Cours de maths synthétique (pour ~~X/ENS~~ CCINP/CENTRALE/MINES)

Crée par des gens de la PSI de Claude B

December 24, 2023

Contents

1 Algèbre

1.1 Non assigné pour l'instant

* Soit A et B deux parties de E. Si A est une partie génératrice de E et si $A \subset B$ alors B est une parties génératrice de E (c'est la même chose pour les familles)

* Une symétrie s est un automorphisme donc $s^{-1} = s$

* $Mat_B(v \circ u) = Mat_B(v)Mat_B(u)$

* inégalité triangulaire : $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

* théorème de pythagore : $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ ssi x et y sont orthogonaux

* Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre, en particulier, toute famille orthonormée de E est libre

* Théorème de la base orthonormée incomplète : Toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée de E

* Théorème de la base incomplète : Toute famille libre fini d'un EV de dimension fini peut être complété en une base de cet EV

* Théorème de la base extraite : Toutes familles génératrice finie d'un EV fini on peut extraire une base de cet EV

* Toute espace euclidien possède une base orthonormée

* **Formule de Leibniz pour les polynômes :** Pour $P, Q \in K[X]$ et $n \in N$, alors
$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$
.

* **Formule de Taylor pour les polynômes :** Pour $P \in K[X]$ et $a \in K$, alors
$$P(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X - a)^n$$
.

* **Théorème (division euclidienne des polynômes) :** Soient $A, B \in K[X]$ avec B non nul. Il existe un unique couple $(Q, R) \in K[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

1.2 Caractérisations sur l'inversibilité d'une matrice

A $\in M_{n,p}(K)$ (par défaut) est inversible SI ET SEULEMENT SI :

* A est de determinant non nul
* 0 n'est pas valeur propre de A
* Ker(A)= $\{0\}$
* Il existe un polynôme annulateur de A dont 0 n'est pas racine
* ses coefficients diagonaux sont tous non nuls dans le cas d'une matrice triangulaire (et son inverse est elle aussi triangulaire supérieure)
* $rg(A) = n$ si $A \in M_n(K)$
* $\forall X \in K^n \ AX = 0 \to X = 0$ si $A \in M_n(K)$
* $\exists B \in M_n(K), AB = I_n$, alors $A \in M_n(K)$ et B sont inversibles et inverse l'une de l'autre

1.3 Propriété sur la semblablilité de deux matrices

A et B sont semblables SI ET SEULEMENT SI :

* $det(A) = det(B)$
* $tr(A) = tr(B)$
* $rg(A) = rg(B)$

1.4 Propriété sur la diagonalisation de matrice

* Si le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable
* A est diagonalisable si et seulement si elle est symétrique réelle

1.5 Formules à connaitre

* Pour $(A, B) \in M_n(K)^2$ tel que $AB = BA$, on a pour tout, $p \in N$: $(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} A^k B^{p-k}$ et $A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$

1.6 Propriété sur les dimensions

* $dim(E \times F) = dim(E) + dim(F)$
* $dim(E \oplus F) = dim(E) + dim(F)$
* $dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$
* $dimL(E, F) = dim(E) \times dim(F)$
* Théorème du rang : dim(E) = rg(u) + dim(Ker u)
* dim(Ker A) + rg(A) = p avec $A \in M_{n,p}(K)$

1.7 Propriété sur la liberté d'une famille

* Toutes sous-famille d'une famille finie liée est liée
* Une famille finie de polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts est libre
* Toutes sous-famille d'une famille finie libre est libre
* Toutes famille de vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre
* (x, y) liée signifie que x et y sont colinéaires.

