Cálculo das Probabilidades II - Lista 1 (Gabarito) - 2020/PLE

Prof. Hugo Carvalho

25/06/2020

– PARTE 1: FUNDAMENTOS –

Questão 1: Provemos que as três propriedades de uma σ-álgebra são satisfeitas:

i) $\Omega \in \mathcal{G}$, pois $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

ii) Tome $A \in \mathcal{G}$, e mostremos que $A^c \in \mathcal{G}$. De fato,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbb{P}(A) = 0 \\ 0, & \text{se } \mathbb{P}(A) = 1. \end{cases}$$

Portanto, vemos que A^c satisfaz às condições da definição de $\mathcal{G}$, de modo que $A^c \in \mathcal{G}$.

iii) Tome $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}$, e queremos mostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$. Dividamos em dois casos:

$\underline{\mathbb{P}(A_n) = 0, \forall n}$: Nesse caso, temos que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0,$$

de modo que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$, pois sua probabilidade é nula.

$\underline{\text{Existe pelo menos um } n_0 \text{ tal que } \mathbb{P}(A_{n_0}) = 1}$: Nesse caso, temos que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \mathbb{P}(A_{n_0}) = 1,$$

onde usamos o fato que $A_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dessa forma, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$, pois sua probabilidade é 1.

Questão 2:

a) Utilizando a desigualdade de Bonferroni, temos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

b) Utilizando a desigualdade de Bonferroni, temos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \mathbb{P}(A_n)] = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 1.$$

c) Da definição de probabilidade condicional, temos que:

$$\mathbb{P}\left(B \,\middle|\, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{\mathbb{P}(B \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n))}{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)} = \frac{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n))}{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)},$$

onde na última igualdade usamos a propriedade distributiva da interseção sobre a união. Agora, como os conjuntos A_n são dois-a-dois disjuntos, temos que os conjuntos $A_n \cap B$ também o são, de modo que:

$$\frac{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty}(B \cap A_n))}{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)}{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)},$$

onde na última igualdade usamos a definição de probabilidade condicional. Agora podemos usar a hipótese da questão, $\mathbb{P}(B|A_n) \geq c$, para concluir que:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)} \geq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c\mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)} = c\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)} = c,$$

onde na última igualdade utilizamos novamente o fato dos conjuntos A_n serem dois-a-dois disjuntos. Portanto, temos o resultado desejado.

d) Primeiramente, note que pelo fato dos conjuntos A_n formarem uma partição de Ω, podemos escrever o evento $B \cap C$ como

$$B \cap C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B \cap C),$$

sendo os elementos de tal união também dois-a-dois disjuntos. Da definição de probabilidade condicional, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|C) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B \cap C))}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A_n|C)\mathbb{P}(B|A_n \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n|C)\mathbb{P}(B|A_n \cap C),\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos a Regra do Produto.

– PARTE 2: VARIÁVEIS E VETORES ALEATÓRIOS –

Questão 3:

a) Encontremos a função de probabilidade de $X + Y$. Primeiramente, note que $X + Y$ pode assumir os valores $0, 1, 2, \ldots$. Dado z em tal conjunto, queremos estudar a probabilidade do evento $\{X + Y = z\}$. Note que, sendo $X = x$, Y necessariamente deverá assumir o valor $z - x$, para $x = 0, 1, \ldots, z$. Dessa forma, o evento $\{X + Y = z\}$ pode ser reescrito como $\bigcup_{x=0}^{z} \{X = x \text{ e } Y = z - x\}$, de modo a nos permitir utilizar a independência entre X e Y, sendo os conjuntos dessa união dois-a-dois disjuntos. Temos então que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + Y = z) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x=0}^{z} \{X = x \text{ e } Y = z - x\}\right) \\ &= \sum_{x=0}^{z} \mathbb{P}(X = x \text{ e } Y = z - x) \\ &= \sum_{x=0}^{z} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = z - x) \\ &= \sum_{x=0}^{z} \left[e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^x}{x!}\right]\left[e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{z-x}}{(z-x)!}\right] \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x=0}^{z} \frac{1}{x!(z-x)!}\lambda_1^x \lambda_2^{z-x} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{z!} \sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!(z-x)!}\lambda_1^x \lambda_2^{z-x} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{z!}(\lambda_1 + \lambda_2)^z,\end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos a expansão binomial. Reconhecemos essa fórmula como sendo a função de probabilidade de uma Poisson de parâmetro $\lambda_1 + \lambda_2$, sendo essa a distribuição de $X_1 + X_2$.

