# Cálculo das Probabilidades II - Prova Final - 2019/1

Prof. Hugo Carvalho

05/07/2019

**– TODOS OS PASSOS DEVEM SER DEVIDAMENTE JUSTIFICADOS EM TODAS AS QUESTÕES –**

**Questão 1:** Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e sejam $B, A_1, A_2, \dots$ eventos em $\mathcal{F}$. Prove que se os conjuntos $A_n$ são disjuntos, com probabilidades estritamente positivas e satisfazem $\mathbb{P}(B|A_n) \geq c$ para todo $n = 1, 2, \dots$, então vale que

$$\mathbb{P}\left(B \;\middle|\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq c. \qquad \textit{(2,0)}$$

**Questão 2:** Sejam $U_1$ e $U_2$ variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme contínua em $(0, 1)$ e defina

$$\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \\ X_2 &= \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2). \end{aligned}$$

Mostre que as componentes do vetor aleatório $(X_1, X_2)$ têm distribuição normal padrão e são independentes. *(1,5)*

**Questão 3:** Seleciona-se, ao acaso, um número $x$ em $(0, 1)$. Seja então $Y$ o número de caras em $n$ lançamentos independentes de uma moeda, cuja probabilidade de cair cara é igual a $x$. Calcule a média e a variância de $Y$. *(2,0)*

**Questão 4:** Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média 0 e variância 2. Obtenha o limite em distribuição de

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}}. \qquad \textit{(1,5)}$$

**Questão 5:** Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias simétricas em torno de 0 tal que

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \varepsilon\right) \leq e^{-3n\varepsilon^2/2}, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Mostre que $\overline{X}_n \overset{qc}{\to} 0$. *(2,0)*

*Obs.: Note que NÃO é dito que elas têm média finita, logo você NÃO está autorizado a usar esse fato, a menos que o demonstre a partir das hipóteses da questão.*

**Questão 6:** A sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $X_n \sim \mathcal{N}(n, \sigma^2)$ são variáveis aleatórias independentes, converge em distribuição para alguma variável aleatória? *(2,0)*

# – FORMULÁRIO –

- **Derivada do arco-tangente**: $\arctan'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$
- **Fórmula da soma da PG**: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} ar^k = a\frac{\left(r^m - r^{n+1}\right)}{1-r}$, se $r \neq 1$.
- **Lemas de Borel-Cantelli**: $A_1, A_2, \dots$ eventos no mesmo espaço de probabilidade, $\limsup A_n = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k =$ "ocorrência de infinitos dos eventos $A_n$":

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \text{ e os eventos } A_n \text{ são independentes } \implies \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$$

- **Distribuição binomial**: $X \sim \text{Bin}(n,p) \implies \begin{cases} \mathbb{P}(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0,1,\dots,n \\ \mathbb{E}[X] = np, \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p) \end{cases}$
- **Lei da esperança iterada**: $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$
- **Lei da variância iterada**: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{V}(X|Y)] + \mathbb{V}(\mathbb{E}[X|Y])$
- **Des. de Markov**: $X$ va positiva e $t > 0$: $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{E}[X]}{t}$,
- **Des. de Chebyshev**: $X$ va com média e variância finitas, $t > 0$: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{t^2}$
- **Cota de Chernoff**: $X$ va cuja FGM $\psi_X(t)$ existe para $t$ próximo de zero: $\begin{cases} \mathbb{P}(X \geq c) \leq e^{-ct}\psi_X(t), \ \forall t > 0 \\ \mathbb{P}(X \geq c) \leq \min_{t>0}[e^{-ct}\psi_X(t)] \end{cases}$
- **Convergência em distribuição**: $X_n \xrightarrow{d} X \iff F_n(x) \to F_X(x)$, quando $n \to \infty$, para todo $x$ onde $F_X$ for contínua
- **Convergência em probabilidade**: $X_n \xrightarrow{p} X \iff \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0, \ \forall \varepsilon > 0$, quando $n \to \infty$
- **Convergência quase certa**: $X_n \xrightarrow{qc} X \iff \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \iff \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n \neq X\right) = 0$
- **Convergência em média** $r$: $X_n \xrightarrow{r} X \iff \mathbb{E}[|X_n - X|^r] \to 0$, quando $n \to \infty$
- **Teorema de Slutsky**: $X_n \xrightarrow{d} X$ e $Y_n \xrightarrow{p} c$ constante: $\begin{cases} X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c \\ X_n Y_n \xrightarrow{d} cX \\ \dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \dfrac{X}{c}, \text{ se } \mathbb{P}(Y_n = 0) = 0, \forall n \text{ e } c \neq 0 \end{cases}$
- **Lei Fraca dos Grandes Números**: $\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n] \xrightarrow{p} 0$
- **Lei Forte dos Grandes Números**: $\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n] \xrightarrow{qc} 0$
- **Lei Fraca de Chebyshev**: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ independendentes dois-a-dois, com variância finita e uniformemente limitadas
- **1a. Lei Forte de Kolmogorov**: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ independente, com média finita e satisfazendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{V}(X_n)}{n^2} < +\infty$
- **Lei Forte de Kolmogorov**: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid com média finita
- **TCL para va's iid**: $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, se cada $X_i$ tem média $\mu$ finita e variância $0 < \sigma^2 < \infty$