Cálculo das Probabilidades II - Prova 2 - 2019/1

Prof. Hugo Carvalho

22/05/2019

– TODOS OS PASSOS DEVEM SER DEVIDAMENTE JUSTIFICADOS EM TODAS AS QUESTÕES –

Questão 1: Sejam X e Y variáveis aleatórias normais padrão independentes. Considere o par aleatório (R, Θ) cuja relação com (X, Y) é dada por

$$\begin{cases} X = R\cos(\Theta) \\ Y = R\sin(\Theta). \end{cases}$$

Faça o que se pede abaixo:

a) Encontre a distribuição conjunta de R e Θ. *(2,0)*

b) As variáveis R e Θ são independentes? Justifique. *(0,5)*

c) Calcule as distribuições marginais de R e Θ *(0,5)*

d) Calcule e identifique (ou seja, dê o seu nome usual) a distribuição de R^2. *(1,0)*

e) *(Bônus)* Interprete o par aleatório (R, Θ), e disserte sobre como podemos usar a transformação em questão para gerar números aleatórios seguindo uma distribuição normal padrão, assumindo que sabemos gerar números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1.

Obs.: O símbolo Θ é a letra grega θ maiúscula.
Dica: Essa questão envolve poucas contas.

Questão 2: Sejam $X \sim \text{Geo}(p)$ e $Y \sim \text{Geo}(q)$ variáveis aleatórias independentes, e seja $Z = \min(X, Y)$.

a) Calcule $\mathbb{P}(X = Y)$. *(1,0)*

b) Argumente que o evento $\{Z = k\}$ é equivalente ao evento $\{X = k, Y > k\} \cup \{Y = k, X > k\} \cup \{X = k, Y = k\}$, e que esses três últimos eventos são dois-a-dois disjuntos. *(1,0)*

c) Use o resultado do item b) para encontrar a função de probabilidade de Z e identificar a sua distribuição. *(1,0)*
Dica: Também será uma Geométrica. Faça as contas para encontrar o seu parâmetro.

d) *(Bônus)* Explique intuitivamente porque deveríamos esperar que a distribuição de Z também seja Geométrica, e também dê uma explicação intuitiva para o seu parâmetro, com base na interpretação da distribuição em questão.

Questão 3: A função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Encontre o valor esperado da área do círculo centrado na origem e que passa pelo ponto (X, Y). *(1,5)*

Questão 4: Um modelo para a duração T de um certo tipo de chamada telefônica satisfaz a relação

$$\mathbb{P}(T > t) = ae^{-\lambda t} + (1 - a)e^{-\gamma t},$$

sendo $0 \leq a \leq 1$, $\lambda > 0$ e $\gamma > 0$ parâmetros fixos e conhecidos. Encontre a duração média de uma chamada desse tipo. *(1,0)*

Questão 5: Seja X uma variável aleatória tal que $a \leq X \leq b$, ou seja, X assume valores entre a e b somente. Mostre que $a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$. *(1,5)*