Cálculo das Probabilidades II - Prova 1 - 2019/1

Prof. Hugo Carvalho

12/04/2019

Questão 1: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e fixado $B \in \mathcal{F}$ defina

$$\mathcal{F}_B = \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(A \cap B) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\}.$$

Mostre que $\mathcal{F}_B$ é uma σ-álgebra de conjuntos de Ω. *(2,5)*

Questão 2: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos em $\mathcal{F}$ tais que $A_{n+1} \subset A_n$ e $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) \leq 1/2$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

a) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$. *(1,0)*

b) *(Bônus)* Dê uma explicação intuitiva do porque o resultado acima é esperado a partir da hipótese da questão.

c) O que é possível falar sobre a ocorrência de infinitos dos eventos A_n? *(1,0)*

Obs.: NÃO é necessário para a resolução da questão, mas caso venha a te trazer mais paz de espírito, lembre-se que $\limsup A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ *e que* $\sum\limits_{k=m}^{n} ar^k = \dfrac{a\left(r^m - r^{n+1}\right)}{1-r}$.

Questão 3: Suponha que N estrelas são observadas em uma região esférica do Universo, de raio R, centrada na Terra. Uma hipótese simplificadora é que tais estrelas estão uniformemente distribuídas e de modo independente entre si.

a) Calcule a probabilidade da distância entre a estrela mais próxima e a Terra ser maior que r. *(1,5)*

b) Um astrônomo experiente garante que a medida que R aumenta, o número N de estrelas observadas também aumenta, de acordo com a expressão $\dfrac{N}{R^3} = \dfrac{4}{3}\pi\lambda$, onde λ é um parâmetro fixo, dito a *densidade estelar* do Universo. Calcule o limite da probabilidade obtida no item a) quando $R \to \infty$. *(1,0)*

c) *(Bônus)* Disserte sobre a fidedignidade da hipótese simplificadora acerca da uniformidade da distribuição das estrelas no Universo.

Obs.: Lembre que o volume de uma esfera de raio r é dado por $\dfrac{4}{3}\pi r^3$, *e que* $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Questão 4: O processo de medição da temperatura de um ambiente pode ser pensado como a observação de uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Porém, o termômetro usado para tal fim está com defeito e não é exibido o sinal do número, ou seja, em vez de observar X observamos $|X|$. Investigue se $|X|$ também é variável aleatória no mesmo espaço de probabilidade, provando a sua afirmação. *(1,5)*

Questão 5: Considere a função de probabilidade acumulada definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ x/10, & \text{se } 1 \leq x < 9 \\ 1, & \text{se } x \geq 9. \end{cases}$$

a) Encontre a decomposição de F nas suas partes discreta e contínua. *(1,5)*

b) *(Bônus)* Suponha que você queira gerar um número aleatório segundo a distribuição associada a essa função de probabilidade acumulada. Como você o faria?