

$$dw = \frac{dz}{1+t} - \frac{zdt}{(1+t)^2}$$

---

<sup>9</sup>Se uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  tem curvatura seccional constante  $k$ , então  $(M, \lambda g)$  tem curvatura seccional constante  $\lambda^{-1}k$  para todo  $\lambda > 0$ .

e, assim,

$$\begin{aligned}\frac{dw d\bar{w}}{(1 - |w|^2)^2} &= \frac{(t+1)^4}{((t+1)^2 - |z|^2)^2} \left[ \frac{dz d\bar{z}}{(1+t)^2} - \frac{z d\bar{z} dt + \bar{z} dz dt}{(1+t)^3} + \frac{|z|^2 dt^2}{(1+t)^4} \right] \\ &= \frac{(1+t)^2}{((t+1)^2 - |z|^2)^2} \left[ dz d\bar{z} - \frac{z d\bar{z} dt + \bar{z} dz dt}{(1+t)} + \frac{|z|^2 dt^2}{(1+t)^2} \right].\end{aligned}$$

Como  $|z|^2 - t^2 = -1$ , temos

$$z d\bar{z} + \bar{z} dz - 2t dt = 0 \quad \text{e} \quad (t+1)^2 - |z|^2 = 2(1+t)$$

e daí segue que

$$\begin{aligned}\frac{dw d\bar{w}}{(1 - |w|^2)^2} &= \frac{(t+1)^2}{((t+1)^2 - |z|^2)^2} \left[ dz d\bar{z} + \frac{|z|^2 - 2t(1+t)}{(1+t)^2} dt^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} [dz d\bar{z} - dt^2].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{4dw d\bar{w}}{(1 - |w|^2)^2} = dz d\bar{z} - dt^2. \quad (84)$$

Logo,  $\mathbb{D}^2$  e  $H$  são isométricos. Como vimos na secção anterior,  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  é isométrico a  $(H, g_2)$ . Além disso, a menos de uma fator 4, o disco  $(\mathbb{D}^2, g_1)$  é isométrico a  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ .

Da discussão acima obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 85** *A menos de reescalonar a métrica de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ , temos que  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  é isométrico a  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .*

Outro modelo típico do  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  é o modelo do semiplano  $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ . Para construí-lo considere o biholomorfismo

$$F : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

dado por

$$F(z) = i \frac{1-z}{1+z}.$$

Repare que  $F$  é uma transformação de Möbius que mapeia os pontos a seguir

$$1 \mapsto 0, \quad i \mapsto 1 \quad \text{e} \quad -1 \mapsto \infty.$$

Assim,  $F$  mapeia o círculo  $\mathbb{S}^1$  no círculo  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Além disso,  $F(0) = i$ . Logo,  $F(\mathbb{D}^2) = H$ .

Portanto,  $F : \mathbb{D}^2 \rightarrow H$  é biholomorfismo.

Considerando  $w = F(z)$ , obtemos

$$dw = \frac{-2i}{(1+z)^2} dz$$

e consequentemente

$$dw d\bar{w} = 4 \frac{(1 - |z|^2)^2}{(1 + z)^2(1 + \bar{z})^2} \frac{dz d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Observe que

$$\operatorname{Im} w = \frac{\operatorname{Re} (1 - z)(1 + \bar{z})}{(1 + z)(1 + \bar{z})} = \frac{1 - |z|^2}{(1 + z)(1 + \bar{z})}$$

e desta forma obtê-se:

$$\frac{dw d\bar{w}}{(\operatorname{Im} w)^2} = \frac{4dz d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Assim, considerando  $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$  com a métrica

$$\frac{dw d\bar{w}}{(\operatorname{Im} w)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

onde  $w = x + iy$ , obtemos um modelo do plano hiperbólico com curvatura  $-1$ , que é o famoso semiplano de Poincaré.

Por fim estudemos as isometrias de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Usaremos nos nossos cálculos o modelo do semiplano. Seja  $f : \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  uma isometria que preserva a orientação e escreva

$$z = x + iy \quad \text{e} \quad u + iv = f(z).$$

Sabemos que

$$du^2 + dv^2 = \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) dx^2 + \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) dy^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Como

$$\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

e

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2.$$

Assim,  $f$  é uma transformação conforme que preserva a orientação, isto é, a  $d_z f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é sempre um múltiplo de uma matriz de rotação. Daí segue que  $f$  satisfaz as equações de Cauchy-Riemann.

Deste modo,  $f$  é biholomorfismo do semiplano, ou seja, é uma transformação de Möbius da forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $ac - bd = 1$ .

De fato, isso decorre do fato que biholomorfismos do disco unitários são transformações de Möbius, uma das consequências do Lema de Schwarz.

Reciprocamente, um cálculo direto mostra que transformações Möbius com coeficientes reais são sempre isometrias.

Em resumo, o grupo das isometrias que preservam orientação  $\text{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1)^+$  é dado pelas transformações de Möbius com coeficientes reais. O grupo de isometrias  $\text{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1)$  é gerado pelas isometrias que preservam orientação juntamente com uma que inverte a orientação. O difeomorfismo de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  dado por  $z \mapsto -\bar{z}$  é uma isometria que inverte a orientação.

Note que transformações de Möbius correspondem a isomorfismos do projetivo  $\mathbf{P}(\mathbb{C}^2)$ . Basta notar que

$$[z_1, z_2] \mapsto [az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2] \rightsquigarrow z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

onde

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Em outras palavras, o espaço das transformações Möbius é  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ .

Da mesma forma, o grupo de transformações de Möbius com coeficientes reais pode ser identificado com  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , o grupo dos isomorfismos do projetivo  $\mathbf{P}(\mathbb{R}^2)$ .

Na secção 5 voltaremos a estudar o grupo de isometria de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ .

Por fim, podemos considerar também o espaço  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Fixando um espaço vetorial complexo  $V$  de dimensão  $n+1$  munido de uma forma Hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de assinatura  $+\cdots+$ , podemos definir a métrica Hermitiana

$$\langle s, t \rangle = -\frac{\langle sp, tp \rangle}{\langle p, p \rangle} \quad \forall s, t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V),$$

onde  $\mathbf{p}$  é um ponto não isotrópico. O espaço hiperbólico complexo de dimensão  $n$  é  $\mathbf{B}(V)$ , que é variedade Riemanniana, e o denotamos por  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . A métrica Riemanniana  $g = \text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  terá curvatura seccional variando no intervalo  $[-4, -1]$  graças à proposição 66. Como vimos anteriormente, para  $n = 1$  essa curvatura é constante. Para  $n > 1$  essa curvatura varia, pois  $T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$  sempre terá vetores linearmente independentes no sentido complexo. Portanto, a identidade  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{2n}$  só vale para  $n = 1$ .

## 4.6 Espaço de Fubini-Study

Considere o espaço vetorial  $V$  sobre  $\mathbb{K}$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Nesse caso temos que  $\mathbf{B}(V) = \mathbf{S}(V) = \emptyset$  e  $\mathbf{E}(V) = \mathbf{P}(V)$ .

Sobre esse espaço consideramos a métrica Hermitiana

$$\langle s, t \rangle = \frac{\langle sp, tp \rangle}{\langle p, p \rangle} \quad \forall s, t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V).$$

Chamamos essa métrica de métrica de Fubini-Study, embora na literatura esse nome seja usado somente no caso complexo. Chamaremos o projetivo com esse métrica de espaço de Fubini-Study.

Analisemos um pouco o caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Considere  $V = \mathbb{R}^{n+1}$  com sua métrica usual e a esfera  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ . A aplicação  $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{R}}^n$  dada por  $x \mapsto [x]$  é recobrimento.

Mostremos que esse recobrimento é Riemanniano. Considere o vetor  $v \in T_x \mathbb{S}^n$ . Se  $f \in C^\infty(\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^n)$ , então

$$d_x \phi(v)f = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(p + tv),$$

que coincide com  $t_v f$ , onde  $t_v \in T_{[x]} \mathbf{P}_{\mathbb{R}}^n$  é dado por

$$t_v = \langle \cdot, x \rangle v.$$

Assim,

$$\langle d_x \phi(u), d_x \phi(v) \rangle = \frac{\langle t_u(x), t_v(x) \rangle}{\langle x, x \rangle} = \langle u, v \rangle.$$

Logo, o recobrimento  $\phi$  é Riemanniano. Assim, a métrica do projetivo é essencialmente a métrica de  $\mathbb{S}^n$ , pois se considerarmos o grupo de isometrias  $\Gamma = \{\text{Id}, \gamma\}$ , onde  $\gamma : x \mapsto -x$ , então obtemos que  $\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^n$  é isométrico a  $\mathbb{S}^n/\Gamma$ .

Agora estudemos o caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Análogo ao que ocorre com o  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , a curvatura seccional de  $\mathbf{P}(V)$  é constante e igual a 4 quando  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{P}(V) = 1$  e varia no intervalo  $[1, 4]$  quando  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{P}(V) > 1$ . Além disso, nesse segundo caso, todos os valores no intervalo  $[1, 4]$  são atingidos.

Analisemos o que ocorre no caso em que  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{P}(V) = 1$ .

Como vimos na secção anterior, temos que  $\mathbf{P}(V)$  é biholomorfo a esfera.

A métrica Riemanniana da esfera  $\mathbf{P}(V)$  pode ser colocada numa carta dada por uma base ortonormal:

$$g = \frac{dzd\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}.$$

Repare que essa métrica é similar a aquela encontrada na proposição 81. De fato, a conta feita aqui é igual a feita lá.

Consideraremos essa métrica em  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Essa métrica coincide com a métrica da esfera de raio 1/2. De fato, considerando a esfera

$$S = \{(z, t) : |z|^2 + t^2 = 1/4\}$$

com métrica induzida de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  e definindo a aplicação  $(z, t) \mapsto w = \frac{z}{1/2+t}$  de  $S$  em  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , obtêm-se

$$\frac{dw d\bar{w}}{(1 + |w|^2)^2} = dz d\bar{z} + dt^2,$$

assim como foi feito para se obter a identidade 84.

Para  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{P}(V) > 1$  o projetivo  $\mathbf{P}(V)$  não é uma esfera porque  $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n$  é uma variedade de Kahler compacta e, conseqüentemente,  $H_{dR}^2(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n) \neq 0$ , o que não é o caso para  $\mathbb{S}^{2n}$  com  $n > 1$ .

Mostremos que a variedade  $\mathbf{P}(V)$  é de fato de Kahler. Basta mostrar que a 2-forma

$$\omega(s, t) = \text{Im} \frac{\langle sp, tp \rangle}{\langle p, p \rangle}$$

define uma estrutura simpléctica.



**Proposição 86** A 2-forma  $\omega$  é não degenerada e fechada.

**Demonstração:** Claramente essa forma é não degenerada. Mostremos que ela é fechada.

Usaremos a expressão da derivada exterior em termo dos comutadores. Se  $t_1, t_2, t_3$  são vetores em  $\mathbf{p}$  e  $T_1, T_2, T_3$  são seus respectivos campos espalhados, então

$$\begin{aligned} d\omega(t_1, t_2, t_3) &= d\omega(T_1, T_2, T_3)p \\ &= [T_1\omega(T_2, T_3)]p - [T_2\omega(T_1, T_3)]p + [T_1\omega(T_2, T_3)]p \\ &\quad - \omega([T_1, T_2], T_3)p + \omega([T_1, T_3], T_2)p - \omega([T_2, T_3], T_1)p. \end{aligned}$$

Pelo lema 58, temos  $[T_i, T_j](p) = 0$ .

Assim,

$$d\omega(t_1, t_2, t_3) = [T_1\omega(T_2, T_3)]p - [T_2\omega(T_1, T_3)]p + [T_1\omega(T_2, T_3)]p.$$

Agora repare que

$$\begin{aligned} [T_1\omega(T_2, T_3)]p &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \text{Im} \frac{\langle T_2(p + \epsilon t_1 p), T_3(p + \epsilon t_1 p) \rangle}{\langle p + \epsilon t_1 p, p + \epsilon t_1 p \rangle} \\ &= \text{Im} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \frac{\langle T_2(p + \epsilon t_1 p), T_3(p + \epsilon t_1 p) \rangle}{\langle p + \epsilon t_1 p, p + \epsilon t_1 p \rangle} \\ &= \text{Im} [T_1 \langle T_2, T_3 \rangle]p \\ &= \text{Im} (\langle \nabla_{T_1} T_2(p), t_3 \rangle + \langle t_2, \nabla_{T_1} T_3(p) \rangle) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois  $\nabla_{T_j} T_k(p) = 0$  pela proposição 57, e similarmente os outros termos são nulos. Portanto,  $d\omega(t_1, t_2, t_3) = 0$ . ■

No caso  $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$  temos que  $\omega$  é uma forma de volume da esfera e em coordenadas é dada por

$$\omega = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} = \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Repare que  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  é variedade Kahler pelo mesmo raciocínio.

## 4.7 Espaço Euclidiano

Ao estudarmos o caso de geometrias complexas as vezes obtemos o espaço  $\mathbf{P}(V)$ , onde  $V$  tem uma forma Hermitiana de assinatura  $+0$ . Embora esse espaço seja degenerado, ele contém alguma geometria. Repare que  $\mathbf{b} := \mathbf{S}(V)$  é um ponto em  $\mathbf{P}(V)$ , e  $\mathbf{E}(V) = \mathbf{P}(V) \setminus \{\mathbf{b}\}$ .

Tome  $\mathbf{p} \in \mathbf{E}(V)$  e  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ . Todo ponto de  $\mathbf{E}(V)$  pode ser representado como  $p + \alpha tp$ . Assim, temos a carta

$$\phi_{p,t} : \mathbf{E}(V) \rightarrow \mathbb{C}$$

dada por  $p + \alpha tp \mapsto \alpha$ .

Se  $\mathbf{q} \in \mathbf{E}(V)$  e  $s \in T_{\mathbf{q}}\mathbf{P}(V) \setminus \{0\}$ , então temos a carta  $\phi_{q,s}$ .

Note que  $tp, sq \in \mathbf{S}(V)$ , que é  $\mathbf{b}$ , logo existe  $k \in \mathbb{C}$  tal que  $sq = ktp$ . Além disso, existe  $\beta$  tal que  $q = p + \beta tp$ , pois  $p, tp$  é base de  $V$ . Se  $z \in \mathbb{C}$ , então  $\phi_q^{-1}(z) = q + zsq$ . Logo,

$$\phi_q^{-1}(z) = q + zsq = (p + \beta tp) + zkt p = p + (kz + \beta)tp.$$

Assim,

$$\phi_p \circ \phi_q^{-1}(z) = kz + \beta,$$

ou seja, a mudança de carta é afim.

Portanto, o espaço  $\mathbf{E}(V)$  é naturalmente um espaço afim.

Além disso, faz sentido refletir pontos com respeito a retas e medir ângulos, pois esses processos são invariantes pelas mudanças de carta acima, fazendo com que esse espaço afim seja muito parecido com o Euclidiano. Em particular, temos o conceito de reta.

No entanto, a métrica em  $\mathbf{E}(V)$  é nula, ou seja, não se tem noção de distância nesse espaço.

Curiosamente, as geodésicas de  $\mathbf{P}(V)$  correspondem as retas nas cartas acima. O que nos deixa com uma sensação forte de que esse espaço é Euclidiano.

De fato, seja  $W$  um subespaço bidimensional real de  $V$  tal que  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W}$  é real e não nula. Seja  $u, v$  base ortonormal desse espaço. Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W}$  é não nula, não podemos ter assinatura 00. Logo, a assinatura só poderia ser +0 ou ++. Como  $W$  está munido com a forma Hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  devemos ter que a matriz de Gram de  $u$  e  $v$  tem determinante 0, pois essa é a mesma matriz de Gram de  $u$  e  $v$  em  $V$ . Assim, um dos vetores  $u$  ou  $v$  pertence a  $\mathbf{b}$ , a menos de escolha de escalar, e, portanto, podemos supor que  $W$  contém  $\mathbf{b}$ . Logo, toda geodésica de  $\mathbf{P}(V)$  passa por  $\mathbf{b}$ .

Fixe a carta  $\phi_{p,t}$ . Podemos supor que  $\langle p, p \rangle = 1$ .

Se temos uma geodésica  $G = \mathbf{P}(W)$ , então existe a base ortonormal  $u, v$  para  $W$  tal que  $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$ . Podemos supor que  $\langle u, u \rangle = 1$  e  $\langle v, v \rangle = 0$ . Assim, existe  $c \in \mathbb{C}^\times$  tal que  $v = ctp$ . O ponto  $u$  pode ser escrito como  $u = p + dtp$ . Temos que a geodésica  $G$  é parametrizada por

$$c(\epsilon) = u + \epsilon ctp = p + (\epsilon c + d)tp,$$

que em coordenadas é dado por

$$\epsilon \mapsto \epsilon c + d.$$

Repare que os pontos  $d$  e  $c$  são arbitrários se variarmos os possíveis  $u$  e  $v$ .

Logo, temos a equivalência entre geodésicas de  $\mathbf{P}(V)$  e retas do espaço afim  $\mathbf{E}(V)$ .

Em suma, esse espaço é o espaço Euclidiano, apesar de não termos distância, se pensarmos que o plano Euclidiano é um plano tal que o grupo de isometrias é o grupo de isometrias do plano Euclidiano. De fato, é fácil ver  $\text{PU}(V)$  é  $\text{Iso}_+(\mathbb{R}^2)$ .

## 4.8 Transporte Paralelo

Novamente, considere o  $\mathbb{K}$  espaço vetorial  $V$  com a forma hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Se  $G = \mathbf{P}(W)$  é uma geodésica, então a assinatura de  $W$  é  $++$ ,  $--$ ,  $+-$ ,  $0-$  ou  $0+$ . Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , então defina  $\mathbb{K}W = W$  e se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , então defina  $\mathbb{K}W = W \oplus iW$ . Assim, temos a reta projetiva  $L = \mathbf{P}(\mathbb{K}W)$ .

No caso em que o corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  obtemos que  $L = G$ , ou seja, um círculo, e no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  temos que  $L$  é uma esfera. Ainda no caso complexo, de acordo com a assinatura de  $W$ , temos que  $L$  é uma esfera de Riemann-Poincaré, uma esfera de Fubini-Study ou uma esfera Euclidiana. Chamaremos essa superfície  $L$  de geodésica complexa.

Nosso objetivo aqui é descrever transporte paralelo de vetores ao longo de geodésicas algebricamente.

**Definição 87** Considere  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$  e  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ . O campo  $\text{tan}$  de  $t$  é dado pela expressão

$$\text{Tn}(t)(x) = \frac{T(x)}{\text{ta}(x, p)} \quad \forall \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V) : \text{ta}(p, x) \neq 0\},$$

onde  $T$  é o campo espalhado de  $t$ .

O campo  $\text{tan}$  fará parte da expressão do transporte paralelo.

**Proposição 88** Considere a geodésica  $G = \mathbf{P}(W)$  e  $\mathbf{p} \in G \setminus \mathbf{S}(V)$ . Se  $t \in T_{\mathbf{p}}G \setminus \{0\}$ , então temos que  $\text{Tn}(t)(x) \in T_{\mathbf{x}}G \setminus \{0\}$  para todo ponto  $\mathbf{x} \in G \setminus \mathbf{S}(V)$  satisfazendo  $\langle x, p \rangle \neq 0$ .

**Demonstração:** Seja  $T$  o campo espalhado de  $t$ . Temos que  $tp \in W \cap \mathbf{p}^\perp$ . Seja  $p'$  gerador do espaço  $W \cap \mathbf{p}^\perp$ . Existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$t = c \frac{\langle \cdot, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p'.$$

Assim,

$$T(x)x = \pi[x] \circ t \circ \pi'[x]x = c \frac{\langle x, p \rangle}{\langle p, p \rangle} \pi[x]p'.$$

Temos

$$T(x)x = c \frac{\langle x, p \rangle}{\langle p, p \rangle} \left( p' - \frac{\langle p', x \rangle}{\langle x, x \rangle} x \right),$$

que pertence a  $W$ . Logo,  $T(x) \in T_{\mathbf{x}}G$  (veja proposição 73). Falta mostrar que  $T(x) \neq 0$ . Mas isso é claro: como  $\langle x, p \rangle \neq 0$ , temos que  $x$  e  $p$  não são ortogonais e a expressão de  $T(x)$  não se anula. ■

**Proposição 89** Seja  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$  e  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ . Se  $T$  é o campo espalhado de  $t$ , então

$$T(x)\text{ta}(p, \cdot) = -2\text{ta}(p, x) \text{Re} \frac{\langle tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

para todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ .

**Demonstração:** Sabemos que

$$T(x)\text{ta}(p, \cdot) = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{|\langle p, x + \epsilon\xi \rangle|^2}{\langle p, p \rangle \langle x + \epsilon\xi, x + \epsilon\xi \rangle},$$

onde  $\xi = T(x)x$ .

Note que  $\langle x + \epsilon\xi, x + \epsilon\xi \rangle = \langle x, x \rangle + \epsilon^2 \langle \xi, \xi \rangle$  e assim

$$\frac{1}{\langle x + \epsilon\xi, x + \epsilon\xi \rangle} = \frac{1}{\langle x, x \rangle} \left( 1 - \frac{\langle \xi, \xi \rangle}{\langle x, x \rangle} \epsilon^2 + \dots \right) = \frac{1}{\langle x, x \rangle} + o(\epsilon).$$

Além disso,

$$|\langle p, x + \epsilon\xi \rangle|^2 = |\langle p, x \rangle + \langle p, \xi \rangle \epsilon|^2 = |\langle p, x \rangle|^2 + 2\text{Re}(\langle p, x \rangle \langle \xi, p \rangle) \epsilon + o(\epsilon),$$

onde usamos que  $\overline{\langle p, \xi \rangle} = \langle \xi, p \rangle$ .

Portanto,

$$T(x)\text{ta}(p, \cdot) = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \left( \frac{|\langle p, x \rangle|^2}{\langle p, p \rangle \langle x, x \rangle} + \frac{2\text{Re}(\langle p, x \rangle \langle \xi, p \rangle)}{\langle p, p \rangle \langle x, x \rangle} \epsilon \right) = \frac{2\text{Re}(\langle p, x \rangle \langle \xi, p \rangle)}{\langle p, p \rangle \langle x, x \rangle}.$$

Por definição,  $T(x) = \pi[x]t\pi'[x]$ . Sabemos que  $\pi'[x]x = x$  e assim  $\xi = \pi[x]tx$ . Desta forma,

$$\xi = tx - \frac{\langle tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x$$

e daí segue que

$$\langle \xi, p \rangle = -\langle tx, x \rangle \frac{\langle x, p \rangle}{\langle x, x \rangle},$$

pois  $tx \in \mathbf{p}^\perp$  e, consequentemente,  $\langle tx, p \rangle = 0$ .

Portanto,

$$T(x)\text{ta}(p, \cdot) = -2\text{ta}(p, x) \frac{\text{Re} \langle tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

■

**Proposição 90** *Considere o espaço vetorial complexo  $V$  munido de uma forma hermitiana e o ponto  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ . Considere também a geodésica  $G := \mathbf{P}(W)$  passando por  $\mathbf{p}$ , onde  $W$  é um subespaço real bidimensional tal que a forma hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  restrita a  $W$  é real e não nula. Temos que  $\mathbb{C}T_{\mathbf{p}}G = T_{\mathbf{p}}L$ , onde  $L = \mathbf{P}(\mathbb{C}W)$  é a geodésica complexa associada a  $G$ .*

**Demonstração:** Fixe  $p$ , um representante de  $\mathbf{p}$  em  $W$ .

Seja  $t \in T_{\mathbf{p}}G$ . Temos que  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$  e  $tp \in W$ , pela proposição 73. Desta forma,  $t$  é uma aplicação de  $\text{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}W, \mathbb{C}W)$  que leva  $\mathbf{p}$  em  $\mathbf{p}^\perp$ . Logo,  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(\mathbb{C}W)$ . Portanto,

$$\mathbb{C}T_{\mathbf{p}}G \subset T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(\mathbb{C}W),$$

pois  $T_{\mathbf{p}}G \subset T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(\mathbb{C}W)$  e  $T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(\mathbb{C}W)$  é espaço complexo.

