Estatística e Probabilidade - Avaliação Presencial - 2023/02

Prof. Hugo Carvalho

05/12/2023

– CADA ITEM VALE 1 PONTO – 2a) e 2b) VALEM 1,5 – TODAS AS CONTAS SÃO SIMPLES –

Questão 1: Um time de mergulhadores irá procurar por um navio naufragado em determinada região. Supõe-se, antes de qualquer busca ser realizada, que a probabilidade dos destroços de fato estarem nessa região é de $1/2$, e que, os destroços de fato estando nessa região, os mergulhadores serão capazes de encontrá-lo com probabilidade de $3/4$. Com base nisso, faça o que se pede abaixo:

a) Chame de A o evento "os destroços estão na região" e de B o evento "os destroços são encontrados nessa região". Descreva em uma frase curta e calcule as probabilidades dos seguintes eventos: A, A^c, $B|A$, $B^c|A$, $B|A^c$ e $B^c|A^c$.
Dica: Essas probabilidades ou estão no enunciado, ou são facilmente obtidas pela interpretação, ou são rapidamente calculadas usando propriedades que vimos no curso. Nenhuma grande conta é necessária aqui!

b) Calcule a probabilidade de que os destroços sejam encontrados nessa região.

c) Após uma busca na região, nenhum destroço foi encontrado. Com base nessa nova informação, atualize a probabilidade dos destroços de fato estarem nessa região.

Questão 2: No sistema eletrônico de um ônibus espacial há um determinado componente, fundamental e extremamente frágil, que tem tempo de funcionamento exponencialmente distribuído com média de dois dias. Só há um de tal componente no sistema, de modo que ele precisa ser trocado assim que dá defeito. Assuma que a substituição de um componente estragado por um novo é instantânea. Com base nessa informação, faça o que se pede abaixo.

a) Como cada componente funciona, em média, por dois dias, em uma missão espacial de 100 dias é sugerido que sejam levados apenas 50 componentes, assumidos serem independentes. Denote por $T_1, \dots, T_{50}$ o tempo de vida de cada um desses componentes. Usando o Teorema Central do Limite calcule a probabilidade de que essa quantidade de componentes seja insuficiente para os 100 dias da missão.
Dica: A quantidade de componentes ser insuficiente significa que eles irão durar, no total, menos do que o tempo total da missão. Você precisará de uma probabilidade referente à distribuição normal cujo valor você já sabe :-)

b) No contexto do item a), quantos dias deveria ter a missão para garantir que 50 componentes sejam suficientes, com uma probabilidade de 99,9%?
Obs.: Se $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, então $\mathbb{P}(Z \geq -3) = 0{,}999$. Aproxime, na cara de pau, $\sqrt{50} \approx 7$.

c) Assumindo que o ônibus espacial possa carregar uma quantidade infinita de tais componentes, seja X o número desses componentes utilizados por dia no ônibus espacial. Argumente que X tem distribuição de Poisson e encontre o seu parâmetro.
Dica: A argumentação é simples, envolvendo a relação entre a Poisson e a Exponencial.

d) Ainda no contexto do item c), seja agora Y o número de tais componentes que serão utilizados ao longo de toda a missão de 100 dias. Argumente que Y também tem distribuição de Poisson e encontre o seu parâmetro.
Dica: Idem ao item c).

Questão 3: A variável aleatória X tem *distribuição de Pareto* se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} C/x^2, & \text{se } x \geq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com base nisso, faça o que se pede abaixo.

a) Encontre o valor de C para que f_X seja de fato uma função densidade de probabilidade.

b) A *mediana* de uma variável aleatória X é um número μ tal que $\mathbb{P}(X \leq \mu) = \mathbb{P}(X \geq \mu) = 1/2$. Encontre a mediana de X.

c) Alguém quer te convidar para participar de um comércio no sistema *marketing multinível*, prometendo um lucro médio anual de $\mathbb{E}[X]$. Porém, para ingressar nesse negócio você precisa pagar uma taxa inicial de 10% do lucro médio anual, dividido em suaves prestações mensais ao longo dos próximos 10 anos. Calcule $\mathbb{E}[X]$ e diga se esse negócio parece vantajoso.

Questão 4: [QUESTÃO BÔNUS] Dizemos que Z tem *distribuição de Laplace* se $|Z|$ tem distribuição Exponencial de média 1. Calcule a função geradora de momentos de Z.