Cálculo das Probabilidades II - Lista 1 - 2021/01

Prof. Hugo Carvalho

13/08/2021

– INSTRUÇÕES – LEIAM ATENTAMENTE! –

- A data limite de entrega da avaliação é domingo 22/08/2021 às 23h59'. Avaliações entregues após esse prazo serão desconsideradas.
- A entrega deve ser feita exclusivamente através do Google Classroom, clicando na caixa "+ Adicionar ou Criar" dentro da postagem dessa lista, para então anexar um arquivo com sua resolução. Após isso, clique em "Entregar" para enviar sua resolução.
  Atenção: Somente anexar a resolução não é suficiente! O envio deve ser feito para que sua resolução de fato seja entregue.
- Você tem a liberdade de escrever sua resolução no computador (usando Word, LaTeX, dentre outros), ou manuscrito e depois escanear ou fotografar a sua resolução. Nesse último caso, tome cuidado para que o documento fique legível. No caso de fotografar, opte por utilizar luz natural e tome cuidado com sombras.
- **Dica**: Se for fotografar sua resolução com um *smartphone* ou *tablet*, utilize o aplicativo próprio da câmera, e evite fotografar através de WhatsApp, Telegram, Messenger, e outros. Os aplicativos de comunicação, ao utilizarem a câmera, fazem uma severa compressão da imagem, incorrendo em uma grande diminuição de sua qualidade. Para transferir a imagem do celular para o computador prefira fazer o envio por e-mail, ou acessando sua galeria de fotos através do Google Photos no computador (caso já utilize esse aplicativo para gerenciar suas fotos no aparelho).
- Independente do modo de escrita, a resolução deve ser entregue em um único documento, no formato PDF, com a resolução em pé (formato retrato). O *layout* da resolução não será levado em consideração na avaliação, porém o texto deve estar legível para ser corrigido.
  Atenção: Resoluções ilegíveis ou fora desse formato não serão corrigidas e serão desconsideradas.
- A troca de conhecimento na realização da avaliação é permitida e encorajada: ciência se faz com colaboração, e devemos seguir esse espírito aqui. Porém, cada aluno deverá ter a sua própria resolução, e cópias ou outras ilegalidades serão severamente punidas com a anulação da avaliação para o(s) aluno(s) suspeito(s).
- Todos os passos de sua resolução devem ser devidamente justificados.
- Ao entregar essa avaliação, você afirma ter lido e estar de acordo com essas regras, comprometendo-se a cumpri-las.

– PARTE 1: FUNDAMENTOS –

Questão 1: Considere o espaço amostral $\Omega = [0, \infty)$. Seja $\mathcal{F}$ a coleção consistindo do conjunto vazio $\emptyset$ e de todos os intervalos da forma $[a, b)$, para $0 \leq a < b \leq \infty$. Seja também $\mathcal{G}$ a coleção de todas as uniões finitas de elementos de $\mathcal{F}$. Mostre que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ **não são** σ-álgebras sobre Ω.

Questão 2: Seja o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ munido da σ-álgebra das partes 2^Ω. Denote $\mathbb{P}(\{k\})$ por p_k, para $k \in \Omega$, sendo tais valores definidos como abaixo:

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha \\ p_2 = p_3 = p_4 &= \frac{7 - 16\alpha}{24} \\ p_5 = p_6 = p_7 &= \frac{1 + 8\alpha}{24} \\ p_8 &= \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

onde $\alpha \in \left(0, \dfrac{7}{16}\right)$ é um valor arbitrário.

a) Mostre que $\mathbb{P}$ de fato é uma medida de probabilidade, para todo $\alpha \in \left(0, \dfrac{7}{16}\right)$.

b) Defina os eventos abaixo:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{2, 5, 6, 8\} \\ A_2 &= \{3, 5, 6, 8\} \\ A_3 &= \{4, 6, 7, 8\}. \end{aligned}$$

Estude condições sobre α para termos tais eventos independentes.

– PARTE 2: VARIÁVEIS E VETORES ALEATÓRIOS –

Questão 3: Considere um dado de 6 faces que **não** é balanceado. Denote por Y a probabilidade do dado cair com a face 6 virada para cima em um lançamento. Antes de efetuar qualquer lançamento, você sabe que

$$\mathbb{P}(Y = 0{,}1) = \mathbb{P}(Y = 0{,}2) = \mathbb{P}(Y = 0{,}3) = \mathbb{P}(Y = 0{,}4) = 0{,}25.$$

Após realizar 300 lançamentos, você observa a face 6 virada para cima um total de 75 vezes. Com base nessa informação, atualize a distribuição de probabilidade de Y.

Obs.: Nessa questão você deverá obter valores numéricos para as novas probabilidades de Y. Para isso, talvez seja necessário utilizar algum software *ou calculadora.*

Questão 4: Defina a função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como abaixo:

$$G(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0; \\ \min\{1, \max\{x, y\}\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Estude se G é uma função de probabilidade acumulada bivariada.

Questão 5: Seja (X, Y) o par aleatório cuja função densidade de probabilidade conjunta é definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy), & \text{se } |x| < 1 \text{ e } |y| < 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Mostre que X e Y **não são** independentes.

b) Mostre que X^2 e Y^2 **são** independentes.

Questão 6: Seja (X, Y) um ponto escolhido uniformemente no círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Defina V e W como

$$V = X\sqrt{-2\frac{\ln(X^2+Y^2)}{X^2+Y^2}}$$
$$W = Y\sqrt{-2\frac{\ln(X^2+Y^2)}{X^2+Y^2}}.$$

a) Encontre a distribuição conjunta de V e W e estude a sua independência.
Dica: As quantidades $V^2 + W^2$ e W/V (e como elas se relacionam com X e Y) podem ser úteis para fazer a mudança de variáveis.

b) Fale sobre como esse resultado pode ser utilizado para geração de números aleatórios.