Estatística e Probabilidade - Teste 03 (Gabarito) - 2024/01

Prof. Hugo Carvalho

04/07/2024

Questão 1:

a) Antes da partícula realizar qualquer salto, sua posição é $S_0 = 0$, conforme informado no enunciado. Após o primeiro salto, sua posição estará uma unidade à esquerda ou à direita de zero, ou seja $S_1 = X_1$. Procedendo indutivamente, a posição após n saltos estará a uma unidade à direita ou à esquerda da posição após o salto $n-1$ (denotada por S_{n-1}), de modo que $S_n = S_{n-1} + X_n$. Isso justifica a escrita de S_n como $X_1 + \cdots + X_n$. Calculamos o valor esperado e variância de X_i da seguinte forma:

$$\mathbb{E}[X_i] = \sum_x x\mathbb{P}(X_i = x) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$
$$\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = \mathbb{E}[X_i^2] = \sum_x x^2\mathbb{P}(X_i = x) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

b) Queremos calcular a média e variância de S_n, o que pode ser feito da seguinte forma:

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^n 0 = 0.$$
$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \sum_{i=1}^n 1 = n,$$

onde podemos escrever a variância da soma como a soma das variâncias devido à independência entre as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$. Podemos interpretar o resultado da seguinte forma: independente da quantidade de saltos que a partícula dá, o "melhor chute" para onde podemos encontrá-la é no ponto zero, já que todo passo para a direita que ela dá, é potencialmente "anulado" por um passo para a esquerda, já que ambos os saltos têm igual probabilidade de ocorrência. Porém, quanto mais saltos a partícula dá, maior é a dispersão de sua posição em torno de zero, o que é natural de se esperar, pois torna-se mais provável que ela esteja cada vez mais longe da origem.

c) Como o enunciado pede a distância até a origem e relembra que "distância" refere-se às duas possíveis direções (à esquerda ou à direita de zero), queremos calcular $\mathbb{P}(|S_{100}| \geq 30)$, que pode ser aproximada através do Teorema Central do Limite conforme segue abaixo (Z denota uma variável aleatória normal padrão):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|S_{100}| \geq 30) &= \mathbb{P}(S_{100} \geq 30) + \mathbb{P}(S_{100} \leq -30) \\
&= \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{S_{100} - 100 \times 0}{\sqrt{100} \times 1}}_{Z_n} \geq \frac{30 - 100 \times 0}{\sqrt{100} \times 1}\right) + \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{S_{100} - 100 \times 0}{\sqrt{100} \times 1}}_{Z_n} \leq \frac{-30 - 100 \times 0}{\sqrt{100} \times 1}\right) \\
&= \mathbb{P}(Z_n \geq 3) + \mathbb{P}(Z_n \leq -3) \\
&\approx \mathbb{P}(Z \geq 3) + \mathbb{P}(Z \leq -3) \\
&= 2\mathbb{P}(Z \geq 3) \\
&= 2\left[1 - \mathbb{P}(Z \leq 3)\right] \\
&= 2\left[1 - 0{,}999\right] \\
&= 0{,}002.
\end{aligned}$$

d) Queremos encontrar o menor valor de n tal que $\mathbb{P}(S_n \geq 50) = 0{,}001$. Procedemos, também, através do Teorema Centrla do Limite, utilizando a mesma notação do item c):

$$\begin{aligned}
0{,}001 &= \mathbb{P}(S_n \geq 50) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \times 0}{\sqrt{n} \times 1} \geq \frac{50 - n \times 0}{\sqrt{n} \times 1}\right) \\
&= \mathbb{P}(Z_n \geq 50/\sqrt{n}) \\
&\approx \mathbb{P}(Z \geq 50/\sqrt{n}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 50/\sqrt{n}),
\end{aligned}$$

de modo que $\mathbb{P}(Z \leq 50/\sqrt{n}) = 0{,}999$. Portanto, sabemos então que $50/\sqrt{n} = 3$, e resolvendo para n temos que $n = (50/3)^2 \approx 277{,}78$, de modo que 278 passos são necessários para garantir que a partícula esteja à direita de 50 com probabilidade de 0,001.

Questão 2:

a) A posição inicial da partícula é $(X_0, Y_0) = (0, 0)$, de modo que a posição da partícula após o primeiro salto é uniformemente escolhida no círculo de raio 1 centrado na origem. Fazer essa escolha é análogo a escolher um ângulo θ_1 no intervalo $[0, 2\pi)$ uniformemente e posicionar o ponto no círculo na direção desse ângulo. As coordenadas precisas do novo ponto serão então $(X_1, Y_1) = (\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1))$. Procedendo indutivamente, a posição após o n-ésimo salto estará em um círculo de raio 1 centrado em (X_{n-1}, Y_{n-1}), e a escolha do novo ponto é análoga à escolha anteriormente explicada. Podemos então pensar em uma mudança de coordenadas que coloque a origem em (X_{n-1}, Y_{n-1}) e proceder analogamente, de modo que $(X_n, Y_n) = (X_{n-1}, Y_{n-1}) + (\cos(\theta_n), \text{sen}(\theta_n))$.

b) Primeiramente, vejamos quem são X_n^2 e Y_n^2:

$$\begin{aligned}
X_n^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \cos(\theta_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \cos(\theta_i)^2 + \sum_{i \neq j} \cos(\theta_i)\cos(\theta_j), \\
X_n^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \text{sen}(\theta_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \text{sen}(\theta_i)^2 + \sum_{i \neq j} \text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta_j).
\end{aligned}$$

Podemos então calcular $\mathbb{E}[D_n]$ conforme abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_n] &= \mathbb{E}[X_n^2 + Y_n^2] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\cos(\theta_i)^2 + \text{sen}(\theta_i)^2}_{1} + \sum_{i \neq j} \cos(\theta_i)\cos(\theta_j) + \sum_{i \neq j} \text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta_j)\right] \\
&= n + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[\cos(\theta_i)\cos(\theta_j)] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta_j)] \\
&= n + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[\cos(\theta_i)]\mathbb{E}[\cos(\theta_j)] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[\text{sen}(\theta_i)]\mathbb{E}[\text{sen}(\theta_j)],
\end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos que o valor esperado do produto de variáveis aleatórias independentes é o produto dos respectivos valores esperados, resultado aplicável aqui dado que θ_i e θ_j são independentes. Calculemos então tais valores esperados:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\cos(\theta_i)] &= \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\text{sen}(\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{2\pi}(0 - 0) = 0, \\
\mathbb{E}[\text{sen}(\theta_i)] &= \int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta = -\frac{1}{2\pi}\cos(\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = -\frac{1}{2\pi}(1 - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, no cálculo de $\mathbb{E}[D_n^2]$ todos os valores esperados dentro dos somatórios $\sum_{i \neq j}$ são nulos, de modo que $\mathbb{E}[D_n] = n$.