Cálculo das Probabilidades II - Prova 3 - 2019/1

Prof. Hugo Carvalho

24/06/2019

– TODOS OS PASSOS DEVEM SER DEVIDAMENTE JUSTIFICADOS EM TODAS AS QUESTÕES –

Questão 1: O objetivo principal dessa questão é mostrar, **sem usar as Leis Fortes de Kolmogorov**, que a sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz à Lei Forte dos Grandes Números, onde cada X_i tem distribuição uniforme contínua no intervalo $[-1,1]$ e todas são independentes entre si. Para isso, siga o tutorial abaixo.
Obs.: Caso você não consiga fazer algum item você pode usar o seu resultado nos itens posteriores, sem penalização.

a) Mostre que a função geradora de momentos de $\sum_{i=1}^{n} X_i$ é dada por $\left[\frac{1}{2t}(e^t - e^{-t})\right]^n$, para $t \in \mathbb{R}$. *(1,0)*

b) Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Use a cota de Chernoff e a desigualdade $\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \leq te^{t^2/6}$, para $t > 0$, para mostrar que *(0,5)*

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq n\varepsilon\right) \leq e^{-n(\varepsilon t - t^2/6)},\ \forall t > 0.$$

c) Mostre que, com uma escolha adequada de t no item b) acima, temos que $\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \varepsilon\right) \leq e^{-3n\varepsilon^2/2}$. *(1,0)*

Obs.: Você NÃO está autorizado a igualar o resultado desejado aqui com o lado direito da desigualdade obtida no item b) a fim de encontrar o valor de t adequado! Chegue nessa conclusão por outros meios.

d) Enuncie formalmente a Lei Forte dos Grandes Números e argumente que, para a sequência de variáveis aleatórias sendo aqui tratadas, ela equivale a afirmação $\overline{X}_n \xrightarrow{qc} 0$, onde $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. *(0,5)*

e) Conclua, usando o resultado do item d), que a sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz à Lei Forte dos Grandes Números. *(1,5)*
Dica: Talvez seja útil a informação que cada X_i é simétrica em torno de zero, e portanto, $\overline{X}_n$ também o é.

f) *(Bônus)* O resultado encontrado no item c) é "melhor" ou "pior" do que o encontrado no item e)? Disserte sobre.

Questão 2: Seja X_1 o número de caras observadas em um primeiro lançamento de n moedas equilibradas. Para $k \geq 2$, seja X_k o número de caras observadas no lançamento posterior de X_{k-1} moedas equilibradas. Faça o que se pede abaixo:

a) Calcule $\mathbb{E}[X_2]$, ou seja, o número médio de caras observadas no segundo lançamento. *(1,0)*

b) Generalize o resultado para calcular $\mathbb{E}[X_k]$, para $k \geq 2$, provando adequadamente a sua afirmação. *(1,5)*

c) *(Bônus)* O que você pode afirmar sobre a convergência $X_k \xrightarrow{r} 0$, para diferentes valores de $r > 0$?

Questão 3: Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de média 0 e variância $0 < \sigma^2 < \infty$. Seja $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ outra sequência de variáveis aleatórias, também independente e identicamente distribuídas, todas independentes de X_n, porém de média μ finita, e nada é dito sobre sua variância. Podemos afirmar que $\overline{Y}_n - \sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow{d} Z$, onde $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$? Justifique adequadamente a sua resposta. *(2,0)*

Questão 4: Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição de Bernoulli de parâmetro $0 < p < 1$. Considere, para $n \geq 1$, $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Faça o que se pede abaixo.

a) Calcule $\mathbb{P}(Y_n > 0)$ e $\mathbb{E}[Y_n]$. *(1,0)*

b) Verifique se Y_n converge em probabilidade ou quase certamente, identificando a distribuição limite. *(1,5)*

– FORMULÁRIO –

- **Fórmula da soma da PG**: $\sum_{k=m}^{n} ar^k = a\frac{(r^m - r^{n+1})}{1-r}$, se $r \neq 1$.

- **Lemas de Borel-Cantelli**: $A_1, A_2, \ldots$ eventos no mesmo espaço de probabilidade, $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k =$ "ocorrência de infinitos dos eventos A_n":

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \text{ e os eventos } A_n \text{ são independentes} \implies \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$$

- **Distribuição binomial**: $X \sim \text{Bin}(n,p) \implies \begin{cases} \mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, \ldots, n \\ \mathbb{E}[X] = np, \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p) \end{cases}$

- **Desigualdadade de Jensen**: $\begin{cases} g(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[g(X)], \text{ se } g \text{ é convexa} \\ g(\mathbb{E}[X]) \geq \mathbb{E}[g(X)], \text{ se } g \text{ é côncava} \end{cases}$

- **Lei da esperança iterada**: $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$
- **Lei da variância iterada**: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{V}(X|Y)] + \mathbb{V}(\mathbb{E}[X|Y])$
- **FGM**: $\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$
- **Des. de Markov**: X va positiva e $t > 0$: $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$,
- **Des. de Chebyshev**: X va com média e variância finitas, $t > 0$: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{t^2}$
- **Cota de Chernoff**: X va cuja FGM $\psi_X(t)$ existe para t próximo de zero: $\begin{cases} \mathbb{P}(X \geq c) \leq e^{-ct}\psi_X(t), \ \forall t > 0 \\ \mathbb{P}(X \geq c) \leq \min_{t>0}[e^{-ct}\psi_X(t)] \end{cases}$
- **Convergência em distribuição**: $X_n \xrightarrow{d} X \iff F_n(x) \to F_X(x)$, quando $n \to \infty$, para todo x onde F_X for contínua
- **Convergência em probabilidade**: $X_n \xrightarrow{p} X \iff \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0, \ \forall \varepsilon > 0$, quando $n \to \infty$
- **Convergência quase certa**: $X_n \xrightarrow{qc} X \iff \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \iff \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n \neq X\right) = 0$
- **Convergência em média** r: $X_n \xrightarrow{r} X \iff \mathbb{E}[|X_n - X|^r] \to 0$, quando $n \to \infty$
- **Teorema de Slutsky**: $X_n \xrightarrow{d} X$ e $Y_n \xrightarrow{p} c$ constante: $\begin{cases} X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c \\ X_n Y_n \xrightarrow{d} cX \\ \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}, \text{ se } \mathbb{P}(Y_n = 0) = 0, \forall n \text{ e } c \neq 0 \end{cases}$
- **Lei Fraca dos Grandes Números**: $\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n] \xrightarrow{p} 0$
- **Lei Forte dos Grandes Números**: $\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n] \xrightarrow{qc} 0$
- **Lei Fraca de Chebyshev**: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ independentes dois-a-dois, com variância finita e uniformemente limitadas
- **1a. Lei Forte de Kolmogorov**: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ independente, com média finita e satisfazendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{V}(X_n)}{n^2} < +\infty$
- **Lei Forte de Kolmogorov**: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid com média finita
- **TCL para va's iid**: $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, se cada X_i tem média μ finita e variância $0 < \sigma^2 < \infty$