Cálculo das Probabilidades II - Lista 2 - Gabarito - 2021/01

Prof. Hugo Carvalho

19/09/2021

Questão 1:

a) Pela Lei da Variância Iterada, temos que $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{V}(Y|X)] + \mathbb{V}(\mathbb{E}[Y|X])$. Dividindo toda essa equação por $\mathbb{V}(Y)$, temos que:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{\mathbb{E}[\mathbb{V}(Y|X)]}{\mathbb{V}(Y)} + \frac{\mathbb{V}(\mathbb{E}[Y|X])}{\mathbb{V}(Y)} \\ &= \frac{\mathbb{E}[\mathbb{V}(Y|X)]}{\mathbb{V}(Y)} + K_X(Y) \\ &\overset{*}{\geq} K_X(Y) \\ &\overset{**}{\geq} 0,\end{aligned}$$

onde a igualdade marcada com $*$ é justificada pelo fato de $\mathbb{E}[\mathbb{V}(Y|X)] \geq 0$ pois $\mathbb{V}(Y|X)$ é uma variável aleatória maior que ou igual a zero, e a igualdade marcada com $**$ justifica-se por termos $\mathbb{V}(\mathbb{E}[Y|X]) \geq 0$. Note que termos $\mathbb{V}(Y) > 0$ é fundamental para podermos tomar a divisão por tal termo.

b) Se X e Y são independentes, então $Y|X$ e Y têm a mesma distribuição, de modo que $\mathbb{E}[Y|X]$ é igual a $\mathbb{E}[Y]$, uma variável aleatória constante, de modo que sua variância é zero. Dessa forma, têm-se que

$$K_X(Y) = \frac{\mathbb{V}(\mathbb{E}[Y|X])}{\mathbb{V}(Y)} = \frac{\mathbb{V}(\mathbb{E}[Y])}{\mathbb{V}(Y)} = \frac{0}{\mathbb{V}(Y)} = 0.$$

c) A densidade conjunta de X e Y é dada por $f(x, y) = 1/\pi$, para $x^2+y^2 \leq 1$, e 0 caso contrário. Calculando as marginais, temos que:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dy \\ &= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\ dy \\ &= \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},\ \text{para } |x| \leq 1.\end{aligned}$$

Por simetria, temos que $f_Y(y) = 2\sqrt{1-y^2}/\pi$, para $|y| \leq 1$. Nota-se que X e Y não são independentes pois temos $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, visto que sequer o suporte de ambas as funções coincidem. Provemos agora que $K_X(Y) = 0$. Como têm-se que $\mathbb{V}(Y) > 0$, basta provarmos que $\mathbb{V}(\mathbb{E}[Y|X]) = 0$, ou seja, basta provarmos que $\mathbb{E}[Y|X = x]$ será sempre o mesmo, para todo x, de modo que a variável aleatória $\mathbb{E}[Y|X]$ será então constante. De fato, temos que:

$$\begin{aligned}f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{1/\pi}{2\sqrt{1-x^2}/\pi} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},\ \text{para } |y| \leq \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

Dessa forma, para todo $x \in [-1, 1]$, temos que $Y|X = x$ segue uma distribuição uniforme no intervalo $[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$, simétrico em torno de zero, de modo que $\mathbb{E}[Y|X = x] = 0$, para todo $x \in [-1, 1]$. Pela discussão acima, isso prova o resultado desejado.

d) Consideremos a hipótese de $\mathbb{E}[Y|X] = aX+b$. Para calcularmos quem é $K_X(Y)$, passemos a variância em tal igualdade, de onde obteremos que:

$$\mathbb{V}(\mathbb{E}[Y|X]) = \mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(b) = a^2\mathbb{V}(X),$$

de modo que ao dividirmos por $\mathbb{V}(Y)$, temos que:

$$K_X(Y) = \frac{\mathbb{V}(\mathbb{E}[Y|X])}{\mathbb{V}(Y)} = a^2\frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(Y)}.$$

Basta estudarmos quem é o coeficiente a na relação $\mathbb{E}[Y|X] = aX + b$. Primeiramente, tomando esperança em relação a X e multiplicando por $\mathbb{E}[X]$ tal equação, temos que:

$$\mathbb{E}[X]\mathbb{E}_X\left[\mathbb{E}[Y|X]\right] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[aX+b] \Rightarrow \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X]^2 + b\mathbb{E}[X].$$

Finalmente, multiplicando a relação da hipótese por X e tomando valor esperado em X, temos que:

$$\mathbb{E}_X[X\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[aX^2 + bX] \overset{*}{\Rightarrow} \mathbb{E}[XY] = a\mathbb{E}[X^2] + b\mathbb{E}[X],$$

onde a implicação marcada com $*$ justifica-se por um resultado da Seção 5.3 da referência [MM], referente à Lei da Esperança Iterada. Subtraindo a segunda conclusão da primeira, temos que:

$$\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = a(\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2) \Rightarrow a = \frac{\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\mathbb{V}(X)}.$$

