Cours de maths synthétique (pour ~~X/ENS~~ CCINP/CENTRALE/MINES)

sous "la direction lol" de Hugo BECKER et Mohamad MIDAEV facturé 12€80

December 22, 2023

* Deux matrices diagonales commutent
* Si A est une matrice triangulaire supérieure et inversible, alors A^{-1} est triangulaire supérieure
* Soit A et B deux parties de E. Si A est une partie génératrice de E et si $A \subset B$ alors B est une parties génératrice de E (c'est la même chose pour les familles)
* (x, y) liée signifie que x et y sont colinéaires.
* Toutes sous-famille d'une famille finie libre est libre
* Toutes sous-famille d'une famille finie liée est liée
* Une familel finie de polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts est libre
* Une application $u \in L(E, F)$ est injective ssi $Keru = \{0\}$
* Une symétrie s est un automorphisme donc $s^{-1} = s$
* Soit H un SEV de E. Alors H est un hyperplan de E ssi il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$
* <u>Théorème de la base incomplète</u> : Toute famille libre fini d'un EV de dimension fini peut être complété en une base de cet EV
* <u>Théorème de la base extraite</u> : Toutes familles génératrice finie d'un EV fini on peut extraire une base de cet EV
* $dim(E \times F) = dim(E) + dim(F)$
* $dim(E \oplus F) = dim(E) + dim(F)$
* $dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$
* <u>Théorème du rang</u> : dim(E) = rg(u) + dim(Ker u)
* Soit E et F deux EV de même dimensions finie. On a que $u \in L(E, F)$ on a : u surjective $\Leftrightarrow$ u injective $\Leftrightarrow$ u bijective
* $dimL(E, F) = dim(E) \times dim(F)$
* $HhyperplandeE \leftrightarrow dim(H) = dim(E) - 1$
* $Mat_B(v \circ u) = Mat_B(v)Mat_B(u)$
* dim(Ker A) + rg(A) = p avec $A \in M_{n,p}(K)$
* Une matrice carré $A \in M_n(K)$ est inversible ssi rg(A) = n
* Une matrice carré $A \in M_n(K)$ est inversible ssi $\forall X \in K^n AX = 0 \to X = 0$

* Si (A,B) $\in M_n(K)^2$ vérifient $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et inverse l'une de l'autre
* Une matrice est de rang ri ssi elle est équivalente à la matrice J_r
* Deux matrices de même taille sont équivalentes ssi elles ont même rang
* Une matrice et sa transposée ont même rang
* une sous matrice de A a un rang inférieur à A
* tr(AB) = tr(BA)
* Deux matrices semblables ont la même trace
* $tr(v \circ u) = tr(u \circ v)$
* la trace d'un projecteur est égal à son rang
* <u>inégalité triangulaire</u> : $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$
* <u>théorème de pythagore</u> : $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ ssi x et y sont orthogonaux
* Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre, en particulier, toute famille orthonormée de E est libre
* Toute espace euclidien possède une base orthonormée
* <u>Théorème de la base orthonormée incomplète</u> : Toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée de E
* Si deux endomorphismes commutent, les sous espaces propres de l'un sont stable par l'autre
* Si $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille finie de valeurs propres de u deux à deux distinctes, alors les sous espaces propres associées $E_{\lambda_i}(u)$, pour $i \in I$, sont en somme directe.
* Toutes famille de vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre
* Deux matrices semblambles ont le même spectre et les sous-espaces propres associés sont de même dimension
* Si A est une matrice triangulaire, alors l'ensemble de ses valeurs propres est sa diagonale
* Un scalaire $\lambda \in K$ est une valeur propre de A ssi il est racine du polynôme caractéristique de A
* on a pour tout $\lambda \in Sp(u)$: $1 \leq dim(E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$
* Si le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable

* Théorème de Cayley-Hamilton : Le plynôme caractéristique de u annule u
* Un endomorphisme

0.0.1 Caractérisations sur l'inversibilité d'une matrice

A est inversible SI ET SEULEMENT SI :

* A est de determinant nul
* 0 n'est pas valeur propre de A
* rg(A) = n
* le système linéaire homogène AX = 0 a pour seule solution X = 0
* Ker(A)= {0}
* Il existe un polynôme annulateur de A dont 0 n'est pas racine

0.0.2 Propriété sur la semblablilité de deux matrices

A et B sont semblables SI ET SEULEMENT SI :

* $det(A) = det(B)$
* $tr(A) = tr(B)$
* $rg(A) = rg(B)$