1.8 Propriété sur le rang d'une matrice

* la trace d'un projecteur est égal à son rang
* Une matrice et sa transposée ont même rang
* Une matrice est de rang r ssi elle est équivalente à la matrice J_r
* Deux matrices de même taille sont équivalentes ssi elles ont même rang
* une sous matrice de A a un rang inférieur à A

1.9 Propriété sur la trace d'une matrice

* tr(AB) = tr(BA)
* $tr(v \circ u) = tr(u \circ v)$

1.10 Propriété sur l'hyperplan

* H hyperplan de E $\leftrightarrow$ $dim(H) = dim(E) - 1$
* Soit H un SEV de E. Alors H est un hyperplan de E ssi il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$

1.11 Propriété sur l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application

* Une application $u \in L(E, F)$ est injective ssi $Ker(u) = \{0\}$
* Soit E et F deux EV de même dimensions finie. On a que $u \in L(E, F)$ on a : u surjective $\Leftrightarrow$ u injective $\Leftrightarrow$ u bijective

1.12 Propriété sur les valeurs propres, vecteurs propres et les sous espaces propres

* Un scalaire $\lambda \in K$ est une valeur propre de A ssi il est racine du polynôme caractéristique de A
* Si deux endomorphismes commutent, les sous espaces propres de l'un sont stable par l'autre
* Si A est une matrice triangulaire, alors l'ensemble de ses valeurs propres est sa diagonale
* Deux matrices semblambles ont le même spectre et les sous-espaces propres associés sont de même dimension
* on a pour tout $\lambda \in Sp(u)$: $1 \leq dim(E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$
* <u>Théorème de Cayley-Hamilton</u> : Le polynôme caractéristique de u annule u
* Si $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille finie de valeurs propres de u deux à deux distinctes, alors les sous espaces propres associées $E_{\lambda_i}(u)$, pour $i \in I$, sont en somme directe.

1.13 Propriété sur les EV de dimension fini

2 Analyse

2.1 Propriétés non triées encore

* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
* <u>Somme des termes d'une suite arithmétique</u> : Soit $(u_k)_{k \in N}$ une suite arithmétique. Alors pour $(p, n) \in N^2$ tel que $p \leq n$, : $\sum_{k=p}^{n} u_k = (n - p + 1)\frac{u_p+u_n}{2}$
* Pour $n \in N$: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
* <u>Somme des termes d'une suite géométrique</u> : Soit $(u_n)_{n \in N}$ une suite géométrique de raison $a \neq 1$. Alors $\forall (p, n) \in N^2$ tel que $p \leq n$: $\sum_{n=p}^{n} u_k = \frac{u_p - u_{n+1}}{1-a}$
* <u>Relation de Pascal</u> : $\forall (n, p) \in N * \times Z$: $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

* Symétrie du coefficient binomial : $\forall(n,p) \in N \times Z : \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

* Formule du binôme de Newton : soit $(a,b) \in R^2$ et $n \in N$: $(a+b)^n = \sum_{p=0} n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$

* Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de R possède une borne supérieure (resp. inférieure)

* Caractérisation de la borne supérieure : Soit A une partie de R et $a \in R$. Alors on a a = Sup(A) si, et seulement si : $\forall x \in A, x \leq a$ et $\forall b < a, \exists x \in A, b < x$

* Théorème des suites adjacentes : Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers une limite commune

* Théorème de Bolzano Weierstrass : Toute suite bornée possède au moins une sous-suite convergente

* Une partei A de R est dense dans R, si, et seulement si, pour tout réel x, on peut trouver une suite d'éléments de A qui convergent vers x

* L'ensemble des suites bornées est stable par somme et par produit

* Toute suite convergente est bornée

* **Fonction k-lipschitzienne** : Soit $f : I \to R$ une fonction et $k \in R^+$. Alors f est k-lipschitzienne si et seulement si pour tout $x, y \in I$, on a : $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

* Formule d'intégration par parties : $\forall u, v \in C^1(\mathcal{I}), \quad \int u\, dv = uv - \int v\, du$

* Formule de Taylor avec reste intégrale : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!}(x-t)^n\, dt$

* inégalité de Taylor Lagrange :

* **Limite en un point :** Soit $f : I \to R$ une fonction, a un point de I ou une extrémité de I, et $\ell \in R$. On dit que f admet pour limite ℓ en a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $|x - a| < \eta$, on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

* **Limite en $+\infty$:** Soit $f : I \to R$ une fonction, a une extrémité de I. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a si pour tout $M > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $|x - a| < \eta$, on a $f(x) > M$.

* **Limite en $+\infty$:** Soit $f : [a, +\infty[\to R$ et $\ell \in R$. On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in [a, +\infty[$ avec $x \geq A$, on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

* **Limite en $+\infty$:** Soit $f : [a, +\infty[\to R$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout $M > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in [a, +\infty[$ avec $x \geq A$, on a $f(x) > M$.

