Cálculo das Probabilidades II - Lista 2 - 2020/02 - Gabarito

Prof. Hugo Carvalho

14/05/2021

Questão 1: Sendo $f_X(x)$ a função densidade de probabilidade da variável aleatória X, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X-a|] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x-a| f_X(x)\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{a} -(x-a) f_X(x)\ dx + \int_{a}^{+\infty} (x-a) f_X(x)\ dx \\ &= a\left[\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\ dx - \int_{a}^{+\infty} f_X(x)\ dx\right] + \left[\int_{a}^{+\infty} x f_X(x)\ dx - \int_{-\infty}^{a} x f_X(x)\ dx\right].\end{aligned}$$

Utilizando o fato que $\frac{d}{dy}\int_b^y g(x)\ dx = g(y)$ e a regra do produto para a primeira parte da igualdade acima, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}\mathbb{E}[|X-a|] &= \left[\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\ dx - \int_{a}^{+\infty} f_X(x)\ dx\right] + a[f_X(a) + f_X(a)] - [a f_X(a) + a f_X(a)] \\ &= \mathbb{P}(X \leq a) - \mathbb{P}(X \geq a).\end{aligned}$$

Queremos que a derivada acima seja igual a zero, para encontrar os pontos críticos de $a \mapsto \mathbb{E}[|X-a|]$. Isso nos leva à igualdade $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X \geq a)$, que é satisfeita para valores de a que sejam medianas de X. Para garantirmos que tal ponto é de mínimo de $a \mapsto \mathbb{E}[|X-a|]$, note que $\mathbb{P}(X \leq a) - \mathbb{P}(X \geq a) \leq 0$ para $a \leq m$ e $\mathbb{P}(X \leq a) - \mathbb{P}(X \geq a) \geq 0$ para $a \geq m$, onde m é uma mediana de X. Uma outra possibilidade é tomar a segunda derivada e notar que ela é igual a $2f_X(a) \geq 0$.

Questão 2:

a) Aplicando a lei do estatístico preguiçoso juntamente com o fato que $|z|$ e $f_Z(z)$ são funções pares (e portanto, seu produto também é uma função par), temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|Z|] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |z| f_Z(z)\ dz \\ &= 2\int_0^{+\infty} z\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\ du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}},\end{aligned}$$

onde aplicamos a substituição simples $u = z^2$. Para calcular a variância de $|Z|$, note que:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(|Z|) &= \mathbb{E}[|Z|^2] - \mathbb{E}[|Z|]^2 \\ &= \mathbb{E}[Z^2] - \frac{2}{\pi} \\ &= [\mathbb{V}(Z) + \mathbb{E}[Z]^2] - \frac{2}{\pi} \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

b) Seguindo a dica e após um pouco de meditação, temos que:

$$\begin{cases}\max(X,Y) + \min(X,Y) = X + Y \\ \max(X,Y) - \min(X,Y) = |X-Y|.\end{cases}$$

Tomando valores esperados, temos que

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\max(X,Y)] + \mathbb{E}[\min(X,Y)] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 2\mu \\ \mathbb{E}[\max(X,Y)] - \mathbb{E}[\min(X,Y)] = \mathbb{E}[|X-Y|]. \end{cases}$$

Para tratar a quantidade $\mathbb{E}[|X-Y|]$, note que $X - Y \sim \mathrm{N}(0, 2\sigma^2)$, de modo que $(X-Y)/\sigma\sqrt{2} \sim \mathrm{N}(0,1)$. Aplicando o resultado do item a), temos que $\mathbb{E}[|X-Y|]/\sigma\sqrt{2} = \mathbb{E}[|Z|] = \sqrt{2/\pi}$. Dessa forma, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\max(X,Y)] + \mathbb{E}[\min(X,Y)] = 2\mu \\ \mathbb{E}[\max(X,Y)] - \mathbb{E}[\min(X,Y)] = 2\sigma/\sqrt{\pi}, \end{cases}$$

que após solucionado, nos retorna o resultado desejado.