Agora considere  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(\mathbb{C}W)$ . Temos que  $tp \in \mathbf{p}^\perp$  e  $tp \in \mathbb{C}W$ . Note que  $W \cap \mathbf{p}^\perp$  é unidimensional. De fato, esse espaço é o kernel da aplicação  $\langle \cdot, p \rangle : W \rightarrow \mathbb{R}$ , que é um funcional não nulo e sobrejetor, pois  $\langle p, p \rangle \neq 0$ . Assim,  $\dim_{\mathbb{R}} W \cap \mathbf{p}^\perp = 1$ . Seja  $p'$  um representante não nulo de  $W \cap \mathbf{p}^\perp$ .

Da mesma forma, como  $\mathbb{C}W \cap \mathbf{p}^\perp$  é o kernel do funcional linear  $\langle \cdot, p \rangle : \mathbb{C}W \rightarrow \mathbb{C}$ , temos que  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}W \cap \mathbf{p}^\perp = 1$ . Além disso, como  $p' \in W \cap \mathbf{p}^\perp \subset \mathbb{C}W \cap \mathbf{p}^\perp$ , temos que  $\mathbb{C}W \cap \mathbf{p}^\perp = \mathbb{C}p'$ . Portanto,  $tb = cb'$  com  $c \in \mathbb{C}$ .

Se  $c = 0$ , então  $t = 0$  e, portanto,  $t \in T_{\mathbf{p}}G$ . Podemos supor que  $c \neq 0$ . Defina  $s = c^{-1}t$ . Temos que  $s \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$  e  $sp \in W$ , ou seja,  $s \in T_{\mathbf{p}}G$ . Logo,  $t = cs \in \mathbb{C}T_{\mathbf{p}}G$ .

Portanto,

$$\mathbb{C}T_{\mathbf{p}}G = T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(\mathbb{C}W).$$

■

**Proposição 91** *Considere a geodésica  $G = \mathbf{P}(W)$  e a geodésica complexa  $L$  de  $G$ . Fixe um ponto  $\mathbf{p} \in G \setminus \mathbf{S}(V)$ . Se  $t \in T_{\mathbf{p}}G \setminus \{0\}$  e  $h \in T_{\mathbf{p}}L$ , então  $\nabla_{\text{Tn}(t)}\text{Tn}(h)(x) = 0$  para todo  $x \in G \setminus \mathbf{S}(V)$  tal que  $\langle x, p \rangle \neq 0$ .*

**Demonstração:** No que segue suporemos  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , o caso real é análogo.

Sejam  $T$  e  $H$  os campos espalhados de  $t$  e  $h$ . Basta mostrar que

$$\nabla_{T(x)}\text{Tn}(h) = 0.$$

Por definição

$$\nabla_{T(x)}\text{Tn}(h) = [d\text{Tn}(h)(T(x))]_x.$$

Como  $\text{Tn}(h) = \text{ta}(p, \cdot)^{-1}H$  e usando a proposição 89, temos

$$\begin{aligned} d\text{Tn}(h)(T(x)) &= \frac{-1}{\text{ta}(p, x)^2}T(x)[\text{ta}(p, \cdot)]H(x) + \text{ta}(p, x)^{-1}dH(T(x)) \\ &= \frac{2}{\text{ta}(p, x)}\text{Re} \frac{\langle tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle}H(x) + \text{ta}(p, x)^{-1}dH(T(x)). \end{aligned}$$

Podemos supor que  $p \in W$  e  $x = p + rtp \in W$  com  $r \in \mathbb{R}$  pela proposição 73.

Seja  $\alpha = \langle p, p \rangle$  e  $\beta = \langle tp, tp \rangle$ . Assim,  $tx = tp$ ,  $\langle tx, x \rangle = r\beta$  e  $\langle x, x \rangle = \alpha + r^2\beta$ .

A tância pode ser escrita como

$$\text{ta}(p, x) = \frac{\alpha}{(\alpha + r^2\beta)}.$$

Portanto,

$$d\text{Tn}(h)(T(x)) = \frac{2r\beta}{\alpha}Hx + \frac{\alpha + r^2\beta}{\alpha}dH(T(x)).$$

Assim,

$$\nabla_{T(x)} \text{Tn}(h) = \frac{2r\beta}{\alpha} H(x) + \frac{\alpha + r^2\beta}{\alpha} \nabla_{T(x)} H.$$

Como  $\nabla_{T(x)} H = [h\pi[x]t - t \circ \pi'[x]h]_x$ , segue que

$$[\nabla_{T(x)} H]x = [h\pi[x]t - t \circ \pi'[x]h]_xx = \pi[x]h\pi[x]tx - \pi[x]t\pi'[x]hx.$$

Como  $\mathbb{C}T_{\mathbf{p}}G = T_{\mathbf{p}}L$ , existe  $c \in \mathbb{C}$  tal que  $h = ct$ , de onde segue que  $\langle hx, tx \rangle = c$ .

Note que

$$\pi[x]t\pi'[x]hx = \frac{r\beta c}{\alpha + r^2\beta} \left( tx - \frac{\beta r}{\alpha + r^2\beta} x \right)$$

e

$$\pi[x]h\pi[x]tx = -\frac{r\beta c}{\alpha + r^2\beta} \left( tx - \frac{r\beta}{\alpha + r^2\beta} x \right),$$

onde usamos que  $\langle hx, x \rangle = \langle hx, tx \rangle = r\beta c$ , pois  $x = p + rtp$ ,  $tx = tp$  e  $hx = hp$ .

Logo,

$$\pi[x]h\pi[x]tx - \pi[x]t\pi'[x]hx = \frac{2r\beta c}{\alpha + r^2\beta} \left( \frac{r\beta}{\alpha + r^2\beta} x - tx \right)$$

e, consequentemente,

$$\frac{\alpha + r^2\beta}{\alpha} [\nabla_{T(x)} H]x = \frac{2r\beta c}{\alpha} \left( \frac{r\beta}{\alpha + r^2\beta} x - tx \right).$$

Por outro lado,

$$H(x)x = \pi[x]hx = hx - \frac{\langle hx, tx \rangle}{\langle x, x \rangle} x = c \left( tx - \frac{r\beta}{\alpha + r^2\beta} x \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} [\nabla_{T(x)} \text{Tn}(h)]x &= \frac{2r\beta}{\alpha} H(x)x + \frac{\alpha + r^2\beta}{\alpha} [\nabla_{T(x)} H]x \\ &= \frac{2r\beta c}{\alpha} \left( tx - \frac{r\beta}{\alpha + r^2\beta} x \right) + \frac{2r\beta c}{\alpha} \left( \frac{r\beta}{\alpha + r^2\beta} x - tx \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

E assim, podemos transportar vetores tangentes a geodésica complexa algebricamente.

**Corolário 92** *Considere a geodésica  $G$  e sua geodésica complexa  $L$ . Seja  $c : \mathbb{R} \rightarrow G$  uma curva geodésica passando por  $\mathbf{p}$  no instante 0. Se  $h \in T_{\mathbf{p}}L$ , então  $\nabla_{c'(\epsilon)} \tan(h) = 0$  para todo  $\epsilon$ .*

Nos falta transportar os vetores não tangentes a geodésica complexa.

**Definição 93** Seja  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$  e  $t \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ . O campo cotan é definido pela fórmula  $\text{Ct}(t)(x) = \frac{T(x)}{\sqrt{\text{ta}(x, \mathbf{p})}}$  e está definido para todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{P}(V)$  satisfazendo  $\text{ta}(x, \mathbf{p}) > 0$ .

**Proposição 94** Considere a geodésica  $G = \mathbf{P}(W)$  e a geodésica complexa  $L$  de  $G$ . Fixe um ponto  $\mathbf{p} \in G \setminus \mathbf{S}(V)$ . Se  $t \in T_{\mathbf{p}}G \setminus \{0\}$  e  $h \in (T_{\mathbf{p}}L)^\perp$ , então  $\nabla_{T_{\mathbf{p}}(t)} \text{Ct}(h)(x) = 0$  para todo  $\mathbf{x} \in G \setminus \mathbf{S}(V)$  tal que  $\text{ta}(x, \mathbf{p}) > 0$ .

**Demonstração:** No que segue suporemos  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , o caso real é análogo.

Sejam  $T$  e  $H$  os campos espalhados de  $t$  e  $h$ . Basta mostrar que

$$\nabla_{T_x} \text{Ct}(h) = 0.$$

Por definição

$$\nabla_{T(x)} \text{Ct}(h) = [d\text{Ct}(h)(Tx)]_x.$$

Como  $\text{Ct}(h) = \text{ta}(p, \cdot)^{-1/2} H$  e usando a proposição 89, temos

$$\begin{aligned} d\text{Ct}(h)(T(x)) &= \frac{-1/2}{\text{ta}(p, x)^{3/2}} T(x) [\text{ta}(p, \cdot)] H(x) + \frac{1}{\text{ta}(p, x)^{1/2}} dH(T(x)) \\ &= \frac{1}{\text{ta}(p, x)^{1/2}} \left( \text{Re} \frac{\langle tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} H(x) + dH(T(x)) \right) \end{aligned}$$

Podemos supor que  $p \in W$  e  $x = p + rtp \in W$  com  $r \in \mathbb{R}$  pela proposição 73. Seja  $\alpha = \langle p, p \rangle$  e  $\beta = \langle tp, tp \rangle$ . Assim,  $tx = tp$ ,  $\langle tx, x \rangle = r\beta$  e  $\langle x, x \rangle = \alpha + r^2\beta$ .

Temos,

$$\text{ta}(p, x)^{1/2} d\text{Ct}(h)(T(x)) = \frac{r\beta}{\alpha + r^2\beta} H(x) + dH(T(x)).$$

e, consequentemente,

$$\text{ta}(p, x)^{1/2} \nabla_{T(x)} \text{Ct}(h) = \frac{r\beta}{\alpha + r^2\beta} H(x) + \nabla_{T(x)} H.$$

Como  $\nabla_{T_{*}(x)} H = [h\pi[x]t - t \circ \pi'[x]h]_x$ , temos

$$\nabla_{T_x} Hx = [h\pi[x]t - t \circ \pi'[x]h]_x x = \pi[x]h\pi[x]tx - \pi[x]t\pi'[x]hx.$$

Note que  $hx = hp$  e  $\langle hp, tp \rangle = 0$ . Daí segue que

$$\pi[x]t\pi'[x]hx = 0$$

e

$$\pi[x]h\pi[x]tx = -\frac{\beta r}{\alpha + r^2\beta} hx,$$

onde usamos que  $\langle hx, x \rangle = 0$ , pois  $x = p + rtp$  e  $hx = hp \in T_{\mathbf{p}}L^\perp$ .

Assim,

$$\pi[x]h\pi[x]tx - \pi[x]t\pi'[x]hx = -\frac{\beta r}{\alpha + r^2\beta} hx.$$

Logo,

$$[\nabla_{T(x)}H]x = -\frac{\beta r}{\alpha + r^2\beta}hx.$$

Por outro lado,

$$H(x)x = \pi[x]hx = hx - \frac{\langle hx, tx \rangle}{\langle x, x \rangle}x = hx.$$

Portanto,

$$\text{ta}(p, x)^{1/2}\nabla_{T(x)}\text{Ct}(h) = \frac{r\beta}{\alpha + r^2\beta}H(x) + \nabla_{T(x)}H = 0.$$

■

**Corolário 95** *Considere a geodésica  $G$  e sua geodésica complexa  $L$ . Seja  $c : \mathbb{R} \rightarrow G$  uma curva geodésica passando por  $p$  no instante 0. Se  $h \in (T_p L)^\perp$ , então  $\nabla_{c'(\epsilon)}\text{Ct}(h) = 0$  para todo  $\epsilon$ .*

Fixe a geodésica  $G = \mathbf{P}(W)$  e  $\mathbf{p} \in G \setminus \mathbf{S}(V)$  com  $W$  não degenerado. Temos que  $T_p \mathbf{P}(V)$  e  $T_p L$  são não denegerados. Assim,  $T_p L \oplus T_p L^\perp = T_p \mathbf{P}(V)$ . Lembre-se que estamos supondo que  $V$  é espaço não degenerado.

Se  $t \in T_p \mathbf{P}(V)$ , então  $t = u + v$ , com  $u \in T_p L$  e  $v \in T_p L^\perp$ . O transporte paralelo de  $t$  ao longo de uma geodésica  $c$  passando por  $\mathbf{p}$  no instante 0 é  $\text{Tn}(u)(c(\epsilon)) + \text{Ct}(v)(c(\epsilon))$ .

Isso descreve totalmente o transporte paralelo ao longo de geodésicas não degeneradas.

Tratemos o caso em que a geodésica é degenerada, isto é,  $W$  tem assinatura  $+0$  ou  $-0$ . Nesse caso, não temos a decomposição  $T_p L \oplus T_p L^\perp = T_p \mathbf{P}(V)$ .

Repare que  $\text{ta}(p, x) = 1$  para quaisquer  $\mathbf{p}, \mathbf{x} \in G \setminus \mathbf{S}(V)$ , pois o determinante da matriz de Gram de  $W$  é 0. Assim, se  $\mathbf{p} \in G \setminus \mathbf{S}(V)$  e  $t \in T_p L$ , então  $\text{Tn}(t) = \text{Ct}(t)$ .

O campo  $\text{ta}$  só nos permite transportar vetores tangentes de  $L$ . Para transportar vetores arbitrários ao longo da geodésica usamos o campo  $\text{eu}$ .

**Definição 96** *Se  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$  e  $t \in T_p \mathbf{P}(V)$ , então podemos definir o campo  $\text{eu}$  associado a  $t$  como sendo*

$$\text{Eu}(t)(x) = \frac{1}{2}(\pi[p]\pi'[x]t)_x + T(x)$$

para todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{S}(V)$ .

**Proposição 97** *Seja  $G$  uma geodésica euclidiana, isto é,  $W$  tem assinatura  $+0$  ou  $-0$ . Fixe um ponto  $\mathbf{p} \in G \setminus \mathbf{S}(V)$ . Se  $h \in T_p \mathbf{P}(V)$  e  $t \in T_p G \setminus \{0\}$ , então  $\nabla_{\text{Tn}(t)}\text{Eu}(h)(x) = 0$  para todo  $\mathbf{x} \in G \setminus \mathbf{S}(V)$ .*



**Demonstração:** Assumiremos que a assinatura de  $W$  é  $+0$ . Seja  $z$  um vetor nulo de  $W \setminus \{0\}$ , isto é,  $\langle z, z \rangle = 0$ .

Sabemos que  $\text{Tn}(t) = T$ , pois  $W$  é degenerado e, portanto,  $\text{ta}(p, x) = 1$  para todo  $x \in G \setminus \mathbf{S}(V)$ .

Podemos supor  $\langle p, p \rangle = 1$ . Assim, temos  $tp = c\langle \cdot, p \rangle z$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , pois  $t \in T_p G$  (veja proposição 73). Alterando  $z \neq 0$  se necessário, podemos supor que  $c = 1$ . Assim,  $t = \langle \cdot, p \rangle z$ .

Considere  $x \in G \setminus \mathbf{S}(V)$ , podemos supor que  $x$  é representado por um elemento  $x$  em  $W$ , que pode ser escrito como  $x = p + rz$  para algum  $r \in \mathbb{R}$ .

Calculemos  $\text{Eu}(h)$ .

Para o cálculo a seguir precisamos explicitar  $T(x)$ . Da definição de  $T$  obtemos

$$T(x)x = \langle x, x \rangle tx,$$

ou seja,  $Tx = \langle \cdot, x \rangle z$ , pois  $tp = tx = z$ . Repare que  $(T(x))^* = \langle \cdot, z \rangle x$ .

Calculemos o vetor  $\nabla_{T(x)}\{(\pi[p]\pi'[\bullet]h)_\bullet\}$  no ponto  $x$ . Para simplificar a notação, usaremos  $\xi := T(x)$ .

$$\begin{aligned} \nabla_\xi\{(\pi[p]\pi'[\bullet]h)_\bullet\}x &= (d\{(\pi[p]\pi'[\bullet]h)_\bullet\}(\xi))_xx \\ &= \pi[x]d\{(\pi[p]\pi'[\bullet]h)_\bullet\}(\xi)x \\ &= \pi[x]\left(\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}(\pi[p]\pi'[x + \epsilon\xi x]h)_{x+\epsilon\xi x}\right) \\ &= \pi[x]\left(\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\pi[x + \epsilon\xi x]\pi[p]\pi'[x + \epsilon\xi x]h\pi'[x + \epsilon\xi x]x\right) \\ &= \pi[x]\left(-(\xi + \xi^*)\pi[p]\pi'[x]hx + \pi[x]\pi[p](\xi + \xi^*)hx + \pi[x]\pi[p]\pi'[x]h(\xi + \xi^*)x\right) \\ &= -\pi[x](\xi + \xi^*)\pi[p]\pi'[x]hx + \pi[x]\pi[p](\xi + \xi^*)hx + \pi[x]\pi[p]\pi'[x]h(\xi + \xi^*)x. \end{aligned}$$

Como  $p \oplus p^\perp = V$ , pois  $V$  é não degenerado, temos que  $hz = 0$ . Assim,  $h(\xi + \xi^*)x = 0$ , anulando a última parcela, pois  $\xi = \langle \cdot, x \rangle z$  e  $\xi^* = \langle \cdot, z \rangle x$ .

Calculemos a segunda parcela.

Note que  $\xi hx = \langle hx, x \rangle z$  e  $\xi^* hx = \langle hx, z \rangle x$ . Assim

$$\pi[x]\pi[p]\xi hx = \langle hx, x \rangle \pi[x]\pi[p]z = \langle hx, x \rangle z,$$

$$\pi[x]\pi[p]\xi^* hx = \langle hx, z \rangle \pi[x]\pi[p]x = r\langle hx, z \rangle z,$$

onde usamos que  $x - p = rz$  e  $\pi[x]z = z$ . Repare que  $\langle hx, x \rangle = r\langle hx, z \rangle$ , pois  $\langle hx, p \rangle = 0$ . Portanto, o segundo termo é

$$2r\langle hx, z \rangle z.$$

Simplifiquemos o primeiro termo

$$-\pi[x](\xi + \xi^*)\pi[p]\pi'[x]hx.$$

Como  $\pi[x]x = 0$  e  $\pi[x]z = z$ , temos que o termo acima se torna

$$-\langle \pi[p]\pi'[x]hx, x \rangle z.$$

Além disso,

$$\pi[p]\pi'[x]hx = \langle hx, x \rangle \pi[p]x = \langle hx, x \rangle (x - p) = r \langle hx, x \rangle z.$$

Logo, o primeiro termo é nulo, pois  $\langle z, x \rangle = 0$ .

Assim, obtemos que

$$\nabla_\xi \{(\pi[p]\pi'[\bullet]h)_\bullet\}x = 2r \langle hx, z \rangle z.$$

Agora calculemos  $\nabla_{T(x)}H$ . Sabemos que

$$\nabla_{T(x)}H = (h\pi[x]t - t\pi'[x]h)_x$$

de onde segue que

$$[\nabla_{T(x)}H]x = \pi[x]h\pi[x]tx - \pi[x]t\pi'[x]hx.$$

Calculemos o primeiro termo. Como  $tx = z$ ,  $\pi[x]z = z$  e  $hz = 0$ , temos que esse termo se anula.

Estudemos o segundo termo.

$$-\pi[x]t\pi'[x]hx = -\pi[x](\langle hx, x \rangle z) = -\langle hx, x \rangle z = -r \langle hx, z \rangle z.$$

Daí temos

$$\nabla_{T_x}\text{Eu}(h)x = 0 \quad \forall x \in G.$$

■

**Corolário 98** *Considere a geodésica euclidiana  $G$ . Seja  $c : \mathbb{R} \rightarrow G$  uma curva geodésica passando por  $\mathbf{p}$  no instante 0. Se  $h \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ , então  $\nabla_{c'(\epsilon)}\text{Eu}(h) = 0$  para todo  $\epsilon$ .*

Assim, o campo eu nos fornece o transporte paralelo ao longo de geodésicas euclidianas.

**Exercício 99** *Calcule a holonomia ao longo de um triângulo em uma geodésica complexa  $L$  euclidiana em  $\mathbf{P}(V)$ , onde  $V$  é um espaço vetorial complexo munido de uma forma hermitiana não degenerada.*

**Resolução:**

Seja  $G = \mathbf{P}(W)$  uma geodésica, onde  $W$  é um subespaço vetorial real de  $V$  tal que  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W}$  é real e tem assinatura  $+0$ . Considere  $\mathbf{z} \in W \setminus \{0\}$  tal que  $z$  é ortogonal a todo vetor  $W$ , que existe porque a assinatura de  $W$  é  $+0$ .

Fixe o ponto  $\mathbf{p} \in L \setminus \mathbf{z}$ , onde  $L = \mathbf{P}(\mathbb{C}W)$  é a geodésica complexa associada a  $G$ . Podemos supor que  $\langle p, p \rangle = 1$ . Considere o vetor tangente  $s \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(V)$ . Existe  $w \in \mathbf{p}^\perp$  satisfazendo  $s = \langle \cdot, p \rangle w$ . Defina  $c = \langle w, z \rangle$ .

Fixe os pontos  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in L \setminus \{z\}$ . Podemos supor que  $A, B \in \mathbb{C}W$ . Como  $p, z$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{C}W$  e  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}W = 2$ , podemos supor que  $A = p + az$  e  $B = p + bz$ , com  $a, b \in \mathbb{C}$ . Note que  $\langle A, A \rangle = \langle B, B \rangle = 1$ .

Transportemos  $s$  de  $\mathbf{p}$  para  $\mathbf{A}$ . Obtemos o vetor:

$$\text{Eu}(s)(A) = \frac{1}{2}(\pi[p]\pi'[A]s)_A + SA.$$

Temos que

$$\pi'[A]\langle \cdot, p \rangle w = \langle \cdot, p \rangle \langle w, A \rangle A = c\bar{a}\langle \cdot, p \rangle A$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \pi[p]\pi'[A]\langle \cdot, p \rangle w &= c\bar{a}\langle \cdot, p \rangle \pi[p]A \\ &= c\bar{a}\langle \cdot, p \rangle (A - p) = c|a|^2 \langle \cdot, p \rangle z. \end{aligned}$$

Logo,

$$(\pi[p]\pi'[A]s)_A = c|a|^2 \langle \cdot, A \rangle z,$$

pois  $\langle \cdot, p \rangle \circ \pi'[A] = \langle \cdot, A \rangle$ .

Por outro lado,

$$S(A) = \langle \pi'[A](\cdot), p \rangle \pi[A]w = \langle \cdot, A \rangle (w - \bar{a}cA).$$

Como  $A = p + az$ , temos

$$S(A) = \langle \cdot, A \rangle (w - \bar{a}cp - c|a|^2 z).$$

Logo,

$$\text{Eu}(s)(A) = \langle \cdot, A \rangle \left( w - \bar{a}cp - \frac{1}{2}c|a|^2 z \right).$$

Repare que  $w' := w - \bar{a}cp - \frac{1}{2}c|a|^2 z \in \mathbf{A}^\perp$ , pois  $\text{Eu}(s)(A)$  é vetor tangente em  $\mathbf{A}$ . Agora calculemos

$$\text{Eu}(\text{Eu}(s)(A))(B) = \frac{1}{2}\pi[B]\pi[A]\pi'[B]\text{Eu}(s)(A)\pi'[B] + \pi[B]\text{Eu}(s)(A)\pi'[B].$$

Temos

$$\pi[B]\pi[A]\pi'[B]\text{Eu}(s)(A)\pi'[B] = \langle \cdot, B \rangle \pi[B]\pi[A]\pi'[B]w',$$

pois  $\langle \cdot, A \rangle \circ \pi'[B] = \langle \cdot, B \rangle$ .

