Cálculo das Probabilidades II - Lista 2 - 2020/01 - Gabarito

Prof. Hugo Carvalho

05/02/2021

– PARTE 1: MOMENTOS –

Questão 1:

a) Sabemos que a função geradora de momentos de uma Binomial com parâmetros n e p é dada por $[pe^t + (1-p)]^n$, e que a função geradora de momentos de uma Poisson com parâmetro λ é dada por $e^{\lambda(e^t-1)}$, ambas para $t \in \mathbb{R}$. Fazendo $p = \lambda/n$, como indicado no enunciado, temos que

$$\psi_n(t) := \left[\frac{\lambda}{n}e^t + \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right]^n.$$

Como a função geradora de momentos de uma Poisson envolve uma função exponencial, parece que precisaremos lançar mão do seguinte lema do Cálculo:

Lema: *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais que converge para $a \in \mathbb{R}$, então temos que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^a.$$

Portanto, podemos reescrever $\psi_n(t)$ como:

$$\psi_n(t) = \left[\frac{\lambda}{n}e^t + \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right]^n = \left[1 + \frac{1}{n}\lambda(e^t - 1)\right]^n,$$

de modo que fazendo $a_n = \lambda(e^t - 1)$ para todo n, sequência que obviamente converge para $a = \lambda(e^t - 1)$, nos dá:

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(t) = e^{\lambda(e^t-1)}, \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pelo teorema enunciado na questão, temos que $\text{Bin}(n, \lambda/n)$ e $\text{Poi}(\lambda)$ são cada vez mais próximas, do ponto de vista do cômputo de probabilidades.

b) *(Questão de resposta livre – apresento um modelo de resposta)* A vantagem de se aproximar uma Binomial por uma Poisson é para evitar o cálculo de fatoriais de n grande, ou potências com base muito pequena $p \ll 1$, que podem apresentar problemas do ponto de vista numérico em computadores. Aproximar uma Poisson por uma Binomial significa abrir mão de certas facilidades de se calcular a função exponencial (por exemplo, aproximação de Taylor de baixa ordem) para calcular os termos supracitados, mais complexos. Vale ressaltar que existem outras formas de calcular a função de probabilidade de uma Binomial sem recorrer a tais aproximações, por exemplo, calculando o seu logaritmo e utilizando a aproximação de Stirling para fatoriais.

Questão 2:

a) Note que $Z = \ln(X)$ tem distribuição Normal padrão, ou colocado de outra forma, X pode ser escrita como e^Z, onde Z tem distribuição Normal padrão. Portanto, temos que:

$$\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[(e^Z)^k] = \mathbb{E}[e^{kZ}] = \psi_Z(k),$$

onde ψ_Z é a função geradora de momentos de uma Normal padrão, que sabemos ser dada por

$$\psi_Z(t) = e^{t^2/2}, \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, temos que

$$\mathbb{E}[X^k] = e^{k^2/2}, \forall\, k = 0, 1, 2, \ldots.$$

b) Como Y não tem relação aparente com outras distribuições previamente conhecidas, tentemos calcular diretamente os seus momentos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y^k] &= \int_0^\infty y^k f_Y(y)\ dy \\
&= \int_0^\infty y^k f_X(y)[1 + \sin(2\pi \ln y]\ dy \\
&= \int_0^\infty y^k f_X(y)\ dy + \int_0^\infty y^k f_X(y) \sin(2\pi \ln y)\ dy \\
&= \mathbb{E}[X^k] + \int_0^\infty y^k \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-(\ln y)^2/2} \right] \sin(2\pi \ln y)\ dy.
\end{aligned}$$

Devemos então mostrar que a integral restante na igualdade acima é igual a zero. Primeiramente, a fim de não termos mais os logaritmos, fazemos a substituição $x = \ln(y)$, que implica em $dx = dy/y$ e na mudança do intervalo de integração de $y \in (0, \infty)$ para $x \in (-\infty, \infty)$. Portanto, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty y^k \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-(\ln y)^2/2} \right] \sin(2\pi \ln y)\ dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{kx} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right] \sin(2\pi x)\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{kx - x^2/2} \sin(2\pi x)\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 - 2kx)/2} \sin(2\pi x)\ dx.
\end{aligned}$$