b) Utilizando a definição de probabilidade condicional, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x | X + Y = z) &= \frac{\mathbb{P}(X = x \text{ e } X + Y = z)}{\mathbb{P}(X + Y = z)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = x \text{ e } Y = z - x)}{\mathbb{P}(X + Y = z)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = z - x)}{\mathbb{P}(X + Y = z)} \\
&= \frac{\left[e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^x}{x!}\right] \left[e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{z-x}}{(z-x)!}\right]}{\left[e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^z}{z!}\right]} \\
&= \frac{z!}{x!(z-x)!} \frac{\lambda_1^x \lambda_2^{z-x}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{z \pm x}} \\
&= \frac{z!}{x!(z-x)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^x \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{z-x} \\
&= \frac{z!}{x!(z-x)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{z-x},
\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade reescrevemos o evento $\{X = x \text{ e } X + Y = z\}$ como $\{X = x \text{ e } Y = z - x\}$, e na terceira igualdade usamos a independência entre X e Y. Note que reconhecemos tal expressão como a função de probabilidade de uma distribuição Binomial de parâmetros z e $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

c) *(Resposta livre, sendo esse um modelo)* Para ilustrar, sejam X e Y o número de pessoas que entram em determinada loja em um período de uma hora e que compram algum produto ou só "dão uma olhadinha", respectivamente. Dessa forma, $X + Y$ é o número total de pessoas que entra nessa loja nesse mesmo intervalo de tempo. Como X, Y, e $X + Y$ contam eventos da mesma natureza e estamos assumindo que X e Y são Poisson, parece razoável que $X + Y$ também o seja. Como os parâmetros de X e Y podem ser interpretados como a quantidade média de pessoas que entram na loja por hora, é razoável que sua soma seja o parâmetro de $X + Y$. Nesse mesmo contexto, o comerciante está interessado mais nas pessoas que de fato fazem alguma compra, sendo a entrada de tal cliente um evento que ele caracteriza como "sucesso". Assim, $X | X + Y$ conta o número de sucessos em $X + Y$ observações de indivíduos que entram na loja, de modo que a Binomial parece um modelo razoável. Note que o parâmetro $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ mede a proporção de pessoas que de fato compram algo, quantidade razoável de ser chamada de "probabilidade de sucesso".

Questão 4:

a) Note, primeiramente, que $[X]$ assume os valores $0, 1, 2, \ldots$. Portanto, para que tenhamos $[X] = n$ devemos ter $X \in [n, n + 1)$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Portanto, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X] = n) &= \mathbb{P}(n \leq X < n + 1) \\
&= \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} \, dt \\
&= -e^{-\lambda t}\Big|_{t=n}^{t=n+1} \\
&= -[e^{-\lambda(n+1)} - e^{-\lambda n}] \\
&= (e^{-\lambda})^n (1 - e^{-\lambda}),
\end{aligned}$$

que reconhecemos como a função de probabilidade de uma distribuição Geométrica de parâmetro $p = 1 - e^{-\lambda}$. Portanto, $[X] \sim \text{Geo}(1 - e^{-\lambda})$.

b) *(Resposta livre, sendo esse um modelo)* Se pensarmos que X é o tempo transcorrido entre duas ocorrências sucessivas de um evento de interesse, para que tenhamos a sua parte inteira igual a n, devemos ter a ocorrência de n intervalos sucessivos de uma unidade de tempo sem a ocorrência de tal evento, e isso tem probabilidade $e^{-\lambda n}$, sendo tal fato argumentado por uma integração ou pela propriedade da perda de memória da Exponencial. Seguidamente, no próximo intervalo de uma unidade de tempo necessariamente deverá ocorrer ao menos um evento de interesse, e a probabilidade disso ocorrer, novamente pela perda de memória, é dada por $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1)$, justamente o parâmetro p de $[X]$.

