Cálculo das Probabilidades II - Lista 2 - Gabarito - 2021/02

Prof. Hugo Carvalho

24/01/2022

Questão 1:

a) A covariância entre W_1 e W_2 é dada por $\mathbb{E}[W_1W_2] - \mathbb{E}[W_1]\mathbb{E}[W_2]$. Para calcular essas esperanças, utilizaremos a lei da esperança iterada:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_1W_2] &= \mathbb{E}_Y[\mathbb{E}[W_1W_2|Y]] \\
&\overset{\star}{=} \mathbb{E}_Y[\mathbb{E}[W_1|Y]\mathbb{E}[W_2|Y]] \\
&= \mathbb{E}_Y[Y^2] \\
&= \mathbb{V}_Y(Y) + \mathbb{E}_Y[Y]^2 \\
&= b^2 + m^2. \\
\mathbb{E}[W_i] &= \mathbb{E}_Y[\mathbb{E}[W_i|Y]] \\
&= \mathbb{E}_Y[Y] \\
&= m, \text{ para } i = 1, 2,
\end{aligned}$$

onde a igualdade marcada com $\star$ se justifica por W_1 e W_2 serem condicionalmente independentes dado Y. Dessa forma, temos que

$$\mathbb{E}[W_1W_2] - \mathbb{E}[W_1]\mathbb{E}[W_2] = b^2 + m^2 - m^2 = b^2.$$

b) Não se pode afirmar que W_1 e W_2 são independentes, pois sua covariância é dada por b^2, que sendo a variância de uma distribuição de probabilidade, é usualmente um valor diferente de zero. E mesmo tendo $b = 0$, somente poderíamos afirmar que W_1 e W_2 são descorrelacionadas, o que não necessariamente implica em sua independência, sem maiores informações sobre sua distribuição conjunta.

c) *(Resposta livre, sendo esse um modelo)* Podemos interpretar o modelo do enunciado da seguinte forma:

   i) Sorteie um valor $Y = y$ segundo uma distribuição $N(m, b^2)$;
   ii) Sorteie dois valores $W_i = w_i$, para $i = 1, 2$, segundo uma distribuição $N(y, \sigma^2)$.

   Ao repetir esse procedimento n vezes, obtemos duas sequência de valores $w_1^{(1)}, \dots, w_1^{(n)}$ e $w_2^{(1)}, \dots, w_2^{(n)}$, sendo que cada $w_i^{(k)}$ tem média $y^{(k)}$, que foi sorteada de acordo com $N(m, b^2)$. Analisemos dois casos:

   – Assumindo que b seja um valor relativamente "pequeno", haverá pouca variabilidade nos $y^{(k)}$ sorteados, e todos os $w_i^{(k)}$ sorteados terão uma média parecida, próxima de m. Como o único fator que introduz dependência entre W_1 e W_2 é a sua média em comum, é razoável interpretar que elas serão pouco correlacionados nesse cenário.
   – Agora, se b é um valor relativamente "grande", haverá maior variabilidade nos $y^{(k)}$ sorteados, e cada par $(w_1^{(k)}, w_2^{(k)})$ estará centrado em torno de tais valores mais discrepantes. Dessa forma, conhecer, digamos, $w_1^{(k)}$ nos dá uma "dica" sobre o comportamento de $w_2^{(k)}$, indicando uma maior correlação entre essas variáveis.

Questão 2:

a) Denote por R a variável aleatória que conta o número de pessoas que procuram reserva para o voo, de modo que $R \sim \text{Poi}(\lambda = 170)$. Seja S a variável aleatória que conta o número de pessoas que de fato aparece para embarcar em um desses voos. Intuitivamente, se conhecemos a quantidade de pessoas que procurou uma reserva para o voo (ou seja, se temos $R = r$ conhecido), como temos a probabilidade de um passageiro com reserva não comparecer ao embarque

($q = 0{,}07$), temos como inferir alguma informação probabilística sobre $S|(R = r)$. Dessa forma, pela lei da esperança iterada, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}_R[\mathbb{E}_S[S|R]] \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}[S|R = r]\mathbb{P}(R = r) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}[S|R = r]e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}.
\end{aligned}$$

