Exemplo da distribuição de Poisson
Estatística e Probabilidade para Ciência da Computação

Prof. Hugo Carvalho

22/05/2024

Questão 1: O número de partículas emitidas por uma fonte radioativa durante um período de uma hora é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ, a princípio desconhecido. É sabido que a probabilidade de nenhuma partícula ser emitida durante esse intervalo de tempo é de 0,673%. Além disso, um dispositivo contador é utilizado para registrar a quantidade de partículas emitidas em um determinado período de uma hora. Faça o que se pede abaixo:

a) Se mais de 10 partículas são emitidas nesse período, o contador é incapaz de registrar o excesso, e registra simplesmente 10. Qual é a probabilidade do limite do contador ser excedido em um período de uma hora, na precisão de duas casas decimais?

b) Seja Y a variável aleatória que representa o número de partículas registradas pelo dispositivo contador. Qual é a distribuição de probabilidade de Y?
Basta indicar as fórmulas, não é necessário colocar a resposta em valores numéricos.

c) Sabemos que o tempo T entre duas emissões consecutivas, medido em horas, é exponencialmente distribuído, com parâmetro λ. Se em 20 minutos após uma emissão nenhuma outra partícula foi emitida, qual a probabilidade de que precisamos esperar mais meia hora pela próxima emissão?

Gabarito:

a) Seja X o número de partículas emitidas pela fonte radioativa em um período de uma hora. Primeiramente calculemos o parâmetro λ. Temos que

$$0,00673 = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = -\ln(0,00673) = 5{,}00,$$

na precisão de duas casas decimais.

A probabilidade desejada é então dada por:

$$\mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 1 - \sum_{x=0}^{10} \mathbb{P}(X = x) = 1 - \sum_{x=0}^{10} e^{-5}\frac{5^x}{x!} = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 = 1\%.$$

b) Note primeiramente que Y assume os valores $0, 1, 2, \ldots, 10$. Se $y = 0, 1, 2, \ldots, 9$, então

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = y) = e^{-5}\frac{5^y}{y!}.$$

Se $y = 10$, temos que

$$\mathbb{P}(Y = 10) = \mathbb{P}(X \geq 10) = 1 - \mathbb{P}(X < 10) = 1 - \sum_{x=0}^{9} e^{-5}\frac{5^x}{x!}.$$

c) Pela propriedade da perda de memória da exponencial, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > 5/6 | T > 1/3) &= \mathbb{P}(T > 1/2) \\
&= \int_{1/2}^{\infty} 5e^{-5t}\, dt \\
&= 0{,}08 \\
&= 8\%.
\end{aligned}$$