Cálculo das Probabilidades II - Lista 1 - 2021/01 - Gabarito

Prof. Hugo Carvalho

22/08/2021

– PARTE 1: FUNDAMENTOS –

Questão 1: Note que as coleções são dadas, respectivamente, por

$$\mathcal{F} = \{[a,b) \subset \Omega \mid 0 \leq a < b \leq \infty\}$$
$$\mathcal{G} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid A_i \in \mathcal{F}, n = 1,2,3,\dots \right\}.$$

Busquemos por propriedades de σ-álgebra que não são satisfeitas pelas coleções $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Ambas satisfazem a condição i), pois $\Omega = [0,\infty) \in \mathcal{F}, \mathcal{G}$. Para mostrar que $\mathcal{F}$ não é σ-álgebra, note que a propriedade ii), que diz respeito ao complementar, falha. Considere por exemplo, $[1,2) \in \mathcal{F}$. Temos que $[1,2)^c = [0,1) \cup [2,\infty)$, que não é um intervalo. No que diz respeito a $\mathcal{G}$, a propriedade ii) é satisfeita, porém a iii) falha. De fato, o conjunto $[0,1) \cup [2,3) \cup [4,5) \cup [6,7) \cup \dots$ está em $\mathcal{G}$, mas ele não pode ser escrito como uma união finita dos elementos de $\mathcal{F}$.

Uma outra forma de provar que $\mathcal{G}$ não é σ-álgebra é por contradição. Assumindo que $\mathcal{G}$ o seja, as propriedades ii) e iii), junto com as leis de de Morgan, dizem que interseção enumerável de elementos de $\mathcal{G}$ também estarão em $\mathcal{G}$. Teríamos então que $\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 1/n) = \{0\} \in \mathcal{G}$, porém tal conjunto não pode ser escrito como união finita de elementos de $\mathcal{F}$.

Questão 2: Com a errata publicada na plataforma, temos que a definição dos p_k é dada por:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{8\alpha}{9} \\
p_2 = p_3 = p_4 &= \frac{7 - 16\alpha}{27} \\
p_5 = p_6 = p_7 &= \frac{1 + 8\alpha}{27} \\
p_8 &= \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

a) A condição $\alpha \in \left(0, \frac{7}{16}\right)$ garante que nenhum dos p_k é negativo. Verifiquemos somam 1:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{8} p_k &= \frac{8\alpha}{9} + 3\left(\frac{7-16\alpha}{27}\right) + 3\left(\frac{1+8\alpha}{27}\right) + \frac{1}{9} \\
&= \frac{24\alpha + 21 - 48\alpha + 3 + 24\alpha + 3}{27} \\
&= \frac{27}{27} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

b) Para termos independência, devemos ter $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$, para $1 \leq i < j \leq 3$ e $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$. Verifiquemos se tais condições são válidas. Primeiramente, encontremos quem são as interseções:

$$\begin{aligned}
A_1 \cap A_2 &= \{5,6,8\} \\
A_1 \cap A_3 &= \{6,8\} \\
A_2 \cap A_3 &= \{6,8\} \\
A_1 \cap A_2 \cap A_3 &= \{6,8\}.
\end{aligned}$$

Calculando as probabilidades, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= p_5 + p_6 + p_8 = \frac{5+16\alpha}{27} \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) &= p_6 + p_8 = \frac{4+8\alpha}{27} \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) &= p_6 + p_8 = \frac{4+8\alpha}{27} \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= p_6 + p_8 = \frac{4+8\alpha}{27}.
\end{aligned}$$

Finalmente, calculando as probabilidades individuais:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1) &= p_2 + p_5 + p_6 + p_8 = \frac{4}{9} \\
\mathbb{P}(A_2) &= p_3 + p_5 + p_6 + p_8 = \frac{4}{9} \\
\mathbb{P}(A_3) &= p_4 + p_6 + p_7 + p_8 = \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

Considerando, primeiramente, a igualdade $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$, devemos ter:

$$\frac{4+8\alpha}{27} = \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{64}{729} \Rightarrow 1 + 2\alpha = \frac{16}{27} \Rightarrow \alpha = -\frac{11}{54},$$

um valor que não é permitido para α, pois implicará valores de p_5, p_6 e p_7 negativos. Dessa forma, não há como os eventos A_1, A_2 e A_3 serem independentes. Note que não foram estudadas igualdades do tipo $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$, para $i \neq j$, pois o caso estudado já falha.

