Cálculo das Probabilidades II - Lista 2 - 2020/01

Prof. Hugo Carvalho

05/02/2021

– INSTRUÇÕES – LEIAM ATENTAMENTE! –

- A data limite de entrega da avaliação é domingo 14/02/2021 às 23h59'. Avaliações entregues após esse prazo serão desconsideradas.
- A entrega deve ser feita exclusivamente através do Google Classroom, clicando na caixa "+ Adicionar ou Criar" dentro da postagem dessa lista, para então anexar um arquivo com sua resolução. Após isso, clique em "Entregar" para enviar sua resolução.
  Atenção: Somente anexar a resolução não é suficiente! O envio deve ser feito para que sua resolução de fato seja entregue.
- Você tem a liberdade de escrever sua resolução no computador (usando Word, LaTeX, dentre outros), ou manuscrito e depois escanear ou fotografar a sua resolução. Nesse último caso, tome cuidado para que o documento fique legível. No caso de fotografar, opte por utilizar luz natural e tome cuidado com sombras.
- **Dica**: Se for fotografar sua resolução com um *smartphone* ou *tablet*, utilize o aplicativo próprio da câmera, e evite fotografar através de WhatsApp, Telegram, Messenger, e outros. Os aplicativos de comunicação, ao utilizarem a câmera, fazem uma severa compressão da imagem, incorrendo em uma grande diminuição de sua qualidade. Para transferir a imagem do celular para o computador prefira fazer o envio por e-mail, ou acessando sua galeria de fotos através do Google Photos no computador (caso já utilize esse aplicativo para gerenciar suas fotos no aparelho).
- Independente do modo de escrita, a resolução deve ser entregue em um único documento, no formato PDF, com a resolução em pé (formato retrato). O *layout* da resolução não será levado em consideração na avaliação, porém o texto deve estar legível para ser corrigido.
  Atenção: Resoluções ilegíveis ou fora desse formato não serão corrigidas e serão desconsideradas.
- A troca de conhecimento na realização da avaliação é permitida e encorajada: ciência se faz com colaboração, e devemos seguir esse espírito aqui. Porém, cada aluno deverá ter a sua própria resolução, e cópias ou outras ilegalidades serão severamente punidas com a anulação da avaliação para o(s) aluno(s) suspeito(s).
- Todos os passos de sua resolução devem ser devidamente justificados.
- Ao entregar essa avaliação, você afirma ter lido e estar de acordo com essas regras, comprometendo-se a cumpri-las.

– PARTE 1: MOMENTOS –

Questão 1: *(Aproximação da Binomial pela Poisson)* Na aula 09 a distribuição de Poisson foi deduzida a partir da distribuição Binomial, assumindo certas hipóteses simplificadoras no cálculo de sua função de probabilidade. Isso sugere que há uma íntima relação entre essas duas distribuições, e o objetivo dessa questão é explorar esse aspecto, do ponto de vista da função geradora de momentos visto que tal quantidade caracteriza a distribuição de uma variável aleatória de modo único, como também vimos em aula. Considere o teorema enunciado abaixo:

> **Teorema**: *Assuma que $X_1, X_2, X_3, \ldots$ é uma sequência de variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, cada uma com função geradora de momentos $\psi_n(t)$ e função de probabilidade acumulada $F_n(x)$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Seja X outra variável aleatória no mesmo espaço de probabilidade, cujas função geradora de momentos e função de probabilidade acumulada denotamos por $\psi_X(t)$ e $F_X(x)$, respectivamente. Assuma que todas as funções geradora de momentos acima estão definidas para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Então se*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = \psi_X(t), \forall\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$
>
> *então*
>
> $$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_X(x),$$
>
> *para todo $x \in \mathbb{R}$ onde F_X seja contínua.*

Podemos interpretar tal resultado da seguinte forma: *se a função geradora de momentos de X_n torna-se cada vez mais próxima da função geradora de momentos de X, então para efeitos do cômputo de probabilidades, X_n e X são cada vez mais semelhantes; mais especificamente, probabilidades da ocorrência do mesmo conjunto quando calculadas com respeito a X_n e X terão valores cada vez mais próximos a medida que n cresce.*

a) Tendo isso em mente, dado $\lambda > 0$, prove que uma uma Binomial de parâmetros n e $p = \lambda/n$ é bem aproximada por uma Poisson de parâmetro λ.

b) Explique porque faz mais sentido usar esse resultado para "aproximar Binomial pela Poisson" e não muito o contrário.

Obs.: Trataremos mais a fundo de sequências e convergência de variáveis aleatórias na parte 4 do curso, porém tal conhecimento não é necessário para a resolução dessa questão. Caso você esteja muito transtornado, pense que uma "sequência de variáveis aleatórias" é um monte de variáveis aleatórias em fila, só.

Questão 2: *(Momentos caracterizam uma distribuição de modo único?)* Sabemos que a função geradora de momentos caracteriza uma distribuição de modo único. Com efeito, como foi apresentado em aula, vimos que se duas variáveis aleatórias X e Y têm respectivas funções geradoras de momentos $\psi_X(t)$ e $\psi_Y(t)$ que são iguais para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, então a distribuição de X e Y é a mesma. O objetivo dessa questão é investigar se X e Y terem somente os mesmos *momentos* é suficiente para garantir que tenham a mesma distribuição.

a) Seja X uma variável aleatória contínua com densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-(\ln x)^2/2}, \text{ para } x \geq 0.$$

Mostre que $\mathbb{E}[X^k] = e^{k^2/2}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$, de modo que X tem todos os momentos finitos.
Obs.: A distribuição de X é um caso especial da distribuição log-normal, brevemente apresentada em aula.

b) Seja agora Y uma variável aleatória contínua com densidade dada por

$$f_Y(x) = f_X(x)[1 + \sin(2\pi \ln x)], \text{ para } x \geq 0.$$

Mostre que $\mathbb{E}[Y^k] = \mathbb{E}[X^k]$, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Dica: Uma substituição malandra e um pouco de bruxaria te ajudarão a provar que uma integral que está sobrando nessa conta é igual a zero.

c) No item a) concluímos que X tem todos os momentos finitos, e isso nos dá um cheiro de que ela também tem uma função geradora de momentos definida para t que não seja zero. Prove que não é esse o caso, ou seja, mostre que a integral que define a função geradora de momentos de X é infinita para todo $t \neq 0$.

– PARTE 2: ESPERANÇA CONDICIONAL –

Questão 3: Sejam $U_1, U_2, U_3, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme contínua no intervalo $[0, 1]$. Para $x \in [0, 1]$ defina

$$N(x) = \min \left\{ n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} U_i > x \right\}$$

Ou seja, $N(x)$, que é uma variável aleatória, representa o número mínimo de tais uniformes que devem ser somadas para obtermos um valor maior que x.

a) Argumente porque $N(x)$ é uma variável aleatória, e não um número fixo.

b) Já sabendo que $N(x)$ é uma variável aleatória, calcule $\mathbb{E}[N(x)]$.
Dica: Use lei da esperança iterada, condicionando em U_1.