Questão 5:

a) Sendo X com distribuição de Rayleigh de parâmetro θ, temos que:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \int_0^x \frac{t}{\theta^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\theta^2}\right) \, dt \\ &= -\exp\left(-\frac{t^2}{2\theta^2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right), \end{aligned}$$

para $x \geq 0$.

b) Calculemos, primeiramente, a função de probabilidade acumulada de Y:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(\min_i(X_i) \leq y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\max_i(X_i) > y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > y) \ldots \mathbb{P}(X_n > y) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{y^2}{2\theta_1^2}\right) \ldots \exp\left(-\frac{y^2}{2\theta_n^2}\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{y^2}{2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i^2}\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{y^2}{2(1/\sum_{i=1}^n 1/\theta_i^2)}\right), \end{aligned}$$

para $y \geq 0$, de modo que sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{y}{(1/\sum_{i=1}^n 1/\theta_i^2)} \exp\left(-\frac{y^2}{2(1/\sum_{i=1}^n 1/\theta_i^2)}\right),$$

para $y \geq 0$, que reconhecemos como a densidade de uma distribuição de Rayleigh com parâmetro $\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n 1/\theta_i^2}}$.

Questão 6:

a) Note que (X, Y) tem densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{para } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A transformação de (X, Y) para (V, W) é dada por

$$\begin{cases} v &= g_1(x, y) = x\sqrt{-2\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} \\ w &= g_2(x, y) = y\sqrt{-2\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Primeiramente, vamos inverter essa relação. Ao calcular as quantidades informadas no enunciado, concluímos que:

$$\begin{cases} v^2 + w^2 &= -2\ln(x^2 + y^2) \\ \frac{w}{v} &= \frac{y}{x} \end{cases}$$

Utilizando essas relações, temos que:

$$
\begin{aligned}
& v^2 + w^2 = -2\ln(x^2+y^2) \\
\implies & \ln(x^2+y^2) = -\frac{1}{2}(v^2+w^2) \\
\implies & x^2 + y^2 = e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)} \\
\implies & x^2(1+y^2/x^2) = e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)} \\
\implies & x^2(1+w^2/v^2) = e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)} \\
\implies & x^2 = \frac{e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)}}{1+w^2/v^2} = v^2\frac{e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)}}{v^2+w^2} \\
\implies & x = v\frac{e^{-\frac{1}{4}(v^2+w^2)}}{\sqrt{v^2+w^2}}.
\end{aligned}
$$

Seguindo um raciocínio análogo, podemos mostrar que

$$y = w\frac{e^{-\frac{1}{4}(v^2+w^2)}}{\sqrt{v^2+w^2}}.$$

Contas tediosas levam a:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}(v^2+w^2)}}{2(v^2+w^2)^{3/2}}(v^4+v^2w^2-2w^2) \\
\frac{\partial x}{\partial w} &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}(v^2+w^2)}}{2(v^2+w^2)^{3/2}}vw(v^2+w^2+2) \\
\frac{\partial y}{\partial v} &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}(v^2+w^2)}}{2(v^2+w^2)^{3/2}}vw(v^2+w^2+2) \\
\frac{\partial y}{\partial w} &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}(v^2+w^2)}}{2(v^2+w^2)^{3/2}}(w^4+v^2w^2-2v^2),
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\begin{aligned}
J &= \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)}}{4(v^2+w^2)^3}[(v^4+v^2w^2-2w^2)(w^4+v^2w^2-2v^2) - v^2w^2(v^2+w^2+2)^2] \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)}}{4(v^2+w^2)^3}[-2(v^2+w^2)^3] \\
&= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, a densidade conjunta de (V, W) é dada por

$$f(v,w) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(v^2+w^2)},$$

e resta encontrarmos o seu suporte. Para isso, analisamos a expressão $v = x\sqrt{-2\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}$. Para $x^2+y^2 \leq 1$, temos que $\ln(x^2+y^2)$ assume os valores de $-\infty$ até 0, e portanto, $-2\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ assume valores de 0 até ∞, bem como sua raiz quadrada. Para obter v, multiplicamos essa quantidade por x, que assume valores entre -1 e , de modo que v assume então qualquer valor real. Por um raciocínio análogo, w também assume qualquer valor real, de modo que o suporte da densidade conjunta de (V, W) é todo o plano $\mathbb{R}^2$. Portanto, V e W têm distribuições normais independentes.

b) Esse método pode ser utilizado para gerar amostras de distribuições normais. Primeiro gera-se uma amostra (X, Y) uniformemente distribuída no círculo, e após aplicar a transformação de interesse, temos duas amostras de normais padrão independentes.