– PARTE 2: VARIÁVEIS E VETORES ALEATÓRIOS –

Questão 3: Denote por $\mathcal{D}$ os dados observados, ou seja, as 75 observações da face 6 virada para cima em 300 lançamentos do dado. Queremos encontrar quem é a distribuição de probabilidade de $Y|\mathcal{D}$. Pelo Teorema de Bayes, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = y|\mathcal{D}) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{D}|Y = y)\mathbb{P}(Y = y)}{\mathbb{P}(\mathcal{D})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{D}|Y = y)\mathbb{P}(Y = y)}{\sum_y \mathbb{P}(\mathcal{D}|Y = y)\mathbb{P}(Y = y)} \\
&\overset{*}{=} \frac{\binom{75}{300} y^{75}(1-y)^{225}}{\sum_y \binom{75}{300} y^{75}(1-y)^{225}} \\
&= \frac{y^{75}(1-y)^{225}}{\sum_y y^{75}(1-y)^{225}} \\
&\overset{**}{\propto} y^{75}(1-y)^{225},
\end{aligned}$$

onde a passagem marcada com $*$ se justifica pelo fato da probabilidade de observar 75 "sucessos" em 300 tentativas ser dada pela distribuição Binomial, e a passagem marcada com $**$ se dá pelo fato do denominador não depender de y, podendo-se então desconsiderar a constante multiplicativa. Encontramos então, utilizando algum *software* ou a própria calculadora do Google ou do computador que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 0{,}1|\mathcal{D}) &\propto 5{,}06 \times 10^{-86} \\
\mathbb{P}(Y = 0{,}2|\mathcal{D}) &\propto 5{,}92 \times 10^{-75} \\
\mathbb{P}(Y = 0{,}3|\mathcal{D}) &\propto 8{,}53 \times 10^{-75} \\
\mathbb{P}(Y = 0{,}4|\mathcal{D}) &\propto 1{,}73 \times 10^{-80}.
\end{aligned}$$

Normalizando pela soma de tais valores para obter de fato uma medida de probabilidade, temos que:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y = 0{,}1|\mathcal{D}) = 3,50 \times 10^{-12}\\
&\mathbb{P}(Y = 0{,}2|\mathcal{D}) = 0{,}4097\\
&\mathbb{P}(Y = 0{,}3|\mathcal{D}) = 0{,}5903\\
&\mathbb{P}(Y = 0{,}4|\mathcal{D}) = 0{,}0000012.
\end{aligned}$$

Questão 4: Assumindo que G é função de probabilidade acumulada bivariada, temos que

$$\mathbb{P}(x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2) = G(x_2, y_2) - G(x_2, y_1) - G(x_1, y_2) + G(x_1, y_1),$$

para todos os valores $x_1 \le x_2,\ y_1 \le y_2 \in \mathbb{R}$. Porém, tomando $x_1,\ y_1 = 1/4$ e $x_2,\ y_2 = 1/2$ e fazendo as contas na igualdade acima com a definição da função G, teríamos que

$$\mathbb{P}(1/4 < X \le 1/2,\ 1/4 < Y \le 1/2) = -1/4 < 0.$$

Dessa forma, não é possível que G seja uma função de probabilidade acumulada.

