

Cours de maths synthétique (pour ~~X~~/ENS
CCINP/CENTRALE/MINES)

Crée par des gens de la PSI de Claude B

December 24, 2023

1 Algèbre

1.1 Non assigné pour l'instant

- * Soit A et B deux parties de E. Si A est une partie génératrice de E et si $A \subset B$ alors B est une parties génératrice de E (c'est la même chose pour les familles)
- * Une symétrie s est un automorphisme donc $s^{-1} = s$
- * $Mat_B(v \circ u) = Mat_B(v)Mat_B(u)$
- * inégalité triangulaire : $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$
- * théorème de pythagore : $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ ssi x et y sont orthogonaux
- * Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre, en particulier, toute famille orthonormée de E est libre
- * Théorème de la base orthonormée incomplète : Toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée de E
- * Théorème de la base incomplète : Toute famille libre fini d'un EV de dimension fini peut être complété en une base de cet EV
- * Théorème de la base extraite : Toutes familles génératrice finie d'un EV fini on peut extraire une base de cet EV
- * Toute espace euclidien possède une base orthonormée

1.2 Caractérisations sur l'inversibilité d'une matrice

$A \in M_{n,p}(K)$ (par défaut) est inversible SI ET SEULEMENT SI :

- * A est de determinant non nul
- * 0 n'est pas valeur propre de A
- * $\text{Ker}(A) = \{0\}$
- * Il existe un polynôme annulateur de A dont 0 n'est pas racine
- * ses coefficients diagonaux sont tous non nuls dans le cas d'une matrice triangulaire (et son inverse est elle aussi triangulaire supérieure)
- * $rg(A) = n$ si $A \in M_n(K)$
- * $\forall X \in K^n \quad AX = 0 \rightarrow X = 0$ si $A \in M_n(K)$
- * $\exists B \in M_n(K), AB = I_n$, alors $A \in M_n(K)$ et B sont inversibles et inverse l'une de l'autre

1.3 Propriété sur la semblabilité de deux matrices

A et B sont semblables SI ET SEULEMENT SI :

- * $\det(A) = \det(B)$
- * $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$
- * $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$

1.4 Propriété sur la diagonalisation de matrice

- * Si le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable
- * A est diagonalisable si et seulement si elle est symétrique réelle

1.5 Formules à connaître

- * Pour $(A, B) \in M_n(K)^2$ tel que $AB = BA$, on a pour tout, $p \in \mathbb{N}$:
 $(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ et $A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$

1.6 Propriété sur les dimensions

- * $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$
- * $\dim(E \oplus F) = \dim(E) + \dim(F)$
- * $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
- * $\dim L(E, F) = \dim(E) \times \dim(F)$
- * Théorème du rang : $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker } u)$
- * $\dim(\text{Ker } A) + \text{rg}(A) = p$ avec $A \in M_{n,p}(K)$

1.7 Propriété sur la liberté d'une famille

- * Toutes sous-famille d'une famille finie liée est liée
- * Une famille finie de polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts est libre
- * Toutes sous-famille d'une famille finie libre est libre
- * Toutes famille de vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre
- * (x, y) liée signifie que x et y sont colinéaires.

1.8 Propriété sur le rang d'une matrice

- * la trace d'un projecteur est égal à son rang
- * Une matrice et sa transposée ont même rang
- * Une matrice est de rang r ssi elle est équivalente à la matrice J_r
- * Deux matrices de même taille sont équivalentes ssi elles ont même rang
- * une sous matrice de A a un rang inférieur à A

1.9 Propriété sur la trace d'une matrice

- * $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- * $\text{tr}(v \circ u) = \text{tr}(u \circ v)$

1.10 Propriété sur l'hyperplan

- * H hyperplan de $E \leftrightarrow \dim(H) = \dim(E) - 1$
- * Soit H un SEV de E . Alors H est un hyperplan de E ssi il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$

1.11 Propriété sur l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application

- * Une application $u \in L(E, F)$ est injective ssi $\text{Ker}(u) = \{0\}$
- * Soit E et F deux EV de même dimensions finie. On a que $u \in L(E, F)$ on a : u surjective $\Leftrightarrow u$ injective $\Leftrightarrow u$ bijective

1.12 Propriété sur les valeurs propres, vecteurs propres et les sous espaces propres

- * Un scalaire $\lambda \in K$ est une valeur propre de A ssi il est racine du polynôme caractéristique de A
- * Si deux endomorphismes commutent, les sous espaces propres de l'un sont stable par l'autre
- * Si A est une matrice triangulaire, alors l'ensemble de ses valeurs propres est sa diagonale
- * Deux matrices semblables ont le même spectre et les sous-espaces propres associés sont de même dimension
- * on a pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u) : 1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda)$

- * Théorème de Cayley-Hamilton : Le polynôme caractéristique de u annule u
- * Si $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille finie de valeurs propres de u deux à deux distinctes, alors les sous espaces propres associées $E_{\lambda_i}(u)$, pour $i \in I$, sont en somme directe.

1.13 Propriété sur les EV de dimension fini

2 Analyse

3 Probabilité