Cálculo das Probabilidades II - Lista 1 - 2020/PLE

Prof. Hugo Carvalho

25/09/2020

– INSTRUÇÕES – LEIAM ATENTAMENTE! –

- A data limite de entrega da avaliação é segunda-feira 05/10/2020 às 23h59'. Avaliações entregues após esse prazo serão desconsideradas.
- A entrega deve ser feita exclusivamente através do Google Classroom, clicando na caixa "+ Adicionar ou Criar" dentro da postagem dessa lista, para então anexar um arquivo com sua resolução. Após isso, clique em "Entregar" para enviar sua resolução.
  Atenção: Somente anexar a resolução não é suficiente! O envio deve ser feito para que sua resolução de fato seja entregue.
- Você tem a liberdade de escrever sua resolução no computador (usando Word, LaTeX, dentre outros), ou manuscrito e depois escanear ou fotografar a sua resolução. Nesse último caso, tome cuidado para que o documento fique legível. No caso de fotografar, opte por utilizar luz natural e tome cuidado com sombras.
- **Dica**: Se for fotografar sua resolução com um *smartphone* ou *tablet*, utilize o aplicativo próprio da câmera, e evite fotografar através de WhatsApp, Telegram, Messenger, e outros. Os aplicativos de comunicação, ao utilizarem a câmera, fazem uma severa compressão da imagem, incorrendo em uma grande diminuição de sua qualidade. Para transferir a imagem do celular para o computador prefira fazer o envio por e-mail, ou acessando sua galeria de fotos através do Google Photos no computador (caso já utilize esse aplicativo para gerenciar suas fotos no aparelho).
- Independente do modo de escrita, a resolução deve ser entregue em um único documento, no formato PDF, com a resolução em pé (formato retrato). O *layout* da resolução não será levado em consideração na avaliação, porém o texto deve estar legível para ser corrigido.
  Atenção: Resoluções ilegíveis ou fora desse formato não serão corrigidas e serão desconsideradas.
- A troca de conhecimento na realização da avaliação é permitida e encorajada: ciência se faz com colaboração, e devemos seguir esse espírito aqui. Porém, cada aluno deverá ter a sua própria resolução, e cópias ou outras ilegalidades serão severamente punidas com a anulação da avaliação para o(s) aluno(s) suspeito(s).
- Todos os passos de sua resolução devem ser devidamente justificados.
- Ao entregar essa avaliação, você afirma ter lido e estar de acordo com essas regras, comprometendo-se a cumpri-las.

– PARTE 1: FUNDAMENTOS –

Questão 1: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e defina

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1\}.$$

Mostre que $\mathcal{G}$ é uma σ-álgebra de conjuntos de Ω.

Questão 2: Considere B e C eventos, e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de eventos, todos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Prove o que se pede abaixo:

a) Se $\mathbb{P}(A_n) = 0$, para todo $n = 1, 2, \dots$, então $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$

b) Se $\mathbb{P}(A_n) = 1$, para todo $n = 1, 2, \dots$, então $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$

c) Se os eventos A_n são dois-a-dois disjuntos e $\mathbb{P}(B|A_n) \geq c$ para todo n, então $\mathbb{P}\left(B \,\middle|\, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq c$

d) Se os eventos A_n formam uma partição de Ω, então $\mathbb{P}(B|C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n|C)\mathbb{P}(B|A_n \cap C)$

– PARTE 2: VARIÁVEIS E VETORES ALEATÓRIOS –

Questão 3: Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente.

a) Encontre a distribuição de $X + Y$.

b) Encontre a distribuição condicional $X|(X + Y)$.

c) Explique, intuitivamente, os resultados encontrados, com base em interpretações das distribuições de probabilidade encontradas.

Questão 4: Dado a um número real, denote por $[a]$ a sua *parte inteira*, ou seja, $[a]$ é o maior inteiro que é menor ou igual à a. Seja $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, e faça o que se pede abaixo:

a) Encontre a distribuição de $[X]$.

b) Interprete o resultado obtido.

Questão 5: A *distribuição de Rayleigh com parâmetro* θ, tem função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right), \text{ para } x > 0.$$

A distribuição de Rayleigh tem importantes aplicações, dois exemplos sendo: melhorar a qualidade de imagens de ressonância magnética, e entender a resposta de determinado organismo à ingestão de certo nutriente.

a) Calcule a função de probabilidade acumulada da distribuição de Rayleigh.

b) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes seguindo a distribuição de Rayleigh com respectivos parâmetros $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Mostre que $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ também tem distribuição de Rayleigh e encontre o seu parâmetro.

Questão 6: Seja (X, Y) um ponto escolhido uniformemente no círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Defina V e W como

$$V = X\sqrt{-2\frac{\ln(X^2 + Y^2)}{X^2 + Y^2}}$$
$$W = Y\sqrt{-2\frac{\ln(X^2 + Y^2)}{X^2 + Y^2}}.$$

a) Encontre a distribuição conjunta de V e W e estude a sua independência.
Dica: As quantidades $V^2 + W^2$ e W/V (e como elas se relacionam com X e Y) podem ser úteis para fazer a mudança de variáveis.

b) Fale sobre como esse resultado pode ser utilizado para geração de números aleatórios.