# Estatística e Probabilidade - Teste 01 - 2024/01

Prof. Hugo Carvalho

25/04/2024

**Questão 1:**

a) Denotando por $K$ o evento "uma cara é observada" e por $M_i$ o evento "a moeda $i$ é escolhida", para $i = 1, 2, 3$, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K) &= \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(K|M_j)\mathbb{P}(M_j) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{24}.\end{aligned}$$

b) Para $i = 1, 2, 3$, temos, pelo Teorema de Bayes, que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_i|K) &= \frac{\mathbb{P}(K|M_i)\mathbb{P}(M_i)}{\sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(K|M_j)\mathbb{P}(M_j)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(K|M_i)\mathbb{P}(M_i)}{7/24}.\end{aligned}$$

Portanto,

- $\mathbb{P}(M_1|K) = \frac{24}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{7}.$
- $\mathbb{P}(M_2|K) = \frac{24}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{7}.$
- $\mathbb{P}(M_3|K) = \frac{24}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}.$

c) As "novas" probabilidades de se observar cara são as do item anterior. Denotando-as por $\mathbb{P}(M_i')$, para simplificar, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K) &= \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(K|M_i)\mathbb{P}(M_i') \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \\ &= \frac{21}{56} \\ &= \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

**Questão 2:**

a) Segue abaixo interpretação e cálculo da probabilidade dos eventos pedidos:

- $A =$ "os destroços estão na região" e $\mathbb{P}(A) = 1/2$, conforme informado pelo enunciado.
- $A^c =$ "os destroços não estão na região" e $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1/2$.
- $B|A =$ "os destroços são encontrados dado que estão na região" e $\mathbb{P}(A) = 3/4$, conforme informado pelo enunciado.
- $B^c|A =$ "os destroços não são encontrados dado que estão na região" e $\mathbb{P}(B^c|A) = 1 - \mathbb{P}(B|A) = 1/4$.

- $B|A^c$ = "os destroços são encontrados dado que não estão na região" e $\mathbb{P}(B|A^c) = 0$, pois é impossível achar destroços que não estão na região!
- $B^c|A^c$ = "os destroços não são encontrados dado que não estão na região" e $\mathbb{P}(B^c|A^c) = 1 - \mathbb{P}(B|A^c) = 1$; de outra forma, com certeza não iremos encontrar destroços que não estão na região!

b) Queremos calcular $\mathbb{P}(B)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

c) Queremos atualizar $\mathbb{P}(A)$ à luz do conhecimento do evento $B^c$, ou seja, queremos calcular $\mathbb{P}(A|B^c)$. Pelo Teorema de Bayes e por resultados obtidos nos itens a) e b), temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B^c) &= \frac{\mathbb{P}(B^c|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B^c)} \\ &= \frac{1/4 \cdot 1/2}{5/8} \\ &= \frac{1}{5}.\end{aligned}$$