Cálculo das Probabilidades II - Lista 2 - 2020/PLE

Prof. Hugo Carvalho

29/10/2020

LISTA ATUALIZADA NO DIA 31/10/2020: Erro de digitação na questão 3) item f) corrigido.

– INSTRUÇÕES – LEIAM ATENTAMENTE! –

- A data limite de entrega da avaliação é domingo 08/11/2020 às 23h59'. Avaliações entregues após esse prazo serão desconsideradas.
- A entrega deve ser feita exclusivamente através do Google Classroom, clicando na caixa "+ Adicionar ou Criar" dentro da postagem dessa lista, para então anexar um arquivo com sua resolução. Após isso, clique em "Entregar" para enviar sua resolução.
  Atenção: Somente anexar a resolução não é suficiente! O envio deve ser feito para que sua resolução de fato seja entregue.
- Você tem a liberdade de escrever sua resolução no computador (usando Word, LaTeX, dentre outros), ou manuscrito e depois escanear ou fotografar a sua resolução. Nesse último caso, tome cuidado para que o documento fique legível. No caso de fotografar, opte por utilizar luz natural e tome cuidado com sombras.
- **Dica**: Se for fotografar sua resolução com um *smartphone* ou *tablet*, utilize o aplicativo próprio da câmera, e evite fotografar através de WhatsApp, Telegram, Messenger, e outros. Os aplicativos de comunicação, ao utilizarem a câmera, fazem uma severa compressão da imagem, incorrendo em uma grande diminuição de sua qualidade. Para transferir a imagem do celular para o computador prefira fazer o envio por e-mail, ou acessando sua galeria de fotos através do Google Photos no computador (caso já utilize esse aplicativo para gerenciar suas fotos no aparelho).
- Independente do modo de escrita, a resolução deve ser entregue em um único documento, no formato PDF, com a resolução em pé (formato retrato). O *layout* da resolução não será levado em consideração na avaliação, porém o texto deve estar legível para ser corrigido.
  Atenção: Resoluções ilegíveis ou fora desse formato não serão corrigidas e serão desconsideradas.
- A troca de conhecimento na realização da avaliação é permitida e encorajada: ciência se faz com colaboração, e devemos seguir esse espírito aqui. Porém, cada aluno deverá ter a sua própria resolução, e cópias ou outras ilegalidades serão severamente punidas com a anulação da avaliação para o(s) aluno(s) suspeito(s).
- Todos os passos de sua resolução devem ser devidamente justificados.
- Ao entregar essa avaliação, você afirma ter lido e estar de acordo com essas regras, comprometendo-se a cumpri-las.

Questão 1: Seja $Y \sim N(m, b^2)$, e assuma que $W_i|Y \sim N(Y, \sigma^2)$ são independentes e identicamente distribuídas, para $i = 1, 2$, sendo m, b^2 e σ^2 valores fixos e conhecidos.

a) Calcule a covariância entre W_1 e W_2.

b) Pode-se afirmar que W_1 e W_2 são independentes?

c) Interprete o resultado obtido no item a).

Questão 2: Dizemos que o vetor aleatório (X_1, X_2) tem *distribuição normal bivariada de médias* μ_1 *e* μ_2*, variâncias* σ_1^2 *e* σ_2^2 *e correlação* ρ se a sua função densidade de probabilidade conjunta é dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right] \right\},$$

para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. O objetivo dessa questão é estudarmos mais à fundo essa distribuição. Para isso, faça o que se pede nos itens abaixo.
Obs.: O símbolo exp *denota a função exponencial, isto é,* $\exp(x) = e^x$.

a) Utilizando o método do Jacobiano, mostre que tal distribuição pode ser obtida através da transformação

$$\begin{cases} X_1 = \sigma_1 Z_1 + \mu_1 \\ X_2 = \sigma_2[\rho Z_1 + (1-\rho^2)^{1/2} Z_2] + \mu_2, \end{cases}$$

onde Z_1 e Z_2 seguem distribuições normais padrão independentes.

b) Utilizando a transformação do item a), mostre que a função geradora de momentos conjunta do vetor aleatório (X_1, X_2) pode ser escrita como

$$\psi(\mathbf{t}) = \exp\left\{ \mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t} \right\},$$

onde $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ e o sobrescrito ^{T} denota a operação de transposição do vetor ou matriz em questão.
Obs.: A função geradora de momentos da distribuição normal de média μ *e variância* σ^2 *é dada por* $e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$*, para* $t \in \mathbb{R}$*. Esse fato pode ser usado livremente sem prova.*

c) Usando o resultado do item b), mostre que as marginais X_i seguem distribuições normais de média μ_i e variância σ_i^2, para $i = 1, 2$.

