Esatística & Probabilidade - Exemplos - 2023/02

Prof. Hugo Carvalho

21/11/2023

SLIDE 173:

a) Seja X o número de partículas emitidas pela fonte radioativa em um período de uma hora. Primeiramente calculemos o parâmetro λ. Temos que

$$0,00673 = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = -\ln(0,00673) = 5{,}00,$$

na precisão de duas casas decimais.

A probabilidade desejada é então dada por:

$$\mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 1 - \sum_{x=0}^{10} \mathbb{P}(X = x) = 1 - \sum_{x=0}^{10} e^{-5} \frac{5^x}{x!} = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 = 1\%.$$

b) Note primeiramente que Y assume os valores $0, 1, 2, \ldots, 10$. Se $y = 0, 1, 2, \ldots, 9$, então

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = y) = e^{-5} \frac{5^y}{y!}.$$

Se $y = 10$, temos que

$$\mathbb{P}(Y = 10) = \mathbb{P}(X \geq 10) = 1 - \mathbb{P}(X < 10) = 1 - \sum_{x=0}^{9} e^{-5} \frac{5^x}{x!}.$$

c) Pela propriedade da perda de memória da exponencial, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > 5/6 | T > 1/3) &= \mathbb{P}(T > 1/2) \\
&= \int_{1/2}^{\infty} 5e^{-5t}\, dt \\
&= 0{,}08 \\
&= 8\%.
\end{aligned}$$

SLIDE 174:

a)

$$\frac{\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(C|A)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)/\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C \cap A)/\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C)},$$

onde na primeira igualdade usamos a definição de probabilidade condicional e na segunda usamos a Regra da Multiplicação.

b) O resultado acima nos dá uma maneira de comparar as probabilidades dos eventos B e C após a informação da ocorrência do evento A, com base nas probabilidades *a priori* da ocorrência de B e C, e das verossimilhanças de A condicionados em B e em C.

c) O enunciado nos informa que $\mathbb{P}(B) = 3\mathbb{P}(C)$ e também $\mathbb{P}(A|C) = 2\mathbb{P}(A|B)$. Substituindo acima, temos que:

$$\frac{\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(C|A)} = \frac{3\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} \frac{\mathbb{P}(A|B)}{2\mathbb{P}(A|B)} = \frac{3}{2},$$

de modo que $\mathbb{P}(B|A) = \frac{3}{2}\mathbb{P}(C|A)$. Portanto, antes da observação da evidência A, a hipótese B era três vezes mais provável que a C; à luz da nova evidência, a hipótese B ainda é mais provável que C, porém agora somente uma vez e meia mais provável.

SLIDE 175:

a) Denote por X o número de inversões. Temos que $X = \sum_{i=2}^{n} X_i$, onde a variável aleatória X_i vale 1 se ocorreu uma inversão entre os lançamentos $i-1$ e i, e 0 caso contrário. Temos então que $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_i = 1)$.
Para calcular $\mathbb{P}(X_i = 1)$, note que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i = 1) &= \mathbb{P}(\text{cara no } (i-1)\text{-ésimo lançamento e coroa no } i-\text{ésimo lançamento}) + \\ &\qquad \mathbb{P}(\text{coroa no } (i-1)\text{-ésimo lançamento e cara no } i-\text{ésimo lançamento}) \\ &= p(1-p) + (1-p)p \\ &= 2p(1-p).\end{aligned}$$

Portanto, temos que $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=2}^{n} 2p(1-p) = 2(n-1)p(1-p)$.

b) Derivando e igualando a zero a quantidade obtida no item a), vemos que ela é maximizada para $p^* = 1/2$. Tal ponto de fato é ponto de máximo, pois a expressão para $\mathbb{E}[X]$, como função de p, é uma função do segundo grau com concavidade voltada para baixo, de modo a ter um único máximo global.

c) A moeda honesta é a que carrega maior incerteza possível em relação ao resultado observado, portanto é plausível que uma moeda honesta tenha a maior quantidade esperada possível de inversões.

SLIDE 176:

a) Seja X o peso do óleo contido na lata, e denote por Z uma variável aleatória com distribuição normal padrão. A probabilidade desejada é dada por:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 1.000) + \mathbb{P}(X < 980) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-990}{10} > \frac{1.000-990}{10}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{X-990}{10} < \frac{980-990}{10}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z > 1) + \mathbb{P}(Z < -1) \\ &= 2\mathbb{P}(Z > 1) \\ &= 2[1 - \mathbb{P}(Z \leq 1)] \\ &= 2[1 - 0{,}8413] \\ &= 0{,}3174.\end{aligned}$$

b) Cada lata tem probabilidade 0,3174 de ser imprópria para venda, de modo que a probabilidade de termos 2 latas impróprias para venda em uma amostra de 5, assumindo independência, é descrita analogamente à uma variável aleatória Binomial, ou seja,

$$\binom{5}{2}(0{,}3174)^2(1-0{,}3174)^3 = 0{,}3204.$$

c) Queremos encontrar c de modo que a relação abaixo seja satisfeita:

$$\begin{aligned}0{,}05 &= \mathbb{P}(X > 990 + c) + \mathbb{P}(X < 990 - c) \\ &= \mathbb{P}(Z > c/10) + \mathbb{P}(Z < -c/10) \\ &= 2\mathbb{P}(Z > c/10) \\ &= 2[1 - \mathbb{P}(Z \leq c/10)].\end{aligned}$$

Isso implica que devemos ter $\mathbb{P}(Z \leq c/10) = 0{,}975$, que segundo a tabela nos dá $c/10 = 1{,}96$. Ou seja, para que somente 5% das latas sejam consideras impróprias para venda, devemos ter que seu peso esteja 19,6g acima ou abaixo da média.

SLIDE 177:

a) Denote por X_i a concentração de nicotina no i-ésimo cigarro. Temos que $\mu = \mathbb{E}[X_i] = 2{,}2$ e $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X_i)} \approx 0{,}5477$, pois estamos supondo ser verdadeira a alegação da companhia de cigarros. Denote por Z uma variável aleatória normal padrão. Pelo Teorema Central do Limite, a quantidade que queremos calcular é aproximada por:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 3{,}1\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 310\right)\\ &\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{310 - 100 \times 2{,}2}{\sqrt{100} \times 0,5477}\right)\\ &= \mathbb{P}(Z \geq 16{,}432)\\ &\approx 0.\end{aligned}$$

b) O resultado obtido no item a) não nos dá margem a acreditar na veracidade da informação informada pela empresa, pois se ela fosse de fato verdade, a probabilidade de observarmos uma quantidade de nicotina média maior que ou igual a 3,1 mg em uma amostra de 100 cigarros é essencialmente nula.