Cálculo das Probabilidades II - Prova 2 (Gabarito) - 2019/1

Prof. Hugo Carvalho

22/05/2019

Questão 1:

a) Denote a densidade conjunta de X e Y por f_1, e a densidade conjunta de R e Θ por f_2. Sabemos que

$$f_1(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

Pelo método do Jacobiano, temos que $f_2(r,\theta) = f_1(x(r,\theta), y(r,\theta))|J|$, onde

$$J = \det \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y \\ \partial \theta/\partial x & \partial \theta/\partial y \end{bmatrix}}.$$

Pela maneira como a transformação é dada, é muito mais conveniente usar a primeira igualdade, de modo que

$$J = \det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} = r.$$

Como x e y já estão dadas em função de r e θ, também não é necessário inverter a relação, de modo que

$$f_2(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta))} r = \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}}.$$

Finalmente, notamos que de modo a cobrir todo o plano (x,y), as variáveis r e θ devem estar, respectivamente, nos intervalos $[0,\infty)$ e $[0,2\pi)$. Assim, temos que:

$$f_2(r,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}}, & \text{se } 0 \le r < \infty \text{ e } 0 \le \theta < 2\pi \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

b) Sim, pois podemos fatorar a densidade conjunta de R e Θ como $f_2(r,\theta) = g_1(r)g_2(\theta)$, para todos $0 \le r < \infty$ e $0 \le \theta < 2\pi$, onde

$$g_1(r) = \begin{cases} r e^{-\frac{r^2}{2}}, & \text{se } r \ge 0 \\ 0, & \text{se } r < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g_2(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \text{se } 0 \le \theta < 2\pi \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

c) Como Θ é uniforme no intervalo $[0,2\pi)$, a sua densidade necessariamente será $1/2\pi$ nesse intervalo, sendo portanto, a função g_2 acima sua marginal. Finalmente, a marginal de R tem densidade dada pela função g_1 acima.

d) Primeiramente encontremos a sua função de probabilidade acumulada:

$$\mathbb{P}(R^2 \le t) = \mathbb{P}(R \le \sqrt{t}) = \int_0^{\sqrt{t}} r e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr = -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{t}} = 1 - e^{-\frac{t}{2}}, \text{ para } t > 0,$$

onde na primeira igualdade usamos o fato que R assume somente valores positivos. Derivando essa expressão, temos que a função densidade de probabilidade de R^2 é dada por $\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$ para $t > 0$, de modo que sua distribuição é exponencial de parâmetro $1/2$.

e) O par aleatório (R,Θ) representa um ponto no plano, normalmente escolhido, porém exibido em coordenadas polares. Mais precisamente, exibimos uma distribuição de probabilidade para a distância à origem e o ângulo com o eixo x, em vez de distribuições de probabilidades para suas respectivas coordenadas cartesianas. Podemos gerar dois números aleatórios normalmente distribuídos e independentes usando essa transformação da seguinte forma: primeiro geramos um número uniforme entre 0 e 1, que ao ser multiplicado por 2π, será uniforme em $[0,2\pi]$, e tal número representará o ângulo do ponto no plano com o eixo x; para determinar a distância à origem, gere outro número aleatório entre 0 e 1, independente do primeiro, e o transforme em um número aleatório segundo uma exponencial de parâmetro $1/2$, usando o método da transformação integral de probabilidade, para depois tirar sua raiz quadrada, que dará a distância à origem em sua distribuição adequada.

Questão 2:

a) Temos que $\mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^x$, para $x = 0, 1, 2, \dots$ e $\mathbb{P}(Y = y) = q(1-q)^y$, para $y = 0, 1, 2, \dots$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n q(1-q)^y \\
&= pq \sum_{n=0}^{\infty} [(1-p)(1-q)]^n \\
&= \frac{pq}{1-(1-p)(1-q)} \\
&= \frac{pq}{p+q-pq}.
\end{aligned}$$

b) O evento $\{Z = k\}$ representa a menor dentre as observações X e Y ser igual a k. Isso pode ocorrer de três formas:

- X é igual a k e Y é estritamente maior que k;
- Y é igual a k e X é estritamente maior que k;
- Ambos X e Y são iguais a k.