A fim de completar tal expressão, estudemos a quantidade $\mathbb{E}[S|R = r]$. Assumindo independência entre os passageiros e interpretando uma pessoa que de fato aparece para embarcar como um "sucesso" e vice-versa, queremos contar o número de sucessos em uma determinada quantidade de "tentativas", onde a probabilidade de "sucesso" é igual a $1-q$. Isso dá a ideia que a distribuição de $S|(R = r)$ é Binomial, com probabilidade de sucesso igual a $1 - q$. Para encontrar o outro parâmetro, note que o problema fixa $Q = 165$, ou seja, no máximo 165 passageiros conseguem uma reserva para tal voo, porém é possível que tenhamos $r < 165$. Dessa forma, a distribuição completa de $S|(R = r)$ é Binomial de parâmetros $\min(r, Q)$ e $1 - q$, de modo que seu valor esperado é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S|R = r] &= \sum_{k=0}^{\min(r,Q)} k\binom{\min(r, Q)}{k}(1 - q)^k q^{\min(r,Q)-k} \\
&= \min(r, Q)(1 - q) \\
&= \begin{cases} r(1 - q), & \text{se } r \leq Q \\ Q(1 - q), & \text{se } r > Q. \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, a expressão completa para $\mathbb{E}[S]$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\min(r,Q)} k\binom{\min(r, Q)}{k}(1 - q)^k q^{\min(r,Q)-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} \\
&= (1 - q)\sum_{r=0}^{Q} re^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} + Q(1 - q)\sum_{r=Q+1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}.
\end{aligned}$$

b) Denote por D o número de pessoas que aparecem para embarcar em um desses voos mas não consegue um assento devido ao *overbooking*. Um raciocínio semelhante à primeira parte do item a) nos dá que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D] &= \mathbb{E}_R[\mathbb{E}_D[D|R]] \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}[D|R = r]\mathbb{P}(R = r) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}[D|R = r]e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}.
\end{aligned}$$

Porém agora que o estudo da quantidade $\mathbb{E}[D|R = r]$ será sensivelmente diferente de seu análogo no item a). Note que:

- Se $r \leq N$, há menos reservas do que assentos na aeronave, e portanto, todos os passageiros que aparecem para embarcar conseguem um assento. Nesse caso temos então que $D|R = r$ será igual a zero, com probabilidade 1;
- Se $N < r \leq Q$, então cada um dos $r - N$ passageiros excedentes estão sujeitos a não conseguirem assento caso compareçam para embarcar, o que ocorre com probabilidade $1 - q$. Essa situação é descrita por uma distribuição Binomial de parâmetros $r - N$ e $1 - q$, de modo que $\mathbb{E}[D|R = r]$ será igual a $(r - N)(1 - q)$.
- Finalmente, se $r > Q$, a quantidade de passageiros excedentes será sempre de $Q - N$, que também estão sujeitos a não conseguirem assento somente caso compareçam para embarcar. Analogamente, tal situação também é descrita por uma distribuição Binomial, mas dessa vez com parâmetros $Q - N$ e $1 - q$, e assim, temos que $\mathbb{E}[D|R = r]$ será dado por $(Q - N)(1 - q)$.

Juntando tais informações, concluímos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[D] &= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}[D|R=r] e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} \\ &= (1-q)\sum_{r=N+1}^{Q}(r-N)e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} + (Q-N)(1-q)\sum_{r=Q+1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}.\end{aligned}$$

c) Os valores numéricos são dados por $\mathbb{E}[S] = 150{,}61$ e $\mathbb{E}[D] = 2{,}71$. Para calculá-los, coloco abaixo um "pseudo-código" (bastante verboso e não lá muito eficiente... porém legível!):

   i) Armazene em um vetor, digamos `A`, as quantidades $e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$, para $r = 0, \ldots, Q$.

   ii) Armazene no vetor `B` as quantidades r, para $r = 0, \ldots, Q$.

   iii) Multiplique entrada-a-entrada os vetores `A` e `B`, some, e multiplique por $1-q$. Some a esse resultado o produto de $Q(1-q)$ com 1 menos a soma das entradas de `A`. Isso dá o resultado numérico do item a).

   iv) Armazene no vetor `C` as quantidades $e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$, para $r = N+1, \ldots, Q$.

   v) Armazene no vetor `D` as quantidades $r - N$, para $r = N+1, \ldots, Q$.

   vi) Multiplique entrada-a-entrada os vetores `C` e `D`, some, e multiplique por $1-q$. Some a esse resultado o produto de $(Q-N)(1-q)$ com 1 menos a soma das entradas de `A`. Isso dá o resultado numérico do item b).

