Cálculo das Probabilidades II - Prova Final (Gabarito) - 2019/1

Prof. Hugo Carvalho

05/07/2019

Questão 1: Note que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(B \,\middle|\, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\overset{1}{=} \frac{\mathbb{P}\left(B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \\
&\overset{2}{=} \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B \cap A_n\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \\
&\overset{3}{=} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \\
&\overset{4}{=} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \\
&\overset{5}{\geq} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c\mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \\
&= \frac{c\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \\
&\overset{6}{=} \frac{c\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \\
&= c,
\end{aligned}
$$

onde nas passagens numeradas acima usamos:

1) Definição de probabilidade condicional;
2) Propriedade distributiva da interseção sobre a união;
3) O fato dos conjuntos A_n serem disjuntos, implicando que $B \cap A_n$ também o são;
4) Definição de probabilidade condicional;
5) Hipótese da questão;
6) O fato dos A_n serem disjuntos.

Questão 2: A densidade conjunta de U_1 e U_2 é dada por

$$f_1(u_1, u_2) = 1, \text{ para } 0 < u_1, u_2 < 1.$$

Denote por f_2 a densidade conjunta de X_1 e X_2. Pelo método do Jacobiano, temos que $f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2))|J|$, onde

$$J = \det \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial u_1 & \partial x_1/\partial u_2 \\ \partial x_2/\partial u_1 & \partial x_2/\partial u_2 \end{bmatrix}}.$$

Ambos determinantes são enfadonhos de serem calculados, porém é menos pior usar a primeira forma, visto que já obteremos a resposta em função de x_1 e x_2, mesmo tendo que inverter a relação dada. A fim de realizar tal inversão, note que:

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 = -2\ln(u_1) &\implies u_1 = e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \\
\frac{x_2}{x_1} = \tan(2\pi u_2) &\implies u_2 = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).
\end{aligned}
$$

Calculando as derivadas, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -x_1 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)} \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= -x_2 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+(x_2/x_1)^2}\frac{x_2}{x_1^2} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+(x_2/x_1)^2}\frac{1}{x_1},
\end{aligned}$$

de modo que o Jacobiano é dado por

$$\begin{aligned}
J &= \det \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)} \left(\frac{1}{1+(x_2/x_1)^2} + \frac{(x_2/x_1)^2}{1+(x_2/x_1)^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned}
f_2(x_1, x_2) &= f_1(x_1(u_1,u_2), x_2(u_1,u_2))|J| \\
&\overset{1}{=} |J| \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_2^2}\right),
\end{aligned}$$

onde na igualdade 1 usamos o fato que a densidade conjunta de U_1 e U_2 é constante. A fim de identificar o domínio dessa nova densidade, notemos que como $0 < u_1 < 1$, temos que $\sqrt{-2\ln(u_1)} > 0$ e como $0 < u_2 < 1$, temos que $\cos(2\pi u_2), \sin(2\pi u_2) \in [-1, 1]$, de modo que $x_1, x_2, \in \mathbb{R}$. Portanto, conclui-se o resultado desejado.

Questão 3: Note que $X \sim \mathcal{U}[0,1]$ e que $Y|(X = x) \sim \text{Bin}(n, x)$. Calculamos a média de Y através da lei da esperança iterada:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] \\
&= \mathbb{E}[\text{Bin}(n, X)] \\
&= \mathbb{E}[nX] \\
&= n\mathbb{E}[X] \\
&= \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Para calcular a variância de Y, usemos a lei da variância iterada:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}[\mathbb{V}(Y|X)] + \mathbb{V}(\mathbb{E}[Y|X]) \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{V}(\text{Bin}(n, X))] + \mathbb{V}(\mathbb{E}[\text{Bin}(n, X)]) \\
&= \mathbb{E}[nX(1-X)] + \mathbb{V}(nX) \\
&= n\mathbb{E}[X] - n\mathbb{E}[X^2] + n^2\mathbb{V}(X) \\
&= n\mathbb{E}[X] - n(\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}[X]^2) + n^2\mathbb{V}(X) \\
&= n\frac{1}{2} - n\frac{1}{12} - n\left(\frac{1}{2}\right)^2 + n^2\frac{1}{12} \\
&= \frac{2n}{12} + \frac{n^2}{12} \\
&= \frac{n(n+2)}{12}.
\end{aligned}$$

Questão 4: Note que podemos reescrever o numerador da seguinte forma:

$$X_1 + \cdots + X_n = n\overline{X}_n = n\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\overline{X}_n.$$

Analogamente, reescrevemos o denominador da seguinte forma:

$$\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2} = \sqrt{n\overline{X_n^2}}.$$

Portanto, temos que:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}} = \frac{n\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\overline{X}_n}{\sqrt{n\overline{X_n^2}}} = \sqrt{2}\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\overline{X}_n}{\sqrt{\overline{X_n^2}}} = \sqrt{2}\frac{N_n}{D_n}.$$

Notemos que, pelo Teorema Central do Limite, N_n converge em distribuição para uma normal padrão, e pela Lei Forte de Kolmogorov, D_n^2 converge quase certamente (e portanto, em probabilidade) para $\mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{V}(X_i) + \mathbb{E}[X_i]^2 = 2$. Como $x \mapsto \sqrt{x}$ é uma função contínua, temos que $D_n \overset{qc}{\to} \sqrt{2}$, e portanto, $D_n \overset{p}{\to} \sqrt{2}$. Assim, pelo Teorema de Slutsky, temos que:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}} = \sqrt{2}\frac{N_n}{D_n} \overset{p}{\to} \sqrt{2}\frac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{2}} = \mathcal{N}(0,1).$$

Questão 5: A fim de aferir a convergência quase certa da sequência $\overline{X}_n$ para zero, fixemos $\varepsilon > 0$ e queremos que a probabilidade abaixo seja zero:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = 0\right\}^c\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n \neq 0\right) = \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - 0| \geq \varepsilon \text{ infinitas vezes}\right) = \mathbb{P}\left(\limsup\ \{|\overline{X}_n| \geq \varepsilon\}\right).$$

A fim de calcular a probabilidade desse limite superior de uma sequência de eventos, usemos os lemas de Borel-Cantelli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n| \geq \varepsilon) \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2\ \mathbb{P}(\overline{X}_n \geq \varepsilon) \overset{(2)}{\leq} 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n\varepsilon^2/6} = 2\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-3\varepsilon^2/6}]^n \overset{(3)}{<} \infty,$$

onde em (1), (2) e (3) usamos, respectivamente, a simetria de $\overline{X}_n$ em torno de zero, o resultado do item c) e o fato que $0 < e^{-3\varepsilon^2/6} < 1$ junto com a soma da PG infinita.

Dessa forma, temos que $\mathbb{P}\left(\limsup\ \{|\overline{X}_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0$, e assim, pela definição da convergência quase certa, concluímos que $\overline{X}_n \overset{qc}{\to} 0$.

Questão 6: Não, pois fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) \to 0$, quando $n \to \infty$, de modo que a sequência $F_n(x)$ converge para zero, para todo $x \in \mathbb{R}$. Porém, a função identicamente nula não é função de probabilidade acumulada de nenhuma variável aleatória.