Cálculo das Probabilidades II - Lista 3 - 2021/01 - Gabarito

Prof. Hugo Carvalho

17/10/2021

Questão 1: A fim de aferir a convergência quase certa da sequência $\overline{X}_n$ para zero, fixemos $\varepsilon > 0$ e queremos que a probabilidade abaixo seja zero:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = 0\right\}^c\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n \neq 0\right) = \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - 0| \geq \varepsilon \text{ infinitas vezes}\right) = \mathbb{P}\left(\limsup \ \{|\overline{X}_n| \geq \varepsilon\}\right).$$

A fim de calcular a probabilidade desse limite superior de uma sequência de eventos, usemos os lemas de Borel-Cantelli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n| \geq \varepsilon) \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2\ \mathbb{P}(\overline{X}_n \geq \varepsilon) \overset{(2)}{\leq} 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n\varepsilon^2/6} = 2\sum_{n=1}^{\infty} [e^{-3\varepsilon^2/6}]^n \overset{(3)}{<} \infty,$$

onde em (1), (2) e (3) usamos, respectivamente, a simetria de X (e portanto de $\overline{X}_n$) em torno de zero, o resultado do item c) e o fato que $0 < e^{-3\varepsilon^2/6} < 1$ junto com a soma da PG infinita.

Dessa forma, temos que $\mathbb{P}\left(\limsup \ \{|\overline{X}_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0$, e assim, pela definição da convergência quase certa, concluímos que $\overline{X}_n \overset{qc}{\to} 0$.

Questão 2:

a) Note que Y_n assume somente os valores 0 e 1, de modo que $Y_n > 0$ se e somente se $Y_n = 1$, e tal evento acontece se e somente se $X_i = 1$, para $i = 1, \ldots, n$, e concluímos que

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1, \forall i = 1, \ldots, n) \overset{(1)}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 1) = p^n,$$

onde na igualdade (1) usamos a independência das variáveis aleatórias X_i. Note também que, por Y_n somente assumir os valores 0 e 1, sua distribuição também é de Bernoulli, porém com parâmetro p^n. Assim, $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{P}(Y_n = 1) = p^n$.

b) É razoável inferirmos que, se a sequência $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, seu limite deve ser zero, dado que a sua probabilidade de sucesso decai exponencialmente com n. Verifiquemos que a convergência se dá quase certamente, e portanto também em probabilidade e distribuição. Fixado $0 < \varepsilon < 1$ queremos que a probabilidade abaixo seja zero:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty} Y_n = 0\right\}^c\right) &= \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} Y_n \neq 0\right)\\ &= \mathbb{P}\left(|Y_n - 0| \geq \varepsilon \text{ infinitas vezes}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\limsup \ \{Y_n \geq \varepsilon\}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\limsup \ \{Y_n = 1\}\right).\end{aligned}$$

A fim de calcular a probabilidade desse limite superior de uma sequência de eventos, usemos os lemas de Borel-Cantelli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n = 1) \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} p^n \overset{(2)}{<} \infty,$$

onde nas igualdades (1) e (2) usamos, respectivamente, o resultado do item a) e a soma da PG infinita. Dessa forma, temos que $\mathbb{P}\left(\limsup \ \{Y_n = 1\}\right) = 0$, e assim, pela definição da convergência quase certa, concluímos que $\overline{X}_n \overset{qc}{\to} 0$.

Questão 3: Para provar a convergência em probabilidade, fixe $0 < \varepsilon < 1$ e note que, pela definição:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon)\\ &= \mathbb{P}(\min(|X_1|, \ldots, |X_n|) \geq \varepsilon)\\ &= \mathbb{P}(|X_1| \geq \varepsilon, \ldots, |X_n| \geq \varepsilon)\\ &= [\mathbb{P}(|X_1| \geq \varepsilon)]^n\\ &= (1-\varepsilon)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Portanto, têm-se a convergência em probabilidade de Y_n para zero. Note que também vale a convergência quase certa, pois por raciocínio análogo às duas questões anteriores, tal convergência vale se a probabilidade $\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon$ infinitas vezes) também for igual a zero. Pelos lemas de Borel-Cantelli temos que esse é o caso, visto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon)^n < \infty.$$

Questão 4: A fim de aferir a convergência em média quadrática de $\overline{X}_n$ para μ, analisemos a expressão abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\overline{X}_n - \mu)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \mu\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i - \mu)(X_j - \mu)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[(X_i - \mu)(X_j - \mu)\right] \\
&\stackrel{*}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] \\
&= \frac{1}{n^2} n\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

onde na igualdade marcada com $*$ usamos a hipótese da descorrelação entre X_i e X_j, se $i \neq j$. Dessa forma, têm-se o resultado desejado.