Questão 3:

a) A função geradora de momentos de Y é definida como $\psi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}]$, porém o limite superior do somatório que define Y é uma variável aleatória, o que nos dificulta utilizar resultados prévios para poder fazer a conta. A fim de contornar tal questão, condicionamos em $N = n$, e aí temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{tY}|N=n\right] &= \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^{N} X_i}|N=n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}|N=n\right] \\ &\overset{*}{=} \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{N}\mathbb{E}[e^{tX_i}] \\ &= \left[\psi_X(t)\right]^n,\end{aligned}$$

onde na igualdade marcada com $*$ usamos a independência de $X_1, X_2, \ldots$ e N. Dessa forma, temos que

$$\mathbb{E}_Y\left[e^{tY}|N\right] = \left[\psi_X(t)\right]^N,$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\psi_Y(t) &= \mathbb{E}\left[e^{tY}\right] \\ &= \mathbb{E}_N\left[\mathbb{E}_Y\left[e^{tY}|N\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_N\left[\left[\psi_X(t)\right]^N\right].\end{aligned}$$

b) Primeiramente, calculamos as duas primeiras derivadas de ψ_Y:

$$\begin{aligned}\psi_Y'(t) &= \mathbb{E}_N\left[N\left[\psi_X(t)\right]^{N-1}\psi_X'(t)\right] \\ \psi_Y''(t) &= \frac{d}{dt}\mathbb{E}_N\left[N\left[\psi_X(t)\right]^{N-1}\psi_X'(t)\right] \\ &= \mathbb{E}_N\left[N(N-1)\left[\psi_X(t)\right]^{N-2}\left[\psi_X'(t)\right]^2 + N\left[\psi_X(t)\right]^{N-1}\psi_X''(t)\right].\end{aligned}$$

Temos então que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \psi'_Y(0) \\
&= \mathbb{E}_N\left[N\left[\psi_X(0)\right]^{N-1}\psi'_X(0)\right] \\
&= \mathbb{E}_N\left[N\mathbb{E}[X]\right] \\
&= \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X].
\end{aligned}
$$

E também:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \\
&= \psi''(0) - \mathbb{E}[N]^2\mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}_N\left[N(N-1)\left[\psi_X(0)\right]^{N-2}\left[\psi'_X(0)\right]^2 + N\left[\psi_X(0)\right]^{N-1}\psi''_X(0)\right] - \mathbb{E}[N]^2\mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X\right]^2\mathbb{E}\left[N(N-1)\right] + \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}\left[N\right] - \mathbb{E}[N]^2\mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X\right]^2\mathbb{E}\left[N^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2\mathbb{E}\left[N\right] + \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}\left[N\right] - \mathbb{E}[N]^2\mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}[N]\left[\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\right] + \mathbb{E}[X]^2\left[\mathbb{E}[N^2] - \mathbb{E}[N]^2\right] \\
&= \mathbb{E}[N]\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}[X]^2\mathbb{V}(N).
\end{aligned}
$$

Questão 4:

a) Sabendo o fato de que $X|(Y=p) \sim \text{Bern}(n,p)$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\psi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] \\
&= \mathbb{E}_Y\left[\mathbb{E}_X\left[e^{tX}|Y\right]\right] \\
&\overset{*}{=} \mathbb{E}_Y\left[(Ye^t + 1 - Y)^n\right] \\
&= \int_0^1 (ye^t + 1 - y)^n \, dy \\
&\overset{**}{=} \frac{1}{e^t - 1}\int_1^{e^t} z^n \, dz \\
&= \frac{1}{e^t - 1}\frac{e^{t(n+1)} - 1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{e^{t(n+1)} - 1}{e^t - 1},
\end{aligned}
$$

onde na igualdade marcada com $*$ usamos o fato enunciado no início da resolução, e em $**$ usamos a mudança de variáveis $z = ye^t + 1 - y$.

b) Seja Z uma variável aleatória com distirbuição uniforme discreta no intervalo $\{0, 1, \ldots, n\}$ Pela definição da função geradora de momentos, temos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{tZ}] &= \sum_{z=0}^{n} e^{tz}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{z=0}^{n} e^{tz} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{e^{t(n+1)} - 1}{e^t - 1},
\end{aligned}
$$

onde na última igualdade usamos a fórmula para a soma de uma PA.

c) Note que X e Z têm a mesma função geradora de momentos. Por Teorema visto durante o curso, temos que X e Z têm a mesma distribuição. Sabendo que Z é uniforme contínua em $\{0, 1, \ldots, n\}$, concluímos que X também o é.