Isso justifica a equivalência entre os eventos. Finalmente, para entender que os três eventos acima descritos são dois-a-dois disjuntos façamos uma analogia geométrica: eles representam, respectivamente os seguintes conjuntos de pontos do plano: $\{(k, k+1), (k, k+2), \dots\}$, $\{(k+1, k), (k+2, k), \dots\}$ e $\{(k, k)\}$, e é fácil vermos que não há nenhum ponto que pertença aos três conjuntos.

c) Temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}(X = k, Y > k) + \mathbb{P}(Y = k, X > k) + \mathbb{P}(X = k, Y = k) \\
&= \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y > k) + \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(X > k) + \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) \\
&= p(1-p)^k(1-q)^{k+1} + q(1-q)^k(1-p)^{k+1} + p(1-p)^k q(1-q)^k \\
&= (1-p)^k(1-q)^k[p(1-q) + q(1-p) + pq] \\
&= [1-(p+q-pq)]^k[p+q-pq] \\
&= \xi(1-\xi)^k,
\end{aligned}$$

onde $\xi = p + q - pq$.

d) As variáveis aleatórias X e Y contam a quantidade de fracassos até a obtenção do primeiro sucesso em repetições sucessivas de experimentos com probabilidades p e q, respectivamente, de sucesso. Portanto, $Z = \min(X, Y)$ conta a quantidade de fracassos até a obtenção de um sucesso, seja no experimento relacionado a X ou a Y. Dessa forma, sua interpretação é a mesma que a de uma distribuição Geométrica, sendo então tal modelo adequado. A fim de justificar o seu parâmetro, notemos que a probabilidade de termos um sucesso no experimento relacionado a X ou a Y será análoga à probabilidade de uma união de conjuntos, mais precisamente:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{sucesso no experimento relacionado a } X \text{ ou a } Y) \\
&\quad = \mathbb{P}(\text{sucesso no exp. relacionado a } X) + \mathbb{P}(\text{sucesso no exp. relacionado a } Y) - \mathbb{P}(\text{sucesso em ambos}) \\
&\quad = p + q - pq,
\end{aligned}$$

sendo a probabilidade de sucesso em ambos igual a pq devido à independência das variáveis aleatórias X e Y.

Questão 3: Note que o círculo centrado na origem e que passa pelo ponto (X, Y) tem raio igual a $\sqrt{X^2 + Y^2}$, de modo que sua área é dada por $\pi(X^2 + Y^2)$. Portanto, o valor esperado que queremos calcular é:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi(X^2 + Y^2)] &= \int_0^1 \int_0^1 \pi(x^2 + y^2)(x + y)\ dxdy \\
&= \pi \int_0^1 \left[\int_0^1 x^3 + x^2 y + y^2 x + y^3\ dx \right] dy \\
&= \pi \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3 y}{3} + \frac{y^2 x^2}{2} + y^3 x \right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \pi \int_0^1 \frac{1}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} + y^3\ dy \\
&= \pi \left[\frac{y}{4} + \frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \pi \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right] \\
&= \pi \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Questão 4: A variável aleatória T é positiva, de modo que podemos calcular o seu valor esperado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= \int_0^\infty [1 - F_T(t)]\ dx \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t)\ dt \\
&= \int_0^\infty a e^{-\lambda t} + (1 - a) e^{-\gamma t}\ dt \\
&= \left[-\frac{a}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{(1 - a)}{\gamma} e^{-\gamma t} \right]_{t=0}^{t=\infty} \\
&= \frac{a}{\lambda} + \frac{(1 - a)}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Questão 5: Provamos em sala que se duas variáveis aleatórias, cujas respectivas médias existem, satisfazem $X \leq Y$, então $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$. Considere, portanto, as variáveis aleatórias Y_a e Y_b tais que $\mathbb{P}(Y_a = a) = 1$ e $\mathbb{P}(Y_b = b) = 1$. Temos que $Y_a \leq X \leq Y_b$, de modo que pelo resultado previamente enunciado vale que $\mathbb{E}[Y_a] \leq \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y_b]$. Como as variáveis aleatórias Y_a e Y_b assumem um respectivo valor fixo com probabilidade um, seus valores esperados são $\mathbb{E}[Y_a] = a$ e $\mathbb{E}[Y_b] = b$. Segue então o resultado desejado.