Cálculo das Probabilidades II - Lista 1 - Gabarito - 2021/02

Prof. Hugo Carvalho

28/01/2022

Questão 1: Provemos que as três propriedades de uma σ-álgebra são satisfeitas:

i) $\Omega \in \mathcal{G}$, pois $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

ii) Tome $A \in \mathcal{G}$, e mostremos que $A^c \in \mathcal{G}$. De fato,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbb{P}(A) = 0 \\ 0, & \text{se } \mathbb{P}(A) = 1. \end{cases}$$

Portanto, vemos que A^c satisfaz às condições da definição de $\mathcal{G}$, de modo que $A^c \in \mathcal{G}$.

iii) Tome $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}$, e queremos mostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$. Dividamos em dois casos:

<u>$\mathbb{P}(A_n) = 0, \forall n$:</u> Nesse caso, temos que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0,$$

de modo que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$, pois sua probabilidade é nula.

<u>Existe pelo menos um n_0 tal que $\mathbb{P}(A_{n_0}) = 1$:</u> Nesse caso, temos que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \mathbb{P}(A_{n_0}) = 1,$$

onde usamos o fato que $A_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dessa forma, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$, pois sua probabilidade é 1.

Questão 2:

a) Denotando `Cara` por K e `Coroa` por C, temos que os eventos A e B podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} A &= \{KKK, CKK, KCK, KKC\}, \\ B &= \{KKK, CCC\}. \end{aligned}$$

Utilizando a independência entre os lançamentos, temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= p^3 + 3p^2(1-p), \\ \mathbb{P}(B) &= p^3 + (1-p)^3, \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= p^3. \end{aligned}$$

Para que os eventos A e B sejam independentes, devemos ter que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, ou seja,

$$p^3 = [p^3 + 3p^2(1-p)] \times [p^3 + (1-p)^3]$$

Para encontrar as soluções de tal equação, podemos expandir o lado direito e simplificar a equação, tendo então um polinômio para se encontrar as raízes. Isso pode ser feito fatorando-o e notando que as raízes são $p = 0$, $p = 1$ e $p = 1/2$. Dessa forma, somente para tais valores de p temos que os eventos A e B são independentes.
Obs.: Perdão, mas para ganhar tempo não quis escrever as contas todas... são um pouco longas e chatinhas de se escrever em LaTeX.

b) *(Modelo de resposta)* Consideremos, por exemplo, o caso $p = 1/2$. Dessa forma, temos que $\mathbb{P}(A) = 1/2$, e $\mathbb{P}(B) = 1/4$, ou seja, os eventos A e B "ocupam", respectivamente, metade e $1/4$ do espaço amostral. Condicionando em B, o evento $A \cap B$ ainda "ocupa" a mesma fração do novo espaço amostral B; e condicionando em A o evento $B \cap A$ ainda " ocupa" também a mesma fração do novo espaço amostral A. Isso ilustra, intuitivamente, que quando temos $p = 1/2$ os eventos são independentes. Raciocínio análogo vale para $p = 0$ e $p = 1$.

Assuma agora que $p = 1/4$, por exemplo. Então ao condicionarmos no evento B, é muito mais provável que tenhamos observado CCC do que KKK. Assim, ao olharmos para a probabilidade do evento $A|B$, temos intuitivamente que será menos provável que observemos KKK do que algum dos seus outros componentes.

Questão 3:

a) Denote por D a variável aleatória que codifica a distância da Terra até a estrela. Previamente à realização de qualquer experimento, temos que $D \sim \mathcal{N}(150, 25^2)$. Seja X a variável aleatória que descreve o valor observado pelo astrônomo, juntamente com o erro da observação. Uma vez que a distância da Terra até a estrela é um valor fixo na natureza e usamos a variável aleatória D somente para codificar nossa ignorância de tal quantidade, podemos escrever que $X|D \sim \mathcal{N}(140, 20^2)$. Dessa forma, conhecemos as densidades de probabilidade $f(d)$ e $f(x|d)$, e queremos obter a densidade $f(d|x)$. Pelo Teorema de Bayes, temos que:

$$
\begin{aligned}
f(d|x) &= \frac{f(x|d)f(d)}{f(x)} \\
&\propto f(x|d)f(d) \\
&\propto e^{-\frac{1}{2}(x_1-d)^2/\sigma^2} \times e^{-\frac{1}{2}(d-\mu_0)^2/\sigma_0^2} \\
&= e^{-\frac{1}{2}[(x_1-d)^2/\sigma^2+(d-\mu_0)^2/\sigma_0^2]},
\end{aligned}
$$

onde $x_1 = 140$, $\sigma = 20$, $\mu_0 = 150$ e $\sigma_0 = 25$.

