Cálculo das Probabilidades II - Lista 3 - 2020/01 - Gabarito

Prof. Hugo Carvalho

26/02/2021

Questão 1:

$\underline{\Leftarrow}$: Provemos primeiramente que se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$ para todo $\varepsilon > 0$ então tal sequência converge quase certamente para 0. Para tal, fixe $\varepsilon > 0$ e considere a sequência de eventos dada por $A_n = \{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega)| > \varepsilon\}$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. A hipótese acima pode ser então reescrita como $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, de modo que, pelo primeiro lema de Borel-Cantelli, temos que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$, ou seja, a probabilidade da ocorrência de infinitos dos eventos A_n é zero. Colocando de outra forma, podemos escrever que: "o conjunto dos $\omega \in \Omega$ tais que $|X_n(\omega)| > \varepsilon$ para infinitos n tem probabilidade zero de ocorrência", que pode ser reescrito como: "o conjunto dos $\omega \in \Omega$ tais que $|X_n(\omega)| > \varepsilon$ para finitos n tem probabilidade um de ocorrência", ou seja, "o conjunto dos $\omega \in \Omega$ tais que $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$ tem probabilidade um de ocorrência". Esta é exatamente a definição de convergência quase certa, de modo que o resultado desejado está provado.

$\underline{\Rightarrow}$: Provemos agora que se tal sequência converge quase certamente para 0, então vale que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$. Tomando a contrapositiva, vamos assumir que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \infty$. Pelo segundo lema de Borel-Cantelli, a ocorrência de infinitos dos eventos A_n definidos acima tem probabilidade um, ou seja, com probabilidade um temos que $|X_n(\omega)| > \varepsilon$ para infinitos n, o que colocando de outra forma nos diz que o conjunto dos $\omega \in \Omega$ tais que $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$ tem probabilidade zero, o que contradiz a convergência quase certa, assumida como hipótese. Note que para usar o segundo lema de Borel-Cantelli é necessário que os eventos A_n sejam independentes, e isso é garantido se assumirmos que as variáveis aleatórias X_n sejam independentes.

Questão 2: *(Convergência em probabilidade)* Primeiramente, a fim de simplificar a notação, denotemos por Y_n a variável aleatória $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k+1}$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Note que tal nova sequência não é independente e nem identicamente distribuída, de modo que nenhuma Lei dos Grandes Números que conhecemos se aplica. Tentemos então utilizar a desigualdade de Chebyshev. Para isso, calculemos primeiramente o valor esperado das Y_n:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k+1}\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k X_{k+1}] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k]\mathbb{E}[X_{k+1}], \text{ pela independência dos } X_k \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu^2 \\
&= \mu^2.
\end{aligned}$$

Portanto, fixe $\varepsilon > 0$ e pela desigualdade de Chebyshev, temos que:

$$\mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|Y_n - \mu^2| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{\varepsilon^2}.$$

Calculemos então a variância de Y_n:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k X_{k+1}) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{Cov}(X_i X_{i+1}; X_j X_{j+1})\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k X_{k+1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Cov}(X_i X_{i+1}; X_{i+1} X_{i+2})\right],
\end{aligned}$$

onde a simplificação na covariância vem do fato que $\mathrm{Cov}(X_i X_{i+1}; X_j X_{j+1}) = 0$, se $j > i+1$, por conta da independência da sequência X_k. Analisemos então cada um desses dois termos separadamente, começando pela variância:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k X_{k+1}) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k^2 X_{k+1}^2] - \mathbb{E}[X_k]^2\mathbb{E}[X_{k+1}]^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k^2]\mathbb{E}[X_{k+1}^2] - \mu^4 \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\mathbb{V}(X_k) + \mathbb{E}[X_k]^2)(\mathbb{V}(X_{k+1}) + \mathbb{E}[X_{k+1}]^2) - \mu^4 \\
&\le \sum_{k=1}^{n}(M+\mu^2)(M+\mu^2) - \mu^4 \\
&= n((M+\mu^2)(M+\mu^2) - \mu^4) \\
&= nM',
\end{aligned}$$

para alguma constante $M' > 0$. Analogamente, para a covariância, temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Cov}(X_i X_{i+1}; X_{i+1} X_{i+2}) &= \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{E}[X_i X_{i+1} X_{i+1} X_{i+2}] - \mathbb{E}[X_i X_{i+1}]\mathbb{E}[X_{i+1} X_{i+2}] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_{i+1}^2]\mathbb{E}[X_{i+2}] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_{i+1}]\mathbb{E}[X_{i+1}]\mathbb{E}[X_{i+2}] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\mu^2(\mathbb{V}(X_{i+1}) + \mathbb{E}[X_{i+1}]^2) - \mu^4 \\
&\le \sum_{i=1}^{n-1}\mu^2(M+\mu^2) - \mu^4 \\
&= (n-1)(\mu^2(M+\mu^2) - \mu^4) \\
&\le nM'',
\end{aligned}$$

para alguma constante $M'' \in \mathbb{R}$. Portanto, retornando ao cálculo da variância de Y_n, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y_n) &= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k X_{k+1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Cov}(X_i X_{i+1}; X_{i+1} X_{i+2})\right] \\
&\le \frac{1}{n^2}[nM' + 2nM''] \\
&= \frac{M' + 2M''}{n}.
\end{aligned}$$

Retornando à desigualdade de Chebyshev, temos então que:

$$\mathbb{P}(|Y_n - \mu^2| > \varepsilon) \le \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{\varepsilon^2} \le \frac{M' + 2M''}{n\varepsilon^2} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Note que tal conclusão é exatamente a definição da convergência em probabilidade de $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k+1}$ para μ^2, como queríamos demonstrar.