Questão 5:

a) Podemos calcular a marginal de X da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dy\\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1 + xy)\ dy\\
&= \frac{1}{4}\left[y + \frac{xy^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=1}\\
&= 1/2,\ \text{para } |x| < 1.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos que a marginal de Y é dada por $f_Y(y) = 1/2$, para $|y| < 1$. Como temos que $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, temos que X e Y não são independentes.

b) Para mostrar que X^2 e Y^2 são independentes, primeiramente encontremos sua função de probabilidade acumulada conjunta. Note que tanto X^2 quanto Y^2 tomam valores no intervalo $(0, 1)$, de modo que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X^2 < x\ Y^2 < y) &= \mathbb{P}(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}\ \ -\sqrt{y} < Y < \sqrt{y})\\
&= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{4}(1 + st)\ dsdt\\
&= \sqrt{x}\sqrt{y},\ \text{para } 0 < x, y < 1.
\end{aligned}$$

Como a função de probabilidade acumulada conjunta de X^2 e Y^2 pode ser fatorada como o produto de funções que dependem somente de x e de y, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, temos que tais variáveis aleatórias são independentes.

Questão 6:

a) Note que (X, Y) tem densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{para } x^2 + y^2 \le 1\\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A transformação de (X, Y) para (V, W) é dada por

$$\begin{cases} v &= g_1(x, y) = x\sqrt{-2\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}\\ w &= g_2(x, y) = y\sqrt{-2\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Primeiramente, vamos inverter essa relação. Ao calcular as quantidades informadas no enunciado, concluímos que:

$$\begin{cases} v^2 + w^2 & = -2\ln(x^2+y^2) \\ \frac{w}{v} & = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Utilizando essas relações, temos que:

$$\begin{aligned} & v^2 + w^2 = -2\ln(x^2+y^2) \\ \implies & \ln(x^2+y^2) = -\frac{1}{2}(v^2+w^2) \\ \implies & x^2 + y^2 = e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)} \\ \implies & x^2(1 + y^2/x^2) = e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)} \\ \implies & x^2(1 + w^2/v^2) = e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)} \\ \implies & x^2 = \frac{e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)}}{1+w^2/v^2} = v^2\frac{e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)}}{v^2+w^2} \\ \implies & x = v\frac{e^{-\frac{1}{4}(v^2+w^2)}}{\sqrt{v^2+w^2}}. \end{aligned}$$

Seguindo um raciocínio análogo, podemos mostrar que

$$y = w\frac{e^{-\frac{1}{4}(v^2+w^2)}}{\sqrt{v^2+w^2}}.$$

Contas tediosas levam a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}(v^2+w^2)}}{2(v^2+w^2)^{3/2}}(v^4 + v^2w^2 - 2w^2) \\ \frac{\partial x}{\partial w} &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}(v^2+w^2)}}{2(v^2+w^2)^{3/2}}vw(v^2+w^2+2) \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}(v^2+w^2)}}{2(v^2+w^2)^{3/2}}vw(v^2+w^2+2) \\ \frac{\partial y}{\partial w} &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}(v^2+w^2)}}{2(v^2+w^2)^{3/2}}(w^4 + v^2w^2 - 2v^2), \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} J &= \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)}}{4(v^2+w^2)^3}[(v^4+v^2w^2-2w^2)(w^4+v^2w^2-2v^2) - v^2w^2(v^2+w^2+2)^2] \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)}}{4(v^2+w^2)^3}[-2(v^2+w^2)^3] \\ &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)}. \end{aligned}$$

Dessa forma, a densidade conjunta de (V, W) é dada por

$$f(v,w) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)},$$

e resta encontrarmos o seu suporte. Para isso, analisamos a expressão $v = x\sqrt{-2\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}$. Para $x^2 + y^2 \leq 1$, temos que $\ln(x^2+y^2)$ assume os valores de $-\infty$ até 0, e portanto, $-2\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ assume valores de 0 até ∞, bem como sua raiz quadrada. Para obter v, multiplicamos essa quantidade por x, que assume valores entre -1 e , de modo que v assume então qualquer valor real. Por um raciocínio análogo, w também assume qualquer valor real, de modo que o suporte da densidade conjunta de (V, W) é todo o plano $\mathbb{R}^2$. Portanto, V e W têm distribuições normais independentes.

b) Esse método pode ser utilizado para gerar amostras de distribuições normais. Primeiro gera-se uma amostra (X, Y) uniformemente distribuída no círculo, e após aplicar a transformação de interesse, temos duas amostras de normais padrão independentes.