Note que

$$\begin{aligned} \pi'[B]w' &= \langle w', B \rangle B \\ &= \langle w - \bar{a}cp - \frac{1}{2}c|a|^2 z, p + bz \rangle B \\ &= c(\bar{b} - \bar{a})B. \end{aligned}$$

Assim,

$$\pi[B]\pi[A]\pi'[B]w' = c(\bar{b} - \bar{a})\pi[B](B - A) = c|b - a|^2\pi[B]z = c|b - a|^2z.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\pi[B]\text{Eu}(s)(A)\pi'[B] &= \langle \cdot, B \rangle \pi[B]w' \\ &= \langle \cdot, B \rangle (w' - c(\bar{b} - \bar{a})B) \\ &= \langle \cdot, B \rangle (w - \bar{a}cp - \frac{1}{2}c|a|^2z - c(\bar{b} - \bar{a})(p + bz)) \\ &= \langle \cdot, B \rangle (w - \bar{a}cp - \frac{1}{2}c|a|^2z - \bar{c}bp - c|b|^2z + \bar{c}ap + \bar{c}abz) \\ &= \langle \cdot, B \rangle (w - \bar{c}bp - \frac{1}{2}c|a|^2z - c|b|^2z + \bar{c}abz).\end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Eu}(\text{Eu}(s)(A))(B) = \langle \cdot, B \rangle w'',$$

onde

$$w'' = w - \bar{c}bp + kz$$

e

$$k = -\frac{1}{2}c|a|^2 - c|b|^2 + \bar{c}ab + \frac{1}{2}c|b - a|^2.$$

Agora, calculemos

$$\text{Eu}(\text{Eu}(\text{Eu}(s)(A))(B))(p) = \frac{1}{2}\pi[p]\pi[B]\pi'[p]\text{Eu}(\text{Eu}(s)(A))(B)\pi'[p] + \pi[p]\text{Eu}(\text{Eu}(s)(A))(B)\pi'[p].$$

Comecemos pela primeira parcela  $\pi[p]\pi[B]\pi'[p]\text{Eu}(\text{Eu}(s)(A))(B)\pi'[p]$ . Note que

$$\pi[p]\pi[B]\pi'[p]\text{Eu}(\text{Eu}(s)(A))(B)\pi'[p] = \langle \cdot, p \rangle \pi[p]\pi[B]\pi'[p]w'',$$

onde usamos  $\langle \cdot, B \rangle \circ \pi'[p] = \langle \cdot, p \rangle$ .

Repare que

$$\begin{aligned}\pi'[p]w'' &= \langle w'', p \rangle p \\ &= \langle w - \bar{c}bp + kz, p \rangle p \\ &= -\bar{c}bp.\end{aligned}$$

Assim,

$$\pi[p]\pi[B]\pi'[p]w' = -\bar{c}b\pi[p](p - B) = c|b|^2\pi[p]z = c|b|^2z.$$

Agora calculemos  $\pi[p]\text{Eu}(\text{Eu}(s)(A))(B)\pi'[p]$ . Temos

$$\begin{aligned}\pi[p]\text{Eu}(\text{Eu}(s)(A))(B)\pi'[p] &= \langle \cdot, p \rangle \pi[p]w'' \\ &= \langle \cdot, p \rangle (w'' - \pi'[p]w'') \\ &= \langle \cdot, p \rangle (w - \bar{c}bp + kz + \bar{c}bp) \\ &= \langle \cdot, p \rangle (w + kz).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Eu}(\text{Eu}(\text{Eu}(s)A)B)p = \langle \cdot, p \rangle w''',$$

onde  $w''' = w + lz$  e

$$l = k + \frac{c}{2}|b|^2 = c \left( -\frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|b|^2 + \bar{a}b + \frac{1}{2}|b-a|^2 \right) = \frac{c}{2}(b\bar{a} - a\bar{b}).$$

Logo, a holonomia ao longo do triângulo geodésico  $p \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow p$  é dada pela fórmula:

$$\text{Eu}(\text{Eu}(\text{Eu}(s)(A))(B))(p) = s + \frac{1}{2}\langle \cdot, p \rangle \langle w, z \rangle (b\bar{a} - a\bar{b})z. \quad (100)$$

Repare que a holonomia depende da área do triângulo  $0, a, b$  em  $\mathbb{C}$ , que é dada por

$$\frac{1}{4i}(b\bar{a} - a\bar{b}) = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{2}.$$

Deixemos a expressão (100) mais coordinate free.

Considere  $t = \langle \cdot, p \rangle z$ . Temos que

$$\langle s, t \rangle_p = \frac{\langle sp, tp \rangle}{\langle p, p \rangle} = \langle w, z \rangle.$$

Logo,

$$\langle \cdot, p \rangle \langle w, z \rangle (b\bar{a} - a\bar{b})z = \langle s, t \rangle_p (b\bar{a} - a\bar{b})t.$$

Dado  $t \in T_p L \setminus 0$  existe a projeção estereográfica natural  $L \setminus \mathbf{z} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $p + dtp \rightarrow d$ . Assim, podemos definir a área orientada de uma região em  $L \setminus \mathbf{z}$  com respeito a  $t$ . Definimos  $A_t$  como sendo tal função área.

Assim,

$$\frac{1}{4i}(b\bar{a} - a\bar{b}) = A_t(\triangle(p, A, B)).$$

Logo, a equação (100) pode ser escrita livre de coordenada na forma

$$\text{Eu}(\text{Eu}(\text{Eu}(s)(A))(B))(p) = s + 2i\langle s, t \rangle_p A_t(\triangle(p, A, B))t.$$

Repare que essa expressão independe de qual  $t$  escolhemos em  $T_p L \setminus 0$ , pois para  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  temos

$$A_{\lambda t} = |\lambda|^{-2} A_t$$

e assim

$$\langle s, \lambda t \rangle_p A_{\lambda t}(\triangle(p, A, B))\lambda t = \langle s, t \rangle_p A_t(\triangle(p, A, B))t.$$

Repare também que se  $s \in T_p L$ , então

$$\text{Eu}(\text{Eu}(\text{Eu}(s)A)B)p = s,$$

o que era de se esperar. ■

Em resumo, vetores tangentes à geodésica complexa não tem holonomia, e os vetores não tangentes tem holonomia proporcional à área do triângulo.

## 4.9 Dualidade projetiva no espaço hiperbólico

Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão  $n + 1$  munido de uma forma Hermitiana de assinatura  $+\cdots + -$ . Sobre  $\mathbf{P}(V)$  definimos a métrica Hermitiana dada por

$$\langle t, s \rangle_p = -\frac{\langle tp, sp \rangle}{\langle p, p \rangle} \quad t, s \in T_p \mathbf{P}(V),$$

onde  $p$  é não isotrópico.

O espaço hiperbólico  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  é por definição a bola  $\mathbf{B}(V)$ .

A forma hermitiana é não degenerada e portanto temos a dualidade

$$\mathbf{P}(V) \longleftrightarrow \{W \subset V : \dim_{\mathbb{K}} W = n\}$$

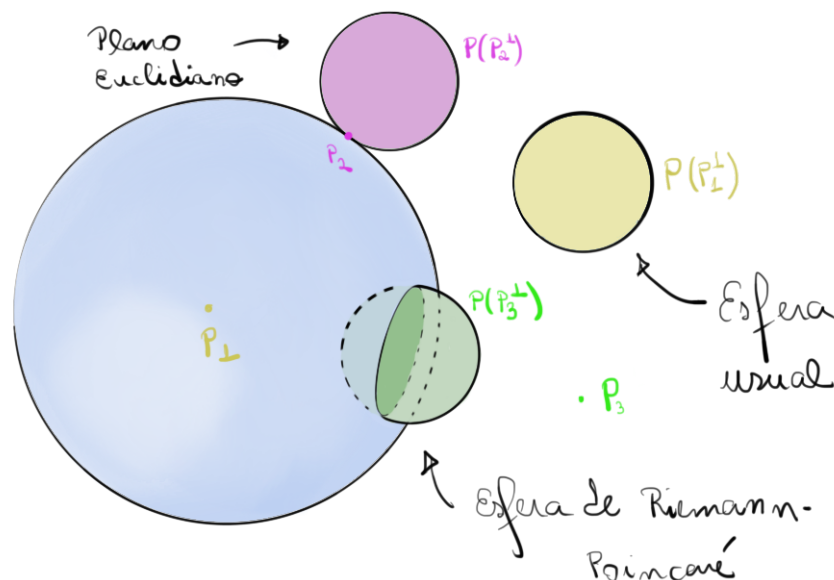
dada por  $p \mapsto p^\perp$  e  $W^\perp \leftrightarrow W$ .

Assim, temos a dualidade

$$\mathbf{P}(V) \longleftrightarrow \{L \subset \mathbf{P}(V) : L \text{ é um hiperplano projetivo}\}$$

dada por  $p \mapsto \mathbf{P}(p^\perp)$ .

Na imagem abaixo consideramos o caso complexo com  $n + 1 = 3$ .



**Figura 9:** Ao movermos o ponto  $p$  em  $\mathbf{P}(V)$ , temos que a esfera  $\mathbf{P}(p^\perp)$  transita entre as geometrias hiperbólicas, planas e esféricas.

Portanto, dois pontos distintos  $p_1$  e  $p_2$  nos fornecem hiperplanos distintos  $L_1 = \mathbf{P}(p_1^\perp)$  e  $L_2 = \mathbf{P}(p_2^\perp)$ .

Os hiperplanos  $L_i = \mathbf{P}(p_i^\perp)$ , com  $i = 1, 2$ ,  $p_i \in \mathbf{E}(V)$  e  $p_1 \neq p_2$ , cortam  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ , pois a assinatura de  $p_i^\perp$  é  $+\cdots + -$ , com  $n - 1$  sinais de  $+$ . Assim, podemos falar sobre a posição relativa de  $L_1$  e  $L_2$ . Seja  $S = p_1^\perp \cap p_2^\perp$ . Temos que  $S$  tem dimensão  $n - 1$  e  $\mathbf{P}(S)$  é o local onde os hiperplanos  $L_1$  e  $L_2$  se encontram.

**Definição 101** Dizemos que  $L_1$  e  $L_2$  são concorrentes se  $\mathbf{P}(S) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n \neq \emptyset$ , são assintóticos se  $\mathbf{P}(S) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n = \emptyset$  e  $\mathbf{P}(S) \cap \mathbf{S}(V) \neq \emptyset$ , e ultraparalelos se  $\mathbf{P}(S) \subset \mathbf{E}(V)$ .

Se  $L_1$  e  $L_2$  são concorrentes, então dado  $\mathbf{p} \in L_1 \cap L_2$  existe um vetor normal  $n_i \neq 0$  a  $L_i$  em  $\mathbf{p}$ , pois a codimensão de  $L_i$  é 1. O ângulo em  $\mathbf{p}$  entre  $L_1$  e  $L_2$  é definido como sendo o menor  $\theta$  não negativo tal que

$$\cos(\theta)^2 = \frac{|\langle n_1, n_2 \rangle|^2}{\langle n_1, n_1 \rangle \langle n_2, n_2 \rangle}.$$

Na proposição a seguir mostraremos que esse ângulo independe de  $\mathbf{p}$ .

**Proposição 102** Temos as seguintes equivalências:

1. Os hiperplanos  $L_1$  e  $L_2$  são concorrentes se, e só se,  $0 \leq \text{ta}(p_1, p_2) < 1$ . Além disso, o ângulo  $\theta$  entre esses hiperplanos é dado por

$$\cos(\theta)^2 = \text{ta}(p_1, p_2).$$

2. Os hiperplanos  $L_1$  e  $L_2$  são assintóticos se, e só se,  $\text{ta}(p_1, p_2) = 1$ .

3. Os hiperplanos  $L_1$  e  $L_2$  são ultraparalelos se, e só se,  $\text{ta}(p_1, p_2) > 1$ . Além disso, a distância entre esses hiperplanos é dada por

$$\cosh(d(p, q))^2 = \text{ta}(p_1, p_2).$$

**Demonstração:**

Podemos supor que  $p_1, p_2 \in V$ ,  $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle p_2, p_2 \rangle = 1$  e que  $r = \langle p_1, p_2 \rangle$  é um número real.

Repare que se  $W = \mathbb{K}p_1 + \mathbb{K}p_2$ , então a assinatura de  $W$  pode ser  $++$ ,  $+-$  ou  $+0$ , pois  $p_1$  e  $p_2$  são vetores positivos. Se  $W$  é não degenerado, então temos o seguinte:

$$W \text{ tem assinatura } ++ \Leftrightarrow S \text{ tem assinatura } + \cdots + -$$

e

$$W \text{ tem assinatura } +- \Leftrightarrow S \text{ tem assinatura } + \cdots ++,$$

pois  $W^\perp = S$  e a assinatura de  $V$  é  $+\cdots+-$ .

**Hiperplanos ultraparalelos em  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ :** Sejam  $L_1$  e  $L_2$  hiperplanos ultraparalelos, isto é, se encontram em  $\mathbf{E}(V)$ , ou seja,  $S$  tem assinatura  $+\cdots++$ .

Assim, temos que  $W$  tem assinatura  $+-$  e, conseqüentemente, o determinante da matriz de Gram de  $p_1$  e  $p_2$

$$\det \begin{bmatrix} \langle p_1, p_1 \rangle & \langle p_1, p_2 \rangle \\ \langle p_2, p_1 \rangle & \langle p_2, p_2 \rangle \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix} = 1 - r^2$$

deve ser negativo. Logo,  $r^2 > 1$ , ou seja,  $\text{ta}(p_1, p_2) > 1$ .

Tome  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ . Podemos supor que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1$ . Temos que a projeção de  $\mathbf{x}$  em  $L_1$  é dada por  $\pi[p_1]\mathbf{x} = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, p_1 \rangle p_1$ .

$$\begin{aligned}
\text{ta}(x, L_1 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n) &= \text{ta}(x, \pi[p_1]x) \\
&= \frac{|\langle x, x - \langle x, p_1 \rangle p_1 \rangle|^2}{1 + |\langle x, p_1 \rangle|^2} \\
&= \frac{(1 + |\langle x, p_1 \rangle|^2)^2}{1 + |\langle x, p_1 \rangle|^2} \\
&= 1 + |\langle x, p_1 \rangle|^2.
\end{aligned}$$

Queremos calcular  $\text{ta}(L_1 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n, L_2 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n)$ . Seja  $p'_1$  um vetor ortonormal a  $S$  em  $\mathbf{p}_2^\perp$ . Como  $\mathbf{p}_2^\perp$  tem assinatura  $+\cdots+$ , podemos supor que  $\langle p'_1, p'_1 \rangle = -1$ . Tome  $\mathbf{x} \in L_2 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ . Podemos escrever

$$x = \alpha p'_1 + z,$$

com  $z \in S$ .

Podemos supor que  $\langle x, x \rangle = -1$  e, assim,  $|\alpha|^2 - \langle z, z \rangle = 1$ , ou seja,  $|\alpha|^2 \geq 1$ . Além disso,

$$|\langle x, p_1 \rangle|^2 = |\alpha|^2 |\langle p'_1, p_1 \rangle|^2,$$

que é mínimo quando  $|\alpha| = 1$ . Logo,

$$\text{ta}(L_1 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n, L_2 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n) = 1 + |\langle p_1, p'_1 \rangle|^2.$$

Como  $p'_1 \in S^\perp = W = \mathbb{K}p_1 + \mathbb{K}p_2$  e  $\langle p'_1, p_2 \rangle = 0$ , temos que

$$p_1 = \langle p_1, p'_1 \rangle p'_1 + \langle p_1, p_2 \rangle p_2,$$

ou seja,

$$1 = -|\langle p_1, p'_1 \rangle|^2 + |\langle p_1, p_2 \rangle|^2.$$

Portanto,

$$\text{ta}(L_1 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n, L_2 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n) = |\langle p_1, p_2 \rangle|^2$$

e, consequentemente,

$$\text{ta}(L_1 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n, L_2 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n) = \text{ta}(p_1, p_2).$$

Assim, no caso em que os hiperplanos são ultraparalelos em  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ , temos que a tância entre  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  mede a tância entre  $L_1 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  e  $L_2 \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ .

**Hiperplanos concorrentes em  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ :** Agora tratemos o caso em que os hiperplanos são concorrentes em  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ . Nesse caso,  $S$  tem assinatura  $+\cdots+$  e  $W$  tem assinatura  $++$ . Como

$$\det \begin{bmatrix} \langle p_1, p_1 \rangle & \langle p_1, p_2 \rangle \\ \langle p_2, p_1 \rangle & \langle p_2, p_2 \rangle \end{bmatrix} = 1 - r^2$$

temos que  $r^2 < 1$  porque a assinatura de  $W$  é  $++$ . Logo,  $0 \leq \text{ta}(p_1, p_2) < 1$ .

Temos que  $\mathbf{P}(S)$  é onde essas retas projetivas se cortam. Tome  $\mathbf{z} \in \mathbf{P}(S) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ . Podemos supor  $\langle z, z \rangle = -1$ .



Seja  $w_i = p_i$  e defina  $n_i = -\langle \cdot, z \rangle w_i$  em  $T_z \mathbf{P}(V)$ . Se  $t_i$  é vetor tangente a  $L_i$  em  $z$ , então  $t_i z \in p_i^\perp$ . Logo,

$$\langle n_i, t_i \rangle = \langle w_i, t_i z \rangle = 0.$$

Logo,  $n_i$  é vetor normal a  $L_i$  em  $z$ . O ângulo  $\theta$  entre os hiperplanos em  $z$  é dado por

$$\cos(\theta)^2 = \frac{|\langle n_1, n_2 \rangle|^2}{\langle n_1, n_1 \rangle \langle n_2, n_2 \rangle}.$$

Note que  $\langle n_i, n_i \rangle = 1$  e  $\langle n_1, n_2 \rangle = r$ .

Logo,

$$\cos(\theta)^2 = \text{ta}(p_1, p_2).$$

Assim, no caso em que os hiperplanos são concorrentes em  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ , temos que o ângulo entre eles é dado pela fórmula acima envolvendo a tância entre  $p_1$  e  $p_2$ . Além disso,  $p_1$  e  $p_2$  são ortogonais se, e só se,  $L_1$  e  $L_2$  são retas projetivas ortogonais.

**Retas projetivas assintóticas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ :** Por fim, analisemos o caso em que os hiperplanos são assintóticos, isto é,  $L_1$  e  $L_2$  são hiperplanos paralelos em  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  que se encontram  $\mathbf{S}(V)$ , mas não dentro de  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ . Em outras palavras,  $S$  tem assinatura  $+\cdots+0$ .

Desta forma, devemos ter que  $W$  é degenerado, pois pela nossa análise acima  $W$  é não degenerado se, e só se,  $S$  é não degenerado. Assim,  $W$  tem assinatura  $+0$ .

Como

$$\det \begin{bmatrix} \langle p_1, p_1 \rangle & \langle p_1, p_2 \rangle \\ \langle p_2, p_1 \rangle & \langle p_2, p_2 \rangle \end{bmatrix} = 1 - r^2$$

temos que  $r^2 = 1$  porque a assinatura de  $W$  é  $+0$ . Logo,  $\text{ta}(p_1, p_2) = 1$ . ■

No caso em que  $n + 1 = 3$  e  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , temos que o nosso espaço hiperbólico é  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . A dualidade nos fornece uma bijeção entre  $\mathbf{E}(V)$  e geodésicas de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Em outras palavras, o espaço de todas as geodésicas de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  é uma faixa de Möbius. Além disso, temos um fato curioso, para quaisquer dois pontos  $v_1$  e  $v_2$  temos uma geodésica de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  e vice-versa. Assim, existe uma bijeção natural entre o conjunto  $\{\{v_1, v_2\} : v_1, v_2 \in \mathbf{S}(V) \text{ e } v_1 \neq v_2\}$  e  $\mathbf{E}(V)$ . Em outras palavras, podemos ver o espaço de pontos pares distintos de pontos de  $\mathbb{S}^1$  como sendo uma faixa de Möbius.

#### 4.10 Curvas especiais de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$

No que segue  $V$  é espaço complexo de dimensão 2 munido de forma Hermitiana com assinatura  $+-$ . Nosso modelo de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  é  $\mathbf{E}(V)$  a menos que seja dito o contrário.

**Definição 103** *Sejam  $W \subset V$  subespaço real de dimensão 2,  $C = \mathbf{P}(W)$  e  $g = \text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$ .*

- *Se  $g$  tem assinatura  $0-$ , então chamamos  $C$  de horociclo;*
- *Se  $g$  tem assinatura  $++$ , então chamamos  $C$  de círculo;*
- *Se  $g$  tem assinatura  $+-$ , então chamamos  $C$  de hiperciclo.*

Em particular, geodésicas são hiperciclos

**Proposição 104** *O círculo corresponde aos círculos dados pela métrica hiperbólica*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{arccosh} \sqrt{\operatorname{ta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

**Demonstração:** Considere  $W \subset V$  real com  $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$  tal que  $g|_{W \times W}$  tem assinatura  $++$ . Seja  $C = \mathbf{P}(W)$ . Fixe um ponto  $\mathbf{p} \in C$ . Podemos supor que  $p \in W$  e  $\langle p, p \rangle = 1$ . Seja  $q$  o ortogonal de  $p$  em  $W$  com respeito ao produto interno  $g$ . Podemos supor que  $\langle q, q \rangle = 1$  e  $\langle p, q \rangle = ir$  com  $r > 0$ . Note que  $r > 1$  porque  $p, q$  é base de  $V$ , que tem assinatura  $+-$ . Seja  $G = \mathbf{P}(\mathbb{R}p + \mathbb{R}iq)$  a geodésica ligando  $p$  a  $q$ . Tome  $z = p + iq$  nessa geodésica. Temos que

$$\langle z, z \rangle = 2 + 2r.$$

Afirmção:  $C = \{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 : \operatorname{ta}(x, z) = \frac{1+r}{2}\}$ .

De fato, se  $x \in C$ , então, sem perda de generalidade, temos  $x = \cos(t)p + \sin(t)q$ . Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{ta}(x, z) &= (2 + 2r)^{-1} |\langle \cos(t)p + \sin(t)q, p + iq \rangle|^2 \\ &= (2 + 2r)^{-1} |\cos(t) + \cos(t)r - ir \sin(t) - i \sin(t)|^2 \\ &= \frac{1 + r}{2}. \end{aligned}$$

Logo,  $C \subset \{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 : \operatorname{ta}(x, z) = \frac{1+r}{2}\}$ .

Como ambos conjuntos são difeomorfos a  $\mathbb{S}^1$ , temos que  $C = \{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 : \operatorname{ta}(x, z) = \frac{1+r}{2}\}$ .

Agora considere um círculo dado pela métrica

$$S = \left\{ x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 : \operatorname{ta}(x, z) = \frac{1+r}{2} \right\}$$

onde  $r > 1$ .

Mostremos que  $S$  é o círculo  $C = \mathbf{P}(W)$  para algum  $W$  real de dimensão 2 tal que  $g|_{W \times W}$  tem assinatura  $++$ . Seja  $\mathbf{p} \in S$  e seja  $G$  a geodésica ligando  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{z}$ . Essa geodésica corta  $S$  em um ponto  $\mathbf{q}$  diferente de  $\mathbf{p}$ . Podemos supor que  $\langle p, p \rangle = \langle q, q \rangle = 1$  e  $s := -i\langle p, q \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ . Podemos supor que  $z = p + iq$ , pois  $\operatorname{ta}(p, p + iq) = \operatorname{ta}(q, p + iq)$ . Note que  $\operatorname{ta}(p, z) = \frac{1+r}{2}$ , ou seja,  $|\langle p, p + iq \rangle| = 1 + r$ .