Finalmente, temos que:

$$\begin{aligned}
K_X(Y) &= a^2\frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(Y)} \\
&= \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)^2}{\mathbb{V}(X)^2}\frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(Y)} \\
&= \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)^2}{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)} \\
&= \rho_{X,Y}^2,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Questão 2: Denote por X o tempo até a primeira falha total do sistema. Queremos calcular $\mathbb{E}[X]$, mas note que é mais conveniente estudar o comportamento de tal variável aleatória à luz dos tempos de funcionamento individuais das unidades. Para isso, sejam então T_1 e T_2 os tempos de funcionamento individuais das unidades de controle. Do enunciado, temos que $T_1, T_2 \sim \operatorname{Exp}(\mu)$, sendo também independentes. Pela Lei da Esperança Total, temos que

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|T_2 \leq \tau]\mathbb{P}(T_2 \leq \tau) + \mathbb{E}[X|T_2 > \tau]\mathbb{P}(T_2 > \tau).$$

As duas probabilidades na equação acima são rapidamente calculadas a partir da densidade da Exponencial, e são dadas, respectivamente, por $1 - e^{-\mu\tau}$ e $e^{-\mu\tau}$. Vamos nos ater, portanto, aos valores esperados. No primeiro termo, temos que calcular $\mathbb{E}[X|T_2 \leq \tau]$. Note que, condicionado em $\{T_2 \leq \tau\}$, a distribuição de X é a mesma de $T_1 + T_2$, pois tal evento indica que a primeira unidade falhou e a segunda falhará enquanto a primeira ainda não se recuperou. Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|T_2 \leq \tau] &= \mathbb{E}[T_1 + T_2|T_2 \leq \tau] \\
&= \mathbb{E}[T_1|T_2 \leq \tau] + \mathbb{E}[T_2|T_2 \leq \tau] \\
&\overset{*}{=} \mathbb{E}[T_1] + \mathbb{E}[T_2|T_2 \leq \tau] \\
&= \frac{1}{\mu} + \int_0^\tau t\frac{\mu e^{-\mu t}}{\mathbb{P}(T_2 \leq \tau)}\,dt \\
&= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu(1 - e^{-\mu\tau})}(1 - e^{-\mu\tau} - \mu\tau e^{-\mu\tau}),
\end{aligned}$$

onde na igualdade marcada com $*$ usamos o fato que T_1 e T_2 são independentes. Para calcularmos $\mathbb{E}[X|T_2 > \tau]$, note que o condicionamento em $\{T_2 > \tau\}$ significa que a segunda unidade em funcionamento irá falhar somente após a primeira se recuperar da falha, de modo que após a recuperação da primeira unidade, observamos, pela propriedade da perda de memória, essencialmente, uma réplica do processo todo desde seu início no tempo zero. Dessa forma, seja Y uma variável aleatória com a mesma distribuição de X. Temos então que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|L_2 > \tau] &\overset{*}{=} \mathbb{E}[L_1 + \tau + Y] \\
&= \mathbb{E}[L_1] + \tau + \mathbb{E}[Y] \\
&= \frac{1}{\mu} + \tau + \mathbb{E}[X],
\end{aligned}$$

onde a igualdade marcada com $*$ justifica-se pela discussão acima da conta. Juntando ambos os cálculos, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X|T_2 \leq \tau]\mathbb{P}(T_2 \leq \tau) + \mathbb{E}[X|T_2 > \tau]\mathbb{P}(T_2 > \tau) \\ &= \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu(1-e^{-\mu\tau})}(1 - e^{-\mu\tau} - \mu\tau e^{-\mu\tau})\right](1 - e^{-\mu\tau}) + \left[\frac{1}{\mu} + \tau + \mathbb{E}[X]\right] e^{-\mu\tau},\end{aligned}$$

que podemos isolar $\mathbb{E}[X]$ e obter que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2 - e^{-\mu\tau}}{\mu(1 - e^{-\mu\tau})}.$$

Questão 3:

a) Consideremos a expressão da série para o cálculo de $G_X(z)$. Assumindo que podemos trocar a derivada com a soma infinita, temos então que:

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dz^k}G_X(z) &= \frac{d^k}{dz^k}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dz^k} z^n \mathbb{P}(X = n) \\ &\overset{*}{=} \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)z^{n-k}\mathbb{P}(X = n),\end{aligned}$$

onde na expressão marcada com $*$ usamos o fato que $\dfrac{d^k}{dz^k}z^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)z^{n-k}$ se $k \leq n$ e 0 se $k > n$. Avaliando tal expressão para $z = 1$, temos que:

$$\left.\frac{d^k}{dz^k}G_X(z)\right|_{z=1} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)\mathbb{P}(X = n),$$

que é exatamente a definição de $\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)]$. Finalmente, utilizando tal resultado com $k = 1$, podemos concluir que $G'_X(1) = \mathbb{E}[X]$, e com $k = 2$ temos que:

$$G''_X(1) = \mathbb{E}[X(X-1)] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^2] - G'_X(1),$$

que após reordenação, nos dá $\mathbb{E}[X^2] = G''_X(1) + G'_X(1)$.

