Cálculo das Probabilidades II - Lista 3 - 2021/02

Prof. Hugo Carvalho

18/02/2022

– INSTRUÇÕES – LEIAM ATENTAMENTE! –

- A data limite de entrega da avaliação é segunda-feira 27/02/2022 às 23h59'. Avaliações entregues após esse prazo serão desconsideradas.
- A entrega deve ser feita exclusivamente através do Google Classroom, clicando na caixa "+ Adicionar ou Criar" dentro da postagem dessa lista, para então anexar um arquivo com sua resolução. Após isso, clique em "Entregar" para enviar sua resolução.
  Atenção: Somente anexar a resolução não é suficiente! O envio deve ser feito para que sua resolução de fato seja entregue.
- Você tem a liberdade de escrever sua resolução no computador (usando Word, LaTeX, dentre outros), ou manuscrito e depois escanear ou fotografar a sua resolução. Nesse último caso, tome cuidado para que o documento fique legível. No caso de fotografar, opte por utilizar luz natural e tome cuidado com sombras.
- **Dica**: Se for fotografar sua resolução com um *smartphone* ou *tablet*, utilize o aplicativo próprio da câmera, e evite fotografar através de WhatsApp, Telegram, Messenger, e outros. Os aplicativos de comunicação, ao utilizarem a câmera, fazem uma severa compressão da imagem, incorrendo em uma grande diminuição de sua qualidade. Para transferir a imagem do celular para o computador prefira fazer o envio por e-mail, ou acessando sua galeria de fotos através do Google Photos no computador (caso já utilize esse aplicativo para gerenciar suas fotos no aparelho).
- Independente do modo de escrita, a resolução deve ser entregue em um único documento, no formato PDF, com a resolução em pé (formato retrato). O *layout* da resolução não será levado em consideração na avaliação, porém o texto deve estar legível para ser corrigido.
  Atenção: Resoluções ilegíveis ou fora desse formato não serão corrigidas e serão desconsideradas.
- A troca de conhecimento na realização da avaliação é permitida e encorajada: ciência se faz com colaboração, e devemos seguir esse espírito aqui. Porém, cada aluno deverá ter a sua própria resolução, e cópias ou outras ilegalidades serão severamente punidas com a anulação da avaliação para o(s) aluno(s) suspeito(s).
- Todos os passos de sua resolução devem ser devidamente justificados.
- Ao entregar essa avaliação, você afirma ter lido e estar de acordo com essas regras, comprometendo-se a cumpri-las.

Questão 1: Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de variáveis aleatórias definidas por:

$$\mathbb{P}(X_n = -(n+4)) = \frac{1}{n+4},$$
$$\mathbb{P}(X_n = n+4) = \frac{3}{n+4},$$
$$\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - \frac{4}{n+4}.$$

a) Mostre que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em probabilidade para uma variável aleatória X, e identifique a distribuição de X. Mostre, adicionalmente, que a sequência numérica $\mathbb{E}[X_n]$ **não** converge para $\mathbb{E}[X]$.

b) Estude a convergência quase-certa da sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Questão 2: Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de variáveis aleatórias definidas por:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$$
$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^\alpha},$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$ é um parâmetro da distribuição. Estude para quais valores de α ocorre a convergência quase-certa da sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e, nesses casos, identifique a variável aleatória limite.

Questão 3: Ao sair de um bar, um indivíduo altamente embriagado quer chegar em sua residência, que felizmente é na mesma rua do bar. Para isso, ele dá passos para frente ou para trás, com igual probabilidade. Assuma, por simplicidade, que todos os passos são de 1m. Seja D_n a distância em metros que a pessoa andou após dar n passos. Mostre que $\mathbb{E}[D_n] \approx \sqrt{2n/\pi}$ e $\mathbb{V}(D_n) \approx n(1-2/\pi)$, para n suficientemente grande.

