Cálculo das Probabilidades II - Prova de Segunda Chamada - 2019/1

Prof. Hugo Carvalho

10/07/2019

– TODOS OS PASSOS DEVEM SER DEVIDAMENTE JUSTIFICADOS EM TODAS AS QUESTÕES –

Questão 1: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e defina defina

$$\mathcal{F}_0 = \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1\}.$$

Mostre que $\mathcal{F}_0$ é uma σ-álgebra de conjuntos de Ω. *(1,5)*

Questão 2: Seja (X, Y) um vetor aleatório uniformemente distribuído em um disco centrado na origem e de raio $a > 0$. Faça o que se pede abaixo:

a) Escreva a função densidade de probabilidade conjunta de X e Y. *(0,5)*

b) Seja R a variável aleatória representando a distância do ponto (X, Y) até a origem. Encontre a função densidade de probabilidade de R. *(1,0)*
Dica: Você pode encontrar a densidade conjunta de R e Θ, sendo Θ o ângulo do ponto (X, Y) com o eixo x, através do uso de coordenadas polares, e depois encontrar a marginal em R, mas esse caminho leva a contas em demasia. Existe uma maneira muito mais fácil de fazer essa conta. Minha dica é usar a geometria do problema em questão.

c) Seja $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de vetores aleatórios independentes, onde cada (X_n, Y_n) tem distribuição uniforme no disco centrado na origem e de raio $n \in \mathbb{N}$. Seja $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de variáveis aleatórias representando as distâncias dos pontos (X_n, Y_n) até a origem, para $n \in \mathbb{N}$. A sequência $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para alguma variável aleatória? *(1,0)*

Questão 3: A quantia gasta por um consumidor em uma loja segue uma distribuição exponencial com média 50, medido em reais. Sabe-se que a quantidade de pessoas que compram diariamente nessa loja segue uma distribuição de Poisson de média 20. Calcule a média e variância do montante vendido pela loja em um determinado dia. Assuma independência tanto entre a quantia gasta pelos consumidores quanto com relação à quantidade de consumidores na loja. *(2,0)*

Questão 4: Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de média 0 e variância $0 < \sigma^2 < \infty$. Seja $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ outra sequência de variáveis aleatórias, também independente e identicamente distribuídas, todas independentes de X_n, porém de média μ finita, e nada é dito sobre sua variância. Podemos afirmar que $\overline{Y}_n - \sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow{d} Z$, onde $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$? Justifique adequadamente a sua resposta. *(1,5)*

Questão 5: Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme contínua no intervalo $[-1, 1]$. Defina $Y_n = \min(|X_1|, \ldots, |X_n|)$. Mostre que $Y_n \xrightarrow{p} 0$. Vale também que $Y_n \xrightarrow{qc} 0$? *(1,5)*

Questão 6: Sendo $a \in \mathbb{R}$ e $n \geq 1$, determine o limite em distribuição de $X_n \sim \mathcal{N}(a, 1/n)$. Tal sequência também converge em probabilidade ou quase certamente? *(2,0)*

– FORMULÁRIO –

- **Derivada do arco-tangente**: $\arctan'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$
- **Fórmula da soma da PG**: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} ar^k = a\frac{\left(r^m - r^{n+1}\right)}{1-r}$, se $r \neq 1$.
- **Lemas de Borel-Cantelli**: $A_1, A_2, \ldots$ eventos no mesmo espaço de probabilidade, $\limsup A_n = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k =$ "ocorrência de infinitos dos eventos A_n":

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \text{ e os eventos } A_n \text{ são independentes} \implies \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$$

- **Distribuição de Poisson**: $X \sim \text{Poi}(\lambda) \implies \begin{cases} \mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots \\ \mathbb{E}[X] = \lambda, \quad \mathbb{V}(X) = \lambda \end{cases}$
- **Distribuição Exponencial**: $X \sim \text{Exp}(\lambda) \implies \begin{cases} f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ \mathbb{E}[X] = 1/\lambda, \quad \mathbb{V}(X) = 1/\lambda^2 \end{cases}$
- **Lei da esperança iterada**: $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$
- **Lei da variância iterada**: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{V}(X|Y)] + \mathbb{V}(\mathbb{E}[X|Y])$
- **Des. de Markov**: X va positiva e $t > 0$: $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{E}[X]}{t}$,
- **Des. de Chebyshev**: X va com média e variância finitas, $t > 0$: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{t^2}$
- **Cota de Chernoff**: X va cuja FGM $\psi_X(t)$ existe para t próximo de zero: $\begin{cases} \mathbb{P}(X \geq c) \leq e^{-ct}\psi_X(t), \ \forall t > 0 \\ \mathbb{P}(X \geq c) \leq \min_{t>0}[e^{-ct}\psi_X(t)] \end{cases}$
- **Convergência em distribuição**: $X_n \xrightarrow{d} X \iff F_n(x) \to F_X(x)$, quando $n \to \infty$, para todo x onde F_X for contínua
- **Convergência em probabilidade**: $X_n \xrightarrow{p} X \iff \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$, $\forall \varepsilon > 0$, quando $n \to \infty$
- **Convergência quase certa**: $X_n \xrightarrow{qc} X \iff \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \iff \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n \neq X\right) = 0$
- **Convergência em média** r: $X_n \xrightarrow{r} X \iff \mathbb{E}[|X_n - X|^r] \to 0$, quando $n \to \infty$
- **Teorema de Slutsky**: $X_n \xrightarrow{d} X$ e $Y_n \xrightarrow{p} c$ constante: $\begin{cases} X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c \\ X_n Y_n \xrightarrow{d} cX \\ \dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \dfrac{X}{c}, \text{ se } \mathbb{P}(Y_n = 0) = 0, \forall n \text{ e } c \neq 0 \end{cases}$
- **Lei Fraca dos Grandes Números**: $\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n] \xrightarrow{p} 0$
- **Lei Forte dos Grandes Números**: $\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n] \xrightarrow{qc} 0$
- **Lei Fraca de Chebyshev**: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ independentes dois-a-dois, com variância finita e uniformemente limitadas
- **1a. Lei Forte de Kolmogorov**: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ independente, com média finita e satisfazendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{V}(X_n)}{n^2} < +\infty$
- **Lei Forte de Kolmogorov**: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid com média finita
- **TCL para va's iid**: $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$, se cada X_i tem média μ finita e variância $0 < \sigma^2 < \infty$