Questão 3: Para cada $t \geq 0$, denote por $N(t)$ o número de pessoas que chegaram na plataforma de lançamento até o instante de tempo t. Denote também por Y o tempo de chegada da primeira nave na estação. Dessa forma, temos que $N(t) \sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$, $Y \mathrm{Unif}[0,T]$ e ambas as distribuições são independentes, para todos os valores de t. Queremos calcular $\mathbb{E}[N(Y)]$ e $\mathbb{V}(Y)$. A fim de utilizar a lei da esperança iterada, usemos primeiramente a independência para obtermos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_N[N(Y)|Y=t]] &= \mathbb{E}_N[N(t)|Y=t] \\ &= \mathbb{E}_N[N(t) \\ &= \lambda t. \end{aligned}$$

Portanto, isso nos dá que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(Y)] &= \mathbb{E}_Y[\mathbb{E}_N[N(Y)|Y]] \\ &= \mathbb{E}[\lambda Y] \\ &= \lambda \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Agora, a fim de calcular $\mathbb{V}(Y)$, utilizemos a relação abaixo, apresentada em aula (aqui, X e Y temporariamente estão denotando variáveis aleatórias genéricas, não necessariamente as mesmas da resolução da questão):

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}_Y[\mathbb{V}_X(X|Y)] + \mathbb{V}_Y(\mathbb{E}_X[X|Y]).$$

Transportando para nossas variáveis aleatórias, temos que:

$$\mathbb{V}(N(Y)) = \mathbb{E}_Y[\mathbb{V}_N(N(Y)|Y)] + \mathbb{V}_Y(\mathbb{E}_N[N(Y)|Y]).$$

Para o primeiro termo, nós temos que, usando a independência:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_N(N(Y)|Y=t) &= \mathbb{V}_N(N(t)|Y=t) \\ &= \mathbb{V}_N(N(t)) \\ &= \lambda t, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Y[\mathbb{V}_X(X|Y)] &= \mathbb{E}_Y[\lambda Y] \\ &= \lambda \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Para o segundo termo, fazemos um raciocínio análogo, e temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_N[N(Y)|Y=t] &= \mathbb{E}_N[N(t)|Y=t] \\ &= \mathbb{E}_N[N(t)] \\ &= \lambda t, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_Y(\mathbb{E}_N[N(Y)|Y]) &= \mathbb{V}_Y(\lambda Y)\\ &= \lambda^2 \mathbb{V}_Y(Y)\\ &= \lambda^2 \frac{T^2}{12}.\end{aligned}$$

Finalmente, juntando ambos os resultados, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(N(Y)) &= \mathbb{E}_Y[\mathbb{V}_N(N(Y)|Y)] + \mathbb{V}_Y(\mathbb{E}_N[N(Y)|Y])\\ &= \lambda \frac{T}{2} + \lambda^2 \frac{T^2}{12}.\end{aligned}$$

Questão 4: Queremos mostrar que $\psi_X(-t) = \psi_X(t)$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ onde $\psi_X(t)$ esteja definida. Pela definição, temos que:

$$\psi_X(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_X(x)\ dx.$$

Usando a paridade da função densidade de probabilidade de X e fazendo a mudança de variáveis $y = -x$, temos que:

$$\begin{aligned}\psi_X(-t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_X(x)\ dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_X(-x)\ dx\\ &= -\int_{+\infty}^{-\infty} e^{ty} f_X(y)\ dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty} f_X(y)\ dy\\ &= \psi_X(t).\end{aligned}$$

Um outro caminho é mostrar que $-X$ e X têm a mesma distribuição de probabilidade e concluir que

$$\psi_X(-t) = \mathbb{E}[e^{-tX}] = \mathbb{E}[e^{t(-X)}] = \mathbb{E}[e^{tX}],$$

uma vez que o valor esperado depende somente da distribuição da variável aleatória.

Questão 5:

a) Fazendo a conta diretamente, temos que:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt} S(t)\right|_{t=0} &= \left.\frac{d}{dt} \ln(\psi_X(t))\right|_{t=0}\\ &= \left.\frac{\psi'_X(t)}{\psi_X(t)}\right|_{t=0}\\ &= \frac{\psi'_X(0)}{\psi_X(0)}\\ &= \frac{\mathbb{E}[X]}{1}\\ &= \mathbb{E}[X].\end{aligned}$$

b) Também fazendo a conta diretamente, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}S(t)\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\frac{\psi'_X(t)}{\psi_X(t)}\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\psi_X(t)\psi''_X(t) - \psi'_X(t)^2}{\psi_X(t)^2}\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\psi_X(0)\psi''_X(0) - \psi'_X(0)^2}{\psi_X(0)^2} \\
&= \frac{1.\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}{1^2} \\
&= \mathbb{V}(X).
\end{aligned}$$