Cálculo das Probabilidades II - Prova 1 (Gabarito) - 2019/1

Prof. Hugo Carvalho

12/04/2019

Questão 1: Provemos que as três propriedades de uma σ-álgebra são satisfeitas:

i) $\Omega \in \mathcal{F}_B$, pois $\mathbb{P}(\Omega \cap B) = \mathbb{P}(B)$.

ii) Tome $A \in \mathcal{F}_B$, e mostremos que $A^c \in \mathcal{F}_B$. De fato,

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \begin{cases} \mathbb{P}(B), & \text{se } \mathbb{P}(A \cap B) = 0 \\ 0, & \text{se } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B). \end{cases}$$

Portanto, vemos que A^c satisfaz às condições da definição de $\mathcal{F}_B$, de modo que $A^c \in \mathcal{F}_B$.

iii) Tome $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_B$, e queremos mostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_B$. Dividamos em dois casos:

$\underline{\mathbb{P}(A_n \cap B) = 0, \forall n}$: Nesse caso, temos que

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0,$$

de modo que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_B$, pois quando intersectado com B, sua probabilidade é nula.

$\underline{\text{Existe pelo menos um } n_0 \text{ tal que } \mathbb{P}(A_{n_0} \cap B) = \mathbb{P}(B)}$: Nesse caso, temos que

$$\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B\right) \geq \mathbb{P}(A_{n_0} \cap B) = \mathbb{P}(B),$$

onde na primeira desigualdade usamos o fato que $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B \subset B$ e na segunda que $A_{n_0} \cap B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B$. Dessa forma, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_B$, pois quando intersectado com B, sua probabilidade é $\mathbb{P}(B)$.

Questão 2:

a) Note que $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) = \dfrac{\mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)} = \dfrac{\mathbb{P}(A_{n+1})}{\mathbb{P}(A_n)} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(A_{n+1}) \leq \dfrac{\mathbb{P}(A_n)}{2}$. Fazendo $n = 1$ temos que $\mathbb{P}(A_2) \leq \dfrac{\mathbb{P}(A_1)}{2}$; para $n = 2$ temos que $\mathbb{P}(A_3) \leq \dfrac{\mathbb{P}(A_2)}{2} \leq \dfrac{\mathbb{P}(A_1)}{4}$. Recursivamente, temos que $\mathbb{P}(A_n) \leq \dfrac{\mathbb{P}(A_1)}{2^{n-1}} \to 0$, quando $n \to +\infty$.

b) A desigualdade na probabilidade condicional junto com o fato da sequência ser decrescente nos diz que a proporção que o conjunto A_{n+1} toma dentro do conjunto A_n é menos da metade deste. Intuitivamente deveríamos esperar que suas probabilidades sejam, portanto, cada vez menores.

c) Temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(A_1)}{2^{n-1}} \leq \mathbb{P}(A_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty$, por ser a soma de uma PG. Portanto, pelo primeiro Lema de Borel-Cantelli, temos que a probabilidade da ocorrência de infinitos dos eventos A_n é zero.

Questão 3:

a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{menor distância} > r) &= \mathbb{P}(\text{todas as distâncias} > r) \\
&= \prod_{n=1}^{N} \mathbb{P}(\text{distância da } i\text{-ésima estrela} > r) \\
&= \prod_{n=1}^{N} [1 - \mathbb{P}(\text{distância da } i\text{-ésima estrela} \leq r)] \\
&= \prod_{n=1}^{N} \left[1 - \frac{\text{volume da esfera de raio } r}{\text{volume da esfera de raio } R}\right] \\
&= \left[1 - \frac{\text{volume da esfera de raio } r}{\text{volume da esfera de raio } R}\right]^N \\
&= \left[1 - \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right]^N \\
&= \left[1 - \frac{r^3}{R^3}\right]^N .
\end{aligned}$$

b) Fazendo $R^3 = \dfrac{N}{\frac{4}{3}\pi\lambda}$, temos que

$$\lim_{N\to\infty} \left[1 - \frac{r^3}{N/(\frac{4}{3}\pi\lambda)}\right]^N = \lim_{N\to\infty} \left[1 - \frac{\frac{4}{3}\pi\lambda r^3}{N}\right]^N = \exp\left(-\frac{4}{3}\pi\lambda r^3\right).$$

c) Definitivamente as estrelas não são uniformemente distribuídas no Universo, já que elas estão concentradas majoritariamente nas galáxias. Porém, é razoável assumir que na nossa galáxia elas estejam uniformemente distribuídas. Portanto, como comparativamente com o diâmetro da Terra a distância até outras estrelas é bastante grande, o limite tomado acima poderia ser considerado para cálculos envolvendo somente estrelas "perto" de nós na Via Láctea. Como diria George P. Box, *"todos os modelos estão errados, porém alguns são úteis"*.

Questão 4: Para garantir que $|X|$ é variável aleatória, devemos mostrar que a imagem inversa através de tal função de intervalos da forma $(-\infty, x]$ são elementos de $\mathcal{F}$. Para isso, transformaremos tais imagens inversas em imagens inversas através de X, que sabemos ser variável aleatória.

De fato, se $x < 0$ temos que $|X|^{-1}(-\infty, x] = \{\omega \in \Omega \mid |X(\omega)| \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{F}$, pois a função $|X|$ só assume valores positivos. Agora, se $x \geq 0$, temos que

$$|X|^{-1}(-\infty, x] = \{\omega \in \Omega \mid |X(\omega)| \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid -x \leq X(\omega) \leq x\} = X^{-1}[-x, x],$$

que por X ser variável aleatória, é um elemento da σ-álgebra $\mathcal{F}$. Dessa forma, provamos que $|X|$ também é variável aleatória no mesmo espaço de probabilidade de X.

Questão 5:

a) Primeiramente, note que os saltos em $x = 1$ e $x = 9$ têm tamanho de $1/10$ cada, de modo que a parte discreta da função de probabilidade acumulada tem peso igual a $\alpha_d = 1/10 + 1/10 = 1/5$. Portanto, a parte contínua tem peso $\alpha_c = 1 - \alpha_d = 4/5$, já que não estamos lidando com uma variável aleatória com parte singular. Dessa forma, temos que

$$F^d(x) = \frac{1}{\alpha_d}\begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1/10, & \text{se } 1 \leq x < 9 \\ 1/5, & \text{se } x \geq 9 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1/2, & \text{se } 1 \leq x < 9 \\ 1, & \text{se } x \geq 9. \end{cases}$$

Derivando F vemos que ela é constante entre $x = 1$ e $x = 9$, de modo que identificamos tal distribuição como uma uniforme no intervalo $[1, 9]$. Portanto, temos que

$$F^c(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ (x-1)/8, & \text{se } 1 \leq x < 9 \\ 1, & \text{se } x \geq 9. \end{cases}$$

b) Tal procedimento pode ser feito em duas etapas: primeiramente sorteamos se o valor observado será da parte discreta (com probabilidade α_d) ou da parte contínua (com probabilidade α_c). Caso observemos um valor da parte discreta, ele será sorteado como 1 ou 9, cada um com 0,5 de probabilidade; caso observemos um valor da parte contínua, ele será sorteado como uma distribuição uniforme no intervalo $[1, 9]$.

Outro procedimento equivalente é gerar um número seguindo uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 10]$ e caso ele caia entre 0 e 1 será arredondado para 1, e caso caia entre 9 e 10 será arredondado para 10; caso ele caia entre 1 e 9, nenhum arredondamento será feito.