

Estatística e Probabilidade - Avaliação Presencial - 2023/02

Prof. Hugo Carvalho

30/11/2023

– CADA ITEM VALE 1 PONTO – TODAS AS CONTAS SÃO SIMPLES –

Questão 1: Uma caixa contém três moedas, com respectivas probabilidades p_i de dar cara quando lançada, a saber, $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$ e $p_3 = 1/8$. Com base nesse cenário, faça o que se pede abaixo:

Obs.: Dê suas respostas finais na forma de uma única fração.

- a) Uma das moeda é escolhida aleatoriamente da caixa, sem preferência por nenhuma das três, e ao ser lançada uma cara é observada. Qual é a probabilidade de tal evento?
- b) No cenário do item a), calcule a probabilidade de cada uma das três moedas ter sido a selecionada.
- c) Lançando novamente a mesma moeda, qual é a probabilidade de se observar outra cara?
Dica: Após observar uma cara, a probabilidade de cada moeda ter sido sorteada mudou e não é mais $1/3$. Você as calculou no item anterior.

Questão 2: A quantidade de navios que chegam por dia em determinado estaleiro é modelada por uma distribuição de Poisson de média dois. Porém, o estaleiro tem espaço para acomodar somente dois navios, e caso chegue um navio quando ele está cheio, o navio deverá ser redirecionado para outro estaleiro. Com base nisso, faça o que se pede abaixo:

Obs.: Dê suas respostas finais o mais simplificadas possível, em função de e^{-2} .

- a) Qual é a probabilidade de não ser necessário redirecionar um navio para outro estaleiro?
- b) Seja Y a variável aleatória que representa o número de navios atracados no estaleiro. Qual é a distribuição de probabilidade de Y ?
- c) Encontre a função geradora de momentos de Y .
Obs.: Aqui aparecerão outros termos além de e^{-2} .
- d) O tempo T entre a chegada de dois navios consecutivos, medido em dias, é exponencialmente distribuído com média 0,5. Se em um período de 12 horas nenhum navio chegou ao estaleiro, qual a probabilidade de que precisamos esperar mais seis horas para a chegada de um navio?
Dica: Cuidado com as unidades do problema! Aqui aparecerão outros valores além de e^{-2} .

Questão 3: Certa liga é formada pela mistura fundida de dois metais. A proporção de chumbo nessa liga é descrita por uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx(1-x), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com base nisso, faça o que se pede abaixo.

- a) Encontre o valor de C para que f_X seja de fato uma função densidade de probabilidade.
- b) O lucro obtido na venda dessa liga, por unidade de peso, é dado por $L = 2 + 3X$ unidades monetárias. Calcule o lucro médio ao se vender uma unidade de peso dessa liga.
Obs.: Dê sua resposta na forma de uma única fração.

Questão 4: Carregamos um avião com 100 caixas não relacionadas, cada uma com peso médio de 50 kg, sendo o desvio padrão dos pesos de 10 kg. O peso máximo que o avião pode levar no bagageiro é de 7 toneladas. Com base nisso, faça o que se pede abaixo:

- a) Calcule a probabilidade da capacidade do bagageiro ser excedida.
Obs.: Você vai precisar de uma probabilidade referente à distribuição normal padrão cujo valor você já sabe :-)
- b) Para diminuir custos a capacidade do bagageiro será reduzida. Qual deve ser a nova capacidade para que, no cenário apresentado acima, a probabilidade de sua capacidade ser excedida seja de 0,1%?
Obs.: Se $Z \sim N(0, 1)$, então $\mathbb{P}(Z \leq 3) = 0,999$.

Questão 5: [QUESTÃO BÔNUS] Seja X uma variável aleatória com função geradora de momentos dada por $\psi_X(t)$, definida para t em torno de zero. Mostre que $\mathbb{E}[X^n] = \psi_X^{(n)}(0)$, a n -ésima derivada de ψ_X calculada em zero, para todo $n \in \mathbb{N}$.