Dica: Talvez seja útil usar que $\mathbb{E}[|Z|] = \sqrt{2\pi}$ *e* $\mathbb{V}(|Z|) = 1 - 2/\pi$, *se* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Questão 4: A *Teoria da Informação* foi proposta por Claude Shannon, no início da década de 1950. O nome não é à toa, pois ela é um dos principais pilares de todas as ferramentas de envio/recepção de informações e compressão de dados, sendo portanto fundamental para nossas vidas atualmente. O objetivo dessa questão é trabalhar um pouco este conceito, à luz dos ensinamentos do curso de Cálculo das Probabilidades II, especialmente das duas últimas partes. Primeiramente, façamos algumas definições.

Seja X uma variável aleatória discreta que assume seus valores em um conjunto discreto $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$. Denote por $p(x)$ os valores de $\mathbb{P}(X = x)$, para $x \in \mathcal{X}$. Definimos a *entropia* da variável aleatória X como

$$\mathcal{H}(X) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log_2 p(x) = \mathbb{E}\left[\log_2\left(\frac{1}{p(X)}\right)\right].$$

Uma possível interpretação para tal quantidade é: "a *quantidade de informação* ou *surpresa média* carregada pela variável aleatória X". De certa forma, a entropia é semelhante a uma medida de dispersão de X, porém ela não se compara tão facilmente com a variância; além disso, a entropia tem propriedades bem interessantes que não são compartilhadas pela variância. O fato da base do logaritmo ser 2 é arbitrário e não influenciará na resolução da questão. Tal escolha é comum em Teoria da Informação para garantir que a unidade de medida da entropia seja em *bits*, conforme é usual em nosso dispositivos de comunicação.

Nessa questão, iremos somente explorar algumas propriedades interessantes da entropia.

a) Seja X' uma variável aleatória independente de X porém compartilhando de sua mesma distribuição. Mostre os dois passos da equação abaixo:

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)^2 \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(X = X') \overset{(2)}{\geq} 2^{-\mathcal{H}(X)}.$$

Dica: Desigualdade de Jansen.

b) Seja agora $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com a mesma distribuição de X. Mostre a *propriedade da equipartição assintótica*:

$$-\frac{1}{n}\log_2 p(X_1,\ldots,X_n) \xrightarrow{p} \mathcal{H}(X).$$

c) A propriedade da equipartição assintótica é extremamente importante para o estudo de codificação de informação, e tem grande influência em todos os algoritmos por trás de aplicativos de comunicação que utilizamos. Daqui em diante vamos explorar algumas consequências probabilísticas dela. Primeiramente, defina o *conjunto típico* $A_\varepsilon^{(n)}$ como o conjunto de valores $(x_1,\ldots,x_n)$ que o vetor aleatório $(X_1,\ldots,X_n)$ pode assumir e satisfaz a propriedade abaixo:

$$2^{-n(\mathcal{H}(X)+\varepsilon)} \leq p(x_1,\ldots,x_n) \leq 2^{-n(\mathcal{H}(X)-\varepsilon)}.$$

Mostre que se $(x_1,\ldots,x_n)\in A_\varepsilon^{(n)}$, então vale que

$$\mathcal{H}(X)-\varepsilon \leq -\frac{1}{n}\log_2 p(x_1,\ldots,x_n) \leq \mathcal{H}(X)+\varepsilon.$$

Utilize esse resultado para dar uma interpretação do conjunto típico.

d) Mostre que $\mathbb{P}(A_\varepsilon^{(n)}) \geq 1-\varepsilon$, para n suficientemente grande.

e) Mostre que $\#A_\varepsilon^{(n)} \leq 2^{n(\mathcal{H}(X)+\varepsilon)}$, onde $\#A$ denota a cardinalidade (quantidade de elementos) do conjunto A.

Dica: Não custa nada relembrar dois fatos óbvios que podem ser bem úteis: $1 = \sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}^n} p(\mathbf{x})$ *e que* $A_\varepsilon^{(n)} \subset \mathcal{X}^n$*, onde* $\mathcal{X}^n = \mathcal{X}\times\cdots\times\mathcal{X}$ *e* $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$.

f) Mostre que $\#A_\varepsilon^{(n)} \geq (1-\varepsilon)2^{n(\mathcal{H}(X)-\varepsilon)}$.

Dica: Use o item d).