Estatística e Probabilidade - Avaliação Presencial 01 - 2022/02

Prof. Hugo Carvalho

08/11/2022

Questão 1: Considere a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} C\sin(x), & \text{se } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com base nela, faça o que se pede abaixo:

a) Encontre o valor de C para que f seja a função densidade de probabilidade de alguma variável aleatória, criativamente denotada por... X. *(0,5)*

b) Calcule a média de X. *(0,5)*

c) Calcule a variância de X. *(1,0)*

d) Calcule a função de probabilidade acumulada de X e faça um esboço de seu gráfico. *(1,0)*

Questão 2: Foi feito o loteamento de uma grande área em terrenos retangulares. Para cada terreno, seu comprimento e sua largura, ambos em quilômetros, podem ser iguais a 1 km, 2 km ou 3 km. Denote por X o comprimento e Y a largura de um terreno sorteado ao acaso. A tabela a seguir fornece (apenas parcialmente) a distribuição conjunta de X e Y, variáveis aleatórias supostas independentes, bem como informações (também parciais) sobre as suas distribuições marginais:

	Y			
X	1	2	3	$p_X(x)$
1	0,35		0,14	
2				0,20
3	0,05			
$p_Y(y)$		0,30		

Com base nessa informação, faça o que se pede abaixo:

a) Preencha a tabela acima, calculando o valor de cada probabilidade omitido na tabela.
Obs.: Caso haja mais de uma forma de preencher a tabela, não se preocupe. Apenas fique alerta para que $\sum_{x,y} p_{X,Y}(x,y) = \sum_x p_X(x) = \sum_y p_Y(y) = 1$ *e que a tabela não tenha nenhum valor negativo.* *(1,0)*

b) Calcule a largura média e o comprimento médio de cada terreno. *(0,5)*

c) Calcule a probabilidade condicional de que a área do terreno seja igual a 4 km^2 dado que o perímetro do terreno é igual a 8 km. *(1,0)*
Dica: Crie, em função de X e de Y, variáveis aleatórias que descrevem a área e o perímetro de um dado terreno.

Questão 3: Em uma determinada fábrica de celulares há uma média de um celular com defeito a cada lote. Faça o que se pede abaixo:

a) Calcule a probabilidade de que em um lote específico nenhum celular esteja com defeito. *(0,5)*

b) Calcule a probabilidade de que em um lote específico pelo menos cinco celulares estejam com defeito. *(1,0)*

c) Denotando o resultado obtido no item b) por p, calcule agora a probabilidade de que em um ano de produção (ou seja, 300 lotes, segundo a empresa) haja ao menos um lote com pelo menos cinco celulares defeituosos. *(1,0)*

d) Discuta, qualitativamente, o valor obtido no item c). Mais especificamente, sem encontrar o seu valor numérico específico, você espera que tal número é “pequeno” ou “grande”? Justifique. *(1,0)*

Questão 4: Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$. Vimos em aula que vale a seguinte igualdade:

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq t) = \mathbb{P}(X \geq s), \text{ para todos } s, t > 0.$$

Interprete o que tal igualdade significa e discuta a sua razoabilidade, à luz de alguma aplicação da distribuição exponencial. *(1,0)*

Questão 5: (Questão bônus) O objetivo desta questão é introduzir e trabalhar a *distribuição Geométrica*, uma importante distribuição discreta. Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição Geométrica com parâmetro $0 < p < 1$ se a sua função massa de probabilidade é dada por

$$\mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^x, \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Com base nisso, faça o que se pede abaixo.

a) Argumente que uma interpretação razoável para tal distribuição é a seguinte: "$\mathbb{P}(X = x)$ nos dá a probabilidade de se observar exatamente x fracassos até a obtenção do primeiro sucesso em réplicas idênticas e independentes de um mesmo experimento que tem probabilidade de sucesso igual a p". *(1,0)*

b) Derive em relação à variável p os dois lados da igualdade $\sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^x = 1$ e conclua que $\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{p}$. *(1,0)*

c) Um jogo de Mega-Sena onde você aposta em seis dezenas custa R$ 4,50. Assumindo que você irá jogar nas mesmas seis dezenas duas vezes por semana, calcule o tempo médio e o seu gasto médio com os jogos até ganhar pela primeira vez. *(1,0)*