Estatística e Probabilidade - Avaliação Presencial - 2023/02 - Gabarito

Prof. Hugo Carvalho

30/11/2023

Questão 1:

a) Denotando por K o evento "uma cara é observada" e por M_i o evento "a moeda i é escolhida", para $i = 1, 2, 3$, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K) &= \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(K|M_j)\mathbb{P}(M_j) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{24}.\end{aligned}$$

b) Para $i = 1, 2, 3$, temos, pelo Teorema de Bayes, que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_i|K) &= \frac{\mathbb{P}(K|M_i)\mathbb{P}(M_i)}{\sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(K|M_j)\mathbb{P}(M_j)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(K|M_i)\mathbb{P}(M_i)}{7/24}.\end{aligned}$$

Portanto,

- $\mathbb{P}(M_1|K) = \frac{24}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{7}$.
- $\mathbb{P}(M_2|K) = \frac{24}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{7}$.
- $\mathbb{P}(M_3|K) = \frac{24}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$.

c) As "novas" probabilidades de se observar cara são as do item anterior. Denotando-as por $\mathbb{P}(M_i')$, para simplificar, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K) &= \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(K|M_i)\mathbb{P}(M_i') \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \\ &= \frac{21}{56} \\ &= \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Questão 2:

a) A probabilidade de não ser necessário redirecionar um navio para outro estaleiro é a probabilidade de chegar uma quantidade de navios que o estaleiro consegue suportar, ou seja no máximo dois. Denote tal evento por A. Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(X \leq 2) \\ &= \sum_{x=0}^{2} e^{-2} \frac{2^x}{x!} \\ &= e^{-2}(1 + 2 + 2) \\ &= 5e^{-2}.\end{aligned}$$

b) Note que Y só difere de X se o estaleiro está cheio ou (exclusivo) o estaleiro está cheio e chega ao menos mais um navio. Dessa forma, temos que:

- $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0) = e^{-2}\dfrac{2^0}{0!} = e^{-2}$.
- $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=1) = e^{-2}\dfrac{2^1}{1!} = 2e^{-2}$.
- $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=2) &= \mathbb{P}(X \geq 2)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 1)\\ &= 1 - (e^{-2} + 2e^{-2})\\ &= 1 - 3e^{-2}.\end{aligned}$$

c) Por definição, temos que:

$$\begin{aligned}\psi_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}]\\ &= \sum_{y=0}^{2} e^{ty}\mathbb{P}(Y=y)\\ &= e^{t\cdot 0}\cdot e^{-2} + e^{t\cdot 1}\cdot 2e^{-2} + e^{t\cdot 2}\cdot(1-3e^{-2})\\ &= e^{-2} + 2e^{t-2} + e^{2t} - 3e^{2t-2}, \text{ para } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

d) A probabilidade que queremos calcular é $\mathbb{P}(T > 1/2 + 1/4 | T > 1/2)$. Porém, pela propriedade da perda de memória da Exponencial, temos que esse valor é igual a $\mathbb{P}(T > 1/4)$, calculado a seguir:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > 1/4) &= \int_{1/4}^{\infty} 2e^{-2t}\, dt\\ &= -e^{-2t}\Big|_{t=1/4}^{t=\infty}\\ &= e^{-1/2}.\end{aligned}$$

Questão 3:

a) Note que C deve ser um valor positivo para que tenhamos $f_X(x) \geq 0$. Para encontrar seu valor específico, usemos o fato de que uma função densidade de probabilidade deve integrar 1:

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx\\ &= \int_0^1 Cx(1-x)\, dx\\ &= C\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1}\\ &= C\cdot\frac{1}{6},\end{aligned}$$

de modo que $C = 6$.

b) Usando propriedades do valor esperado, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L] &= \mathbb{E}[2+3X]\\ &= 2 + 3\mathbb{E}[X].\end{aligned}$$

Calculando $\mathbb{E}[X]$ pela sua definição, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx\\ &= \int_0^1 6x^2(1-x)\, dx\\ &= 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1}\\ &= 6\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L] &= 2 + 3\mathbb{E}[X] \\ &= 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Obs.: Outra forma de encontrar o valor esperado de X é argumentando através da simetria de sua função densidade de probabilidade em torno de $x = 1/2$.

Questão 4:

a) Denotando o peso de cada caixa por X_i, para $i = 1, \dots, 100$, temos que o peso total das caixas é dado por $S_{100} = X_1 + \cdots + X_n$. A probabilidade desejada é dada por

$$\mathbb{P}(S_{100} \geq 7.000),$$

e para calculá-la iremos utilizar o Teorema Central do Limite. Para isso, precisaremos da média e desvio padrão de S_{100}:

$$\begin{aligned}&\bullet\ \mathbb{E}[S_{100}] = \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_{100}] = 100\mathbb{E}[X_1] = 100 \cdot 50 = 5.000 \\ &\bullet\ \mathbb{V}(S_{100}) = \mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_{100}) = 100\mathbb{V}(X_1) = 100 \cdot 100 = 10.000 \\ &\qquad \Rightarrow \mathrm{dp}(S_{100}) = \sqrt{\mathbb{V}(S_{100})} = 100,\end{aligned}$$

onde no cálculo da variância utilizamos a independência entre as caixas. Dessa forma, denotando por Z uma variável aleatória normal padrão, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{100} \geq 7.000) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_{100} - \mathbb{E}[S_{100}]}{\mathrm{dp}(S_{100})} \geq \frac{7.000 - \mathbb{E}[S_{100}]}{\mathrm{dp}(S_{100})}\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{7.000 - 5.000}{100}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z > 20) \\ &\approx 0,\end{aligned}$$

conforme foi visto no Projeto 02.

b) Denote por x a nova capacidade do bagageiro. Queremos encontrar x tal que

$$\mathbb{P}(S_{100} \geq x) = 0{,}001.$$

Utilizando o Teorema Central do Limite analogamente ao que foi feito acima, temos que:

$$0{,}001 = \mathbb{P}(S_{100} \geq x) \approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{x - 5.000}{100}\right).$$

Para adaptar a equação acima aos dados do enunciado, temos que:

$$0{,}999 = \mathbb{P}(S_{100} \leq x) \approx \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x - 5.000}{100}\right),$$

de modo que devemos ter $(x - 5.000)/100 \approx 3$. Resolvendo para x, temos que $x \approx 5.300$ kg.