d) Usando o resultado do item b), mostre que ρ é de fato o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2.

e) Conclua que X_1 e X_2 são independentes se e somente se são descorrelacionadas.

f) Utilizando a transformação do item a), mostre que

$$\mathbb{E}[X_2|X_1 = x_1] = \mu_2 + \rho\sigma_2\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right) \quad \text{e} \quad \mathbb{V}(X_2|X_1 = x_1) = (1-\rho^2)\sigma_2^2.$$

g) Encontre $\mathbb{E}[X_1|X_2 = x_2]$ e $\mathbb{V}(X_1|X_2 = x_2)$.
Obs.: Repetir o argumento do item f) e utilizar a transformação do item a) pode não funcionar tão facilmente.

h) Denote por X_1 e X_2 o peso e a altura, respectivamente, de um indivíduo selecionado ao acaso de uma população, e assuma que o vetor aleatório (X_1, X_2) segue uma distribuição normal bivariada com médias, variâncias e correlação conhecidos. Disserte sobre a melhor forma de prever a altura de um determinado indivíduo nas seguintes situações: sem conhecer o seu peso, e sabendo que seu peso é dado por $X_1 = x_1$.

Questão 3: O objetivo dessa questão é provarmos que vale a Lei Forte dos Grandes Números para uma certa distribuição de probabilidade. Mais especificamente, provaremos o seguinte resultado:

Teorema: Se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência independente e identicamente distribuída de variáveis aleatórias tais que $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2$, então vale a Lei Forte dos Grandes Números.

– LEIA ESSA INSTRUÇÃO COM MUITA ATENÇÃO –

Seguir o roteiro é *obrigatório*. Você *não* está autorizado(a) a utilizar *nenhuma* Lei dos Grandes Números nessa questão (por exemplo, a Lei Forte de Kolmogorov, Primeira Lei Forte de Kolmogorov ou resultados análogos *não* podem ser usados). O descumprimento dessa regra anulará *completamente* a sua resolução.

—

a) Mostre que a função geradora de momentos de X_i é dada por

$$\psi(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

b) Argumente que a sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz à Lei Forte dos Grandes Números se e somente se $\overline{X}_n \overset{qc}{\to} 0$

c) Argumente que $\overline{X}_n \overset{qc}{\to} 0$ é equivalente a termos $\mathbb{P}(|\overline{X}_n| \geq \varepsilon \text{ infinitas vezes}) = 0$.

d) Argumente que $\mathbb{P}(|\overline{X}_n| \geq \varepsilon) = 2\mathbb{P}(\overline{X}_n \geq \varepsilon)$.

e) Agora, vamos estimar a probabilidade $\mathbb{P}(\overline{X}_n \geq \varepsilon)$. Denote por S_n a soma $X_1 + \cdots + X_n$, e argumente que cada passagem numerada da conta abaixo é verdadeira, para todo $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{X}_n \geq \varepsilon) &\overset{(1)}{=} \mathbb{P}(S_n \geq n\varepsilon) \\
&\overset{(2)}{=} \mathbb{P}(e^{tS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \\
&\overset{(3)}{\leq} \frac{\mathbb{E}[e^{tS_n}]}{e^{tn\varepsilon}} \\
&\overset{(4)}{=} e^{-tn\varepsilon}\left[\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right]^n.
\end{aligned}$$

f) Usando a desigualdade $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \leq e^{t^2/2}$, válida para todo $t \in \mathbb{R}$, argumente porque são verdadeiros os passos numerados abaixo:

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n \geq \varepsilon) \overset{(1)}{\leq} \min_{t>0} \exp\{-n[t\varepsilon - t^2/2]\} \overset{(2)}{=} \exp\{-n[\varepsilon^2/2]\} \overset{(3)}{=} [e^{-(\varepsilon^2/2)}]^n.$$

Obs.: A desigualdade dada pode ser usada livremente, sem necessidade de prova.

g) Utilizando os Lemas de Borel-Cantelli e o resultado do item f) acima, conclua que $\overline{X}_n \overset{qc}{\to} 0$, e portanto, que a sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz à Lei Forte dos Grandes Números.

h) Se você tentasse utilizar a desigualdade de Chebyshev na primeira igualdade do item e) em vez do procedimento mais sofisticado adotado em tal item, você conseguiria concluir o resultado desejado?