Estatística e Probabilidade - Avaliação Presencial 02 - 2022/01

Prof. Hugo Carvalho

04/08/2022

Questões com um requerem certo nível de bruxaria
Questões com um são mais emocionantes

Questão 1: Dois clientes A e B, não relacionados entre si, estão em uma loja. Eles permanecem na loja em média por 10 e 20 minutos, respectivamente, com distribuição Exponencial. O objetivo desta questão é estudar a probabilidade do cliente que demorar mais tempo para sair da loja demore mais que 20 minutos.

a) Denotando por T_A e T_B os tempos de permanência dos clientes A e B na loja, respectivamente, encontre quais são os respectivos parâmetros λ_A e λ_B de suas distribuições.

b) Argumente que o evento de interesse, "o cliente que demorar mais tempo para sair da loja demorar mais que 20 minutos" é o mesmo que o evento $\{T_A > 20 \text{ ou } T_B > 20\}$.

c) Utilizando o princípio da inclusão-exclusão, calcule a probabilidade desejada.

Questão 2: O objetivo desta questão é introduzir e trabalhar a *distribuição Geométrica*, uma importante distribuição discreta. Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição Geométrica com parâmetro $0 < p < 1$ se a sua função massa de probabilidade é dada por

$$\mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^x, \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Com base nisso, faça o que se pede abaixo.

a) Argumente que uma interpretação razoável para tal distribuição é a seguinte: "$\mathbb{P}(X = x)$ nos dá a probabilidade de se observar exatamente x fracassos até a obtenção do primeiro sucesso em réplicas idênticas e independentes de um mesmo experimento que tem probabilidade de sucesso igual a p".

b) Derive em relação à variável p os dois lados da igualdade $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^x = 1$ e conclua que $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1-p}{p}$.

c) Um jogo de Mega-Sena onde você aposta em seis dezenas custa R\$ 4,50. Assumindo que você irá jogar nas mesmas seis dezenas duas vezes por semana, calcule o tempo médio e o seu gasto médio com os jogos até ganhar pela primeira vez.

d) Seja agora Y uma outra variável aleatória, independente de X e com distribuição Geométrica de parâmetro $0 < q < 1$. Ou seja, X e Y satisfazem:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^x, \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \mathbb{P}(Y = y) = q(1-q)^y, \text{ para } y = 0, 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Interprete o que significa o evento $\{X = Y\}$. Sinta-se à vontade para criar um experimento fictício para ilustrar, se achar melhor.

e) Argumente que o evento $\{X = Y\}$ é o mesmo que o evento $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} \{X = n; Y = n\}$ e calcule a sua probabilidade.

f) Interprete agora o evento $\{\min(X, Y) = k\}$. Novamente, sinta-se à vontade para criar um experimento fictício para ilustrar, se achar melhor.

g) Argumente que o evento $\{\min(X,Y) = k\}$ é equivalente ao evento

$$\{X = k, Y > k\} \cup \{Y = k, X > k\} \cup \{X = k, Y = k\},$$

e que esses três eventos são dois-a-dois disjuntos.

h) Mostre que $\mathbb{P}(\min(X,Y) = k) = [1 - (p + q - pq)]^k [p + q - pq]$.

i) Explique intuitivamente o resultado do item h), Conclua que $\min(X,Y)$ também tem distribuição Geométrica, e interprete o seu parâmetro.

Questão 3: Esta é a questão mais importante da avaliação. Aqui você tem um espaço livre para você falar sobre o que você quiser, especialmente sendo referente ao curso de Estatística & Probabilidade que você acabou de fazer mas abrangendo outras coisas caso você sinta necessidade. Sinta-se livre para falar sobre o que você mais estudou, mais aprendeu, mais gostou de ter estudado, achou mais chato, o que mais te chamou atenção na disciplina, alguma aplicação legal, enfim... vai na fé!