

Estatística e Probabilidade - Projeto 01 - 2022/01

Prof. Hugo Carvalho

14/06/2022

– INSTRUÇÕES – LEIAM ATENTAMENTE! –

- A data limite de entrega da avaliação é terça-feira 28/06/2022 às 23h59. Avaliações entregues após esse prazo serão desconsideradas.
- A entrega deve ser feita exclusivamente através do Google Classroom, da seguinte forma:
 - Dentro da turma no Google Classroom, clique em “Atividades”
 - No tema “Projetos”, clique em “Projeto 01” e em seguida em “Ver atividade”
 - No canto superior direito, clique em “+ Adicionar ou criar” e em seguida clique em “Documentos”
 - Você deverá fazer o trabalho no documento que irá abrir em uma nova guia. O título do documento será automaticamente “SEU NOME - Projeto 01”. Por favor não o altere!
 - Você pode fechar essa guia para retomar o trabalho depois. O documento é salvo automaticamente pelo Google Docs, caso haja conexão com a Internet. Fique atento/a à informação de “Salvando...” ou “Alterações salvas no Drive” no topo da página, logo após fazer qualquer alteração no texto.
 - Caso você queira fechar o trabalho e retomá-lo depois, para voltar do ponto que parou vá em “Atividades > Projetos > Projeto 01 > Ver atividade”. No canto superior direito da tela, acima do botão “+ Adicionar ou criar”, você verá um arquivo chamado “SEU NOME - Projeto 01”. Clique nele, e continue do ponto em que parou.
 - Para entregar o projeto, abra o documento que o contém (conforme procedimento explicado no ponto acima), e no canto superior direito clique em “ENTREGAR” (o texto estará em uma caixa cinza, mas ele é clicável).
 - Na tela a seguir clique em “Entregar” para confirmar a entrega do trabalho.
 - Se você se arrependeu e quiser fazer outra entrega, basta abrir a atividade, no canto superior direito clique em “Cancelar envio” e confirme clicando novamente em “Cancelar envio” na janela que irá abrir. Você terá acesso ao seu documento de onde parou e poderá fazer a entrega novamente até o prazo determinado.
- O corpo do texto deve estar escrito em tipografia Georgia ou EB Garamond, de tamanho 11, com espaçamento de 1,5 e texto justificado.
- Trechos de código devem estar escritos em tipografia Courier New, de tamanho 11, com espaçamento simples e texto alinhado à esquerda. Não é necessário estar com coloração como é usual nos editores de texto.
- Caso seja necessário inserir equações, utilize o módulo de equações do Google Docs (disponível em “Inserir > Equação”).
- A troca de conhecimento na realização da avaliação é permitida e encorajada: ciência se faz com colaboração, e devemos seguir esse espírito aqui. Porém, cada aluno deverá ter a sua própria resolução, e cópias ou outras ilegalidades serão severamente punidas com a anulação da avaliação para o(s) aluno(s) suspeito(s).
- Todos os passos de sua resolução devem ser devidamente justificados.
- Ao entregar essa avaliação, você afirma ter lido e estar de acordo com essas regras, comprometendo-se a cumpri-las.

Questão 1: Considere que está inscrito em um círculo um dodecágono regular cujos vértices i estão enumerados de 0 até 11. Suponha que uma partícula move-se ao longo dos vértices do polígono, e que a cada segundo ela dá um passo no sentido horário ou anti-horário, com igual probabilidade. Matematicamente, se X_t é a posição da partícula após passados t segundos, então temos que

$$\mathbb{P}(X_t = i + 1 \mid X_{t-1} = i) = \mathbb{P}(X_t = i - 1 \mid X_{t-1} = i) = \frac{1}{2},$$

para todo $i = 0, \dots, 11$, considerando $i + 1 \equiv 0$ se $i = 11$ e $i - 1 \equiv 11$ se $i = 0$.

Suponha que a partícula está inicialmente no vértice 0 (ou seja, $X_0 = 0$), e movimenta-se de acordo com a regra acima, por tempo indeterminado. Com base nisso, faça o que se pede abaixo.

- Seja Y a variável aleatória que representa o número de passos feitos pela partícula até que todos os vértices do polígono sejam visitados. Construa um algoritmo para simular valores segundo tal variável aleatória. Note que para isso você também precisará construir um algoritmo para simular do processo $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$.
- Através do algoritmo construído no item a), obtenha uma aproximação para o valor esperado de Y . Para isso, simule uma grande quantidade y_1, \dots, y_N de valores segundo Y , digamos $N = 5.000$, e aproxime $\mathbb{E}[Y]$ por
$$\overline{y_N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n.$$
- Justifique porque o procedimento do item b) funciona para aproximar o valor esperado de Y .
- Seja Z a variável aleatória que representa a posição da partícula após transcorrido um tempo suficientemente longo, ou seja, no limite quando $t \rightarrow \infty$. Encontre a função massa de probabilidade de Z .

Questão 2: Um inseto se move aleatoriamente em um tabuleiro de tamanho 3×3 de acordo com a seguinte regra: a cada movimento ele tem igual probabilidade de saltar para alguma das casas adjacentes àquela ocupada, onde **não** considera-se casas na diagonal como adjacentes; porém, nas casas dos cantos superior esquerdo e inferior direito há uma armadilha que imobiliza o inseto. Com base nessa descrição, faça o que se pede abaixo.

- Justifique que uma cadeia de Markov é um modelo adequado para descrever tal situação, e escreva quem é a matriz de probabilidades de transição de tal processo.
- Construa um algoritmo para simular a posição do inseto, onde é possível selecionar a casa do tabuleiro onde o inseto localiza-se inicialmente.
- Utilizando o algoritmo do item b), encontre uma aproximação para as probabilidades do inseto ser capturado por cada uma das duas armadilhas do tabuleiro. Note que tais quantidades serão funções da casa inicialmente ocupada pelo inseto.
- Também usando o algoritmo do item b), encontre uma aproximação para o número médio de saltos que o inseto dá antes de ser capturado por qualquer uma das duas armadilhas. Analogamente ao item c), isso também será uma função da casa inicialmente ocupada no tabuleiro. Qual casa inicial maximiza o número médio de saltos do inseto antes de ser capturado?
- Assumindo que a posição inicial do inseto é a casa no canto inferior esquerdo, quantas visitas ele faz, em média, à casa central, antes de ser capturado por alguma das duas armadilhas?