Cours de maths synthétique (pour ~~X/ENS~~ CCINP/CENTRALE/MINES)

Crée par des gens de la PSI de Claude B

December 24, 2023

Contents

1 Algèbre

1.1 Non assigné pour l'instant

* Soit A et B deux parties de E. Si A est une partie génératrice de E et si $A \subset B$ alors B est une parties génératrice de E (c'est la même chose pour les familles)
* Une symétrie s est un automorphisme donc $s^{-1} = s$
* $Mat_B(v \circ u) = Mat_B(v)Mat_B(u)$
* inégalité triangulaire : $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$
* théorème de pythagore : $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ ssi x et y sont orthogonaux
* Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre, en particulier, toute famille orthonormée de E est libre
* Théorème de la base orthonormée incomplète : Toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée de E
* Théorème de la base incomplète : Toute famille libre fini d'un EV de dimension fini peut être complété en une base de cet EV
* Théorème de la base extraite : Toutes familles génératrice finie d'un EV fini on peut extraire une base de cet EV
* Toute espace euclidien possède une base orthonormée

1.2 Caractérisations sur l'inversibilité d'une matrice

A $\in M_{n,p}(K)$ (par défaut) est inversible SI ET SEULEMENT SI :

* A est de determinant non nul
* 0 n'est pas valeur propre de A
* Ker(A)= $\{0\}$
* Il existe un polynôme annulateur de A dont 0 n'est pas racine
* ses coefficients diagonaux sont tous non nuls dans le cas d'une matrice triangulaire (et son inverse est elle aussi triangulaire supérieure)
* $rg(A) = n$ si $A \in M_n(K)$
* $\forall X \in K^n \ AX = 0 \rightarrow X = 0$ si $A \in M_n(K)$
* $\exists B \in M_n(K), AB = I_n$, alors $A \in M_n(K)$ et B sont inversibles et inverse l'une de l'autre

1.3 Propriété sur la semblablilité de deux matrices

A et B sont semblables <u>SI ET SEULEMENT SI</u> :

* $det(A) = det(B)$
* $tr(A) = tr(B)$
* $rg(A) = rg(B)$

1.4 Propriété sur la diagonalisation de matrice

* Si le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable
* A est diagonalisable <u>si et seulement si</u> elle est symétrique réelle

1.5 Formules à connaitre

* Pour $(A, B) \in M_n(K)^2$ tel que $AB = BA$, on a pour tout, $p \in N$: $(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} A^k B^{p-k}$ et $A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$

1.6 Propriété sur les dimensions

* $dim(E \times F) = dim(E) + dim(F)$
* $dim(E \oplus F) = dim(E) + dim(F)$
* $dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$
* $dimL(E, F) = dim(E) \times dim(F)$
* <u>Théorème du rang</u> : dim(E) = rg(u) + dim(Ker u)
* dim(Ker A) + rg(A) = p avec $A \in M_{n,p}(K)$

1.7 Propriété sur la liberté d'une famille

* Toutes sous-famille d'une famille finie liée est liée
* Une famille finie de polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts est libre
* Toutes sous-famille d'une famille finie libre est libre
* Toutes famille de vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre
* (x, y) liée signifie que x et y sont colinéaires.

1.8 Propriété sur le rang d'une matrice

* la trace d'un projecteur est égal à son rang
* Une matrice et sa transposée ont même rang
* Une matrice est de rang r ssi elle est équivalente à la matrice J_r
* Deux matrices de même taille sont équivalentes ssi elles ont même rang
* une sous matrice de A a un rang inférieur à A

1.9 Propriété sur la trace d'une matrice

* tr(AB) = tr(BA)
* $tr(v \circ u) = tr(u \circ v)$

1.10 Propriété sur l'hyperplan

* H hyperplan de E $\leftrightarrow dim(H) = dim(E) - 1$
* Soit H un SEV de E. Alors H est un hyperplan de E ssi il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$

1.11 Propriété sur l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application

* Une application $u \in L(E, F)$ est injective ssi $Ker(u) = \{0\}$
* Soit E et F deux EV de même dimensions finie. On a que $u \in L(E, F)$ on a : u surjective $\Leftrightarrow$ u injective $\Leftrightarrow$ u bijective

1.12 Propriété sur les valeurs propres, vecteurs propres et les sous espaces propres

* Un scalaire $\lambda \in K$ est une valeur propre de A ssi il est racine du polynôme caractéristique de A
* Si deux endomorphismes commutent, les sous espaces propres de l'un sont stable par l'autre
* Si A est une matrice triangulaire, alors l'ensemble de ses valeurs propres est sa diagonale
* Deux matrices semblambles ont le même spectre et les sous-espaces propres associés sont de même dimension
* on a pour tout $\lambda \in Sp(u)$: $1 \leq dim(E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$

* Théorème de Cayley-Hamilton : Le polynôme caractéristique de u annule u

* Si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille finie de valeurs propres de u deux à deux distinctes, alors les sous espaces propres associées $E_{\lambda_i}(u)$, pour $i \in I$, sont en somme directe.

1.13 Propriété sur les EV de dimension fini

2 Analyse

3 Probabilité