Estatística e Probabilidade - Avaliação Presencial 01 - 2022/01

Prof. Hugo Carvalho

28/06/2022

Questão 1: *(Questão tranquila, para começar bem!)* Sejam X e Y as notas de um estudante do Ensino Médio em testes de Matemática e Física, respectivamente. Suponha que, considerando todos os estudantes do Ensino Médio do Brasil, X e Y sejam variáveis aleatórias com a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & \text{para } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Faça o que se pede abaixo:

a) X e Y são independentes? Justifique.

b) Se a pontuação de um estudante no teste de Física é de 2/3, qual é a probabilidade de que sua pontuação no teste de Matemática esteja acima de 0,8?

Questão 2: *(Distribuição de Poisson)* O objetivo dessa questão é deduzirmos as probabilidades associadas à distribuição de Poisson, que já usamos diversas vezes mas em cuja fórmula simplesmente acreditamos. Para fazer tal procedimento, motivemos com um exemplo prático: um comerciante sabe que entram, em média, $\lambda = 4{,}5$ consumidores por hora em sua loja, porém ele deseja refinar tal informação, e conseguir extrapolar para uma distribuição de probabilidade completa; ou seja, o comerciante deseja saber a probabilidade de, em dado intervalo de uma hora, chegarem 0, 1, 2, 3, etc., consumidores em sua loja. Denote, muito criativamente, por X o número de consumidores que chegam na loja em tal intervalo de uma hora.

A fim de realizar tal procedimento ele divide uma hora em $n = 3.600$ períodos contíguos de um segundo, de modo que a taxa de chegada de consumidores agora é de $p = 4{,}5/3.600 = 0{,}00125$ consumidor por segundo. Com base nisso, ele assume que em cada segundo ou chega um consumidor (com probabilidade 0,00125) ou não chega nenhum consumidor (com probabilidade $1 - 0{,}00125$). Dessa forma, uma primeira proposta para a probabilidade de chegarem exatamente x consumidores em dada hora é dada por

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{3600}{x}(0{,}00125)^x(1 - 0{,}00125)^{3600-x}.$$

a) Quais hipóteses são necessárias para que o modelo proposto pelo comerciante seja válido? Se valendo de tal informação, diga o que você acha de tal modelo, ponderando vantagens e desvantagens (tanto teóricas quanto computacionais). Finalmente, fale sobre a relação custo/benefício do comerciante alterar o modelo aumentando o valor de n (e por consequência, diminuindo o valor de p). Note que nesse caso a constante λ ficará inalterada.

b) Assumindo um contexto onde n é "grande" e portanto $p = \lambda/n$ é "pequeno", argumente (intuitivamente, sem fazer contas) que $\mathbb{P}(X = x+1)$ e $\mathbb{P}(X = x)$ devem ter alguma relação sistemática relativamente simples. Depois, mostre que

$$\frac{\mathbb{P}(X = x+1)}{\mathbb{P}(X = x)} \approx \frac{np}{x+1},$$

explicitando e justificando as aproximações que você precisou fazer para concluir tal resultado.

c) Reescrevendo a aproximação do item b) como

$$\mathbb{P}(X = x+1) = \frac{\lambda}{x+1}\mathbb{P}(X = x),$$

(onde morremos um pouquinho por dentro ao trocar o $\approx$ por $=$) substitua recursivamente valores de x para chegar às expressões

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = 0)\frac{\lambda^x}{x!},$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots$.

d) Utilize o fato de que $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$ para encontrar o valor de $\mathbb{P}(X = 0)$, e concluir então que

$$\mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!},$$

para $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Eis o modelo de Poisson! :-) Para encerrar, aponte vantagens e desvantagens de tal modelo em relação ao modelo proposto pelo comerciante no enunciado da questão.

Questão 3: *(Relação da Poisson com a Exponencial)* Para fechar com chave de ouro, vamos relacionar a Poisson (nossa distribuição discreta preferida) com a Exponencial (nossa segunda distribuição contínua preferida). Lembremos que a função densidade de probabilidade de uma distribuição Exponencial de parâmetro λ é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para fazer tal relação, retornemos à interpretação da questão anterior. Agora, o comerciante está interessado em saber qual é a distribuição de probabilidade do tempo entre a chegada de dois consumidores consecutivos em sua loja. Para deduzir isso, siga o roteiro abaixo.

a) Assuma que precisamente no instante de tempo $t_0 = 0$ um consumidor chegou na loja. Agora fixe $t > 0$ (ainda medido em horas) e denote por X_t o número de consumidores que chegam à loja no intervalo subsequente até o tempo t. Denote por Y o tempo entre a chegada de dois consumidores consecutivos na loja. Argumente que os eventos

$$\{Y \leq t\} \text{ e } \{X_t \geq 1\}$$

são iguais, e conclua, consequentemente, que

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X_t \geq 1).$$

b) Argumente, com base na intuição da questão anterior, que X_t tem distribuição de Poisson com parâmetro λt e conclua que

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

c) Finalmente, argumente que o resultado obtido no item b) é a função de probabilidade acumulada da variável aleatória Y, e a partir dela, obtenha a função densidade de probabilidade de Y.