Estatística & Probabilidade (CC)
Exemplos de variáveis aleatórias contínuas

Prof. Hugo Carvalho

17/10/2023

Exemplo slide 102:

a) Se a pessoa é inocente, então temos $\lambda = 1$, de modo que $X_1 \sim \text{Exp}(1)$. Portanto, queremos encontrar c tal que $0{,}95 = \mathbb{P}(X_1 \leq c)$. De fato, temos que $0{,}95 = \mathbb{P}(X_1 \leq c) = 1 - e^{-c}$, o que implica em $c = -\ln(1 - 0{,}95) \approx 3$.

b) Se o réu é culpado, então temos $\lambda = 2$, de modo que $X_2 \sim \text{Exp}(1/2)$. Portanto, a probabilidade dele ser condenado é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 > c) &= \mathbb{P}(X_2 > 3) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_2 \leq 3) \\
&= 1 - (1 - e^{-3/2}) \\
&= e^{-3/2} \\
&= 0{,}22.
\end{aligned}$$

c) Pela Lei da Probabilidade Total, a probabilidade de uma pessoa que a princípio não se saber ser inocente ou culpada ser condenada é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{condenada}) &= \mathbb{P}(\text{condenada}|\text{culpada})\mathbb{P}(\text{culpada}) + \mathbb{P}(\text{condenada}|\text{inocente})\mathbb{P}(\text{inocente}) \\
&= 0{,}22 \times 0{,}1 + 0{,}05 \times 0{,}9 \\
&= 0{,}07.
\end{aligned}$$

Exemplo slide 103:

Denote por T_A e T_B o tempo de permanência dos clientes A e B na loja, respectivamente, em minutos. Pelo enunciado, tais variáveis aleatórias são exponencialmente distribuídas, com parâmetros $\lambda_A = 1/10$ e $\lambda_B = 1/20$, respectivamente. Temos então que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{cliente mais demorado levar mais de 20 minutos para sair}) &= \mathbb{P}(T_A > 20 \text{ ou } T_B > 20) \\
&= \mathbb{P}(T_A > 20) + \mathbb{P}(T_B > 20) - \mathbb{P}(T_A > 20 \text{ e } T_B > 20) \\
&= \mathbb{P}(T_A > 20) + \mathbb{P}(T_B > 20) - \mathbb{P}(T_A > 20)\mathbb{P}(T_B > 20) \\
&= e^{-20\times 1/10} + e^{-20\times 1/20} - e^{-20\times 1/10}e^{-20\times 1/20} \\
&= e^{-2} + e^{-1} - e^{-3} \\
&\approx 0{,}453.
\end{aligned}$$

Outra forma de calcular a probabilidade acima é:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{cliente mais demorado levar mais de 20 minutos para sair}) &= \mathbb{P}(T_A > 20 \text{ ou } T_B > 20) \\
&= 1 - \mathbb{P}(T_A \leq 20 \text{ e } T_B \leq 20) \\
&= 1 - \mathbb{P}(T_A \leq 20)\mathbb{P}(T_B \leq 20) \\
&= 1 - (1 - e^{-20\times 1/10})(1 - e^{-20\times 1/20}) \\
&= 1 - (1 - e^{-2})(1 - e^{-1}) \\
&= e^{-2} + e^{-1} - e^{-3} \\
&\approx 0{,}453.
\end{aligned}$$

Exemplo slide 104:

Sendo X o tempo de duração da maldição, queremos calcular $\mathbb{P}(X > x + y | X > x)$. Denote por X_1 o tempo de duração da primeira maldição e por X_2 o tempo de duração da segunda. Pelo enunciado, temos que $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ e $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Usando a dica, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x + y | X > x) &= \frac{\mathbb{P}(X > x + y, X > x)}{\mathbb{P}(X > x)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X > x + y)}{\mathbb{P}(X > x)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X > x + y | \text{maldição } 1)p_1 + \mathbb{P}(X > x + y | \text{maldição } 2)p_2}{\mathbb{P}(X > x | \text{maldição } 1)p_1 + \mathbb{P}(X > x | \text{maldição } 2)p_2} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 > x + y)p_1 + \mathbb{P}(X_2 > x + y)p_2}{\mathbb{P}(X_1 > x)p_1 + \mathbb{P}(X_2 > x)p_2} \\
&= \frac{p_1 e^{-\lambda_1(x+y)} + p_2 e^{-\lambda_2(x+y)}}{p_1 e^{-\lambda_1 x} + p_2 e^{-\lambda_2 x}}.
\end{aligned}$$

Relação entre a Poisson e a Exponencial (slide 105):

Vimos em sala que se X conta quantidade de ocorrências de "algo" por unidade de tempo $\Rightarrow X \sim \text{Poi}(\lambda)$. Portanto, se X_t conta a quantidade de ocorrências de "algo" a cada t unidades de tempo, podemos dizer que $X_t \sim \text{Poi}(\lambda t)$. Dessa forma, se T é o tempo entre duas ocorrências consecutivas, podemos calcular:

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(X_t = 0) = e^{-\lambda t},$$

de modo que $F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, para $t \geq 0$. Derivando, temos que $f_t(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$, a fdp de uma exponencial.