# Estatística e Probabilidade - Teste 04 (Gabarito) - 2024/01

Prof. Hugo Carvalho

11/07/2024

**Questão 1:**

a) Conforme no enunciado, seja $X$ o tempo de viagem do ponto de partida até o destino e seja $t$ a antecedência com a qual se parte para o compromisso. Se $X \geq t$, então chega-se adiantado ao compromisso, pois o deslocamento é menor que o tempo até o compromisso; nesse caso, o custo é o dobro do tempo com o qual se chega adiantado, ou seja $2(t - X)$, o que está de acordo com a função. Agora, se $X \geq t$, temos que o tempo de deslocamento é maior que a antecedência, de modo que chegou-se atrasado, incorrendo em um custo de cinco vezes o tempo de atraso, dado então por $5(X - t)$. Essa combinação é exatamente a expressão da função informada no enunciado.

b) Como $X \sim \text{Unif}([0, 60])$, temos que sua função densidade de probabilidade vale $1/60$ para $0 \leq x \leq 60$ e 0 caso contrário, de modo que a integral irá somente de 0 até 60. Temos então que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_t(X)] &= \int_0^\infty C_t(x) f_X(x)\ dx \\
&= \int_0^t 2(t-x)\frac{1}{60}\ dx + \int_t^{60} 5(x-t)\frac{1}{60}\ dx \\
&= \frac{2}{60}\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=t} + \frac{5}{60}\left(\frac{x^2}{2} - tx\right)\Bigg|_{x=t}^{x=60} \\
&= \frac{2}{60}\left(t^2 - \frac{t^2}{2}\right) + \frac{5}{60}\left[\left(\frac{60^2}{2} - 60t\right) - \left(\frac{t^2}{2} - t^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{60}t^2 + \frac{5}{60}\left(\frac{3600}{2} - 60t + \frac{t^2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Seguindo a dica, não simplificaremos mais a expressão obtida.

c) A expressão encontrada no item b) para $\mathbb{E}[C_t(X)]$ é uma função de $t$, dada por um polinômio do segundo grau com coeficiente positivo associado a $t^2$. Portanto, essa parábola tem concavidade para cima e somente um ponto crítico, que é o seu mínimo global. A fim de encontrá-lo, derivamos e igualamos a zero a expressão obtida no item b):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbb{E}[C_t(X)] &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{60}t^2 + \frac{5}{60}\left(\frac{3600}{2} - 60t + \frac{t^2}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{60}2t + \frac{5}{60}(-60 + t) \\
&= \frac{1}{60}(7t - 300) = 0 \\
&\Rightarrow t = \frac{300}{7} \approx 42{,}86.
\end{aligned}
$$

Portanto, de modo a minimizar o custo médio, deve-se partir para o compromisso com uma antecedência de aproximadamente 43 minutos, arredondando um pouco para cima. Agora, façamos a interpretação do resultado obtido. A média de uma distirbuição uniforme contínua no intervalo $[0, 60]$ é 30, indicando que o tempo médio de deslocamento é de 30 minutos. Porém, repare que há uma assimetria nos custos referentes a chegar atrasado ou adiantado ao compromisso: é mais "grave" chegar atrasado do que chegar adiantado. Dessa forma, o resultado obtido sugere que a partida com uma antecedência maior que o tempo médio de deslocamento, prezando por chegar adiantado e não atrasado.

**Questão 2:** Sejam $X_1, \dots, X_n$ as medições do astrônomo variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $\mathbb{E}[X_i] = d$ (a distância real até a estrela) e $\mathbb{V}(X_i) = 4$. A distância (numérica) da distância estimada para a distância (até a estrela) correta é dada por $|S_n/n - d|$, onde $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Queremos que tal quantidade seja menor que ou igual a 1 com 99,9% de certeza, ou seja, queremos garantir que

$$\mathbb{P}(|S_n/n - d| \leq 1) = 0{,}999.$$

Desenvolvamos então tal expressão para poder utilizar o Teorema Central do Limite, já que a distribuição das variáveis aleatórias $X_i$ é desconhecida. Denote por $Z$ uma variável aleatória com distribuição normal padrão.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|S_n/n - d| \leq 1) &= \mathbb{P}(-1 \leq S_n/n - d \leq 1) \\
&= \mathbb{P}(-n \leq S_n - nd \leq n) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{n}{2\sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{S_n - nd}{2\sqrt{n}}}_{Z_n} \leq \frac{n}{2\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{n}{2\sqrt{n}} \leq Z_n \leq \frac{n}{2\sqrt{n}}\right) \\
&\approx \mathbb{P}\left(-\frac{n}{2\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{n}{2\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{n}{2\sqrt{n}}\right) - \mathbb{P}\left(Z \leq -\frac{n}{2\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{n}{2\sqrt{n}}\right) - \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{n}{2\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{n}{2\sqrt{n}}\right) - \left[1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{n}{2\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= 2\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{n}{2\sqrt{n}}\right) - 1 \\
&= 0{,}999.
\end{aligned}$$

Rearranjando a última igualdade acima, temos que

$$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{n}{2\sqrt{n}}\right) = 0{,}9995,$$

de modo que $\frac{n}{2\sqrt{n}} = 3{,}3$. Resolvendo para $n$, temos que $n = (6{,}6)^2 = 43{,}56$, de modo que são necessárias ao menos 44 observações para garantir o que o astrônomo deseja.