Note que, ainda em tal forma, tal integrando não parece ter primitiva que possa ser expressa em termos de funções elementares, portanto devemos contornar esta situação e mostrar que a integral é zero sem recorrer à sua primitiva. Uma possibilidade é argumentar através da paridade do integrando, pois sabemos do Cálculo que a integral de uma função ímpar sobre um intervalo simétrico é zero, e o seno é uma função ímpar. Porém, não podemos afirmar nada de modo geral sobre a paridade da função $e^{-(x^2-2kx)/2}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Completando os quadrados no argumento da exponencial, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 - 2kx)/2} \sin(2\pi x)\ dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 - 2kx + k^2 - k^2)/2} \sin(2\pi x)\ dx \\
&= \frac{e^{k^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-k)^2/2} \sin(2\pi x)\ dx.
\end{aligned}$$

Estamos um pouco melhor, porém o integrando ainda não tem uma paridade adequada para um argumento geral. Façamos, portanto, a substituição $z = x - k$, de modo que $dz = dx$ e o intervalo de integração fica inalterado, implicando que:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{k^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-k)^2/2} \sin(2\pi x)\ dx &= \frac{e^{k^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} \sin(2\pi(z + k))\ dz \\
&= \frac{e^{k^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} \sin(2\pi z)\ dz,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos da periodicidade de 2π do seno. Agora sim podemos afirmar que temos um integrando ímpar, e suporte pode ser dado à essa afirmação de duas formas: primeiro notando que ele é o produto de uma função par com uma função ímpar, e também notando que vale a definição de função ímpar, a saber:

$$e^{-(-z)^2/2} \sin(2\pi(-z)) = -e^{-z^2/2} \sin(2\pi z), \forall z \in \mathbb{R}.$$

É possível provar que tal integral converge, porém podemos deixar tal tecnicalidade de lado, e simplesmente notamos que é a integral de uma função ímpar sobre um intervalo simétrico, de modo que vale zero, e concluímos então que $\mathbb{E}[Y^k] = \mathbb{E}[X^k]$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

c) Tentemos calcular a função geradora de momentos de X, através da definição:

$$\begin{aligned}\psi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}]\\ &= \int_0^\infty e^{tx}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-(\ln x)^2/2}\right]\,dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{x}e^{tx-(\ln x)^2/2}\,dx.\end{aligned}$$

Mostremos que tal integral diverge para $t > 0$. Para isso, note que tentar trabalhar com todo o integrando de uma vez só pode ser complicado, por conta do x dividindo, então uma possível alternativa seria trabalhar somente com a exponencial. Porém, calcular o limite $\lim\limits_{x\to\infty} e^{tx-(\ln x)^2/2}$ através da regra de L'Hôpital (que só pode ser aplicada por termos $t > 0$, caso contrário, não teríamos uma indeterminação da forma ∞/∞) também não parece muito trivial. Trabalhemos então somente com o argumento da exponencial, dado por $tx - (\ln x)^2/2$. Como intuímos que $\ln x$ torna-se cada vez mais irrelevante perante a tx, calculemos o limite a seguir, que visa comparar a taxa de crescimento de $tx - (\ln x)^2/2$ com tx:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{tx-(\ln x)^2/2}{tx} = \lim_{x\to\infty}\frac{t-(\ln x)/x}{t} = 1 - \frac{1}{t}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 1,$$

onde na primeira e na última igualdades usamos a regra de L'Hôpital. Dessa forma, temos que

$$\lim_{x\to\infty} tx - (\ln x)^2/2 = \lim_{x\to\infty} tx = \infty,$$

e portanto, para todo $k > 0$ existe uma constante c tal que

$$\int_k^\infty \frac{1}{x}e^{tx-(\ln x)^2/2}\,dx \geq \int_k^\infty \frac{1}{x}c\,dx = c\ln x\Big|_{x=k}^{x=\infty} = \infty.$$

