Estatística e Probabilidade - Teste 02 - 2024/01

Prof. Hugo Carvalho

04/06/2024

Questão 1:

a) O erro "detectar 1 quando 0 foi enviado" ocorre quando o valor -2 é enviado a partir de A e um valor superior a 1 é observado em B; ou seja, quando $-2+N \geq 1$, o que acontece quando $N \geq 3$. Analogamente, o erro "detectar 0 quanto 1 foi enviado" acontece quando o valor 2 é enviado a partir da A e um valor inferior a 1 é recebido em B; ou seja, quando $2+N < 1$, o que acontece quando $N < -1$. Com base nisso, podemos calcular as suas probabilidades:

$$\mathbb{P}(\text{detectar 1 quando 0 foi enviado}) = \mathbb{P}(N \geq 3) = \int_3^\infty e^{-2z}\, dz = -\frac{1}{2}e^{-2z}\Big|_{z=3}^{z=\infty} = \frac{1}{2}e^{-6} \approx 0{,}001.$$

$$\mathbb{P}(\text{detectar 0 quando 1 foi enviado}) = \mathbb{P}(N < -1) = \int_{-\infty}^{-1} e^{2z}\, dz = \frac{1}{2}e^{2z}\Big|_{z=-\infty}^{z=-1} = \frac{1}{2}e^{-2} \approx 0{,}05.$$

b) Considerando "enviar 0 e receber 0" como um "sucesso" e "enviar 0 e receber 1" como um "fracasso", podemos modelar o número de erros na recepção dessa mensagem específica através da variável aleatória X, com distribuição binomial de parâmetros $n = 1.000$ (o tamanho da mensagem) e $p = 0{,}001$ (a probabilidade de um 0 ser interpretado como 1). Porém, devido à função massa de probabilidade da binomial, fazer contas com esses parâmetros pode ser inviável, pois teríamos que calcular quantidades envolvendo 1.000! e potências grandes de 0,001 ou 0,999. Assim, faz sentido aproximar X por uma variável aleatória Y, com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = np = 1$.

c) Utilizando a variável aleatória exata $X \sim \text{Bin}(1.000; 0{,}001)$, temos que o sistema precisa de manutenção em um determinado dia específico se ao menos um erro é observado, ou seja, $X \geq 1$. Calculemos essa probabilidade:

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \binom{1.000}{0}(0{,}001)^0(0{,}999)^{1.000} = 1 - (0{,}999)^{1.000} \approx 0{,}6.$$

Agora, utilizando a variável aleatória aproximada $Y \sim \text{Poi}(1)$, queremos calcular $\mathbb{P}(Y \geq 1)$, dada por:

$$\mathbb{P}(Y \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - e^{-1}\frac{1^0}{0!} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}6.$$

d) Agora, pensemos que "um dia sem necessidade de manutenção" é um "fracasso", e que "um dia com manutenção" é um "sucesso". Queremos então contar a quantidade de fracassos até o primeiro sucesso, o que é bem descrito por uma variável aleatória geométrica. Para o parâmetro p, colocamos a probabilidade de "sucesso", ou seja, $p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Denotando por Z essa variável aleatória, queremos calcular a probabilidade do evento $\{Z = 2\}$, pois ele descreve que dois dias passaram-se sem necessidade de manutenção, sendo ela necessária somente no terceiro. Temos que:

$$\mathbb{P}(Z = 2) = (0{,}4)^2(0{,}6) = \left(\frac{4}{10}\right)^2 \frac{6}{10} = \frac{96}{1.000} = 0{,}096.$$

e) O critério a seguir é simétrico em relação aos erros:

Se $R \geq 0$, então conclui-se que 1 foi enviado;

Se $R < 0$, então conclui-se que 0 foi enviado.

Agora, o erro "detectar 1 quando 0 foi enviado" ocorre quando o valor -2 é enviado a partir de A e um valor superior a 0 é observado em B; ou seja, quando $-2+N \geq 0$, o que acontece quando $N \geq 2$. Analogamente, o erro "detectar 0 quanto 1 foi enviado" acontece quando o valor 2 é enviado a partir da A e um valor inferior a 0 é recebido em B; ou seja, quando $2+N < 0$, o que acontece quando $N < -2$. Pela simetria da variável aleatória

N em torno de 0, temos que $\mathbb{P}(N < -2) = \mathbb{P}(N \geq 2)$, de modo que só é necessário calcular uma delas. Temos então que:

$$\mathbb{P}(N \geq 2) = \int_{2}^{\infty} e^{-2z}\ dz = -\frac{1}{2}e^{-2z}\bigg|_{z=2}^{z=\infty} = \frac{1}{2}e^{-4} \approx 0{,}009.$$