Questão 5: Não, pois fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) \to 0$, quando $n \to \infty$, de modo que a sequência $F_n(x)$ converge para zero, para todo $x \in \mathbb{R}$. Porém, a função identicamente nula não é função de probabilidade acumulada de nenhuma variável aleatória.

Questão 6: Note que podemos reescrever o numerador da seguinte forma:

$$X_1 + \cdots + X_n = n\overline{X}_n = n\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\overline{X}_n.$$

Analogamente, reescrevemos o denominador da seguinte forma:

$$\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2} = \sqrt{n\overline{X_n^2}}.$$

Portanto, temos que:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}} = \frac{n\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\overline{X}_n}{\sqrt{n\overline{X_n^2}}} = \sqrt{2}\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\overline{X}_n}{\sqrt{\overline{X_n^2}}} = \sqrt{2}\frac{N_n}{D_n}.$$

Notemos que, pelo Teorema Central do Limite, N_n converge em distribuição para uma normal padrão, e pela Lei Forte de Kolmogorov, D_n^2 converge quase certamente (e portanto, em probabilidade) para $\mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{V}(X_i) + \mathbb{E}[X_i]^2 = 2$. Como $x \mapsto \sqrt{x}$ é uma função contínua, temos que $D_n \stackrel{qc}{\to} \sqrt{2}$, e portanto, $D_n \stackrel{p}{\to} \sqrt{2}$. Assim, pelo Teorema de Slutsky, temos que:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}} = \sqrt{2}\frac{N_n}{D_n} \stackrel{p}{\to} \sqrt{2}\frac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{2}} = \mathcal{N}(0,1).$$

Questão 7:

a) Denote por Y_{6n} a quantidade de vezes que o número 6 é observado em $6n$ lançamentos de um dado honesto. Temos então que $Y_{6n} = \sum_{i=1}^{6n} X_i$, onde as variáveis aleatórias X_i são independentes e têm distribuição de Bernoulli de média $\mu = 1/6$ e desvio padrão $\sigma = \frac{1}{6}\sqrt{5}$. Dessa forma, temos que

$$\mathbb{P}(Y_{6n} \geq n) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_{6n} - \mathbb{E}[Y_{6n}]}{\sqrt{\mathbb{V}(Y_{6n})}} \geq \frac{n - \mathbb{E}[Y_{6n}]}{\sqrt{\mathbb{V}(Y_{6n})}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_{6n} - (6n)\mu}{\sigma\sqrt{6n}} \geq 0\right),$$

e pelo Teorema Central do Limite a probabilidade acima converge para $1 - \mathbb{P}(Z \geq 0)$, quando $n \to \infty$, onde Z segue uma distribuição normal padrão. Dessa forma, têm-se o resultado desejado, dado a simetria de Z em torno de zero.

b) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição de Poisson de parâmetro 1. Temos então que $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ segue uma distribuição de Poisson de parâmetro n, de modo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n) &= \mathbb{P}(Y_n \leq n) \\
&= \mathbb{P}(Y_n = 0) + \mathbb{P}(Y_n = 1) + \cdots + \mathbb{P}(Y_n = n) \\
&= e^{-n}\frac{n^0}{0!} + e^{-n}\frac{n^1}{1!} + \cdots + e^{-n}\frac{n^n}{n!} \\
&= e^{-n}\left(1 + n + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right),
\end{aligned}$$

que coincide com a expressão a ser analisada. Por outro lado, temos que:

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n) = \mathbb{P}(Y_n \leq n) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_n - \mathbb{E}[Y_n]}{\sqrt{\mathbb{V}(Y_n)}} \leq 0\right),$$

que pelo Teorema Central do Limite converge para $1 - \mathbb{P}(Z \leq 0)$, quando $n \to \infty$, onde Z segue uma distribuição normal padrão. Portanto, têm-se o resultado desejado.