

Cálculo das Probabilidades II - Lista 1 - 2020/02

Prof. Hugo Carvalho

23/04/2021

– INSTRUÇÕES – LEIAM ATENTAMENTE! –

- A data limite de entrega da avaliação é domingo 02/05/2021 às 23h59'. Avaliações entregues após esse prazo serão desconsideradas.
- A entrega deve ser feita exclusivamente através do Google Classroom, clicando na caixa “+ Adicionar ou Criar” dentro da postagem dessa lista, para então anexar um arquivo com sua resolução. Após isso, clique em “Entregar” para enviar sua resolução.
Atenção: Somente anexar a resolução não é suficiente! O envio deve ser feito para que sua resolução de fato seja entregue.
- Você tem a liberdade de escrever sua resolução no computador (usando Word, L^AT_EX, dentre outros), ou manuscrito e depois escanear ou fotografar a sua resolução. Nesse último caso, tome cuidado para que o documento fique legível. No caso de fotografar, opte por utilizar luz natural e tome cuidado com sombras.
- **Dica:** Se for fotografar sua resolução com um *smartphone* ou *tablet*, utilize o aplicativo próprio da câmera, e evite fotografar através de WhatsApp, Telegram, Messenger, e outros. Os aplicativos de comunicação, ao utilizarem a câmera, fazem uma severa compressão da imagem, incorrendo em uma grande diminuição de sua qualidade. Para transferir a imagem do celular para o computador prefira fazer o envio por e-mail, ou acessando sua galeria de fotos através do Google Photos no computador (caso já utilize esse aplicativo para gerenciar suas fotos no aparelho).
- Independente do modo de escrita, a resolução deve ser entregue em um único documento, no formato PDF, com a resolução em pé (formato retrato). O *layout* da resolução não será levado em consideração na avaliação, porém o texto deve estar legível para ser corrigido.
Atenção: Resoluções ilegíveis ou fora desse formato não serão corrigidas e serão desconsideradas.
- A troca de conhecimento na realização da avaliação é permitida e encorajada: ciência se faz com colaboração, e devemos seguir esse espírito aqui. Porém, cada aluno deverá ter a sua própria resolução, e cópias ou outras ilegalidades serão severamente punidas com a anulação da avaliação para o(s) aluno(s) suspeito(s).
- Todos os passos de sua resolução devem ser devidamente justificados.
- Ao entregar essa avaliação, você afirma ter lido e estar de acordo com essas regras, comprometendo-se a cumpri-las.

– PARTE 1: FUNDAMENTOS –

Questão 1: (*Princípio da inclusão-exclusão e aplicações*) Sejam A_1, \dots, A_n uma sequência finita de eventos em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Faça o que se pede abaixo.

- a) (**Bônus**) $(1,0)$ Prove a fórmula a seguir, conhecida como o *princípio da inclusão-exclusão*:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i < j}} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{1 \leq i, j, k \leq n \\ i < j < k}} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

- b) $(1,0)$ Justifique, intuitivamente, porque essa fórmula é verdadeira. Para isso, você pode assumir que n é um valor “pequeno” (3 ou 4, por exemplo) e fazer um desenho, explicando-o adequadamente.
- c) $(1,0)$ Um ônibus com 25 passageiros faz 7 paradas antes de chegar ao ponto final, onde todos os passageiros remanescentes no coletivo devem desembarcar obrigatoriamente. Assuma que, nas 7 paradas, cada passageiro do ônibus é igualmente provável de descer do coletivo e que os passageiros agem de modo independente entre si. Qual é a probabilidade de que ao menos uma pessoa desça do ônibus em cada parada?

Questão 2: (*Teorema de Bayes*) Antes de testar um novo tratamento para determinada doença, pode-se assumir, de modo conservador, que a sua probabilidade de sucesso tem distribuição uniforme discreta nos 101 valores abaixo:

$$\{0, 0,01, 0,02, \dots, 0,97, 0,98, 0,99, 1\}.$$

Após tratar 10 enfermos com o novo tratamento, observou-se que 7 ficaram curados e 3 não, ou seja, 7 sucessos e 3 fracassos foram observados. Faça o que se pede abaixo.

- a) $(2,0)$ Encontre a nova distribuição da probabilidade de sucesso do novo tratamento, após a realização dos testes clínicos mencionados acima.
- b) $(1,0)$ Qual é a probabilidade do novo tratamento ter uma eficácia acima de 35%?

– PARTE 2: VARIÁVEIS E VETORES ALEATÓRIOS –

Questão 3: (*Distribuições discretas*) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuições geométrica de parâmetros p e q , respectivamente. Faça o que se pede abaixo. $(3,0)$

- a) $(1,0)$ Calcule $\mathbb{P}(X = Y)$.
- b) $(1,0)$ Seja $Z = \min\{X, Y\}$. Encontre a função de probabilidade de Z e identifique a sua distribuição.
- c) $(1,0)$ Explique, de modo intuitivo, o resultado obtido no item b).

Questão 4: (*Transformação de variáveis aleatórias*) $(1,0)$ A velocidade de uma molécula em um gás uniforme em equilíbrio é dada pela variável aleatória S cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$f_S(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s^2}{c^3} e^{-\frac{1}{2}s^2/c^2}, \text{ para } s > 0,$$

onde $c > 0$ é uma constante conhecida. Determine a função densidade de probabilidade da energia cinética $E = \frac{1}{2}mS^2$ da molécula, onde $m > 0$ é a massa da molécula, uma constante conhecida.

Questão 5: (*Transformação de vetores aleatórios*) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição normal padrão. Faça o que se pede abaixo.

- a) $(2,0)$ Mostre que X/Y tem função densidade de probabilidade dada por $\frac{1}{\pi(1+z^2)}$, para $z \in \mathbb{R}$. Essa é a densidade da *distribuição de Cauchy*.
- b) $(1,0)$ A distribuição de Cauchy tem *caudas pesadas*, ou seja, sua função densidade de probabilidade “demora muito” para se aproximar de zero à medida que $z \rightarrow \pm\infty$, de modo que nenhum de seus momentos está definido. Explique, intuitivamente, porque isso acontece, com base no resultado provado no item a).