# Cálculo das Probabilidades II - Lista 1 - 2020/02 - Gabarito

Prof. Hugo Carvalho

23/04/2021

## – PARTE 1: FUNDAMENTOS –

**Questão 1:**

a) Façamos a prova por indução. Para $n = 1$ (e até mesmo $n = 2$) a igualdade é facilmente verificada. Assumamos que vale para um $n$ qualquer e passemos a $n + 1$. Temos então que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&\overset{*}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right),
\end{aligned}$$

onde na igualdade $*$ usamos o resultado para $n = 2$. Note que o primeiro e último termos são uniões de $n$ conjuntos, caso para o qual assumimos que a fórmula vale. Temos então que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = &\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \underbrace{- \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ i<j}} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)}_{x} + \underbrace{\sum_{\substack{1\le i,j,k,\le n \\ i<j<k}} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k)}_{y} - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_i \cap \cdots \cap A_n)\right] \\
&+ \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&- \left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap A_{n+1})}_{x'} - \underbrace{\sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ i<j}} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_{n+1})}_{y'} + \right. \\
&\left. \sum_{\substack{1\le i,j,k,\le n \\ i<j<k}} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_i \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1})\right].
\end{aligned}$$

Note que o termo marcado com $x$ contempla todas as interseções dois-a-dois com índices até $n$, enquanto que o termo marcado com $x'$ considera um dos índices como sendo $n + 1$; algo análogo acontece nos termos marcados com $y$ e $y'$, porém para três interseções. Raciocínios análogos valem para todos os termos da fórmula acima, de modo que podemos reescrevê-la como:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{1\le i,j\le n+1 \\ i<j}} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{1\le i,j,k,\le n+1 \\ i<j<k}} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n}\mathbb{P}(A_i \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}).$$

b) *(Modelo de resposta)* Para ilustrar o resultado, façamos $n = 3$. Nesse cenário, temos que

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = [\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)] - [\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3)] + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Podemos interpretar que o primeiro termo leva em consideração as probabilidades individuais dos eventos $A_1$, $A_2$ e $A_3$, porém sobreposições dois-a-dois são contadas de modo redundante, e tal redundância é removida subtraindo-se o segundo termo. Porém, a interseção dos três conjuntos, contada três vezes no primeiro termo, foi removida três vezes da conta, e deve ser acrescentada, o que é feito no último termo.

c) *Obs.: Como nesta questão houveram diferentes interpretações que eu não previ a princípio, escrevo abaixo um modelo de solução. Todas as soluções que sejam adequadas dentro de uma interpretação do problema poderão ser consideradas como igualmente corretas.*

Como todos os passageiros remanescentes devem desembarcar no ponto final, devemos considerar somente as sete paradas anteriores. Seja $A_i$ o evento onde ninguém desce na parada $i$, de modo que $A_i^c$ representa alguém descer na parada $i$. Estamos interessados em calcular a probabilidade

$$\mathbb{P}(A_1^c \cap \cdots \cap A_7^c) = \mathbb{P}((A_1 \cup \cdots \cup A_7)^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_7).$$

Note que a probabilidade da interseção de $1 \leq n \leq 7$ dos 7 conjuntos considerados é dada por $\dfrac{(7-n)^{25}}{7^{25}}$; note também que podemos escolher $n$ dos 7 conjuntos para intersectar de $\dbinom{7}{n}$ formas diferentes. Portanto, pelo princípio da inclusão-exclusão, temos que:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_7) = \sum_{n=1}^{7} (-1)^{n-1} \binom{7}{n} \frac{(7-n)^{25}}{7^{25}} = 0{,}1438,$$

de modo que a probabilidade desejada é dada por $1 - 0{,}1438 = 0{,}8562$.