* **Théorème (caractérisation séquentielle de la limite) :** Une fonction f admet pour limite ℓ en a si et seulement si, pour toute suite (x_n) qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

* Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point

* **Théorème de Rolle :** Soit $f : [a, b] \to R$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b) et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe c appartenant à (a, b) tel que $f'(c) = 0$.

* **Théorème des accroissements finis :** Soit $f : [a, b] \to R$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b). Alors il existe c appartenant à (a, b) tel que
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$
.

* **Inégalité des accroissements finis :** Soit $f : [a, b] \to R$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b). Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \in]a, b[$, $|f'(t)| \leq M$. Alors :
$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$
.

* **Formule de Leibniz :** Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors fg est n fois dérivable sur I et
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$
.

* **Définition de la convexité :** Une fonction f est dite convexe si, pour tous $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$
.

* **Théorème (inégalité des pentes) :** Soit $f : I \to R$. Les assertions suivantes sont équivalentes : 1. f est convexe sur I. 2. Pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto f(x) - f(a)(x - a)$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$. 3. Pour tous $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, on a
$$f(b) - f(a)\frac{b - a}{b - c} \leq f(c) - f(a)\frac{c - a}{b - c} \leq f(c) - f(b)\frac{c - b}{b - c}.$$

∗ **Théorème (inégalité de Jensen) :** Une fonction f est convexe si et seulement si, pour tout $n \geq 2$, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et pour tous les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $[0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

.

3 Probabilité

Soient E et F deux ensembles finis. Alors

- Si $E \subseteq F$, on a $\mathrm{card}(E) \leq \mathrm{card}(F)$, avec égalité si et seulement si $E = F$.
- $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(F)$.
- $\mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F) - \mathrm{card}(E \cap F)$.
- Le cardinal des applications de E dans F vaut $(\mathrm{card}\, F)^{\mathrm{card}(E)}$.
- $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{card}(E)}$.
- $P(\emptyset) = 0$;
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
- Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;
- Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- Pour toute famille $A_1, \ldots, A_p$ d'événements deux à deux incompatibles, $P(A_1 \cup \cdots \cup A_p) = P(A_1) + \cdots + P(A_p)$;
- Pour tout système complet d'événements $A_1, \ldots, A_p$, $P(A_1 \cup \cdots \cup A_p) = 1$.
- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements mutuellement indépendants, et si pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$, alors les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants.
- **Proposition :** Si B est un événement tel que $P(B) > 0$, alors P_B est une probabilité sur Ω.
- **Formule des probabilités composées :** Soit $A_1, \ldots, A_m$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}) \neq 0$. Alors :

  $$P(A_1 \cap \cdots \cap A_m) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_m | A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1})$$

  .

- **Formule des probabilités totales :** Soit $A_1, \dots, A_n$ un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Soit B un événement. Alors :
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$
.

- **Formule de Bayes pour deux événements :** Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$
.

- **Proposition :** Si B est un événement tel que $P(B) > 0$, alors P_B est une probabilité sur Ω.

- **Formule des probabilités composées :** Soit $A_1, \dots, A_m$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}) \neq 0$. Alors :
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_m|A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1})$$
.

- **Formule des probabilités totales :** Soit $A_1, \dots, A_n$ un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Soit B un événement. Alors :
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$
.

- Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$;

- $V(aX + b) = a^2V(X)$.

  Propriétés des probabilités :

  1. $P(\emptyset) = 0$;
  2. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
  3. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$;
  4. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
  5. Pour toute famille $A_1, \dots, A_p$ d'événements deux à deux incompatibles, $P(A_1 \cup \cdots \cup A_p) = P(A_1) + \cdots + P(A_p)$;
  6. Pour tout système complet d'événements $A_1, \dots, A_p$, $P(A_1 \cup \cdots \cup A_p) = 1$.

7. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :** Soit X une variable aléatoire réelle et soit $\epsilon > 0$. Alors

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

.

8. **Inégalité de Markov :** Soit X une variable aléatoire réelle et soit $t > 0$. Alors

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{|E(X)|}{t}$$

.