# Estatística e Probabilidade - Projeto 01 - 2022/02

Prof. Hugo Carvalho

10/11/2022

**– INSTRUÇÕES – LEIAM ATENTAMENTE! –**

- A data limite de entrega do projeto é segunda-feira 21/11/2022 às 23h59. Avaliações entregues após esse prazo serão desconsideradas.
- A entrega deve ser feita exclusivamente através do Google Classroom, e o projeto deve ser redigido na forma de um relatório incluindo os códigos. Para isso, use a linguagem Python dentro de um notebook do Google Colaboratory, a ser anexado na atividade da seguinte forma:
  - Dentro da turma no Google Classroom, clique em "Atividades"
  - No tema "Projetos", clique em "Projeto 01" e em seguida em "Ver atividade"
  - No canto superior direito, clique em "+ Adicionar ou criar" e em seguida selecione em "Arquivo" ou "Google Drive", se optar fazer upload do notebook ou selecionar um arquivo de seu Google Drive, respectivamente.
  - O título do notebook deverá ser, obrigatoriamente, "SEU NOME - Projeto 01".
  - Para entregar o projeto, abra a atividade que o contém (conforme procedimento explicado no ponto acima), e no canto superior direito clique em "ENTREGAR" (o texto estará em uma caixa cinza, mas ele é clicável).
  - Na tela a seguir clique em "Entregar" para confirmar a entrega do trabalho.
  - Se você se arrependeu e quiser fazer outra entrega, basta abrir a atividade, no canto superior direito clique em "Cancelar envio" e confirme clicando novamente em "Cancelar envio" na janela que irá abrir. Você pode fazer isso quantas vezes quiser até o prazo determinado.
  - As explicações que você precisará fazer devem ser feitas em células de texto em seu notebook. Somente comentários pequenos devem ser feitos no código.
  - Caso seja necessário, equações podem ser introduzidas em LaTeX nas células de texto.
  - Figuras também podem ser incluídas em células de texto, tanto através de upload quanto simplesmente arrastando-a para alguma célula de texto. Nesse caso, sempre informe a fonte de onde a figura foi retirada.
- A troca de conhecimento na realização da avaliação é permitida e encorajada: ciência se faz com colaboração, e devemos seguir esse espírito aqui. Porém, cada aluno deverá ter a sua própria resolução, e cópias ou outras ilegalidades serão severamente punidas com a anulação da avaliação para o(s) aluno(s) suspeito(s).
- Todos os passos de sua resolução devem ser devidamente justificados.
- Ao entregar essa avaliação, você afirma ter lido e estar de acordo com essas regras, comprometendo-se a cumpri-las.

**Questão 1:** O objetivo do projeto é modelar uma ultra-simplificação do jogo "Banco Imobiliário" através de uma cadeia de Markov. Mais especificamente, considere o seguinte conjunto de regras:

- O tabuleiro consiste em 40 casas, dispostas circularmente, enumeradas de 0 até 39. Após a casa 39, retorna-se à casa 0.
- O jogador começa na casa de número 0, e o número de casas que ele irá andar, sempre no sentido crescente, é a soma do resultado obtido em dois lançamentos de um dado honesto de 6 faces.
- A casa de número 20 é uma casa especial, denominada "prisão". Caso o jogador caia em tal casa através da rolagem de dados, o jogo segue normalmente (chamamos esse caso de "visita à prisão"). Porém, o jogador pode ir preso se, a qualquer momento do jogo, nas rolagens dos dados ele obtiver uma sequência de três lançamentos com valores repetidos (chamemos esse caso de "ir preso"). Vejamos em exemplos:
  - Se o jogador está na casa de número 15 e obtém $2+3$ na rolagem dos dados, ele irá somente visitar a prisão e seguirá jogando normalmente daí em diante.
  - Se o jogador está na casa de número 7, e obtém $4+4$ na rolagem dos dados, ele deverá lançá-los novamente. Caso obtenha valores distintos na nova rolagem, digamos $4+6$, ele irá para a casa de número 17 e o jogo segue normalmente. Mas caso obtenha valores iguais na nova rolagem, digamos $5+5$, uma nova rolagem deverá ser feita. Se nessa nova rolagem valores distintos forem observados, segue o jogo, mas se valores iguais forem observados uma terceira vez, o jogador irá automaticamente para a prisão.
- O jogador fica no máximo três rodadas na prisão, mas pode sair antes se obtiver valores repetidos no lançamento dos dados. Por exemplo:
  - Imediatamente ao ir preso, o jogador lança o par de dados. Se ele obtiver valores iguais, digamos $2+2$, ele está imediatamente solto e lança o par de dados novamente para saber para qual casa ele irá, partindo da casa 20. Se ele obtiver valores diferentes, digamos $2+5$, ele lança novamente o par de dados: obtendo valores iguais está solto e obtendo valores diferentes continua preso. Neste último caso, ele passa mais uma rodada na prisão e em seguida é automaticamente solto, seguindo o jogo normalmente.
- O jogador fica caminhando no tabuleiro indefinidamente de acordo com tais regras.

Com base nisso, faça o que se pede abaixo:

a) Explique como que o cenário acima descrito pode ser modelado por uma cadeia de Markov, descrevendo detalhadamente os estados de sua cadeia e exibindo a sua matriz de probabilidades de transição. Cada passo de sua construção deve ser descrito de forma detalhada.

b) Denote por $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ a posição do jogador no tabuleiro ao longo do tempo. Pelo item a), sabemos que essa sequência de variáveis aleatórias é descrita por uma cadeia de Markov. Construa um algoritmo para simular observações de tal cadeia, onde é possível controlar o número de iterações desejadas.

c) Seja $Y$ a variável aleatória que representa a quantidade de passos que o jogador dá até a sua primeira prisão (tome cuidado, não é a primeira "visita à prisão"!). Obtenha uma aproximação para o valor esperado de $Y$, através de sucessivas simulações da cadeia usando o algoritmo construído no item b). Descreva detalhadamente o seu procedimento para realizar tal aproximação.

d) Justifique matematicamente porque o procedimento realizado no item c) funciona para aproximar o valor esperado de $Y$.

e) Seja $Z$ a variável aleatória que representa a posição do jogador no tabuleiro após transcorrido um tempo suficientemente longo, ou seja, $X_t$ quando $t \to \infty$. Encontre a função massa de probabilidade de $Z$. Em média, em qual casa o jogador passa mais tempo? Discuta os resultados obtidos.