**Questão 2:**

a) Denote por $S$ a variável aleatória que codifica a probabilidade de sucesso do tratamento. Previamente à realização dos testes clínicos, temos que

$$\mathbb{P}(S = s) = \frac{1}{101}, \quad \text{para} \quad s = 0,\ 0{,}01,\ 0{,}02,\ \ldots,\ 0{,}99,\ 1.$$

Denote por $\mathcal{D}$ os dados observados, ou seja, os 7 sucessos e 3 fracassos obtidos no ensaio clínico. O objetivo da questão é encontrarmos a distribuição de $S|\mathcal{D}$. Para isso, usemos o Teorema de Bayes seguido da Lei da Probabilidade total para escrever

$$\mathbb{P}(S = s|\mathcal{D}) = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{D}|S = s)\mathbb{P}(S = s)}{\mathbb{P}(\mathcal{D})} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{D}|S = s)\mathbb{P}(S = s)}{\sum_s \mathbb{P}(\mathcal{D}|S = s)\mathbb{P}(S = s)}.$$

Note que o numerador é dado por $\left[s^7(1-s)^3\right] \times \frac{1}{101}$, de modo que a expressão acima pode ser reescrita como

$$\mathbb{P}(S = s|\mathcal{D}) = \frac{\left[s^7(1-s)^3\right] \times \frac{1}{101}}{\sum_s \left[s^7(1-s)^3\right] \times \frac{1}{101}} = \frac{\left[s^7(1-s)^3\right]}{\sum_s \left[s^7(1-s)^3\right]},$$

para $s = 0,\ 0{,}01,\ 0{,}02,\ \ldots,\ 0{,}99,\ 1$.

b) A probabilidade desejada é dada por

$$\sum_{s \geq 0{,}36} \mathbb{P}(S = s|\mathcal{D}).$$

Tal valor pode ser calculado numericamente e é dado por 0,9866.

## – PARTE 2: VARIÁVEIS E VETORES ALEATÓRIOS –

**Questão 3:**

a) Temos que $\mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^x$, para $x = 0, 1, 2, \dots$ e $\mathbb{P}(Y = y) = q(1-q)^y$, para $y = 0, 1, 2, \dots$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n q(1-q)^y \\
&= pq \sum_{n=0}^{\infty} [(1-p)(1-q)]^n \\
&= \frac{pq}{1-(1-p)(1-q)} \\
&= \frac{pq}{p+q-pq}.
\end{aligned}$$

b) Note que o evento $\{Z = k\}$ é equivalente ao evento $\{X = k, Y > k\} \cup \{Y = k, X > k\} \cup \{X = k, Y = k\}$, e que esses três últimos eventos são dois-a-dois disjuntos. De fato, o evento $\{Z = k\}$ representa a menor dentre as observações $X$ e $Y$ ser igual a $k$. Isso pode ocorrer de três formas:

- $X$ é igual a $k$ e $Y$ é estritamente maior que $k$;
- $Y$ é igual a $k$ e $X$ é estritamente maior que $k$;
- Ambos $X$ e $Y$ são iguais a $k$.

Isso justifica a equivalência entre os eventos. Finalmente, para entender que os três eventos acima descritos são dois-a-dois disjuntos façamos uma analogia geométrica: eles representam, respectivamente os seguintes conjuntos de pontos do plano: $\{(k, k+1), (k, k+2), \dots\}$, $\{(k+1, k), (k+2, k), \dots\}$ e $\{(k, k)\}$, e é fácil vermos que não há nenhum ponto que pertença aos três conjuntos.

Calculemos agora a função de probabilidade de $Z$. Para $k \geq 0$ fixado, temos que: Temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}(X = k, Y > k) + \mathbb{P}(Y = k, X > k) + \mathbb{P}(X = k, Y = k) \\
&= \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y > k) + \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(X > k) + \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) \\
&= p(1-p)^k(1-q)^{k+1} + q(1-q)^k(1-p)^{k+1} + p(1-p)^k q(1-q)^k \\
&= (1-p)^k(1-q)^k[p(1-q) + q(1-p) + pq] \\
&= [1-(p+q-pq)]^k[p+q-pq] \\
&= \xi(1-\xi)^k,
\end{aligned}$$

onde $\xi = p + q - pq$. Portanto, $Z$ também segue uma distribuição Geométrica, porém com parâmetro $\xi$ dado por $p + q - pq$.