Assim,

$$|1 + s| = 1 + r \Rightarrow s = r.$$

Portanto,  $r = s$ . Tome  $W = \mathbb{R}p + \mathbb{R}q$ . Temos que  $C = \mathbf{P}(W)$  é círculo e coincide com  $S$ . ■

**Proposição 105** *Seja  $G$  geodésica em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 \setminus G$ . Existe um único  $\pi(x) \in G$  tal que  $\operatorname{ta}(x, \pi(x)) = \operatorname{ta}(x, G)$ . Além disso, a geodésica  $G'$  ligando  $x$  a  $\pi(x)$  é ortogonal a  $G$ .*

**Demonstração:** Sejam  $v_1$  e  $v_2$  os vértices de  $G$  em  $\mathbf{S}(V)$ . Podemos supor que  $\langle v_1, v_2 \rangle = 1/2$ . A curva  $G \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  é dada por  $c(t) = [c_0(t)]$ , onde  $c_0(t) = e^t v_1 + e^{-t} v_2$ . Considere  $a \in \mathbb{C}$  tal que  $x = v_1 + av_2$ . Temos que  $\langle x, x \rangle = \operatorname{Re} a$ , que chamaremos de  $r$ . Como  $\langle x, x \rangle > 0$ , temos que  $r > 0$ .

Considere

$$f(t) = \operatorname{ta}(x, c(t)) = \frac{1}{4r} |e^{-t} + ae^t|^2 = \frac{1}{4r} (e^{-2t} + 2r + |a|^2 e^{2t}).$$

Derivando a expressão acima, obtemos

$$f'(t) = \frac{1}{2r} (-e^{-2t} + |a|^2 e^{2t}),$$

$$f''(t) = \frac{1}{r} (e^{-2t} + |a|^2 e^{2t}).$$

Logo,  $f$  é convexa, admitindo um único mínimo, se esse existir. Calculemos esse mínimo. Fazendo  $f'(t) = 0$ , obtemos  $t = -2^{-1} \ln |a|$ . Logo, o ponto  $\pi(x)$  desejado é

$$c(-\ln |a|) = [|a|^{-1/2} v_1 + |a|^{1/2} v_2].$$

Assim,  $\operatorname{ta}(x, \pi(x)) = \operatorname{ta}(x, G)$ . Calculemos a expressão dessa distância.

$$\operatorname{ta}(x, \pi(x)) = \frac{1}{4r} (2|a| + 2r) = \frac{|a|}{2r} + \frac{1}{2}.$$

Repare que  $4a = \langle x, v_1 \rangle \langle v_2, x \rangle$ ,  $r = \langle x, x \rangle$  e  $\langle v_1, v_2 \rangle = 1/2$ . Logo,

$$\operatorname{ta}(x, \pi(x)) = \left| \frac{\langle x, v_1 \rangle \langle v_2, x \rangle}{\langle x, x \rangle \langle v_1, v_2 \rangle} \right| + \frac{1}{2}.$$

Agora mostremos que  $G$  e  $G'$  são ortogonais em  $\mathbf{q} =: \pi(x)$ .

Podemos tomar  $q = |a|^{-1/2} v_1 + |a|^{1/2} v_2$ .

Considere  $\xi := a/|a| \in \mathbb{S}^1$ ,  $W' = \mathbb{R}(\bar{\xi} + 1)x + \mathbb{R}q$  e repare que

$$\langle x, q \rangle = |a|^{-1/2} \langle x, v_1 \rangle + |a|^{1/2} \langle x, v_2 \rangle = \frac{1}{2} |a|^{1/2} (\xi + 1),$$

ou seja,  $G' = \mathbf{P}(W')$ . Como  $x$  e  $q$  são vetores negativos e distintos, temos que a matriz de Gram de  $p$  e  $q$  tem determinante negativo, pois  $V$  tem assinatura  $+-$ . Assim,

$$4 - |a| |1 + \xi|^2 < 0.$$

Em particular  $\xi \neq -1$  e  $\langle x, q \rangle \neq 0$ .

Considere a curva  $\gamma(t) = [\gamma_0(t)]$ , onde  $\gamma_0(t) = q + tv$  e  $v = (\bar{\xi} + 1)x$ .

A velocidade de  $c$  no instante  $t$  é

$$c'(t) = \frac{\langle \cdot, c_0(t) \rangle}{\langle c_0(t), c_0(t) \rangle} \pi[c_0(t)] c'_0(t).$$

Note que  $c'_0(t) = e^t v_1 - e^{-t} v_2$  e  $\langle c_0(t), c'_0(t) \rangle = 0$ . Logo,

$$c'(t) = -\langle \cdot, c_0(t) \rangle c'_0(t),$$

que em  $t_0 = -2^{-1} \log |a|$  vale

$$c'(t_0) = -\langle \cdot, q \rangle (|a|^{-1/2} v_1 - |a|^{1/2} v_2),$$

que é a velocidade com que  $c$  passa por  $q$ . Repare que essa velocidade é não nula.

Por outro lado,

$$\gamma'(0) = -\langle \cdot, q \rangle \pi[q]v.$$

Como  $\langle x, q \rangle \neq 0$ , temos  $\gamma'(0) \neq 0$ .

Agora mostremos que  $G$  e  $G'$  são curvas ortogonais.

$$\begin{aligned} \langle c'(t_0), \gamma'(0) \rangle_q &= -\langle |a|^{-1/2} v_1 - |a|^{1/2} v_2, \pi[q]v \rangle \\ &= -\langle \pi[q] (|a|^{-1/2} v_1 - |a|^{1/2} v_2), v \rangle \\ &= -\langle |a|^{-1/2} v_1 - |a|^{1/2} v_2, v \rangle \\ &= \frac{1}{2} |a|^{1/2} (1 - \bar{\xi})(1 + \xi) \\ &= \frac{1}{2} |a|^{1/2} (1 - \bar{\xi} + \xi - 1) \\ &= i |a|^{1/2} \text{Im} \xi. \end{aligned}$$

Portanto, sendo  $g_q = \text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle_q$ , temos

$$g(c'(t_0), \gamma'(0)) = 0.$$

Logo, as duas geodésicas são ortogonais. ■

**Corolário 106** Dada a geodésica  $G$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ , temos que

$$\text{ta}(x, \pi(x)) = \left| \frac{\langle x, v_1 \rangle \langle v_2, x \rangle}{\langle x, x \rangle \langle v_1, v_2 \rangle} \right| + \frac{1}{2}.$$

**Proposição 107** Considere o hiperciclo  $C$ . Essa curva corta  $\mathcal{S}(V)$  em  $v_1$  e  $v_2$ . Seja  $G$  a geodésica passando por  $v_1$  e  $v_2$ . Temos que a distância  $d(x, G)$ ,  $x \in C \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ , é constante.

**Demonstração:** Seja  $C = \mathbf{P}(W)$ , onde  $W$  é subespaço real de dimensão 2 de  $V$  tal que  $g = \text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$  tem assinatura  $+-$ . Podemos supor que  $\langle v_1, v_2 \rangle = 1/2$ . Podemos supor que  $v_1 \in W$ . Existe  $\xi \in \mathbb{S}^1$  tal que  $\xi^{-1} v_2 \in W$ . Podemos supor que  $\text{Re} \xi \geq 0$ . Como a matriz de gram de  $v_1, \xi^{-1} v_2$  com respeito a  $g$  tem determinante negativo temos  $g(v_1, \xi^{-1} v_2)^2 = (\text{Re} \xi)^2 > 0$ . Assim,  $\text{Re} \xi > 0$ .

Parametrizemos  $C \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Considere  $c(t) = [c_0(t)]$ , onde  $c_0(t) = e^{-t}v_1 + e^t\xi^{-1}v_2$ . Note que  $\langle c_0(t), c_0(t) \rangle = \text{Re}\xi > 0$ . Logo,  $c$  parametriza  $C \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ .

Calculemos  $\text{ta}(c(t), \pi(c(t)))$ . Note que

$$\langle c_0(t), v_1 \rangle = \xi^{-1}e^t/2, \quad \langle v_2, c_0(t) \rangle = e^{-t}/2,$$

$$\langle c_0(t), c_0(t) \rangle = \text{Re}\xi, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 1/2.$$

Logo,

$$\text{ta}(c(t), \pi(c(t))) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\text{Re}\xi} + 1 \right),$$

que independe de  $t$ , que é o que queríamos provar.

Note que se  $\text{Re}\xi = 1$ , então  $\xi = 1$ , ou seja,  $G = C$ . Isso faz sentido, pois se  $\text{ta}(c(t), \pi(c(t))) = 1$ , então  $d(c(t), \pi(c(t))) = 0$ . ■

**Observação 108** Se  $W$  é um subespaço real tal que  $g|_{W \times W} = 0$ , então  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W} = 0$ . Assim,  $\mathbf{P}(W) = \mathbf{S}(V)$ . Então, todo subespaço real  $W$  nulo de dimensão 2 nos fornece  $\mathbf{S}(V)$ . Agora mostremos que existe um espaço desses. Considere  $v_1, v_2$  em  $\mathbf{S}(V)$  distintos. Podemos supor que  $v_1, v_2 \in V$  e  $\langle v, v_2 \rangle = 1/2$ . Repare que  $v_1$  e  $iv_2$  são ortogonais com respeito a  $g$ . Assim,  $W = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}iv_2$  é subespaço real de dimensão 2 nulo com respeito a  $g$ .

Por fim, seja  $C$  o horociclo. Seja  $v$  o ponto em  $\mathbf{S}(V) \cap C$ . Fixe um ponto  $p$  em  $C$ . Se  $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ , então podemos considerar  $S_z = \{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 : \text{ta}(z, x) = \text{ta}(z, p)\}$ . Mostraremos que o horociclo é a curva obtida fazendo  $z \rightarrow v$ . Mais precisamente, a curva  $S_z$  é dada por

$$\text{ta}(z, x) = \text{ta}(z, p),$$

ou seja,

$$\frac{|\langle x, z \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} = \frac{|\langle p, z \rangle|^2}{\langle p, p \rangle}$$

e fazendo  $z \rightarrow v$  temos a curva  $S$  dada pela quádrlica

$$|\langle x, v \rangle|^2 \langle p, p \rangle = \langle x, x \rangle |\langle p, v \rangle|^2.$$

**Proposição 109** As curvas  $S$  e  $C$  coincidem.

**Demonstração:** Note que  $C = \mathbf{P}(W)$ , onde  $W = \mathbb{R}v + \mathbb{R}p$  e  $\langle v, v \rangle = 0$ ,  $\langle p, p \rangle = 1$  e  $r = -i\langle v, p \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Podemos supor esse último item, pois  $g(v, p) = 0$ . Como o determinante da matriz de Gram de  $v$  e  $p$  é negativo, temos que  $r > 0$ .

Seja  $c(t) = [c_0(t)]$ , com  $c_0(t) = p + tv$ , uma parametrização de  $C$ . Temos que

$$|\langle c_0(t), v \rangle|^2 \langle p, p \rangle = r^2$$

e

$$\langle x, x \rangle |\langle p, v \rangle|^2 = r^2.$$

Assim,  $c(t) \in S$ .

Logo,  $C \subset S$ , de onde segue que  $C = S$ , pois  $S$  é também um círculo. ■

Assim, temos a seguinte lista: Se  $W$  é subespaço real de dimensão 2 de  $V$  e  $C = \mathbf{P}(W)$ , então

- Se  $W$  é uma reta complexa, então  $C$  é um ponto;
- se  $g|_{W \times W}$  tem assinatura  $++$ , então  $W$  é um círculo;
- se  $g|_{W \times W}$  tem assinatura  $+-$ , então  $W$  é um hiperciclo;
- se  $g|_{W \times W}$  tem assinatura  $+0$ , então  $W$  é um horociclo.

Repare que um ponto é um caso extremo de círculo.

**Proposição 110** *As curvaturas geodésicas de horocíclis, círculos métricos e hipercíclis são constante.*

**Demonstração:**

Seja  $c$  uma curva em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Temos que  $c$  admite um levantamento  $c_0$  com  $\langle c_0(t), c_0(t) \rangle$  constante. Em particular  $\langle c_0(t), c'_0(t) \rangle = 0$  para todo  $t$ . Se  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1)$ , então a derivada covariante desse campo é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_{c'(t)} X &= \left[ \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} X(c_0(t) + \epsilon c'(t) c_0(t)) \right]_{c(t)} \\ &= \left[ \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} X(c_0(t) + \epsilon \pi[c_0(t)] c'_0(t)) \right]_{c(t)} \\ &= \left[ \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} X(c_0(t) + \epsilon c'_0(t)) \right]_{c(t)} \\ &= \left[ \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} X(c_0(t + \epsilon)) \right]_{c(t)}. \end{aligned}$$

Assim, se  $Y$  é um campo sobre a curva  $c$ , então sua derivada covariante com respeito a  $c$  é

$$\frac{D}{dt} Y := \left[ \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} Y(t + \epsilon) \right]_{c(t)},$$

que denotaremos por  $Y'$ .

Tome  $Y(t) = c'(t)$ . Temos que

$$Y(t) = \frac{\langle \cdot, c_0(t) \rangle}{\langle c_0(t), c_0(t) \rangle} \pi[c_0(t)] c'_0(t).$$

As curvas que usaremos a seguir sempre satisfazem as seguintes propriedades:

$$\langle c_0(t), c_0(t) \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \langle c_0(t), c'_0(t) \rangle = ir \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (111)$$

onde  $r \in \mathbb{R}$ . Além disso, as curvas  $c(t)$  a serem estudadas sempre têm velocidade 1, ou seja, estão parametrizadas por comprimento de arco. Assim, a curvatura geodésica de cada uma dessas curvas é a norma de sua aceleração, isto é,  $|c''(t)|$ .

Das hipóteses em (111) obtemos

$$Y(t) = \langle \cdot, c_0(t) \rangle (c'_0(t) + irc_0(t)).$$

Calculemos  $Y'(t)$ .

$$\begin{aligned} Y'(t)c_0(t) &= \pi[c_0(t)] \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \langle c_0(t), c_0(t+\epsilon) \rangle (c'_0(t+\epsilon) + irc_0(t+\epsilon)) \\ &= \pi[c_0(t)] \langle c_0(t), c'_0(t) \rangle (c'_0(t) + irc_0(t)) + \pi[c_0(t)] (c''_0(t) + irc'_0(t)) \\ &= ir(c'_0(t) + irc_0(t)) + c''_0(t) - \langle c'_0(t), c_0(t) \rangle c_0(t) + ir\pi[c_0(t)]c'_0(t) \\ &= -(\langle c'_0(t), c_0(t) \rangle + 2r^2)c_0(t) + 2irc'_0(t) + c''_0(t). \end{aligned}$$

Em suma,

$$c''(t) = \langle \cdot, c_0(t) \rangle [-(\langle c'_0(t), c_0(t) \rangle + 2r^2)c_0(t) + 2irc'_0(t) + c''_0(t)].$$

Agora considere o círculo métrico  $C = \mathbf{P}(W)$ , onde  $W$  é subespaço real bidimensional de  $V$  tal que  $\text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$  tem assinatura  $++$ . Sejam  $p, q \in W$  tais que  $\langle p, p \rangle = \langle q, q \rangle = 1$  e  $\text{Re} \langle p, q \rangle = 0$ . Podemos supor que existe  $r \geq 0$  satisfazendo  $ir = \langle p, q \rangle$ .

Como o determinante da matriz de Gram de  $p$  e  $q$  tem determinante negativo, pois  $p$  e  $q$  formam base de  $V$ , temos que  $1 - r^2 < 0$ , ou seja,  $r > 1$ . Considere a parametrização  $c(t) = [c_0(t)]$  de  $C$ , onde  $c_0(t) = \cos(t)p + \sin(t)q$ . Note que as propriedades da equação (111) são satisfeitas e um cálculo direto mostra que  $|c'(t)| = \sqrt{r^2 - 1}$ . Repare que  $c''_0(t) = -c_0(t)$ . Assim,

$$\begin{aligned} c''(t) &= \langle \cdot, c_0(t) \rangle (-(\langle c'_0(t), c_0(t) \rangle + 2r^2)c_0(t) + 2irc'_0(t) + c''_0(t)) \\ &= \langle \cdot, c_0(t) \rangle (-2r^2c_0(t) + 2irc'_0(t)). \end{aligned}$$

Se  $g_x = \text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle_x$  é a métrica Riemanniana, temos

$$g(c''(t), c''(t)) = -4r^2[r^2 + 1 - 2r^2] = 4r^2(r^2 - 1),$$

que independe de  $t$ . Logo, a curvatura geodésica  $c_g$  é  $2r/\sqrt{r^2 - 1}$ . A tância do centro do círculo a um de seu pontos é  $(r + 1)/2$ . Assim, podemos escrever a curvatura em termos do raio do círculo. Mais precisamente, se  $R$  é o raio do círculo, então  $2 \cosh^2 R = r + 1$ , ou seja,

$$\sqrt{r^2 - 1} = \sinh(2R) \quad \text{e} \quad r = \cosh(2R).$$

Em particular, a curvatura geodésica  $c_g$  é

$$\frac{2}{\tanh(2R)}$$

e o comprimento do círculo é

$$l = \pi \sinh(2R).$$

Desses dois fatos podemos extrair a fórmula da área  $S$  do círculo usando o teorema de Gauss Bonnet. Temos que

$$\int_C c_g ds - 4S = 2\pi\chi(D),$$

onde  $D$  é o disco formado pelo círculo. Como  $\chi(D) = 1$ , temos que

$$S = \frac{\pi}{2}(\cosh(2R) - 1).$$

Agora considere o hiperciclo  $C = \mathbf{P}(W)$ , onde  $W$  é subespaço real bidimensional de  $V$  tal que  $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$  tem assinatura  $+-$ . Sejam  $p, q \in W$  tais que  $\langle p, p \rangle = -\langle q, q \rangle = 1$  e  $\text{Re}\langle p, q \rangle = 0$ . Podemos supor que existe  $r \geq 0$  satisfazendo  $ir = \langle p, q \rangle$ .

Considere a parametrização  $c(t) = [c_0(t)]$  de  $C$ , onde  $c_0(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)q$ . Note que as propriedades da equação (111) são satisfeitas e um cálculo direto mostra que  $|c'(t)| = \sqrt{1+r^2}$ . Repare que  $c_0''(t) = c_0(t)$ . Assim,

$$\begin{aligned} c''(t) &= \langle \cdot, c_0(t) \rangle (-\langle c_0''(t), c_0(t) \rangle + 2r^2)c_0(t) + 2irc_0'(t) + c_0''(t) \\ &= \langle \cdot, c_0(t) \rangle (-2r^2c_0(t) + 2irc_0'(t)). \end{aligned}$$

Se  $g_x = \text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  é a métrica Riemanniana, temos

$$g(c''(t), c''(t)) = -4r^2(r^2 - 2r^2 - 1) = 4r^2(r^2 + 1),$$

que independe de  $t$ . Logo, a curvatura geodésica  $c_g$  é

$$\frac{2r}{\sqrt{1+r^2}}.$$

Em particular, quando  $r = 0$ , temos que  $C$  é geodésica, o que era de se esperar.

Repare que a curva  $C$  corta  $\mathbf{S}(V)$  em  $v_1 = p + q$  e  $v_2 = p - q$ . Seja  $G$  a geodésica ligando  $v_1$  e  $v_2$ . Como vimos anteriormente, a distância de um ponto  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  a  $G$  é dada pela fórmula

$$\text{ta}(\mathbf{x}, G) = \frac{1}{2} + \left| \frac{\langle x, v_1 \rangle \langle x, v_2 \rangle}{\langle x, x \rangle \langle v_1, v_2 \rangle} \right|.$$

Tomando  $x = c(t)$ , temos que  $\langle c(t), c(t) \rangle = 1$ ,  $\langle v_1, v_2 \rangle = 2(1 - ir)$ ,

$$\langle c(t), v_1 \rangle = (\cosh(t) - \sinh(t))(1 - ir),$$

$$\langle c(t), v_2 \rangle = (\cosh(t) + \sinh(t))(1 - ir).$$

Portanto,

$$\text{ta}(c(t), G) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+r^2}}{2},$$

que é constante, ou seja,

$$\text{ta}(C, G) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+r^2}}{2}.$$



Se  $d$  é a distância entre  $C$  e  $G$ , então temos

$$\cosh(2d) = \sqrt{1 + r^2}.$$

Assim,

$$r = \sinh(2d).$$

Logo, a curvatura geodésica é

$$c_g = \tanh(2d).$$

Agora considere o horociclo  $C = \mathbf{P}(W)$ , onde  $W$  é subespaço real bidimensional de  $V$  tal que  $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$  tem assinatura  $+0$ . Sejam  $p, q \in W$  tais que  $\langle p, p \rangle = 1$ ,  $\langle q, q \rangle = 0$  e  $\text{Re}\langle p, q \rangle = 0$ . Podemos supor que existe  $r \geq 0$  satisfazendo  $ir = \langle p, q \rangle$ .

Como a matriz de Gram de  $p$  e  $q$  tem determinante negativo, pois  $p$  e  $q$  formam base de  $V$ , temos que  $-r^2 < 0$ , ou seja,  $r > 0$ . Assim, reescalando  $q$  podemos supor que  $r = 1$ . Considere a parametrização  $c(t) = [c_0(t)]$  de  $C$ , onde  $c_0(t) = p + tq$ . Note que as propriedades da equação (111) são satisfeitas e um cálculo direto mostra que  $|c'(t)| = 1$ . Repare que  $c_0''(t) = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} c''(t) &= \langle \cdot, c_0(t) \rangle (-\langle c_0''(t), c_0(t) \rangle + 2r^2)c_0(t) + 2irc_0'(t) + c_0''(t) \\ &= \langle \cdot, c_0(t) \rangle (-2r^2c_0(t) + 2irq). \end{aligned}$$

Se  $g_x = \text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  é a métrica Riemanniana, temos

$$g(c''(t), c''(t)) = -4r^2(r^2 - 2r^2) = 4,$$

que independe de  $t$ . Logo, a curvatura geodésica  $|c''(t)|$  é 2.

Em suma, as curvaturas geodésicas do círculo, do hiperciclo e do horociclo são constantes. Nos dois primeiros casos a curvatura geodésica é dada pela geometria do objeto e no terceiro caso a curvatura geodésica é sempre 2. ■

#### 4.11 Bissetores em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Seja  $V$  espaço complexo de dimensão 3 munido de forma Hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de assinatura  $++-$ . Sabemos que  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 := \mathbf{B}(V)$ .

**Definição 112** *Seja  $G = \mathbf{P}(W)$  uma geodésica de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , isto é,  $W$  é subespaço real de  $V$  tal que  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W}$  é forma real com assinatura  $+-$ . Considere  $\mathbf{f} = (\mathbb{C}W)^\perp$ . O bissetor dado por  $G$  é o conjunto  $B = \mathbf{P}(W + \mathbf{f})$ . O bissetor pode ser escrito como*

$$B = \cup_{\mathbf{x} \in G} L_{\mathbf{x}},$$

onde  $L_{\mathbf{x}}$  é a geodésica complexa ligando  $\mathbf{x}$  até  $\mathbf{f}$ . Chamamos a geodésica real  $G$  de espinha real, a geodésica complexa  $L = \mathbf{P}(\mathbb{C}W)$  de espinha complexa, o ponto  $\mathbf{f}$  de foco, e as geodésicas complexas  $L_{\mathbf{x}}$  de fatias do bissetor.

**Proposição 113** Considere os pontos  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  distintos. O conjunto

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 : \text{ta}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \text{ta}(\mathbf{x}, \mathbf{q})\}$$

é da forma  $B \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , onde  $B$  é um bissetor.