Questão 3: A fim de aferir a convergência em distribuição de Y_n, calculemos as suas respectivas funções de probabilidade acumulada, que denotaremos por F_n. Primeiramente, note que $F_n(y) = 0$ se $y \leq 0$, visto que as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ somente assumem valores positivos. Portanto, para $y > 0$ temos que:

$$\begin{aligned}
F_n(y) &= \mathbb{P}(Y_n \leq y) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq y\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq ny\right) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq ny, \ldots, X_n \leq ny) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq ny) \ldots \mathbb{P}(X_n \leq ny) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq ny)^n \\
&= \left[\int_0^{ny} \frac{2}{\pi(1+x^2)}\, dx\right]^n \\
&= \left[\frac{2}{\pi}\arctan(x)\Big|_{x=0}^{x=ny}\right]^n \\
&= \left[\frac{2}{\pi}\arctan(ny)\right]^n.
\end{aligned}$$

Agora, devemos tomar o limite $n \to \infty$ para aferir se a sequência Y_n, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, converge em probabilidade e caso convirja, encontrar a distribuição limite. Como antes, para $y \leq 0$ o limite $\lim_{n\to\infty} F_n(y)$ é trivialmente zero. Calculemos então para $y > 0$, onde as duas relações informadas se mostrarão úteis:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_n(y) &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\pi}\arctan(ny)\right]^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{ny}\right)\right]\right]^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{ny}\right)\right]^n.
\end{aligned}$$

Como y está fixado, podemos tomar n suficientemente grande de modo que $1/ny \leq 1$ de modo que a expansão em série de potências informada no enunciado pode ser utilizada, e temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_n(y) &= \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{ny}\right)\right]^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{ny} - \frac{1}{3n^3y^3} + \frac{1}{5n^5y^5} - \ldots\right)\right]^n.
\end{aligned}$$

Para solucionar este limite, empregaremos o lema utilizado na prova do Teorema Central do Limite (slide 1 da aula 26.2), a saber:

> **Lema**: *Sejam a_n e c_n sequências de números reais tais que $a_n \to 0$, $c_n a_n^2 \to 0$ e $c_n a_n \to b \in \mathbb{R}$. Então vale que $(1 + a_n)^{c_n} \to e^b$.*

Na notação empregada no Lema, temos que $c_n = n$ e $a_n = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{ny} - \frac{1}{3n^3y^3} + \frac{1}{5n^5y^5} - \ldots\right)$. Note que como n só aparece no denominador de a_n então $a_n \to 0$; além disso, ao elevar-se a_n ao quadrado teremos potências no mínimo 2 de n no denominador de a_n^2, de modo que $c_n a_n^2 \to 0$; finalmente, $c_n a_n \to 2/\pi y$, pois cancela-se o n no primeiro denominador porém não nos outros. Dessa forma, as hipóteses do lema são atendidas e concluímos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_n(y) &= \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{ny} - \frac{1}{3n^3y^3} + \frac{1}{5n^5y^5} - \ldots\right)\right]^n \\
&= e^{-2/\pi y}, \text{ para } y > 0.
\end{aligned}$$

Portanto, este raciocínio mostra que a sequência de variáveis aleatórias Y_n, para $n = 1, 2, 3, \dots$ converge em distribuição. A função densidade de probabilidade da distribuição limite é dada então por:

$$\frac{d}{dy} e^{-2/\pi y} = \frac{2}{\pi y^2} e^{-2/\pi y}, \text{ para } y > 0.$$

Questão 4:

a) Para simplificar a notação, denotemos $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ por $\overline{X}_n$. Pelo Teorema Central do Limite para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (slide 1 da aula 26.2), temos a seguinte convergência:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Com isso, podemos aproximar a probabilidade de interesse conforme segue abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| > c\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu)\right| > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu) > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu) < -\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= \left[1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu) \leq \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right] + \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu) < -\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&\approx \left[1 - \Phi\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right] + \Phi\left(-\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= 2\left[1 - \Phi\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right].
\end{aligned}$$

b) O resultado do item a) nos diz que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| > c\right) \approx 2\left[1 - \Phi\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right] \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

pois Φ é uma função de probabilidade acumulada e portanto vale que $\Phi(c\sqrt{n}/\sigma) \to 1$ quando $n \to \infty$. Note que isso não é uma prova 100% rigorosa da Lei Fraca dos Grandes Números, e para tal teríamos que trocar o $\approx$ acima por uma estimativa mais precisa. Um caminho para isso é empregar o Teorema de Berry-Esseen, também apresentado em aula, mas para fins do conteúdo aprendido no curso de Cálculo das Probabilidades II, tal argumentação aqui se faz suficiente.