c) *(Modelo de resposta)* As variáveis aleatórias $X$ e $Y$ contam a quantidade de fracassos até a obtenção do primeiro sucesso em repetições sucessivas de experimentos com probabilidades $p$ e $q$, respectivamente, de sucesso. Portanto, $Z = \min(X, Y)$ conta a quantidade de fracassos até a obtenção de um sucesso, seja no experimento relacionado a $X$ ou a $Y$. Dessa forma, sua interpretação é a mesma que a de uma distribuição Geométrica, sendo então tal modelo adequado. A fim de justificar o seu parâmetro, notemos que a probabilidade de termos um sucesso no experimento relacionado a $X$ ou a $Y$ será análoga à probabilidade de uma união de conjuntos, mais precisamente:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{sucesso no experimento relacionado a } X \text{ ou a } Y) \\
&\quad = \mathbb{P}(\text{sucesso no exp. relacionado a } X) + \mathbb{P}(\text{sucesso no exp. relacionado a } Y) - \mathbb{P}(\text{sucesso em ambos}) \\
&\quad = p + q - pq,
\end{aligned}$$

sendo a probabilidade de sucesso em ambos igual a $pq$ devido à independência das variáveis aleatórias $X$ e $Y$.

**Questão 4:** *Obs.: Para evitar lançar mão da liberdade estética terrível de chamar "e" de uma variável, além do nosso querido número de Euler, irei trocar a notação das nossas densidades de probabilidade.*

Estamos interessados na variável aleatória $Y = g(S)$, onde a função $g$ é dada por $y = g(s) = ms^2/2$. Note que tal função é diferenciável, e para $s > 0$ é também bijetiva, de modo que sua inversa é dada por $s = h(y) = \sqrt{2y/m}$, para $y > 0$. Temos então que $h'(y) = \dfrac{1}{m\sqrt{2y/m}}$. Por teorema dado em aula, temos que:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_S(h(y))|h'(y)| \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2y}{mc^3} e^{-y/mc^2} \times \left| \frac{1}{m\sqrt{2y/m}} \right| \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi} m^{3/2} c^3} \sqrt{y} e^{-y/mc^2}, \end{aligned}$$

para $y > 0$, que é exatamente a imagem do conjunto $\{s > 0\}$ pela função $g$.

**Questão 5:**

a) Usar a fórmula para a densidade do quociente de duas variáveis aleatórias independentes funciona, porém pode levar a contas mais complicadas. Faremos então através do método do Jacobiano. Para isso, considere a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} U &= X/Y \\ V &= Y. \end{aligned}$$

Encontremos então a densidade conjunta do par $(U, V)$ e após marginalizarmos na variável $V$, teremos a densidade da variável aleatória desejada. Temos então que $(u, v) = g(x, y) = (x/y, y)$, que pode ser invertida para nos dar então $(x, y) = h(u, v) = (uv, v)$. Dessa forma, o determinante jacobiano é dado por

$$\begin{aligned} J &= \det \begin{bmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= v. \end{aligned}$$

Sendo a densidade conjunta de $(X, Y)$ dada por

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

temos que a densidade conjunta de $(U, V)$ é então dada por

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2v^2+v^2)} |v| = \frac{1}{2\pi} |v| e^{-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)},$$

para $u, v \in \mathbb{R}$. A densidade de $U = X/Y$ é obtida então marginalizando em $V$:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(U,V)}(u, v) \; dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} |v| e^{-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)} \; dv \\ &\overset{*}{=} \frac{1}{2\pi} 2 \int_{0}^{+\infty} v e^{-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)} \; dv \\ &\overset{**}{=} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{-w(1+u^2)} \; dw \\ &= \frac{1}{\pi(1+u^2)}, \end{aligned}$$

onde na igualdade $*$ usamos o fato do integrando ser uma função par para nos livrarmos do módulo em $v$ e na igualdade $**$ fizemos a mudança de variável $w = v^2/2$ para na última igualdade calcularmos a integral.

b) *(Modelo de resposta)* No item a) construímos a distribuição de Cauchy como o quociente de duas normais padrão independentes. Podemos extrair daí que a Cauchy provavelmente irá tomar valores arbitrariamente altos com probabilidade não desprezível, visto que o denominador do quociente é bastante concentrado em zero. O fato do numerador também o ser justifica a Cauchy estar centrada no zero.