– PARTE 2: ESPERANÇA CONDICIONAL –

Questão 3: Sejam $U_1, U_2, U_3, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme contínua no intervalo $[0,1]$. Para $x \in [0,1]$ defina

$$N(x) = \min\left\{n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n U_i > x\right\}$$

Ou seja, $N(x)$, que é uma variável aleatória, representa o número mínimo de tais uniformes que devem ser somadas para obtermos um valor maior que x.

a) *(Questão de resposta livre – apresento um modelo de resposta)* Podemos notar que $N(x)$ é uma variável aleatória por ser função de $U_1, U_2, U_3, \ldots$. De outra forma, Note que para uma realização particular $u_1 \sim U_1, u_2 \sim U_2, \ldots$ teremos um particular menor valor $n = n(x)$ tal que $u_1 + \cdots + u_n > x$; portanto, fazendo outro sorteio dos u's, teremos outro $n(x)$, possivelmente diferente, sendo então, aleatório.

b) A fim de simplificar a notação, denotemos por $m(x)$ o valor esperado $\mathbb{E}[N(x)]$. Seguindo a dica, temos que

$$m(x) = \mathbb{E}[N(x)] = \mathbb{E}_{U_1}[\mathbb{E}_{N(x)}[N(x)|U_1]],$$

onde explicitamos sobre qual variável aleatória o valor esperado é tomado para maior clareza no raciocínio.

Iniciando pelo valor esperado de dentro, note que se temos $U_1 = y > x$, esse único termo é suficiente para a condição requerida na construção de $N(x)$ ser satisfeita, de modo que $N(x) = 1$ com probabilidade 1 e portanto concluímos que $\mathbb{E}_{N(x)}[N(x)|U_1 = y] = 1$. Porém, se $U_1 = y \leq x$, necessitamos ainda somar mais algum ou alguns termos para ultrapassar x, de modo que o valor esperado $\mathbb{E}_{N(x)}[N(x)|U_1 = y]$ será dado por 1 (vindo do fato de y ser menor que ou igual a x) somado com $m(x-y)$, esse termo sendo justificado pensando que uma vez que $U_1 = y$ já foi levado em consideração, precisamos saber quantos termos, em média, precisamos somar para chegar em $x - y$. Resumindo, temos que:

$$\mathbb{E}_{N(x)}[N(x)|U_1 = y] = \begin{cases}1, & \text{se } y > x\\ 1 + m(x-y), & \text{se } y \leq x.\end{cases}$$

Partindo para o valor esperado de fora, temos que:

$$
\begin{aligned}
m(x) &= \mathbb{E}_{U_1}[\mathbb{E}_{N(x)}[N(x)|U_1]] \\
&= \int_0^1 \mathbb{E}_{N(x)}[N(x)|U_1 = y] f_{U_1}(y)\ dy \\
&= \int_x^1 1\ dy + \int_0^x 1 + m(x-y)\ dy \\
&= \int_0^1 1\ dy + \int_0^x m(x-y)\ dy \\
&= 1 + \int_0^x m(x-y)\ dy \\
&= 1 + \int_x^0 -m(u)\ du \text{ (fazendo } u = x - y) \\
&= 1 + \int_0^x m(u)\ du.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos uma *equação integral* para $m(x)$, que pode ser facilmente transformada em uma equação diferencial tomando a derivada de ambos os termos no início e final da sequência de igualdade acima, nos dando que:

$$m'(x) = m(x).$$

Sabemos do Cálculo que a única função que coincide com sua derivada é um múltiplo da exponencial, ou seja, $m(x) = ke^x$. Para determinar o valor de k, note que $k = m(0) = 1$, pois para ultrapassar 0, com probabilidade 1 basta somarmos uma única uniforme. Dessa forma, concluímos que $m(x) = \mathbb{E}[N(x)] = e^x$, para $x \in [0, 1]$.