**Demonstração:** Sem perda de generalidade,  $p, q \in V$ ,  $\langle p, p \rangle = \langle q, q \rangle = -1$  e  $r := \langle p, q \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ . Sejam  $W = \mathbb{R}p + \mathbb{R}q$  e  $G = \mathbf{P}(W)$  a geodésica passando por  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ . Sabemos que  $p - q$  é o ponto médio entre  $p$  e  $q$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  com  $\langle p - q, p - q \rangle = -(2 + 2r)$ . Assim, tomando  $u = (p - q)/\sqrt{2 + 2r}$ , temos que  $\mathbf{u}$  é ponto médio de  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , e  $\langle u, u \rangle = -1$ .

Seja  $v$  ortogonal de  $u$  em  $W$ . Podemos supor que  $\langle v, v \rangle = 1$ , pois  $W$  tem assinatura  $+-$ . Considere  $W' = \mathbb{R}u + \mathbb{R}iv$  e  $G' = \mathbf{P}(W')$ .

Se  $L = \mathbf{P}(\mathbb{C}W)$ , então as geodésicas  $G$  e  $G'$  estão em  $L$  e se cortam em  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

Note que  $t = \langle \cdot, u \rangle v \in T_u G$  e  $t' := it \in T_u G'$ . Assim, considerando a métrica Riemanniana  $g = \text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$ , temos

$$g(t, t') = -\text{Re} i \langle t, t \rangle = 0.$$

Assim, as geodésicas  $G$  e  $G'$  são ortogonais.

Seja  $B$  o bissetor dado por  $G'$  e seja  $\mathbf{f}$  o foco desse bissetor. Podemos supor que  $\langle f, f \rangle = 1$ . Assim,

$$B = \mathbf{P}(W + \mathbf{f}).$$

Assim, o bissetor  $B$  candidato é o bissetor dado pela geodésica  $G'$ , que é a geodésica passando por  $u$  ortogonal a geodésica  $G$  em  $L$ .

Note que  $\{u, v, f\}$  é uma base ortonormal de  $V$ .

Mostremos que  $M = B \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Tome  $\mathbf{x} \in M$ . Temos que  $x = u + av + bf$  com  $a, b \in \mathbb{C}$ . Como  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , temos

$$-1 + |a|^2 + |b|^2 < 0,$$

$$|a|^2 + |b|^2 < 1.$$

Como  $\text{ta}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \text{ta}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ , temos

$$|\langle x, p \rangle|^2 = |\langle x, q \rangle|^2,$$

$$|\langle u, p \rangle + a \langle v, p \rangle|^2 = |\langle u, q \rangle + a \langle v, q \rangle|^2.$$

Repare que  $\langle p, u \rangle = -\sqrt{1+r}/\sqrt{2}$  e  $\langle q, u \rangle = \sqrt{1+r}/\sqrt{2}$ , ou seja,

$$\langle p, u \rangle = -\langle q, u \rangle$$

e  $\langle v, p \rangle = \langle v, q \rangle$ , pois  $\langle u, v \rangle = 0$ . Assim, a equação  $\text{ta}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \text{ta}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$  se reduz a

$$\langle u, p \rangle \langle v, p \rangle \text{Re } a = 0.$$

Como  $p \in W = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ ,  $p \neq u$  e  $p \neq v$ , segue que  $\text{Re } a = 0$ .

Logo,  $x = u + (\text{Im } a)iv + bf$ , ou seja,  $x \in W' + \mathbb{C}f$ . Portanto,  $x \in B \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Por outro lado, se  $\mathbf{x} \in B \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , então podemos supor que  $x = u + aiv + bf$ , com  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{C}$  e  $a^2 + |b|^2 < 1$ . Mostremos que

$$\text{ta}(p, x) = \text{ta}(x, q).$$

Para isso, basta mostrar que  $|\langle p, x \rangle|^2 = |\langle q, x \rangle|^2$ .

Repare que

$$\langle p, x \rangle = \langle p, u \rangle - i\langle p, v \rangle$$

e

$$\langle q, x \rangle = \langle q, u \rangle - i\langle q, v \rangle.$$

Como

$$\langle p, u \rangle = -\langle q, u \rangle \quad \text{e} \quad \langle p, v \rangle = \langle q, v \rangle,$$

temos que  $|\langle p, x \rangle|^2 = |\langle q, x \rangle|^2$ . Logo,  $\mathbf{x} \in M$ .

Portanto,

$$M = B \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2.$$

■

**Proposição 114** *Se  $L_1$  e  $L_2$  são geodésicas complexas distintas que se cortam em  $\mathbf{f} \in \mathbf{E}(V)$ , então existe um bissetor  $B$  que tem  $L_1$  e  $L_2$  como fatias. Além disso, esse bissetor é único.*

**Demonstração:** Seja  $L = \mathbf{P}(\mathbf{f})$ . Temos que essa reta é uma geodésica complexa, isto é, tem assinatura  $+-$ . A geodésica complexa  $L$  corta  $L_i$  no ponto  $\mathbf{p}_i$ . Como  $L_i$  é uma esfera de Riemann-Poincaré e  $f$  está na parte positiva de  $L_i$ , temos que  $\mathbf{p}_i$  está na parte negativa, pois  $p_i$  é ortogonal a  $f$ .

Assim, podemos supor que  $\langle p_i, p_i \rangle = -1$ ,  $r = \langle p_1, p_2 \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  e  $\langle f, f \rangle = 1$ . Como a matriz de Gram de  $p_1, p_2, f$  tem determinante negativo, temos que  $r > 1$ .

Considere a geodésica  $G = \mathbf{P}(W)$ , onde  $W = \mathbb{R}p_1 + \mathbb{R}p_2$ . Temos o bissetor  $B = \mathbf{P}(W + \mathbf{f})$  associado a geodésica  $G$  e  $L_i = \mathbf{P}(\mathbf{p}_i + \mathbf{f})$  é fatia desse bissetor.

Agora considere outro bissetor  $B'$  que tem  $L_1$  e  $L_2$  como fatias. Como  $B'$  é bissetor, existe uma geodésica  $G' = \mathbf{P}(W')$  em  $L = \mathbf{P}(\mathbf{f})$  e  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 \in G'$  tais que  $L_i = \mathbf{P}(\mathbf{p}'_i + \mathbf{f})$ .

Note que  $\mathbf{p}'_i$  é o ponto onde  $L$  e  $L_i$  se cortam, ou seja,  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}'_i$ . Assim,  $G = G'$ , pois  $G$  e  $G'$  são geodésicas em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  que se encontram em dois pontos distintos. Como  $G = G'$ , temos que  $B = B'$ . Portanto, o bissetor  $B$  é unicamente determinado. ■

## 5 Grupos Discretos

### 5.1 Ações de grupos em espaços topológicos

Seja  $\Gamma$  um grupo e seja  $M$  um espaço localmente compacto Hausdorff. Considere a ação  $\Lambda : \Gamma \times M \rightarrow M$  do grupo  $\Gamma$  sobre  $M$ . No que segue suporemos que para cada  $g$  a aplicação  $\Lambda(g, \cdot) : M \rightarrow M$ , que denotaremos somente por  $g$ , é homeomorfismo, ou seja,  $G$  age em  $M$  por homeomorfismos.

**Proposição 115** *Suponha que  $\Gamma$  é grupo discreto. A ação  $\Lambda$  é contínua se, e só se,  $g : M \rightarrow M$  é homeomorfismo para cada  $g \in \Gamma$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $g : M \rightarrow M$  é homeomorfismo para cada  $g$  e mostremos que  $\Lambda$  é contínua. Considere o ponto  $(g_0, x_0) \in \Gamma \times M$  e a rede  $(g_j, x_j)$  convergindo para  $(g_0, x_0)$ . Existe  $N$  tal que  $g_j = g_0$  para  $j \geq N$  porque a topologia de  $\Gamma$  é discreta. Logo,

$$\lim_j g_j(x_j) = \lim_j g_0(x_j) = g_0(x_0),$$

de onde segue a continuidade de  $\Lambda$ . O resultado recíproco é imediato. ■

Considere a aplicação  $\rho : \Gamma \times M \rightarrow M \times M$  dada por  $\rho(g, x) = (gx, x)$ . Repare que essa aplicação é contínua quando a ação de  $\Gamma$  em  $M$  é contínua.

**Definição 116** *Seja  $\Gamma$  um grupo agindo em  $M$  por homeomorfismos. Dizemos que a ação é propriamente descontínua se para todo compacto  $K$  temos que*

$$\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$$

*é finito.*

**Definição 117** *Se  $\Gamma$  é um grupo topológico e a ação é contínua, então dizemos que a ação de  $\Gamma$  em  $M$  é própria dado que a aplicação  $\rho$  é própria.*

**Proposição 118** *São equivalentes:*

- a) *A ação é propriamente descontínua;*
- b) *Para dois compactos  $K$  e  $L$  em  $M$  temos que  $\{g \in \Gamma : gK \cap L \neq \emptyset\}$  é finito.*

**Demonstração:** Para provar  $a \Rightarrow b$  basta tomar o compacto  $K \cup L$  e notar que

$$\{g \in \Gamma : gK \cap L \neq \emptyset\} \subset \{g \in \Gamma : g(K \cup L) \cap (K \cup L) \neq \emptyset\},$$

de onde segue o resultado. ■

**Proposição 119** *Suponha que o grupo  $\Gamma$  é discreto e que a ação é contínua. São equivalentes:*

- a) *A ação é própria;*
- b) *A ação é propriamente descontínua;*
- c) *Para dois pontos  $x$  e  $y$  em  $M$ , existem os abertos  $U$  e  $V$  tais que  $x \in U$ ,  $y \in V$  e  $\{g \in \Gamma : gU \cap V \neq \emptyset\}$  é finito.*

**Demonstração:**

**a  $\Rightarrow$  b :** Considere  $K \subset M$  compacto. O conjunto  $K' = \rho^{-1}(K \times K)$  é compacto e portanto  $\pi K'$  é compacto, onde  $\pi : \Gamma \times M \rightarrow \Gamma$  é a projeção natural. Como  $\pi K'$  é finito, porque é um discreto compacto, temos que

$$\{g \in \Gamma : gK \cap K \neq \emptyset\} \subset \{g \in \Gamma : \text{existe } x \in M \text{ satisfazendo } (gx, x) \in K \times K\} = \pi K'$$

é finito.

**b  $\Rightarrow$  c :** Considere vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tais que  $U$  e  $V$  tenham fecho compacto. Agora, basta notar que

$$\{g \in \Gamma : gU \cap V \neq \emptyset\} \subset \{g \in \Gamma : g\bar{U} \cap \bar{V} \neq \emptyset\}$$

e aplicar 118.

**c  $\Rightarrow$  a :** Seja  $L \subset M \times M$  compacto. Dado  $z = (x, y) \in M \times M$ , existem  $U_z$  e  $V_z$  de acordo com o item c. Como  $L$  é compacto, há  $z_1, \dots, z_n$  tais que  $L \subset \cup_{i=1}^n U_{z_i} \times V_{z_i}$ . Por construção, o conjunto

$$S_i = \{g \in \Gamma : U_{z_i} \cap gV_{z_i} \neq \emptyset\}$$

é finito para  $i = 1, \dots, n$ . Seja  $S = \cup_i S_i$ . Defina  $K = \pi L$  onde  $\pi : M \times M \rightarrow M$  é dada por  $\pi(x, y) = y$ .

Afirmção:  $\rho^{-1}L \subset S \times K$ . De fato, considere  $(g, x) \in \rho^{-1}L$ . Temos que  $(gx, x) \in L$ . Assim,  $x \in K$ . Além disso, existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $(gx, x) \in U_{z_i} \times V_{z_i}$ , ou seja,  $g \in S_i \subset S$ .

Por fim, como  $S \times K$  é compacto e  $\rho^{-1}L$  é fechado, segue que  $\rho^{-1}L$  é compacto. ■

**Corolário 120** *Se temos um grupo  $\Gamma$  agindo em  $M$ , então a ação é propriamente descontínua se, e só se, para dois pontos  $x$  e  $y$  em  $M$  existem as vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tais que*

$$\{g \in \Gamma : gU \cap V \neq \emptyset\}$$

*é finito.*

**Demonstração:** Basta considerar sobre  $\Gamma$  a topologia discreta. ■

**Definição 121** Dizemos que a ação de  $\Gamma$  em  $M$  é livre se  $\text{stab}(x) = \{1\}$  para todo  $x \in M$ .

**Proposição 122** Se ação de  $\Gamma$  em  $M$  é propriamente descontínua e livre, então todo ponto  $x \in M$  tem uma vizinhança  $U$  tal que  $gU \cap U = \emptyset$  para todo  $g \neq 1$ .

**Demonstração:** Pelo corolário 120 existem as vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $x$  tais que

$$\{g \in \Gamma : gU \cap V \neq \emptyset\}$$

é finito. Tomando  $W = U \cap V$  temos que

$$\{g \in \Gamma : gW \cap W \neq \emptyset\}$$

é finito e formado pelos elementos  $1, g_1, \dots, g_n$ . Como  $\text{stab}(x) = \{1\}$  temos que  $g_i x \neq x$ . Logo, existem  $U_i$  e  $V_i$ , vizinhanças de  $x$  e  $g_i x$ , tais que  $U_i \cap V_i = \emptyset$ .

Considere a vizinhança de  $x$

$$W' = W \cap (U_1 \cap g_1^{-1}V_1) \cap \dots \cap (U_n \cap g_n^{-1}V_n).$$

Afirmção:  $gW' \cap W' = \emptyset$  para  $g \neq 1$ .

De fato, fixe  $g \neq 1$  e suponha que existe  $y$  pertencente a essa intersecção. Como  $y \in gW' \cap W'$ , temos que  $y = g_i u$  para algum  $i$ . Lembrando que  $y \in g_i W'$ , existe  $u \in W'$  tal que  $g_i u = y$ . Como  $u \in W' \subset g_i^{-1}V_i$ , temos que  $g_i u \in V_i$ , que é disjunto de  $U_i$ . Logo,  $y = g_i u \notin U_i$  e, consequentemente,  $u \notin W'$ , o que é uma contradição. Portanto,  $gW' \cap W' = \emptyset$  para  $g \neq 1$ . ■

**Proposição 123** Suponha que a ação de  $\Gamma$  em  $M$  é propriamente descontínua. Então dados dois pontos  $x$  e  $y$  de orbitas distintas, existem vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tais que  $gU \cap V = \emptyset$  para todo  $g$ .

**Demonstração:** Considere a topologia discreta em  $\Gamma$ . Como vimos anteriormente na proposição 119 a aplicação  $\rho$  é própria e, portanto, é também fechada. Assim,  $\rho(\Gamma \times M)$  é fechado em  $M \times M$ . Por hipótese,  $(x, y) \notin \rho(\Gamma \times M)$ . Há portanto  $U$  e  $V$ , vizinhanças de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tais que

$$U \times V \subset M \times M \setminus \rho(\Gamma \times M).$$

Note que  $gU \cap V = \emptyset$  para todo  $g$ . De fato, suponha que esse não seja o caso. Se  $gU \cap V \neq \emptyset$ , então existe  $z \in M$  tal que  $(g^{-1}z, z) \in U \times V$ , o que é uma contradição. ■

**Definição 124** Sejam  $M$  uma variedade e  $\Gamma$  um grupo de difeomorfismos de  $M$ . Considere a ação de  $\Gamma$  em  $M$ . Dizemos que essa ação é de recobrimento se todo ponto  $x \in M$  tem uma vizinhança  $U$  tal que  $gU \cap U = \emptyset$  para todo  $g \neq 1$ .

**Proposição 125** *Considere a ação de  $\Gamma$  na variedade  $M$ , onde  $\Gamma$  é subgrupo do grupo de difeomorfismos de  $M$ . Essa ação é de recobrimento se, e só se, a aplicação natural  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  é recobrimento.*

**Demonstração:** Provemos primeiramente que se a ação é de recobrimento, então  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  é recobrimento. Tome  $[x] \in M/\Gamma$ . Existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $gU \cap U = \emptyset$  para todo  $g \neq 1$ . Considere então a vizinhança  $V = \pi(U)$  de  $[x]$ . Note que  $V$  é aberto, porque  $\pi^{-1}V = \sqcup_g gU$  é aberto, e que para cada  $g$  temos o homeomorfismo  $\pi : gU \rightarrow V$ . Logo,  $\pi$  é recobrimento.

Provemos a recíproca agora. Suponha que  $\pi$  é recobrimento.

Mostremos que grupo Deck coincide com  $\Gamma$ . De fato, é claro que  $\Gamma \subset \text{Deck}(\pi)$ . Por outro lado, considere  $A \in \text{Deck}(\pi)$ . Tome  $x \in M$ . Como  $Ax \in \pi^{-1}[x]$ , existe  $g$  tal que  $gx = Ax$ . Logo,  $A = g$ .

Portanto,  $\Gamma = \text{Deck}(\pi)$ . Em particular, a ação de  $\Gamma$  é livre.

Fixe um ponto  $x \in M$ . Existe uma vizinhança distiguida  $V$  de  $[x]$  tal que  $\pi^{-1}V = \sqcup_i U_i$ , cada  $U_i$  é conexo por caminho e para cada  $i$  a aplicação  $\pi : U_i \rightarrow V$  é homeomorfismo. Escrevamos  $U_g$  no lugar de  $U_i$  se  $gx \in U_i$ , o que é possível porque existe a bijeção  $\Gamma \rightarrow \Gamma x = \pi^{-1}x$  dada por  $g \rightarrow gx$ .

Assim, temos  $\pi^{-1}V = \sqcup_g U_g$ . Defina  $U$  como sendo  $U_1$ . Se  $h \in \Gamma$ , então  $hU = U_h$ , pois  $hx \in U_h$ . Logo,

$$\pi^{-1}V = \sqcup_g gU$$

e para cada  $g$  a aplicação  $\pi : gU \rightarrow V$  é homeomorfismo. Em particular, como os abertos  $U_i$ 's eram dois a dois disjuntos temos que  $gU \cap U = \emptyset$  para todo  $g \neq 1$ . ■

Repare no seguinte: Se a ação de  $\Gamma$  em  $M$  é de recobrimento, onde  $M$  é variedade, então  $M/\Gamma$  é praticamente uma variedade, pois podemos puxar a estrutura localmente euclidiana e a base enumerável de  $M$ . Falta somente que o quociente seja Hausdorff.

**Proposição 126** *Considere a ação de  $\Gamma$  na variedade  $M$ , onde  $\Gamma$  é um grupo de difeomorfismos. Suponha que  $\Gamma$  é ação de recobrimento em  $M$ . Temos que  $M/\Gamma$  é Hausdorff se, e só se, dados dois pontos  $x$  e  $y$  de orbitas distintas, existem as vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tais que  $gU \cap V = \emptyset$  para todo  $g$ .*

**Demonstração:** Imediato. ■

**Proposição 127** *Seja  $M$  variedade e  $\Gamma$  um grupo de difeomorfismos de  $M$ . Temos que  $M/\Gamma$  é variedade e  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  é recobrimento suave se, e só se, a ação de  $\Gamma$  em  $M$  é propriamente descontínua e livre.*

**Demonstração:** Pelos teorema 122 e 123 temos que  $M/\Gamma$  é variedade e  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  é recobrimento suave quando a ação é propriamente descontínua e livre.

Por outro lado, suponha agora que  $\pi$  é recobrimento e  $M/\Gamma$  é Hausdorff. Vamos verificar que  $\Gamma$  age livremente em  $M$ . De fato, tome  $x \in \Gamma$  e  $g \in \Gamma$  tal que  $gx = x$ . Como  $g$  é uma transformação de Deck, segue  $g = 1$ .

Mostremos que a ação é propriamente descontínua. Tome  $x, y$  em  $M$ . Se  $x$  e  $y$  estão em orbitas diferentes, então podemos aplicar o teorema 126. Se  $x$  e  $y$  estão na mesma orbita, então existe uma vizinhança distinguida  $W$  de  $[x] = [y]$ , ou seja,  $\pi^{-1}W = \sqcup_g gU$  para uma vizinhança  $U$  de  $x$  e para todo  $g$  a aplicação  $\pi : gU \rightarrow W$  é homeomorfismo. Considere  $h \in \Gamma$  tal que  $y = hx$ . Ao considerarmos a vizinhança  $V = hU$  de  $y$ , concluímos que  $gU \cap V = \emptyset$  sempre que  $g \neq h$ .

Portanto, sempre há vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tais que  $\{g \in \Gamma : gU \cap V \neq \emptyset\}$  é finito. Daí segue que  $\Gamma$  age propriamente descontinuamente em  $M$  pelo corolário 120. ■

Nosso objetivo é estudar a ação de um grupo discreto  $\Gamma$  em uma variedade Riemanniana  $M$  por isometrias. Nesse contexto, há outras formas de verificar que uma ação é propriamente descontínua, como mostra o teorema a seguir.

**Proposição 128** *Suponha que  $M$  espaço métrico localmente compacto e  $\Gamma$  age por isometrias. Então são equivalentes:*

- a) *A ação é propriamente descontínua;*
- b) *Dados  $x \in M$  e  $K \subset M$  compacto temos que*

$$\{g \in \Gamma : gx \in K\}$$

*é finito;*

- c) *Orbitas de pontos são conjuntos discretos e os estabilizadores são finitos;*
- d) *Dado  $x \in M$  existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que*

$$\{g \in \Gamma : gU \cap U \neq \emptyset\}$$

*é finito.*

**Demonstração:**

**a**  $\Rightarrow$  **b** : Considere o compacto  $K$  e o ponto  $x \in M$ . Para obter o resultado, basta aplicar a proposição 118 com  $L = \{x\}$ .

**b**  $\Rightarrow$  **c** : Considere  $x \in M$ . Suponha que  $\Gamma x$  não é discreto. Há  $gx \in M$  e uma sequência  $g_n x \in M$  tais que  $g_n x \rightarrow gx$  e  $g_n x \neq gx$  para todo  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $gx$  compacta. Temos que para  $n$  suficientemente grande  $g_n x \in V$ , contradizendo a hipótese.

Logo, a orbita de um ponto é sempre discreta. Agora mostremos que o estabilizador de um ponto  $x$  é sempre finito. Para isso, basta tomar o compacto  $K = \{x\}$ .

**c**  $\Rightarrow$  **a** : Considere  $K \subset M$  compacto e suponha que  $\{g \in \Gamma : gK \cap K \neq \emptyset\}$  é infinito. Há então uma sequência  $g_n$  de termos de  $\Gamma$  dois a dois distintos satisfazendo  $g_n K \cap K \neq \emptyset$ .



Desta forma, para cada  $n$  existe  $x_n$  em  $K$  tal que  $g_n x_n \in K$ . Assim, a menos de passar para uma subsequência podemos supor que a sequência  $(g_n x_n, x_n)$  converge em  $K \times K$  para o ponto  $(x, y)$ .

Como o estabilizador de  $x$  é finito, temos que  $\{g_n x : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$  é infinito. Assim, podemos supor, a menos de passar para uma subsequência, que  $g_n x$ , com  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ , é uma sequência formada por termos dois a dois distintos.

Note que  $g_n x \rightarrow y$  porque

$$d(g_n x, y) \leq d(g_n x, g_n x_n) + d(g_n x_n, y) = d(x, x_n) + d(g_n x_n, y) \rightarrow 0,$$

mas isso é impossível, pois  $\Gamma x$  é discreto. De fato, considere  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \cap \Gamma x = \{x\}$ . Logo,  $d(gx, x) > \epsilon$  para todo  $g \neq 1$  e, consequentemente,  $d(gx, hx) > \epsilon$  para  $g \neq h$  porque  $d(gx, hx) = d(h^{-1}gx, x)$ . Assim,  $d(g_n x, g_{n+1} x) > \epsilon$  para todo  $n$ , o que é falso, pois  $g_n x \rightarrow y$ .

