Cálculo das Probabilidades II - Lista 2 - 2020/02

Prof. Hugo Carvalho

14/05/2021

– INSTRUÇÕES – LEIAM ATENTAMENTE! –

- A data limite de entrega da avaliação é domingo 23/05/2021 às 23h59'. Avaliações entregues após esse prazo serão desconsideradas.

- A entrega deve ser feita exclusivamente através do Google Classroom, clicando na caixa "+ Adicionar ou Criar" dentro da postagem dessa lista, para então anexar um arquivo com sua resolução. Após isso, clique em "Entregar" para enviar sua resolução.
Atenção: Somente anexar a resolução não é suficiente! O envio deve ser feito para que sua resolução de fato seja entregue.

- Você tem a liberdade de escrever sua resolução no computador (usando Word, LaTeX, dentre outros), ou manuscrito e depois escanear ou fotografar a sua resolução. Nesse último caso, tome cuidado para que o documento fique legível. No caso de fotografar, opte por utilizar luz natural e tome cuidado com sombras.

- **Dica**: Se for fotografar sua resolução com um *smartphone* ou *tablet*, utilize o aplicativo próprio da câmera, e evite fotografar através de WhatsApp, Telegram, Messenger, e outros. Os aplicativos de comunicação, ao utilizarem a câmera, fazem uma severa compressão da imagem, incorrendo em uma grande diminuição de sua qualidade. Para transferir a imagem do celular para o computador prefira fazer o envio por e-mail, ou acessando sua galeria de fotos através do Google Photos no computador (caso já utilize esse aplicativo para gerenciar suas fotos no aparelho).

- Independente do modo de escrita, a resolução deve ser entregue em um único documento, no formato PDF, com a resolução em pé (formato retrato). O *layout* da resolução não será levado em consideração na avaliação, porém o texto deve estar legível para ser corrigido.
Atenção: Resoluções ilegíveis ou fora desse formato não serão corrigidas e serão desconsideradas.

- A troca de conhecimento na realização da avaliação é permitida e encorajada: ciência se faz com colaboração, e devemos seguir esse espírito aqui. Porém, cada aluno deverá ter a sua própria resolução, e cópias ou outras ilegalidades serão severamente punidas com a anulação da avaliação para o(s) aluno(s) suspeito(s).

- Todos os passos de sua resolução devem ser devidamente justificados.

- Ao entregar essa avaliação, você afirma ter lido e estar de acordo com essas regras, comprometendo-se a cumpri-las.

Questão 1: Seja X uma variável aleatória contínua. Mostre que o valor de $a \in \mathbb{R}$ que minimiza a quantidade $\mathbb{E}[|X - a|]$ é a *mediana* de X.
Obs.: A mediana *de uma variável aleatória X é qualquer valor $m \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}(X \geq m) = \mathbb{P}(X \leq m) = 1/2$.*

Questão 2: Sejam $X, Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Z \sim N(0, 1)$ variáveis aleatórias independentes. Faça o que se pede abaixo:

a) Mostre que $\mathbb{E}[|Z|] = \sqrt{2/\pi}$ e $\mathbb{V}(|Z|) = 1 - 2/\pi$.

b) Mostre que $\mathbb{E}[\max(X, Y)] = \mu + \sigma/\sqrt{\pi}$ e que $\mathbb{E}[\min(X, Y)] = \mu - \sigma/\sqrt{\pi}$.
Dica.: Estude como $\max(X, Y) + \min(X, Y)$ e $\max(X, Y) - \min(X, Y)$ se relacionam com X e Y.

Questão 3: O número de pessoas que chegam na plataforma de lançamento de uma estação espacial, desde o início do expediente até um instante de tempo t, segue uma distribuição de Poisson com média λt. A primeira nave pode chegar a qualquer momento (uniformemente) na estação, desde o início do expediente até um tempo $T > 0$ previamente fixado, independentemente do número de pessoas que estão aguardando. Qual é a média e variância do número de passageiros que serão transportados, assumindo que a nave tem capacidade para transportar todos os passageiros que estão aguardando na plataforma?

Questão 4: Assuma que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X é uma função par (ou seja, satisfazendo $f_X(-x) = f_X(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Mostre que a sua função geradora de momentos $\psi_X(t)$ também é uma função par.

Questão 5: Seja $\psi_X(t)$ a função geradora de momentos de uma variável aleatória X, e defina $S(t) = \ln(\psi_X(t))$. Mostre que:

a) $\left.\dfrac{d}{dt}S(t)\right|_{t=0} = \mathbb{E}[X]$.

b) $\left.\dfrac{d^2}{dt^2}S(t)\right|_{t=0} = \mathbb{V}(X)$.