Cálculo das Probabilidades II - Lista 3 - 2020/01

Prof. Hugo Carvalho

26/02/2021

– INSTRUÇÕES – LEIAM ATENTAMENTE! –

- A data limite de entrega da avaliação é sábado 06/03/2021 às 23h59'. Avaliações entregues após esse prazo serão desconsideradas.
- A entrega deve ser feita exclusivamente através do Google Classroom, clicando na caixa "+ Adicionar ou Criar" dentro da postagem dessa lista, para então anexar um arquivo com sua resolução. Após isso, clique em "Entregar" para enviar sua resolução.
  Atenção: Somente anexar a resolução não é suficiente! O envio deve ser feito para que sua resolução de fato seja entregue.
- Você tem a liberdade de escrever sua resolução no computador (usando Word, LaTeX, dentre outros), ou manuscrito e depois escanear ou fotografar a sua resolução. Nesse último caso, tome cuidado para que o documento fique legível. No caso de fotografar, opte por utilizar luz natural e tome cuidado com sombras.
- **Dica**: Se for fotografar sua resolução com um *smartphone* ou *tablet*, utilize o aplicativo próprio da câmera, e evite fotografar através de WhatsApp, Telegram, Messenger, e outros. Os aplicativos de comunicação, ao utilizarem a câmera, fazem uma severa compressão da imagem, incorrendo em uma grande diminuição de sua qualidade. Para transferir a imagem do celular para o computador prefira fazer o envio por e-mail, ou acessando sua galeria de fotos através do Google Photos no computador (caso já utilize esse aplicativo para gerenciar suas fotos no aparelho).
- Independente do modo de escrita, a resolução deve ser entregue em um único documento, no formato PDF, com a resolução em pé (formato retrato). O *layout* da resolução não será levado em consideração na avaliação, porém o texto deve estar legível para ser corrigido.
  Atenção: Resoluções ilegíveis ou fora desse formato não serão corrigidas e serão desconsideradas.
- A troca de conhecimento na realização da avaliação é permitida e encorajada: ciência se faz com colaboração, e devemos seguir esse espírito aqui. Porém, cada aluno deverá ter a sua própria resolução, e cópias ou outras ilegalidades serão severamente punidas com a anulação da avaliação para o(s) aluno(s) suspeito(s).
- Todos os passos de sua resolução devem ser devidamente justificados.
- Ao entregar essa avaliação, você afirma ter lido e estar de acordo com essas regras, comprometendo-se a cumpri-las.

– Em cada questão abaixo, considere que as variáveis aleatórias estão todas definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ –

Questão 1: *(Convergência quase certa)* Considere $X_1, X_2, X_3, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias. Prove que tal sequência converge quase certamente para 0 se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$, para todo $\varepsilon > 0$.

Obs.: Aponte, explicitamente, caso você precise utilizar alguma hipótese adicional para provar algum dos dois lados da equivalência.

Questão 2: *(Convergência em probabilidade)* Seja $X_1, X_2, X_3, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ para todo i e $\mathbb{V}(X_i)$ é uniformemente limitada em i (ou seja, existe uma constante M satisfazendo $0 < M < \infty$ tal que $\mathbb{V}(X_i) \leq M$ para todo i). Mostre que a sequência de variáveis aleatórias definida por $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k+1}$, para $n \geq 1$, converge em probabilidade para μ^2.

Questão 3: *(Convergência em distribuição)* Assuma que as variáveis aleatórias $X_1, X_2, X_3, \ldots$ são independentes e identicamente distribuídas, e que seguem a *distribuição de Cauchy unilateral*, cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$\frac{2}{\pi(1+x^2)}, \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Mostre que a sequência de variáveis aleatórias definida por $Y_n = \frac{1}{n}\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, para $n \geq 1$, converge em distribuição e encontre a função densidade de probabilidade da distribuição limite.

Dica: As relações abaixo podem ser úteis.

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \quad \text{para} \quad |x| \leq 1.$$

Questão 4: *(Teorema Central do Limite)*

a) Seja $X_1, X_2, X_3, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, de média μ e variância σ^2. Mostre que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| > c\right) \approx 2\left[1 - \Phi\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right],$$

onde Φ denota a função de probabilidade acumulada de uma distribuição normal padrão.

b) Use o resultado do item a) para provar a Lei Fraca dos Grandes Números para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média e variância finitas.

Obs.: Usar o item a) é obrigatório. *Você* não *está autorizado(a) a utilizar* nenhuma *Lei dos Grandes Números nessa questão (por exemplo, a Lei Forte de Kolmogorov, Primeira Lei Forte de Kolmogorov ou resultados análogos* não *podem ser usados). O descumprimento dessa regra anulará* completamente *a sua resolução.*