**a  $\Rightarrow$  d** : Tome uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $\bar{U}$  é compacto. Temos que

$$\{g \in \Gamma : gU \cap U \neq \emptyset\} \subset \{g \in \Gamma : g\bar{U} \cap \bar{U} \neq \emptyset\}$$

é finito, de onde segue o resultado.

**d  $\Rightarrow$  c** : Suponha que  $\Gamma x$  não é discreto. Existem  $gx \in \Gamma x$  e uma sequência  $g_n x \in \Gamma x$  de termos dois a dois distintos convergindo para  $gx$ . Como  $g^{-1}g_n x \rightarrow x$ , podemos supor que  $g = 1$ .

Seja  $U$  uma vizinhança de  $x$ . Temos que  $g_n x \in U$  para  $n$  suficientemente grande, ou seja,  $g_n U \cap U \neq \emptyset$  para  $n$  suficientemente grande, o que é uma contradição. Logo,  $\Gamma x$  é discreto.

Mostremos agora que  $\text{stab}(x)$  é finito. Se esse não fosse o caso, existiria uma sequência  $g_n \in \Gamma$  de termos dois a dois distintos tal que  $g_n x = x$ . Assim, se  $U$  é uma vizinhança de  $x$  temos  $g_n U \cap U \neq \emptyset$  para todo  $n$ , o que é uma contradição. Portanto,  $\text{stab}(x)$  é finito. ■

**Definição 129** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Para cada compacto  $K \subset X$  e cada aberto  $U \subset Y$  defina  $V_{K,U} = \{f \in C(X, Y) : fK \subset U\}$ . O conjunto de todos esses  $V_{K,U}$  forma uma sub-base em  $C(X, Y)$  e assim temos uma topologia associada a essa sub-base. Essa topologia leva o nome de topologia compacto aberta de  $C(X, Y)$ .*

**Proposição 130** *No caso em que  $X$  e  $Y$  são espaços métricos, temos que o espaço  $C(X, Y)$  é espaço uniforme com topologia gerada pelas pseudo-métricas*

$$d_K(f, g) = \sup_{x \in K} d(fx, gx).$$

**Demonstração:** Considere  $f_0 \in C(X, Y)$  e a vizinhança  $V_{K,U}$  de  $f_0$ . Seja  $K' = f_0 K$ . Tome  $\epsilon > 0$  de modo que a  $\epsilon$ -vizinhança  $K'_\epsilon$  de  $K'$  está contida em  $U$ . Claramente temos

$$B(f_0, \epsilon, d_K) \subset V_{K,U}.$$

Por outro lado, considere a bola  $B(f_0, \epsilon, d_K)$ . Como  $f_0$  é uniformemente contínua em  $K$ , temos que existe  $\delta > 0$  satisfazendo  $f_0(B[x, \delta] \cap K) \subset B(f_0(x), \epsilon/2)$  para todo  $x \in K$ , onde

$$B[x, \delta] = \{z \in X : d(z, x) \leq \delta\}.$$

Como  $K$  é compacto, existem  $x_1, \dots, x_n \in K$  tal que  $K \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \delta)$ .

Temos que

$$\bigcap_{j=1}^n V_{B[x_j, \delta] \cap K, B(f_0(x_j), \epsilon/2)} \subset B(f_0, \epsilon, d_K).$$

De fato, se  $f \in V_{B[x_j, \delta] \cap K, B(f_0(x_j), \epsilon/2)}$  para todo  $j$ , então temos

$$\begin{aligned} d_K(f, f_0) &= \sup_{x \in K} d(f(x), f_0(x)) \\ &= \max_j \sup_{x \in B[x_j, \delta] \cap K} d(f(x), f_0(x)) < \epsilon, \end{aligned}$$

pois  $d(f(x), f_0(x)) \leq d(f(x), f_0(x_j)) + d(f_0(x_j), f_0(x)) < \epsilon$ .

Logo, a estrutura uniforme dada pelas pseudo-métricas  $d_K$  nos fornece a topologia compacta aberta. ■

Considere agora o grupo de isometrias  $\text{Iso}(M) \subset C(M, M)$  do espaço métrico  $M$  e sobre esse considere a topologia compacto aberta induzida de  $C(M, M)$ .

**Proposição 131** *O grupo  $\text{Iso}(M)$  é grupo topológico.*

**Demonstração:** Considere a rede  $(g_j, h_j)$  convergindo para  $(g, h)$ . Para cada compacto  $K \subset X$  temos

$$\begin{aligned} d_K(g_j h_j, gh) &= \sup_K d(g_j h_j x, ghx) \\ &\leq \sup_K d(g_j h_j x, g_j h x) + \sup_K d(g_j h x, ghx) \\ &= \sup_K d(h_j x, h x) + \sup_{hK} d(g_j y, gy) \\ &= d_K(h_j, h) + d_{hK}(g_j, g) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo, a operação multiplicação  $\text{Iso}(M) \times \text{Iso}(M) \rightarrow \text{Iso}(M)$  dada por  $(g, h) \mapsto gh$  é contínua.

Agora, verifiquemos que a inversão  $\text{Iso}(M) \rightarrow \text{Iso}(M)$  dada por  $g \mapsto g^{-1}$  é contínua.

Considere a rede  $g_j$  convergindo para  $g$ . Como a multiplicação é contínua, temos que  $g_j g^{-1} \rightarrow 1$ .

Temos que para cada compacto  $K$  vale

$$d_K(g_j^{-1}, g^{-1}) = \sup_K d(g_j^{-1} x, g^{-1} x) \leq \sup_K d(x, g_j g^{-1} x) \rightarrow 0,$$

de onde segue a continuidade da inversão. ■

**Definição 132** Um espaço métrico  $M$  é Heine-Borel se toda bola fechada é compacta. Equivalentemente, se todo conjunto fechado e limitado é compacto.

A razão pela qual nos importaremos com esses espaços é porque toda variedade Riemanniana completa é Heine-Borel.

**Proposição 133** Considere o espaço métrico Heine-Borel  $M$ . Um subgrupo  $\Gamma \subset \text{Iso}(M)$  é discreto se, e só se, age propriamente descontinuamente sobre  $M$ .

**Demonstração:** Primeiramente observe no seguinte, como  $M$  pode ser escrito como união de uma famílias enumerável de bolas compactas, segue que  $C(X, X)$  é metrizável por argumento padrão de espaço uniforme. De fato, fixando  $x_0$  em  $M$  podemos definir a métrica

$$d(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{K_i}(f, g)}{1 + d_{K_i}(f, g)},$$

onde  $K_i = \overline{B}(x_0, \epsilon)$ . Em particular,  $\text{Iso}(M)$  é espaço metrizável.

Suponha que a ação de  $\Gamma$  é propriamente descontínua e que  $\Gamma$  não é discreto, ou seja, existe uma sequência  $g_j$  em  $\Gamma$  formada de termos dois a dois distintos tal que  $g_j \rightarrow \text{Id}$ . Se  $x \in M$ , então  $g_j x \rightarrow x$ . Se  $U$  é uma vizinhança de  $x$ , então temos

$$g_j U \cap U \neq \emptyset$$

para  $j$  suficientemente grande, o que contradiz que  $\Gamma$  age propriamente descontinuamente.

Agora mostremos o resultado recíproco: Se  $\Gamma$  é discreto, então a ação de  $\Gamma$  é propriamente descontínua. De fato, suponha que esse não seja o caso. Existem um compacto  $K$  e uma sequência  $g_j \in \Gamma$  de funções dois a dois distintas tais que  $g_j K \cap K \neq \emptyset$ .

Tome  $R \geq 2\text{diam}K$  e  $p \in K$ . Temos que  $d(g_j(p), p) \leq R$ , ou seja, para  $x \in \overline{B}(p, R)$  temos

$$d(g_j(x), p) \leq d(g_j(x), g_j(p)) + d(g_j(p), p) = d(x, p) + d(g_j(p), p) \leq 2R.$$

Logo, temos que  $g_j(x) \in \overline{B}(p, 2R)$  para todo  $j$  e todo  $x \in \overline{B}(p, R)$ .

Como todo compacto  $K \subset \overline{B}(p, R)$  para algum  $R > 0$  grande, temos que para cada  $K$  compacto existe  $R > 0$  tal que  $g_j K \subset B(x, 2R)$  para todo  $j$  e todo  $x \in K$ .

Pelo teorema de Arzelà-Ascoli existe uma subsequência  $g_{j_k}$  que converge na topologia compacto-aberta para  $g \in \text{Iso}(M)$ . Em particular, se  $h_k = g_{j_{k+1}} g_{j_k}^{-1}$ , temos que  $h_k \in \Gamma$ ,  $h_k \neq \text{Id}$  e  $h_k \rightarrow \text{Id}$ , o que é impossível porque  $\Gamma \subset \text{Iso}(M)$  é discreto. ■

**Lema 134** Considere o espaço métrico Heine-Borel  $M$  e um subgrupo discreto  $\Gamma \subset \text{Iso}(M)$ . Para cada  $p \in M$  existe uma vizinhança  $W$  de  $p$  tal que nenhum elemento de  $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$  fixa elementos em  $W \setminus \{p\}$ .

**Demonstração:** Suponha que para toda vizinhança  $W$  existe uma transformação em  $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$  com um ponto fixo em  $W \setminus p$ . Existe então uma sequência  $p_n$  de pontos em  $M$  diferentes de  $p$  tal que  $p_n \rightarrow p$  e  $p_n$  é ponto fixo de uma transformação  $T_n$  de  $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ .

Fixe  $\epsilon > 0$ . A bola  $\overline{B(p, \epsilon)}$  é compacta e portanto

$$\{g \in \Gamma : g(p) \in \overline{B(p, \epsilon)}\}$$

é finito, porque a ação de  $\Gamma$  é propriamente descontínua pela proposição 133. Tome  $N$  suficientemente grande tal que

$$d(T_n(p), p) > \epsilon$$

para  $n \geq N$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(T_n(p), p) &\leq d(T_n(p), T_n(p_n)) + d(T_n(p_n), p) \\ &= d(p, p_n) + d(p_n, p) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

que é uma contradição. ■

**Proposição 135** *Considere o espaço métrico Heine-Borel  $M$  e um subgrupo  $\Gamma \subset \text{Iso}(M)$ . O grupo  $\Gamma$  é discreto se, e só se, para todo  $p \in M$  a órbita  $\Gamma p$  é subconjunto discreto em  $M$ .*

**Demonstração:** Se a ação é propriamente descontínua (veja proposição 133), então órbitas são sempre discretas pelo teorema 128.

Mostremos a recíproca. Suponha que o resultado seja falso, isto é, que órbitas são finitas e  $\Gamma$  não é discreto.

Pelo lema 134 existe um ponto  $q$  tal que  $Tq \neq q$  para todo  $T \in \Gamma \setminus \text{Id}$ . Como  $\Gamma$  não é discreto, existe uma sequência  $T_n$  em  $\Gamma$  de funções dois a dois distintas tal que  $T_n \rightarrow \text{Id}$ . Assim,  $T_n(q) \rightarrow q$ . Se  $T_n q = T_m q$ , então  $T_n = T_m$ , pois  $T_n^{-1} T_m$  tem  $q$  como ponto fixo.

Assim, a sequência  $T_n(q)$  é formada por termos dois a dois distintos. Assim,  $\Gamma q$  é infinito, o que é uma contradição. ■

**Corolário 136** *Considere o espaço métrico  $M$  e suponha que todas suas bolas são compacta, e considere um subgrupo  $\Gamma \subset \text{Iso}(M)$  discreto. O conjunto*

$$E = \{p \in M : T(p) = p \text{ para alguma } T \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}\}$$

*não tem ponto de acumulação.*

**Demonstração:** Considere  $p \in E$ . Existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que

$$\{T \in \Gamma : TU \cap U \neq \emptyset\}$$

é um conjunto finito e, portanto, há somente um número finito de transformações em  $\Gamma$  com ponto fixo em  $U$ , pois se  $Tx = x$  para algum  $x \in U$ , então  $x \in TU \cap U$ . Daí segue o resultado. ■

Esses resultados serão uteis quando falarmos de orbifolds.

## 5.2 Grupos Fuchsianos

Nessa secção usaremos o semi-plano de Poincaré como modelo do plano hiperbólico e o denotaremos por  $\mathbb{H}$ .

O grupo das isometrias do plano de hiperbólico que preservam orientação é dado por

$$\text{Iso}(\mathbb{H}) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ab - cd = 1 \right\}$$

e esse claramente coincide com o grupo  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) := \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}\}$ .

A topologia de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  é dada pela norma  $|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  no espaço das matrizes  $2 \times 2$ . A topologia de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  é a topologia quociente. Note que em  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  temos também a topologia compacto-aberta. Mostremos que as duas topologias coincidem.

De fato, podemos considerar as duas topologias, a dada pela norma e a compacta-aberta, no espaço vetorial  $M(2, \mathbb{R})$  de matrizes  $2 \times 2$ . As duas topologias tornam  $M(2, \mathbb{R})$  em espaço vetorial topológico Hausdorff. No entanto, é um fato conhecido da análise funcional que dado um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , existe uma única topologia Hausdorff que o torna em um espaço vetorial topológico. Logo, as topologias coincidem em  $M(2, \mathbb{R})$  e, conseqüentemente, também em  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Considere  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  em  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Vejamos quais os pontos fixos de  $T$  possíveis em  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} Tz &= z, \\ az + b &= cz^2 + dz, \\ cz^2 + (d - a)z + b &= 0. \end{aligned}$$

O discriminante dessa última equação é

$$\Delta = (d - a)^2 + 4bd = (d + a)^2 - 4(ad - bc) = (d + a)^2 - 4.$$

Definindo  $|\text{tr}|(T) = |a + b|$  temos que  $\Delta = |\text{tr}|(T)^2 - 4$ .

Se  $|\text{tr}|(T) < 2$ , então  $T$  tem dois pontos fixos distintos, um conjugado do outro, ou seja,  $T$  tem um ponto fixo em  $\mathbb{H}$ . Nesse caso dizemos que  $T$  é uma transformação elíptica.

Se  $|\text{tr}|(T) = 2$ , então  $T$  tem um ponto fixo somente e esse está sobre o eixo real. Nesse caso dizemos que  $T$  é uma transformação parabólica.

Se  $|\text{tr}|(T) > 2$ , então  $T$  tem dois pontos fixos e esses estão sobre o eixo real. Nesse caso dizemos que  $T$  é uma transformação hiperbólica.

Se  $T$  é elíptica, então seja  $w$  o ponto fixo dentro do plano hiperbólico. Há uma transformação  $A$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  que leva  $w$  em  $i$ . Assim temos que  $ATA^{-1}$  fixa  $i$ . Podemos escrever  $ATA^{-1}z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \theta}$  e assim

$$\frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \theta} = i.$$

Assim,  $\alpha = \theta$  e  $\beta = -\gamma$ . Como  $\alpha\theta - \beta\gamma = 1$  temos que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , ou seja,  $\alpha = \cos(t)$  e  $\beta = \sin(t)$  para algum  $t$ . Logo,

$$ATA^{-1} = \frac{\cos(t)z + \sin(t)}{-\sin(t)z + \cos(t)}.$$

Como,  $T$  tem apenas dois pontos fixos, temos que  $T$  não é a identidade, ou seja,  $t \notin \pi\mathbb{Z}$ . Logo, a menos de conjugação,  $T$  é dada por uma matriz de rotação.

Se  $T$  é parabólica, então  $T$  tem um ponto fixo  $w$  somente e esse é real. Considere uma transformação  $A$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  levando  $w$  em  $\infty$  e daí temos que  $ATA^{-1}$  fixa o infinito. Escrevendo  $ATA^{-1}z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \theta}$  e como essa fixa  $\infty$ , temos  $\gamma = 0$ . Além disso,  $|\text{tr}|(T) = 2$  e  $\alpha\theta - \beta\gamma = 1$ , ou seja,  $\alpha = \theta = \pm 1$ . Logo,

$$ATA^{-1}z = z + l,$$

onde  $l \in \mathbb{R}$ .

Assim, a menos de conjugação, transformações parabólicas são translações.

Por fim, se  $T$  é uma transformação hiperbólica então há somente dois pontos fixos distintos,  $w_1, w_2$ , e esses são reais. Existe  $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  que leva  $w_1$  e  $w_2$  para 0 e  $\infty$ . Assim,  $ATA^{-1}$  tem 0 e  $\infty$  como pontos fixos. Escrevendo  $ATA^{-1}z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \theta}$  temos

$$\beta = 0 \quad \text{e} \quad \gamma = 0.$$

Como  $\alpha\theta - \beta\gamma = 1$ , temos que  $\alpha$  e  $\theta$  tem o mesmo sinal e como  $|\text{tr}|(T) \neq 2$  temos que  $\alpha \neq \theta$ . Assim,

$$ATA^{-1}z = \lambda z$$

onde  $\lambda > 0$  e  $\lambda \neq 1$ .

Portanto,  $T$  é uma dilatação a menos de conjugação.

**Definição 137** *Um grupo Fuchsiano é um subgrupo discreto de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .*

**Exemplo 138** *O grupo  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  é Fuchsiano.*

Note que como  $\mathbb{H}$  é variedade completa, então pela proposição 133 temos que um subgrupo de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  é Fuchsiano se, e só se, age propriamente descontinuamente sobre  $\mathbb{H}$ .

**Proposição 139** *Seja  $\Gamma$  um subgrupo discreto de um grupo topológico  $G$  Hausdorff. Então  $G$  é fechado.*

**Demonstração:** Considere a aplicação  $\Lambda : G \times G \rightarrow G$  dada por  $\Lambda(g, h) = gh^{-1}$ . Repare que essa aplicação é contínua e  $\Lambda(1, 1) = 1$ . Assim, para cada vizinhança  $U$  de 1 existe uma vizinhança  $V \subset U$  de 1 tal que  $VV^{-1} = \Lambda(V \times V) \subset U$ .

Agora considere  $h \notin \Gamma$ . Como  $\Gamma$  é discreto, existe uma vizinhança  $U$  de 1 tal que  $U \cap \Gamma = \{1\}$ . Considere a vizinhança  $V \subset U$  de 1 satisfazendo  $VV^{-1} \subset U$ .

Afirmção: A intersecção de  $W := Vh$  com  $\Gamma$  tem no máximo um ponto. Suponha que não seja o caso. Existem  $g_1, g_2$  distintos em  $\Gamma$  tais que  $g_i \in W$ . Assim,  $g_i = x_i h$  para algum  $x_i \in V$ , ou seja,  $h = x_i^{-1} g_i$ . Portanto,

$$x_1^{-1} g_1 = x_2^{-1} g_2,$$

$$g_1 g_2^{-1} = x_1 x_2^{-1},$$

que pertence a  $U \cap \Gamma = \{1\}$ . Logo,  $g_1 g_2^{-1} = 1$ , ou seja,  $g_1 = g_2$ , contradizendo nossa hipótese.

Se  $W \cap \Gamma = \emptyset$  então finalizamos a prova. Se  $W \cap \Gamma = \{g\}$  para algum  $g \in \Gamma$ , então considerando  $W' = W \setminus \{g\}$  temos que  $W'$  é vizinhança de  $h$  e  $W' \cap \Gamma = \emptyset$ . ■

### Corolário 140

- Se  $\Gamma$  é um subgrupo discreto de  $\mathbb{R}$  não trivial, então  $\Gamma$  é cíclico.
- Se  $\Gamma$  é um subgrupo discreto de  $\mathbb{S}^1$  não trivial, então  $\Gamma$  é cíclico.

**Demonstração:** Mostremos o primeiro item, o segundo é análogo. Tome  $x$  como sendo o ínfimo do conjunto  $\Gamma \cap \mathbb{R}_{>0}$ . Como  $\Gamma$  é fechado, temos que  $x \in \Gamma$  e como  $\Gamma$  é discreto, temos que  $x > 0$ . Claramente  $\mathbb{Z}x \subset \Gamma$ . Mostremos que de fato vale a identidade. Se  $y \in \Gamma$  então há  $k \in \mathbb{Z}$  e  $r \in [0, x)$  tal que  $y = kx + r$ . Daí segue que  $r = x - ky \in \Gamma$ . Como  $r < x$ , devemos ter  $r = 0$ , para não contradizer a minimalidade de  $x$ . Portanto,  $y \in \mathbb{Z}x$ . Logo,  $\Gamma = \mathbb{Z}x$ . ■

**Proposição 141** Sobre os subgrupos cíclicos de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm \text{Id}\}$  temos os seguintes resultados.

- Todo subgrupo cíclico hiperbólico (parabólico) de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  é Fuchsiano.
- Um subgrupo cíclico elíptico de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  é Fuchsiano se, e só se, é finito.

**Demonstração:** Mostremos o primeiro item. Seja  $\Gamma$  o subgrupo em questão. Façamos o caso em que  $\Gamma$  é hiperbólico.

Seja  $g$  gerador  $\Gamma$ . Existe uma transformação  $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  tal que

$$g = ASA^{-1},$$

onde

$$S = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix},$$

com  $\lambda > 0$  e  $\lambda \neq 1$ . Repare que  $\Gamma = A\langle S \rangle A^{-1}$ . Assim,  $\Gamma$  é discreto se  $\langle S \rangle$  é discreto.

Basta então provar que  $\langle S \rangle$  é discreto.

De fato,  $d(A^n, 1)^2 = (1 - \lambda^n)^2 + (1 - \lambda^{-n})^2$ , que é igual a

$$2 - 2(\lambda^n + \lambda^{-n}) + \lambda^{2n} + \lambda^{-2n} = (\lambda^n + \lambda^{-n})^2 - 2(\lambda^n + \lambda^{-n}) =$$

$$(\lambda^n + \lambda^{-n} - 1)^2 - 1.$$

Como  $\lambda^n + \lambda^{-n} \geq \lambda + \lambda^{-1}$  para  $n \neq 0$ , temos que

$$d(A^n, 1) \geq (\lambda + \lambda^{-1} - 1)^2 - 1,$$

ou seja, tomando  $\epsilon = (\lambda + \lambda^{-1} - 1)^2 - 1$  obtemos  $B(1, \epsilon) \cap \langle S \rangle = \{1\}$ . Daí segue que  $\Gamma$  é discreto.

O caso em que  $g$  é parabólico é similar. Existe uma transformação  $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  tal que

$$g = ASA^{-1},$$

onde

$$S = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com  $c \neq 0$ . O argumento, que finaliza a prova é similar ao feito para o caso hiperbólico.

Agora analisemos o caso em que  $\Gamma$  é elíptico. Existe uma transformação  $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  tal que

$$g = ASA^{-1},$$

onde

$$S = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix},$$

com  $t \notin \pi\mathbb{Z}$ . Se  $t/\pi$  é racional, então  $\langle S \rangle$  é finito e portanto discreto. Se  $t/2\pi$  é irracional, então a sequência  $S^n$  é densa em  $\text{SO}(2)$ , ou seja, existe uma sequência de  $n_k \in \mathbb{Z}_{>0}$  tal que  $S^{n_k} \rightarrow \text{Id}$ . Em particular,  $\langle S \rangle$  não é discreto. ■

**Definição 142** *Seja  $\Gamma$  um subgrupo de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . O conjunto limite de  $\Gamma$ , denotado por  $\Lambda(\Gamma)$ , é formado pelos pontos de acumulação de  $\Gamma z$  em  $\mathbb{C}$  para todo  $z \in \mathbb{H}$ .*

Se  $\Gamma$  é Fuchsiano, então para todo  $z \in \mathbb{H}$  o conjunto  $\Gamma z$  é discreto e, portanto,  $\Gamma z$  não tem ponto de acumulação em  $\mathbb{H}$ . Logo,  $\Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Por exemplo, se  $\Gamma = \langle T \rangle$  onde  $T(z) = 2z$ , então para todo  $z \in \mathbb{H}$  a órbita  $\Gamma z$  tem 2 pontos de acumulação, 0 e  $\infty$ . Logo,  $\Lambda(\Gamma) = \{0, \infty\}$ .