(Há outras formas de fazer o que se segue, e estou transcrevendo aqui a que acredito ser a mais prática) Sabendo, do enunciado, que tal distribuição também deverá ser normal, estudemos então a forma quadrática dada por

$$
\xi(d) = \frac{(x_1 - d)^2}{\sigma^2} + \frac{(d - \mu_0)^2}{\sigma_0^2},
$$

que está dentro do argumento da exponencial. Queremos, portanto, escrevê-la como algo da forma $\dfrac{(d - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + C$, onde C contém termos constantes que não dependam de d. Para encontrar o valor de μ_1, note que ambas as formas quadráticas devem partilhar do mesmo mínimo global, de modo que μ_1 deverá ser o ponto que satisfaz $\xi'(d) = 0$:

$$
\begin{aligned}
\xi'(d) &= -2\frac{x_1 - d}{\sigma^2} + 2\frac{d - \mu_0}{\sigma_0^2} = 0 \\
\Rightarrow \frac{x_1 - d}{\sigma^2} &= \frac{d - \mu_0}{\sigma_0^2},
\end{aligned}
$$

que resolvendo para d nos resulta em $\dfrac{\sigma_0^2 x_1 + \sigma^2 \mu_0}{\sigma_0^2 + \sigma^2}$, e tal será o valor de μ_1. Para encontrar σ_1^2, notemos finalmente que ambas as formas quadráticas devem partilhar da segunda derivada, de modo que,

$$
\begin{aligned}
\xi''(d) &= \frac{2}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma_0^2} = \frac{2}{\sigma_1^2} \\
\Rightarrow \sigma_1^2 &= \frac{\sigma_0^2 \sigma^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2}.
\end{aligned}
$$

Substituindo os valores numéricos, temos $\mu_1 \approx 143{,}09$ anos-luz e $\sigma_1 \approx 15{,}62$ anos-luz.

b) *(Modelo de resposta)* A variável aleatória $D|X$ codifica a distância da Terra até a estrela, após a incorporação de algum dado experimental no modelo teórico. Portanto, a sua moda pode ser interpretada como "a distância mais provável da Terra até a estrela, após incorporada uma medição experimental". Note que tal valor é uma média ponderada da observação x_1 e da crença inicial μ_0, onde o peso é dado pelas incertezas.

Questão 4: Primeiramente, notemos que podemos escrever a densidade conjunta de X_1 e X_2 como

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x_1^2+x_2^2)/2\sigma^2}, \text{ para } -\infty < x_1, x_2 < \infty,$$

e a função $g : \mathbb{R}^2 \to (0, \infty) \times (-1, 1)$ como

$$g(x_1, x_2) = \left(x_1^2 + x_2^2, \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right).$$

Segundo a observação, o problema da não bijetividade se dá por não conseguirmos determinar o sinal de X_2 a partir de Y_1 e Y_2. Portanto, consideramos a partição de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} A_0 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\} \\ A_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\} \\ A_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < 0\}, \end{aligned}$$

de modo que a restrição de g a A_1 e A_2 são bijetivas e A_0 tem probabilidade zero por (X_1, X_2). Denotando por $h_i = g_i^{-1}$ as inversas de g quando restritas a A_i, para $i = 1, 2$ respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} h_1(y_1, y_2) &= (y_2\sqrt{y_1}, \sqrt{y_1 - y_1 y_2^2}), \text{ para } (y_1, y_2) \in (0, \infty) \times (-1, 1), \\ h_2(y_1, y_2) &= (y_2\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_1 - y_1 y_2^2}), \text{ para } (y_1, y_2) \in (0, \infty) \times (-1, 1). \end{aligned}$$

Após calcular os Jacobianos, notamos que

$$|J_1| = |J_2| = \frac{1}{2\sqrt{1 - y_2^2}}.$$

Finalmente, usamos o teorema de mudança de variáveis (devidamente generalizado) para concluir que a densidade conjunta de Y_1 e Y_2 é dada por

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= \left[\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-y_1/2\sigma^2} \frac{1}{2\sqrt{1 - y_2^2}} \right] + \left[\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-y_1/2\sigma^2} \frac{1}{2\sqrt{1 - y_2^2}} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-y_1/2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{1 - y_2^2}}, \text{ para } (y_1, y_2) \in (0, \infty) \times (-1, 1). \end{aligned}$$