Estatística e Probabilidade - Teste 03 - 2024/01

Prof. Hugo Carvalho

04/07/2024

– TODAS AS CONTAS SÃO SIMPLES – FORMULÁRIO E APROXIMAÇÕES NO QUADRO –

Questão 1: Uma partícula se move aleatoriamente em uma linha reta, realizando saltos sucessivos de uma unidade para a direita ou para a esquerda com igual probabilidade. Assuma, por simplicidade, que a posição inicial da partícula é 0, e que as possíveis posições dessa partícula são descritas pelos números inteiros. Com base nisso, faça o que se pede abaixo.

a) **(1,0)** Seja S_n a posição da partícula após n saltos. Argumente que S_n pode ser escrita como

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

onde as variáveis aleatórias X_i são independentes e identicamente distribuídas, satisfazendo

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2.$$

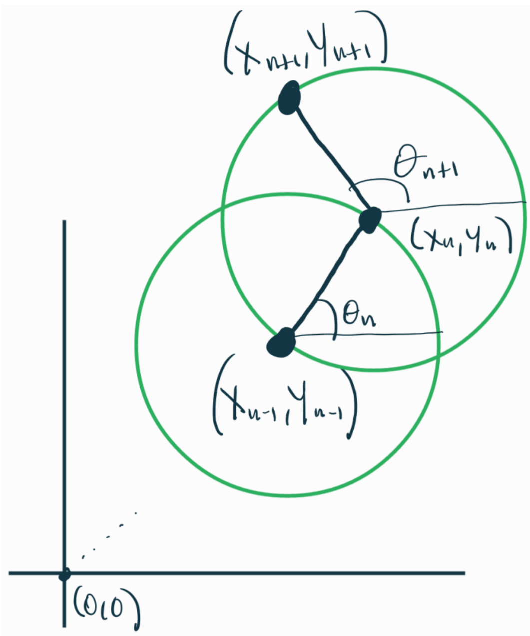
Mostre também que $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e $\mathbb{V}(X_i) = 1$.

b) **(1,0)** Após a partícula realizar $n \geq 1$ saltos, calcule a sua posição esperada e a sua variância. Interprete o resultado obtido.

c) **(2,0)** Após a partícula realizar $n = 100$ saltos, aproxime a probabilidade de que sua distância ao ponto inicial seja de 30 ou mais unidades.
Atenção: Não esqueça que essa distância deve ser medida tanto "para a direita" quanto "para a esquerda".

d) **(2,0)** Quantos saltos são necessários no mínimo (aproximadamente) para garantir que há 0,1% de chance da partícula estar numa posição maior que ou igual à 50?
Atenção: "Posição", e não "distância ao ponto inicial".

Questão 2: Agora uma partícula se move aleatoriamente no plano, da seguinte forma: a posição inicial da partícula é na origem, isto é, $(X_0, Y_0) = (0, 0)$; após n saltos, estando na posição (X_n, Y_n), a posição no próximo instante de tempo, denotada por (X_{n+1}, Y_{n+1}), está a uma unidade de distância da posição anterior, em uma direção aleatória θ_{n+1} uniformemente escolhida. Para te auxiliar, a figura abaixo ilustra dois passos dessa partícula: o salto da posição $n-1$ para a posição n e o salto da posição n para a posição $n+1$. Com base nisso, faça o que se pede abaixo.



a) **(2,0)** Argumente que as coordenadas da posição da partícula no tempo n podem ser escritas como:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \cos(\theta_i)$$
$$Y_n = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen}(\theta_i),$$

onde $\theta_1, \ldots, \theta_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme contínua no intervalo $[0, 2\pi)$.

b) **(2,0)** O quadrado da distância da partícula até a origem no tempo n é denotado por

$$D_n^2 = X_n^2 + Y_n^2.$$

Calcule $\mathbb{E}[D_n^2]$.