Outro exemplo interessante é  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . É possível provar que  $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

### 5.2.1 Propriedades algébricas de grupos Fuchsianos

**Lema 143** *Considere  $T, S \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  e suponha que  $p \in \mathbb{C}$  é ponto fixo de  $T$ , então  $S(p)$  é ponto fixo de  $T$ .*

**Demonstração:** Basta notar que  $S(p) = S(T(p)) = T(S(p))$ . ■

**Proposição 144** *Se  $S, T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \setminus \{\text{Id}\}$  e  $TS = ST$ , então  $T$  e  $S$  tem mesmos pontos fixos.*

**Demonstração:** Considere a transformação  $S$  elíptica. Seja  $p$  o ponto fixo de  $S$  em  $\mathbb{H}$ . Assim,  $S(T(p)) = T(p)$  e, portanto,  $T(p) \in \mathbb{H}$  é ponto fixo de  $S$ , ou seja,  $T(p) = p$ .

O caso em que  $S$  é parabólica é similar ao acima.

Por fim, analisemos o que ocorre quando a transformação  $S$  é hiperbólica.



Existe  $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  tal que  $S'(z) = ASA^{-1}(z) = \lambda z$ , onde  $\lambda$  é diferente de 1 e positivo. Considere a transformação  $T \neq \text{Id}$  que comuta com  $S$ . Temos que  $T' := ATA^{-1}$  comuta com  $S'$ . Assim,

$$S'(T'(0)) = T'(0) \quad \text{e} \quad S'(T'(\infty)) = T'(\infty).$$

Essas identidades nos dão dois casos a serem analisados.

O primeiro caso: Temos que 0 e  $\infty$  são pontos fixos de  $T'$ . Então  $T'(z) = \mu z$  com  $\mu > 0$  e  $\mu \neq 1$ , ou seja,  $T$  tem mesmos pontos fixos que  $S$ .

O segundo caso: Temos que  $T'(0) = \infty$  e  $T'(\infty) = 0$ . Esse caso não pode ocorrer e provaremos isso por absurdo. De fato, se  $T'(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  com  $ad - bc = 1$ , temos que  $d = 0$  e  $a = 0$ . Assim,  $T'(z) = -\mu z^{-1}$  com  $\mu > 0$  e diferente de 1. No entanto, se esse for o caso, temos  $S'T' \neq T'S'$ .

Logo, somente o primeiro caso é possível e daí segue o resultado. ■

**Corolário 145** *Sejam  $T$  e  $S$  elementos de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  diferentes da identidade que comutam. Então  $T$  é hiperbólica (resp. parabólica, elíptica) se, e só se,  $S$  é hiperbólica (resp. parabólica, elíptica).*

**Proposição 146** *Seja  $\Gamma$  um grupo Fuchsiano onde todo elemento diferente da identidade tem os mesmos pontos fixos. Então  $\Gamma$  é cíclico.*

**Demonstração:** Todos os elementos de  $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$  são do mesmo tipo. Suponhamos então que são todos hiperbólicos. Podemos supor que os elementos de  $\Gamma$  fixam 0 e  $\infty$ . Colocando os elementos de  $\Gamma$  na forma  $z \mapsto \lambda z$ , com  $\lambda > 0$ , temos um isomorfismo de grupos topológicos entre  $\Gamma$  e um subgrupo discreto de  $\mathbb{R}_{>0} \simeq \mathbb{R}$ , que pelo corolário 140 é cíclico.

Os demais casos são análogos. ■

**Corolário 147** *Todo grupo Fuchsiano abeliano é cíclico.*

**Demonstração:** Basta combinar os teoremas 144 e 146. ■

**Definição 148** *Considere o grupo  $G$  e um subgrupo  $H$  de  $G$ . O normalizador de  $H$  em  $G$  é o subgrupo*

$$N_G(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

*de  $G$ .*

**Proposição 149** *Seja  $\Gamma$  um grupo Fuchsiano não abeliano. O normalizador de  $\Gamma$  em  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  é um grupo Fuchsiano.*

**Demonstração:** Suponha que o resultado é inválido, isto é,  $N := N_{\text{PSL}(2, \mathbb{R})}(\Gamma)$  não é um grupo Fuchsiano. Existe portanto uma sequência  $T_i \in N$  de elementos elementos dois a dois distintos convergindo para Id.

Se  $S \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ , então  $S_i = T_i S T_i^{-1} \in \Gamma$  e converge para  $S$ . Assim,  $S_i = S$  para  $i$  suficientemente grande, pois  $\Gamma$  é discreto.

Assim, como  $T_i S = S T_i$  para  $i$  grande, temos que  $T_i$  e  $S$  tem mesmos pontos fixos em  $\overline{\mathbb{H}}$  a partir de certo  $i$ . Seja  $F$  o conjunto desses pontos fixos.

Se todo elemento de  $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$  tem  $F$  como pontos fixos, então sabemos que  $\Gamma$  deve ser cíclico, o que não é o caso. Então há  $S' \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$  com pontos fixos diferentes de  $S$ . Pelo mesmo argumento acima,  $S'$  e  $T_i$  tem mesmos pontos fixos para  $i$  grande, o que é uma contradição. ■

### 5.2.2 Grupos elementares

**Definição 150** Um subgrupo  $\Gamma$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  é elementar se existe  $x \in \overline{\mathbb{H}}$  com órbita  $\Gamma x$  finita.

Repare que se  $\Gamma$  é cíclico, então existe  $x \in \overline{\mathbb{H}}$  fixo por todo elemento de  $\Gamma$ . Em particular, esse grupo é elementar.

**Definição 151** Se  $g, h \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , então definimos o comutador de  $g$  e  $h$  pela fórmula  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ .

Se  $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , então normalmente definimos  $|\text{tr}[g]|$  como sendo o módulo do traço da matriz que o representa. No caso do comutador, esse módulo é desnecessário.

**Proposição 152** Se  $g, h \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , então  $\text{tr}[g, h]$  independe da escolha de matrizes representando  $g$  e  $h$ .

**Demonstração:** Basta notar que  $[g, h] = [g, -h] = [-g, h] = [-g, -h]$ . ■

**Proposição 153** Se  $\Gamma$  é subgrupo de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  em que todo elemento diferente da identidade é elíptico, então  $\Gamma$  é abeliano.

**Demonstração:** Vamos assumir que nosso modelo para  $\mathbb{H}$  é o disco hiperbólico.

A menos de conjugar  $\Gamma$  por uma isometria, podemos supor que existe  $g \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$  tal que  $g0 = 0$ . Assim,  $g = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{bmatrix}$ , com  $u \in \mathbb{S}^1$ .

Seja  $h = \begin{bmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{bmatrix}$  um elemento de  $\Gamma$  diferente de  $g$ . Note que

$$\text{tr}[g, h] = 2 + 4|c|^2(\text{Im } u)^2.$$

Como  $[g, h]$  é elíptico ou a identidade, temos  $\text{tr}[g, h] \leq 2$ , ou seja,  $\text{Im } u = 0$  ou  $c = 0$ .

Se  $\text{Im } u = 0$ , então  $g = \text{Id}$ , o que é falso por hipótese. Logo,  $c = 0$ . Assim, todo elemento de  $\Gamma$  tem 0 como ponto fixo, ou seja,  $\Gamma$  é abeliano. ■

**Corolário 154** Se  $\Gamma$  é subgrupo Fuchsiano de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  em que todo elemento diferente da identidade é elíptico, então  $\Gamma$  é cíclico finito.

**Demonstração:** Basta aplicar a proposição anterior com a proposição 146 e com a proposição 141. ■

O teorema a seguir descreve todos os grupos elementares Fuchsianos.

**Proposição 155** Todo grupo elementar Fuchsiano  $\Gamma$  é cíclico ou existe  $\lambda \in \mathbb{R}_{>1}$  tal que  $\Gamma$  é conjugado ao grupo gerado pelas aplicações  $z \mapsto \lambda z$  e  $z \mapsto -z^{-1}$ .

**Demonstração:**

**Caso 1:** Se  $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$  só tem elementos elípticos, então pelo corolário 154 temos que  $\Gamma$  é cíclico finito.

**Caso 2:** Agora suponha que existe  $p \in \partial\mathbb{H}$  fixado por todo elemento de  $\Gamma$ . Mostremos que os elementos de  $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$  são todos parabólicos ou todos hiperbólicos. Primeiramente, podemos supor que  $p = 0$ . Além disso, se temos  $g$  e  $h$  em  $\Gamma$ , respectivamente, hiperbólica e parabólica, então, a menos de trocar  $g$  por  $g^{-1}$ , podemos escrever

$$gz = \mu z \quad \text{e} \quad hz = z + k,$$

onde  $k \in \mathbb{R}_{\neq 0}$  e  $\mu \in \mathbb{R}_{>1}$ .

Considere  $T_n := g^{-n}hg^n$ , ou seja,  $T_n z = z + \mu^{-n}k$ . Assim, temos uma sequência formada por termos dois a dois distintos que converge para identidade em  $\Gamma$ , contradizendo a discretude de  $\Gamma$ .

Assim, o grupo  $\Gamma$  é formado somente de elementos parabólicos ou somente por elementos hiperbólicos. No primeiro caso, temos que  $\Gamma$  é cíclico infinito.

Agora vejamos o que ocorre quando os elementos de  $\Gamma$  são todos hiperbólicos. Considere  $T \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ . Podemos supor que  $Tz = \mu z$ ,  $\mu > 1$ , pertence a  $\Gamma$ . Se  $Sz = \frac{az+b}{cz+d}$  pertencente a  $\Gamma$  fixa 0, então temos  $b = 0$  e  $a, d \neq 0$ . Além disso, provemos que  $c = 0$ , ou seja,  $S\infty = \infty$ . De fato,

$$[T, S] = \frac{z}{tz + 1},$$

onde

$$t = \frac{c}{a} (\mu^{-1} - 1),$$

é parabólica se  $c \neq 0$  e pertence a  $\Gamma$ , ou seja, para evitar contradição devemos ter  $c = 0$ . Portanto,  $S$  deve fixar 0 e  $\infty$ . Logo,  $\Gamma$  é um grupo cíclico infinito.

**Caso 3:** Agora vejamos o que ocorre quando não há um ponto fixado por todos elementos de  $\Gamma$ . Como  $\Gamma$  é elementar, existe  $p \in \overline{\mathbb{H}}$  tal que  $\Gamma p$  é finito.

Suponha que  $|\Gamma p| = 2$ . Temos que todo elemento de  $\Gamma$  fixam a geodésica ligando os dois pontos de  $\Gamma p$ , ou seja, os elementos de  $\Gamma$  são todos hiperbólicos ou elípticos (rotações de 180 graus em torno de um ponto dessa geodésica fixada).

Se toda isometria de  $\Gamma$  é hiperbólica, temos que  $\Gamma$  é cíclico infinito.

Vejamos agora o que ocorre se  $\Gamma$  tem isometrias elípticas. Sem perda de generalidade podemos supor que os vértices da geodésica descrita são  $0$  e  $\infty$ . Como há isometrias elípticas em  $\Gamma$  temos  $\Gamma 0 = \{0, \infty\}$ , ou seja, existe  $\mu \in \mathbb{R}_{>1}$  tal que  $\Gamma$  é gerado por elementos da forma  $z \mapsto \mu z$ , com  $\mu > 1$ , e  $z \mapsto -z^{-1}$ .

Assim, o resultado é válido se existir orbitas em  $\overline{\mathbb{H}}$  de cardinalidade 1 ou 2.

**Caso 4:** Se  $\Gamma$  tem somente orbitas em  $\overline{\mathbb{H}}$  de cardinalidade maior que 2, então nenhum elemento  $T$  de  $\Gamma$  é parabólico ou hiperbólico, pois em ambos casos temos que  $\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$  possui infinitos elementos para cada  $x$  em  $\partial\mathbb{H}$  com exceção dos pontos fixados por  $T$ , que são no máximo 2. Assim, todos elementos de  $\Gamma$  são elípticos, ou seja, pela proposição 154 temos que  $\Gamma$  é cíclico finito. ■

## 6 Teorema Poliedral de Poincaré

Considere uma família de pontos  $e_1, e_2, \dots, e_n$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Seja  $s_i$  o segmento ligando  $e_i$  a  $e_{i+1}$ , onde  $e_{n+1} = e_1$ . Suponha que  $s_i \cap s_{i+1} = \{e_{i+1}\}$  e  $s_i \cap s_j = \emptyset$  se  $j \neq i+1$  ou  $i \neq j+1$ . A curva  $s_1 \cup s_2 \cup \dots \cup s_n$  forma uma curva simples, isto é, que não se auto intersecta, e fechada. Denotaremos o interior dessa curva por  $P$  e denotaremos a curva por  $\partial P$ . Podemos definir  $s_i$  e  $e_i$  para todo inteiro  $i$  como sendo  $s_i = s_k$ , onde  $k$  é o resto da divisão de  $i$  por  $n$ .

O conjunto  $P$  será chamado de polígono, os segmentos  $s_i$  são as arestas do polígono e os pontos  $e_i$  são seus vértices. O conjunto das arestas será denotado por **ARESTAS** e o conjunto dos vértices será denotado por **VÉRTICES**.

Faremos algumas suposições iniciais sobre o polígono:

- O polígono  $P$  é convexo;
- Existe uma bijeção  $\bar{\cdot} : \mathbf{ARESTAS} \rightarrow \mathbf{ARESTAS}$  satisfazendo  $\bar{\bar{s}} = s$  e uma família de isometrias  $\{I_s\}_{s \in \mathbf{ARESTAS}}$  tal que  $I_s(s) = \bar{s}$  e  $I_s^{-1} = I_{\bar{s}}$ , onde estamos apenas considerando isometrias que preservam a orientação.
- As isometrias  $I_s$  levam interior para exterior:  $I_s \overset{\circ}{P} \cap \overset{\circ}{P} = \emptyset$ .

Para cada vértice  $e$  temos adjacentes duas arestas  $s$  e  $s'$ . Escreveremos  $s \diamond e \diamond s'$ .

### 6.1 Cíclo de Vértices

No que segue considere o polígono  $P$  descrito anteriormente, mas ignore a numeração de vértices e arestas dada anteriormente.

Para cada vértice  $e$  temos duas arestas  $s_0$  e  $s_1$  tal que

$$\bar{s}_0 \diamond e \diamond s_1.$$

Temos que  $\bar{s}_1$  é aresta de  $I_{s_1}e$ . Seja  $s_2$  a outra aresta de  $I_{s_1}e$ . Assim, temos

$$\bar{s}_1 \diamond I_{s_1}e \diamond s_2.$$

Novamente,  $\bar{s}_2$  é aresta adjacente a  $I_{s_2}I_{s_1}e$ . Seja  $s_3$  a outra aresta de  $I_{s_2}I_{s_1}e$ . Assim, temos

$$\bar{s}_2 \diamond I_{s_2}I_{s_1}e \diamond s_3.$$

Seguindo o procedimento acima obtemos a sequência

$$\bar{s}_0 \diamond e \diamond s_1 \rightarrow \bar{s}_1 \diamond I_{s_1}e \diamond s_2 \rightarrow \bar{s}_2 \diamond I_{s_2}I_{s_1}e \diamond s_3 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{s}_j \diamond I_{s_j} \dots I_{s_2}I_{s_1}e \diamond s_{j+1} \rightarrow \dots$$

onde  $s_{j+1}$  é o vértice adjacente a  $I_{s_j} \dots I_{s_2}I_{s_1}e$  diferente de  $\bar{s}_j$ .

**Proposição 156** *Considere a sequência*

$$\bar{s}_0 \diamond e \diamond s_1 \rightarrow \bar{s}_1 \diamond I_{s_1}e \diamond s_2 \rightarrow \bar{s}_2 \diamond I_{s_2}I_{s_1}e \diamond s_3 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{s}_j \diamond I_{s_j} \dots I_{s_2}I_{s_1}e \diamond s_{j+1} \rightarrow \dots$$

*Existe  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  tal que  $s_n = s_0$  e  $I_n e = e$ , onde  $I_j = I_{s_j} \dots I_{s_1}$ .*

**Demonstração:** Sabemos que existe  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  tal que  $s_n = s_k$  e  $I_n e = I_k e$  para algum  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , pois os conjuntos **ARESTAS** e **VÉRTICES** são finitos.

Podemos supor que  $n$  é o menor inteiro positivo com essa propriedade. Podemos também supor que  $k$  é o menor possível. Nosso objetivo é mostrar que  $k = 0$ , o que faremos por redução ao absurdo. Suponha então que  $k > 0$ .

Por construção  $s_k = s_n$  e  $I_k e = I_n e$ . Assim,  $I_{s_k} = I_{s_n}$  e  $I_{k-1} e = I_{n-1} e$ . Repare que

$$\overline{s_{k-1}} \diamond I_{k-1} e \diamond s_k = \overline{s_{n-1}} \diamond I_{n-1} e \diamond s_n,$$

pois  $s_k = s_n$  e  $I_{k-1} e = I_{n-1} e$ . Em particular,  $s_{n-1} = s_{k-1}$  e  $I_{n-1} e = I_{k-1} e$ . Contradizendo a minimalidade de  $n$ . ■

No que segue suporemos que  $n$  é o tamanho do ciclo do vértices  $e$  descrito acima.

Seja  $\alpha_j$  o ângulo interno de  $I_j e$ .

Também suporemos que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = 2\pi/k$$

para algum  $k$  inteiro positivo.

Seja  $N = nk$ .

**Proposição 157** *Temos que  $I_N = 1$ . Além disso,  $I_{lk} \neq 1$  para  $l = 1, \dots, N-1$ .*

**Demonstração:** Seja  $e_0 = e$  e  $e_j = I_j e$ . Seja  $t_j$  o vetor em  $e_j$  apontando para dentro do segmento  $s_{j+1}$ .

Sem perda de generalidade podemos supor que  $t_0$  está apontando no sentido anti-horário da curva. Assim, usando que cada  $I_j$  preserva orientação temos que  $t_j$  aponta também no sentido anti-horário.

Denotemos  $d_{e_j} I_j t$  por  $I_j t$  para  $t \in T_{e_j} \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ .

Considere  $t \in T_e \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Temos que  $t = e^{i\alpha} t_0$ .

$$I_{s_1} t = e^{i(\alpha+\alpha_1)} t_1.$$

Da mesma forma, se  $t = e^{i\alpha} t_j$ , temos  $I_{s_{j+1}} t = e^{i(\alpha+\alpha_j)} t_{j+1}$ .

Logo, se  $t = e^{i\alpha} t_0$ , então

$$I_j t = e^{i(\alpha+\sum_{i=1}^j \alpha_i)} t_j.$$

Daí segue o resultado. ■

Assim, temos que  $N$  é o menor inteiro positivo satisfazendo  $I_N = 1$  se, e só se,

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 2\pi.$$

Esse  $N$  levará o nome de tamanho do ciclo geométrico.

Considere o grupo livre  $G = \langle I_s : s \in \mathbf{ARESTAS} \rangle$ . Sobre esse grupo imporemos algumas relações.

Para cada vértice  $e$  e cada aresta  $\overline{s_0}$  adjacente a  $e$  existe um ciclo

$$\overline{s_0} \diamond e \diamond s_1 \rightarrow \overline{s_1} \diamond I_{s_1} e \diamond s_2 \rightarrow \overline{s_2} \diamond I_{s_2} I_{s_1} e \diamond s_3 \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{s_j} \diamond I_{s_j} \cdots I_{s_2} I_{s_1} e \diamond s_{j+1} \rightarrow \overline{s_0} \diamond e \diamond s_1.$$

Assim, temos a isometria  $I_j := I_{s_j} \cdots I_{s_2} I_{s_1}$  associado ao par  $e \diamond \overline{s_0}$ . Seja  $N$  o tamanho do ciclo geométrico dado por  $e \diamond \overline{s_0}$ .

Sobre o grupo  $G$  imponha as relações  $I_N = 1$  para cada par  $e \diamond \overline{s_0}$ . Além disso, para cada aresta  $s$  imponha a relação  $e I_s = I_s^{-1} e$ .

Em outras palavras,  $G$  é o grupo dado por todas as relações básicas que as isometrias  $I_s$ 's devem satisfazer.

Sobre  $G$  colocaremos a topologia discreta.

Temos a ação de  $G$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  dada de jeito óbvio.

Considere um ponto  $(g, p) \in G \times P$ . Se  $p \in \overset{\circ}{P}$ , então definimos  $[g, p] = \{(g, p)\}$ . Se  $p \in \partial P$ , então definimos  $[g, p]$  como sendo formado por elementos da forma  $(g\gamma^{-1}, \gamma x)$ , onde  $\gamma = I_{s_n} \cdots I_{s_1} I_{s_0}$  satisfaz

$$x \in s_0, I_{s_0} x \in s_1, \cdots, I_{s_i} \cdots I_{s_0} x \in s_{i+1}, \cdots.$$

Note que se  $(g, p), (h, q) \in G \times P$ , então temos  $[g, p] \cap [h, q] = \emptyset$  ou  $[g, p] = [h, q]$ . Além disso, claramente

$$\bigcup_{(g,p) \in G \times P} [p, g] = G \times P.$$

Logo, temos a relação de equivalência  $(g, p) \sim (h, p)$  se, e só se,  $[g, p] = [h, q]$ . Denotaremos por  $J$  o espaço quociente  $G \times P / \sim$ . Note que temos a projecção natural  $\pi : G \times P \rightarrow J$  e sobre  $J$  colocamos a topologia quociente.

Sobre  $G \times P$  e  $J$  temos a ação de  $G$  dada por  $h(g, p) = (hg, p)$  e  $h[g, p] = [hg, p]$ .

Temos as aplicações  $\psi : G \times P \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  e  $\phi : J \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  dadas por

$$\phi(g, x) = gx \quad \text{e} \quad \psi[g, x] = gx.$$

**Proposição 158** *As funções  $\pi$ ,  $\phi$  e  $\psi$  são contínuas e  $G$ -funções<sup>10</sup>.*

**Demonstração:** A função  $\pi$  é contínua por definição. Mostremos que  $\phi$  é contínua. Considere uma sequência  $(g_j, x_j)$  convergindo para  $(g, x)$  em  $G \times P$ . Como  $g_j \rightarrow g$  em  $G$ , no qual estamos considerando a topologia discreta, temos que  $g_j = g$  para  $j$  suficientemente grande. Logo,

$$d(g_j x_j, gx) = d(gx_j, gx) = d(x, x_j)$$

para  $j$  suficientemente grande, ou seja,  $g_j x_j \rightarrow gx$ , pois  $x_j \rightarrow x$ . Portanto,  $\phi$  é contínua.

Mostremos que  $\psi$  é contínua. Seja  $U \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  aberto e seja  $V = \psi^{-1}U$ . Repare que

$$\pi^{-1}V = (\psi \circ \pi)^{-1}U = \phi^{-1}U$$

---

<sup>10</sup>Uma função  $f : A \rightarrow B$ , onde  $G$  age em  $A$  e  $B$ , é  $G$ -função se  $f(gx) = gf(x)$ .

é aberto, ou seja,  $V$  é aberto pela definição de topologia quociente. Logo,  $\psi$  é contínua.

Agora mostremos que as funções  $\pi$ ,  $\phi$  e  $\psi$  são  $G$ -funções. Tome  $h \in G$  e note que

$$\pi(h(g, p)) = \pi(hg, p) = [hg, p] = h[g, p] = h\pi(g, p),$$

$$\phi(h(g, p)) = \phi(hg, p) = hgp = h\phi(g, p),$$

$$\psi(h[g, p]) = \psi[hg, p] = hgp = h\psi[g, p].$$

■

**Proposição 159** *O espaço  $J$  é tesselado pela ação de  $G$ , isto é, se*

$$[P] = \{[1, x] \in J : x \in P\} \quad e \quad [\dot{P}] = \{[1, x] \in J : x \in \dot{P}\},$$

então

$$J = \bigcup_{g \in G} g[P] \quad e \quad g_1[\dot{P}] \cap g_2[\dot{P}] = \emptyset$$

para  $g_1, g_2 \in G$  distintos.