b) Utilizando diretamente a definição da função geradora de probabilidades, temos que:

$$\begin{aligned}G_X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^n}{n!} \\ &\overset{*}{=} e^{-\lambda}e^{z\lambda} \\ &= e^{-\lambda(1-z)},\end{aligned}$$

onde na igualdade marcada com $*$ usamos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$.

c) Tomando a definição da função geradora de probabilidades e a avaliando em $z = -1$, temos que:

$$G_X(-1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n \text{ par}} \mathbb{P}(X = n) - \sum_{n \text{ ímpar}} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \text{ ser par}) - \mathbb{P}(X \text{ ser ímpar}).$$

Somando a equação acima com a equação $1 = \mathbb{P}(X \text{ ser par}) + \mathbb{P}(X \text{ ser ímpar})$, temos que

$$G_X(-1) + 1 = 2\mathbb{P}(X \text{ ser par}),$$

que ao dividir por 2, nos dá o resultado desejado.

Questão 4:

a) Para calcular a função geradora de probabilidades de S, consideremos a Lei da Esperança total, condicionando em N:

$$\begin{aligned}
G_S(z) &= \mathbb{E}[z^S] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[z^S | N = n]\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[z^{\sum_{k=0}^{N} X_k} | N = n]\mathbb{P}(N = n) \\
&= \mathbb{E}[z^0]\mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[z^{X_1 + \cdots + X_n}]\mathbb{P}(N = n) \\
&= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{X_1 + \cdots + X_n}(z)\mathbb{P}(N = n) \\
&= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} [A(z)]^n \mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [A(z)]^n \mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [A(z)]^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A(z)\lambda)^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda A(z)} \\
&= e^{-\lambda[1 - A(z)]}.
\end{aligned}$$

Temos então o resultado desejado.

b) Utilizando o resultado da Questão 3a), temos que $\mathbb{E}[S] = G'_S(1)$ e também que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S) &= \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2 \\
&= G''_S(1) + G'_S(1) - [G'_S(1)]^2.
\end{aligned}$$

Calculando as derivadas, temos que:

$$\begin{aligned}
G'_S(z) &= \frac{d}{dz} e^{-\lambda[1 - A(z)]} = \lambda A'(z) e^{-\lambda[1 - A(z)]} \\
G''_S(z) &= \frac{d}{dz}\left[\lambda A'(z) e^{-\lambda[1 - A(z)]}\right] \\
&= \lambda A''(z) e^{-\lambda[1 - A(z)]} + \lambda^2 [A'(z)]^2 e^{-\lambda[1 - A(z)]} \\
&= e^{-\lambda[1 - A(z)]}\left[\lambda A''(z) + \lambda^2 [A'(z)]^2\right].
\end{aligned}$$

Primeiramente, note que toda função geradora de probabilidades calculada em $z = 1$ será igual a 1, visto que será o somatório de todas as probabilidades possíveis para a variável aleatória em questão. Dessa forma, temos que $A(z) = 1$, e portanto:

$$\begin{aligned}
G'_S(1) &= \lambda A'(1) e^{-\lambda[1 - A(1)]} = \lambda A'(1) = \lambda \mathbb{E}[X_1] \\
G''_S(1) &= e^{-\lambda[1 - A(1)]}\left[\lambda A''(1) + \lambda^2 [A'(1)]^2\right] \\
&= \lambda\left[\mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]\right] + \lambda^2 \mathbb{E}[X_1]^2.
\end{aligned}$$

Da primeira dessas duas expressões acima, temos diretamente que $\mathbb{E}[S] = G'_S(1) = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$; da segunda juntamente com a primeira, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S) &= \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2 \\
&= [G''_S(1) + G'_S(1)] - [G'_S(1)]^2 \\
&= \lambda\mathbb{E}[X_1^2] - \lambda\mathbb{E}[X_1] + \lambda^2\mathbb{E}[X_1]^2 + \lambda\mathbb{E}[X_1] - \lambda^2\mathbb{E}[X_1]^2 \\
&= \lambda\mathbb{E}[X_1^2] \\
&= \lambda\left[\mathbb{V}(X_1) + \mathbb{E}[X_1]^2\right] \\
&= \mathbb{E}[N]\mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(N)\mathbb{E}[X_1]^2,
\end{aligned}$$

visto que $\lambda = \mathbb{E}[N] = \mathbb{V}(N)$.