**Demonstração:** Tome  $[g, p] \in J$ . Temos que  $[g, p] = g[1, p] \in g[P]$ . Logo,

$$J = \bigcup_{g \in G} g[P].$$

Agora, suponha que  $g_1 \neq g_2$  e  $g_1[\dot{P}] \cap g_2[\dot{P}] \neq \emptyset$ , isto é, existe  $[g, p] \in g_1[\dot{P}] \cap g_2[\dot{P}]$ . Temos que  $[g, p] = [g_1, p_1] = [g_2, p_2]$  com  $p_1, p_2 \in \dot{P}$ . Pela construção de  $J$ , pela forma como definimos a relação de equivalência que define  $J$ , temos que  $(g_1, p_1) = (g_2, p_2)$ , ou seja,  $g_1 = g_2$ , o que é uma contradição. ■

Tome  $x \in P$  e escreva

$$\pi^{-1}[1, x] = \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\}.$$

Defina os conjuntos abertos a seguir:

$$N_{x_j, \delta} = \{y \in P : d(y, x_j) < \delta\} \subset P,$$

$$N_{x, \delta} = \bigcup_j g_j \times N_{x_j, \delta} \subset G \times P,$$

$$W_{x, \delta} = \pi N_{x, \delta} \subset J.$$

Os dois lemas a seguir seguem de dois fatos. O primeiro é que cada isometria  $I_s$  preserva orientação e joga  $P$  para fora de  $P$ , isto é,  $\dot{P} \cap I_s \dot{P} = \emptyset$ . O segundo é o seguinte: Se temos um ciclo de vértice

$$\overline{s_0} \diamond e \diamond s_1 \rightarrow \overline{s_1} \diamond I_{s_1} e \diamond s_2 \rightarrow \overline{s_2} \diamond I_{s_2} I_{s_1} e \diamond s_3 \rightarrow \dots \rightarrow \overline{s_j} \diamond I_{s_j} \dots I_{s_2} I_{s_1} e \diamond s_{j+1} \rightarrow \overline{s_0} \diamond e \diamond s_1$$

com tamanho do ciclo geométrico  $N$ , isto é,  $N$  é o menor inteiro positivo satisfazendo  $I_N = 1$ , então os polígonos  $P, I_1^{-1}P, I_2^{-1}P, \dots, I_{N-1}^{-1}P$  tessalam uma vizinhança de  $e$ , isto é, esses polígonos tem seus interiores disjuntos, se intersectam em arestas se forem vizinhos e cobrem uma vizinhança de  $e$ .



**Lema 160** Para todo  $x \in P$  existe  $\delta(x) > 0$  tal que  $\pi^{-1}W_{x,\delta} = N_{x,\delta}$  e  $\phi : W_{x,\delta} \rightarrow B(x, \delta)$  é bijeção sempre que  $0 < \delta \leq \delta(x)$ .

**Lema 161** Existem vizinhança  $N$  de  $P$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ ,  $\epsilon > 0$ , função  $f : P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  tais que  $\phi : W_{P,f} \rightarrow N$  é bijeção e  $P_\epsilon \subset N$ , onde  $W_{P,f} = \cup_{x \in P} W_{x,f(x)}$  e  $P_\epsilon$  é a  $\epsilon$ -vizinhança de  $P$ .

**Teorema 162 Teorema de Poincaré:** O mapa  $\phi : J \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  é homeomorfismo.

A prova desse fato se baseia em alguns lemas.

**Lema 163** O conjunto  $\{gW_{x,\delta} : x \in P \text{ e } 0 < \delta \leq \delta(x)\}$  é uma base de  $J$ .

**Demonstração:** Tome  $[g, x] \in J$  e seja  $U$  vizinhança aberta de  $[g, x]$ . Para cada  $h \in G$  existe um aberto  $U_h$  de  $P$  tal que  $\pi^{-1}U = \cup_{h \in G} h \times U_h$ .

Escrevendo  $\pi^{-1}[1, x] = \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\}$ , temos que

$$\pi^{-1}[g, x] = \{(gg_1, x_1), \dots, (gg_n, x_n)\}.$$

Tome  $\delta \leq \delta(x)$  tal que

$$N_{x_j, \delta} \subset U_{gg_j} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Logo,

$$gN_{x,\delta} \subset \pi^{-1}U,$$

ou seja,  $gW_{x,\delta} = g\pi N_{x,\delta} \subset U$ , finalizando a prova. ■

**Lema 164** O espaço  $J$  é Hausdorff.

**Demonstração:** Tome  $[g, x]$  e  $[h, y]$  em  $J$  distintos. Podemos escrever

$$\pi^{-1}[g, x] = \{(gg_1, x_1), \dots, (gg_n, x_n)\},$$

$$\pi^{-1}[h, y] = \{(hh_1, y_1), \dots, (hh_m, y_m)\}.$$

Tome  $\epsilon > 0$  tal que  $\epsilon < \min\{\delta(x), \delta(y)\}$  e

$$gN_{x,\epsilon} \cap hN_{y,\epsilon} = \emptyset.$$

Como  $\pi^{-1}W_{x,\epsilon} = N_{x,\epsilon}$  e  $\pi^{-1}W_{y,\epsilon} = N_{y,\epsilon}$ , obtemos que

$$gW_{x,\epsilon} \cap hW_{y,\epsilon} = \emptyset. \quad \text{■}$$

**Lema 165** *A aplicação  $\phi$  é homeomorfismo local.*

**Demonstração:** Segue imediatamente dos lemas 160 e 163. ■

Agora falta o passo final em que mostramos que  $\phi$  é recobrimento. Provado isso, temos que  $\phi$  é homeomorfismo porque  $M$  é simplesmente conexo.

Mostremos então que  $\phi$  é recobrimento.

**Lema 166** *A aplicação  $\phi$  é sobrejetora.*

**Demonstração:** Como  $\phi$  é homeomorfismo local temos que  $\phi(J)$  é aberto em  $M$ . Tome  $x \in \overline{\phi(J)}$ .

Considerando o  $\epsilon > 0$  do lema 161, existe  $g \in G$  tal que  $B(x, \epsilon) \cap gP \neq \emptyset$ .

Logo,

$$x \in gP_\epsilon \subset gN = \phi(gW_{P,f}) \subset \phi(J)$$

e daí segue que  $\phi(J)$  é fechado.

Portanto, por  $M$  ser conexo, temos que  $\phi(J) = M$ . ■

**Lema 167** *A aplicação  $\phi$  é recobrimento.*

**Demonstração:** Dado  $x \in M$  considere uma vizinhança  $U$  conexa de  $x$  tal que  $U \subset B(x, \epsilon/2)$ , onde esse  $\epsilon > 0$  é o que aparece em 161. Considere

$$I_x = \{g \in G : gP \cap U \neq \emptyset\}.$$

Para cada  $g \in I_x$  considere o aberto

$$W_g = \phi^{-1}(U) \cap gW_{P,f}.$$

Repare que  $\phi^{-1}(U) = \cup_{g \in I_x} W_g$ . De fato, considere  $[g, x] \in \phi^{-1}(U)$ . Repare que  $[g, x] \in g[P] \subset gW_{P,f}$ . Assim,  $[g, x] \in W_g$ .

Além disso, como temos o homeomorfismo  $\phi : gW_{P,f} \rightarrow gN$  obtemos o homeomorfismo  $\phi : W_g \rightarrow U$ , pois  $U \subset gP_\epsilon \subset gN$ . Em particular, cada  $W_g$  é conexo.

Se mostrarmos que dois abertos  $W_g, g \in I_x$ , são ou disjuntos ou iguais, então concluímos que  $\phi$  é recobrimento.

Suponha que temos  $W_g \cap W_h \neq \emptyset$  e mostremos que  $W_g = W_h$ .

Seja  $A = W_g \cap W_h$ . Claramente  $W$  é aberto em  $W_g$ , mostremos que é também fechado, o que nos garante que  $A = W_g$  por conexidade.

Considere uma rede  $u_j \in A$  convergente em  $W_g$ . Sejam  $\phi_g : W_g \rightarrow U$  e  $\phi_h : W_h \rightarrow U$  os homeomorfismos dados por  $u \mapsto \phi(u)$ . Temos que  $\phi_g(u_j)$  converge em  $U$  e, portanto,  $u_j = \phi_h^{-1}(\phi_g(u_j))$  converge em  $W_h$ . Logo,  $u_j$  converge em  $A$  e daí segue que  $A$  é fechado.

Assim, temos que  $A = W_g$  e por argumento idêntico temos  $A = W_h$ , ou seja,  $W_g = W_h$ . ■

Como  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  é simplesmente conexo temos que  $\phi : J \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  é homeomorfismo, finalizando a prova do Teorema de Poincaré. Observe que aqui estamos usando que  $J$  é conexo, o que é verdade pois para todo  $I_s$  os conjuntos  $[P]$  e  $I_s[P]$  tem um ponto em comum e o grupo  $G$  é gerado por esses  $I_s$ 's.

**Proposição 168** *O homomorfismo natural  $G \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1)$  é injetor. Assim, podemos ver  $G$  como subgrupo de  $\text{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1)$ . Além disso,  $G$  com a topologia de  $\text{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1)$  é discreto.*

**Demonstração:** Para ver que o homomorfismo é injetor, basta notar que se  $g = h$  em  $\text{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1)$ , então tomando  $x \in \dot{P}$  temos  $gx = hx$ , ou seja,  $h^{-1}gx = x$ . Como  $h^{-1}g\dot{P} \cap \dot{P} \neq \emptyset$ , temos que  $g = h$  em  $G$ . Logo, podemos escrever  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1)$ .

Agora mostremos que  $G$  com a topologia induzida de  $\text{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1)$  é discreto.

Tome  $x \in \dot{P}$ . Considere a vizinhança aberta  $V = \{h \in \text{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1) : hx \in \dot{P}\}$  de  $1 \in G$  em  $\text{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1)$ <sup>11</sup>.

Se  $g \in V \cap G$ , então  $gx \in \dot{P} \cap g\dot{P}$ . Como  $g\dot{P} \cap \dot{P} \neq \emptyset$  nos garante que  $g = 1$ , temos que  $V \cap G = \{1\}$ .

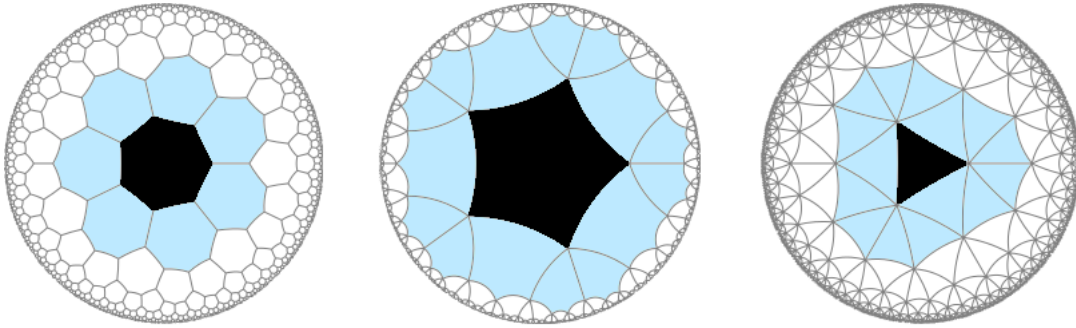
Logo, o conjunto  $\{1\}$  é aberto em  $G$  e, conseqüentemente, todo conjunto  $\{g\}$ ,  $g \in G$ , é aberto em  $G$ , pois  $G$  é grupo topológico.

Portanto, o subgrupo  $G$  é discreto. ■

Darei três exemplos clássicos.

## 6.2 Ladrilhamentos regulares

Primeiro classifiquemos todos ladrilhamentos regulares de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Imagine que temos um polígono  $P$  com lados de comprimentos iguais e ângulos internos iguais  $\theta$ . E suponha que cópias isométricas desse polígono ladrilhem  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Seja  $k$  o número de arestas que cada vértice enxerga e  $n$  o número de arestas que cada face enxerga. Assim, temos  $\theta = 2\pi/k$ .



**Figura 10:** Alguns ladrilhamentos de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  (Figura encontrada no Google Imagens).

Aplicando o Gauss-Bonnet ao polígono  $P$  e lembrando que a curvatura de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  é  $-4$ , temos:

$$-4S = 2\pi - n\left(\pi - \frac{2\pi}{k}\right),$$

<sup>11</sup>Lembre-se que sobre  $\text{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1)$  estamos usando a topologia compacto aberta.

onde  $S$  é a área do polígono. Assim,

$$2\pi - n\left(\pi - \frac{2\pi}{k}\right) < 0,$$

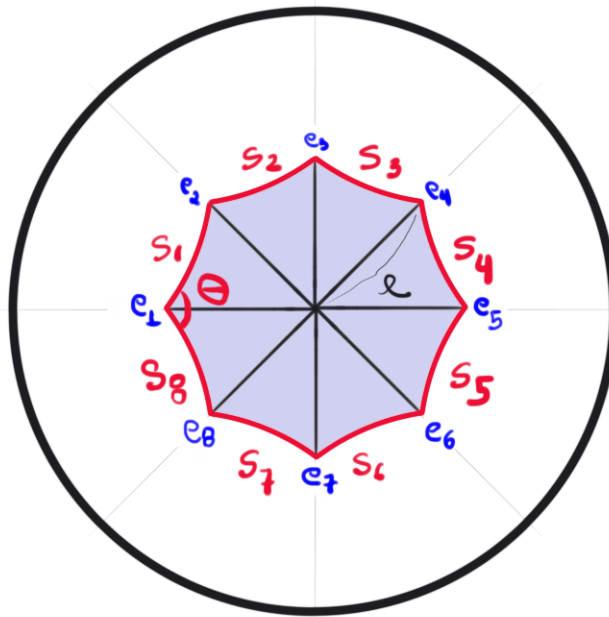
ou seja,

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{k} < 1. \quad (169)$$

Assim, para tal ladrilhamento existir, devemos ter a desigualdade (169). O teorema de Poincaré nos diz que essa desigualdade é suficiente.

Assuma que a desigualdade (169)

De fato, primeiro construamos tal polígono. Considere o polígono da figura abaixo em função de  $l$ , onde  $l$  é a distância de comprimento Euclidiano e o disco tem raio 1, mas imagine que ele tem  $n$  lados.



**Figura 11:** Polígono regular no modelo do disco de Poincaré centrado em 0.

Novamente pelo Gauss-Bonnet, temos que a área desse polígono é:

$$S = \frac{1}{4} \left( n(\pi - \theta) - 2\pi \right),$$

Para  $l \approx 0$ , temos que  $S \approx 0$ , e portanto,  $\theta \approx \pi - 2\pi/n$ . Pela desigualdade (169) temos que  $\pi - 2\pi/n > 2\pi/k$ . Quando  $l$  se aproxima de 1, temos que o ângulo  $\theta$  se aproxima de 0. Assim, por continuidade, existe  $l$  tal que  $\theta = 2\pi/k$ .

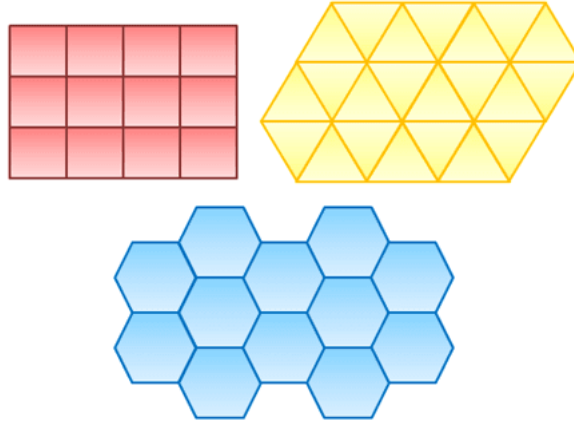
Assim, temos nosso polígono regular com  $n$  lados e ângulo interno  $2\pi/k$ .

Agora mostremos que esse polígono ladrilha o plano hiperbólico. Considere os lados  $s_i$  e vértices  $v_i$  de acordo com a figura. No lado  $s_i$  entre  $e_i$  e  $e_{i+1}$  temos o ponto médio

$m_i$ . Seja  $R_i$  a rotação de  $2\pi/k$  em torno de  $e_i$  no sentido horário. Essa rotação preserva a orientação, pega o polígono  $P$  e o joga para o lado de fora, manda  $s_i$  para  $s_{i-1}$  e  $e_i$  para  $e_i$ .

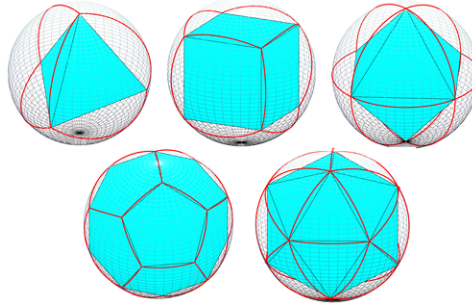
O ciclo de  $\overline{s_8} \diamond e_1 \diamond s_1$  tem um único termo (ciclo de comprimento 1). Assim, a soma dos ângulos nesse ciclo é  $2\pi/k$ . O mesmo ocorre para os demais vértices, e assim podemos aplicar o teorema de Poincaré, nos garantindo a tesselação.

O mesmo argumento garante que ladrilhamentos de  $\mathbb{R}^2$  ocorrem se, e só se,  $\frac{2}{n} + \frac{2}{k} = 1$ , de onde segue que os únicos polígonos regulares que tessalam  $\mathbb{R}^2$  são triângulos, quadrados e hexágonos.



**Figura 12:** Ladrilhamentos de  $\mathbb{R}^2$  (Figura encontrada no Google Imagens).

Já para  $\mathbb{S}^2$  temos que o ladrilhamento ocorre se, e só se,  $\frac{2}{n} + \frac{2}{k} > 1$ , que são 5 casos, os poliedros de Platão.



**Figura 13:** Ladrilhamentos de  $\mathbb{S}^2$  (Figura encontrada no Google Imagens).

Note que as desigualdades nos dizem que existem infinitos ladrilhamentos regulares para geometria hiperbólica, ao contrário das outras duas geometrias. Isso ilustra 2 fatores, o grupo  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  é bem mais rico que  $\text{SO}(3)$  e  $\text{Iso}_+(\mathbb{R}^2)$ , e geometria hiperbólica é genérica, o que ficará mais claro no próximo exemplo.

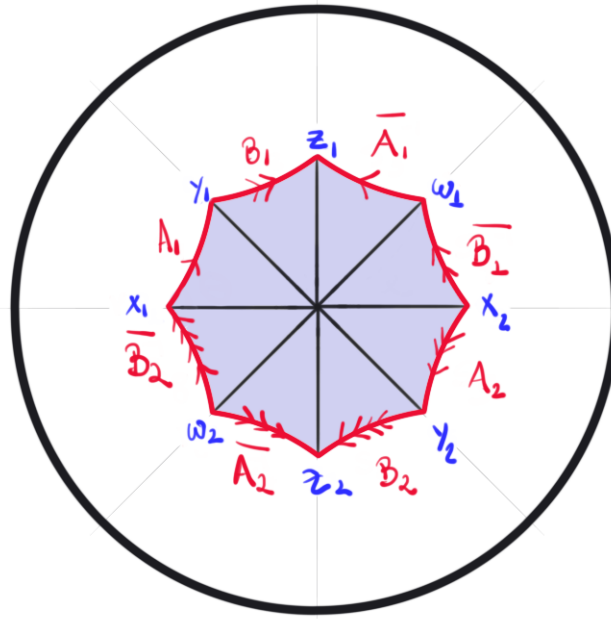
## 7 Geometria de superfícies compactas orientada

A esfera é a superfície compacta orientada de genus  $g = 0$ , e admite curvatura 1.

Usando um quadrado de lados 1 centrado em 0 em  $\mathbb{R}^2$  e as translações  $T_1(x, y) = (x+1, y)$  e  $T_2(x, y) = (x, y+1)$  é fácil ver que o toro, a superfície de genus  $g = 1$ , admite estrutura euclidiana, isto é, admite uma geometria completa de curvatura 0.

Vejamos o que ocorre com superfície de genus  $g > 1$ . Seguindo a imagem 11 podemos obter um polígono com  $4g$  lados regular com ângulo interno  $2\pi/4g$ . Nomearemos os lados de

$$A_1, B_1, \overline{A_1}, \overline{B_1}, A_2, B_2, \overline{A_2}, \overline{B_2}, \dots, A_g, B_g, \overline{A_g}, \overline{B_g}.$$



**Figura 14:** Polígono com  $g = 2$ .

Considere isometrias que  $T_i, S_i$  que levam  $A_i$  em  $\overline{A_i}$  e  $B_i$  em  $\overline{B_i}$ , respectivamente, tal que essas isometrias levam o polígono para o lado de fora, invertendo a orientação do segmento: Se percorrermos  $A_i$  de  $x_i$  para  $y_i$ , então  $\overline{A_i} = T(A_i)$  é percorrido de  $w_i$  para  $z_i$ . Da mesma forma, se percorrermos  $B_i$  de  $y_i$  para  $w_i$ , então  $\overline{B_i} = S(B_i)$  é percorrido de  $x_{i+1}$  para  $w_i$ .

Começando o ciclo em  $\overline{B_g} \diamond x_1 \diamond A_1$  temos

$$\begin{aligned} & \overline{B_g} \diamond x_1 \diamond A_1 \rightarrow \overline{A_1} \diamond w_1 \diamond \overline{B_1} \rightarrow B_1 \diamond z_1 \diamond \overline{A_1} \rightarrow A_1 \diamond y_1 \diamond B_1 \rightarrow \\ & \rightarrow \overline{B_1} \diamond x_2 \diamond A_2 \rightarrow \overline{A_2} \diamond w_2 \diamond \overline{B_2} \rightarrow B_2 \diamond z_2 \diamond \overline{A_2} \rightarrow A_2 \diamond y_2 \diamond B_2 \rightarrow \\ & \dots \\ & \rightarrow \overline{B_{g-1}} \diamond x_g \diamond A_g \rightarrow \overline{A_g} \diamond w_g \diamond \overline{B_g} \rightarrow B_g \diamond z_g \diamond \overline{A_g} \rightarrow A_g \diamond y_g \diamond B_g \rightarrow \overline{B_g} \diamond x_1 \diamond A_1. \end{aligned}$$

Assim, temos um único ciclo cuja soma de ângulos é  $2\pi$ , ou seja, temos que o grupo  $\Gamma = \langle T_i, S_i : \Pi_i[T_i, S_i] = 1 \rangle$  é Fuchsiano e tessela o plano hiperbólico. Além disso, esse grupo não tem ponto fixo e daí segue que sua ação no espaço hiperbólico é livre. Portanto, a superfície compacta  $S_g$ , obtida colando os lados do polígono acima seguindo as regras usuais de colagem, satisfaz

$$S_g = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 / \Gamma,$$

ou seja, é uma superfície hiperbólica.

Assim, sabemos que cada superfície de genus  $g$  admite geometria hiperbólica para  $g > 1$ , ou seja, o caso genérico.

## Referências

- [1] Sasha Anan'in, Carlos H. Grossi. Coordinate-Free Classic Geometries. <https://arxiv.org/pdf/1107.0346.pdf>
- [2] Sasha Anan'in, Carlos H. Grossi, Nikolay Gusevskii. Complex Hyperbolic Structures on Disc Bundles over Surfaces. International Mathematics Research Notices, Vol. 2011, No. 19, páginas 4295–4375.
- [3] Sasha Anan'in, Carlos H. Grossi. Yet another Poincaré Polyhedron Theorem. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Vol. 54, 2011, páginas 297–308.
- [4] Svetlana Katok. Fuchsian groups. University of Chicago press, 1992.