

Cálculo das Probabilidades II - Lista 1 - 2021/02

Prof. Hugo Carvalho

03/01/2022

– INSTRUÇÕES – LEIAM ATENTAMENTE! –

- A data limite de entrega da avaliação é domingo 09/01/2022 às 23h59'. Avaliações entregues após esse prazo serão desconsideradas.
- A entrega deve ser feita exclusivamente através do Google Classroom, clicando na caixa “+ Adicionar ou Criar” dentro da postagem dessa lista, para então anexar um arquivo com sua resolução. Após isso, clique em “Entregar” para enviar sua resolução.
Atenção: Somente anexar a resolução não é suficiente! O envio deve ser feito para que sua resolução de fato seja entregue.
- Você tem a liberdade de escrever sua resolução no computador (usando Word, L^AT_EX, dentre outros), ou manuscrito e depois escanear ou fotografar a sua resolução. Nesse último caso, tome cuidado para que o documento fique legível. No caso de fotografar, opte por utilizar luz natural e tome cuidado com sombras.
- **Dica:** Se for fotografar sua resolução com um *smartphone* ou *tablet*, utilize o aplicativo próprio da câmera, e evite fotografar através de WhatsApp, Telegram, Messenger, e outros. Os aplicativos de comunicação, ao utilizarem a câmera, fazem uma severa compressão da imagem, incorrendo em uma grande diminuição de sua qualidade. Para transferir a imagem do celular para o computador prefira fazer o envio por e-mail, ou acessando sua galeria de fotos através do Google Photos no computador (caso já utilize esse aplicativo para gerenciar suas fotos no aparelho).
- Independente do modo de escrita, a resolução deve ser entregue em um único documento, no formato PDF, com a resolução em pé (formato retrato). O *layout* da resolução não será levado em consideração na avaliação, porém o texto deve estar legível para ser corrigido.
Atenção: Resoluções ilegíveis ou fora desse formato não serão corrigidas e serão desconsideradas.
- A troca de conhecimento na realização da avaliação é permitida e encorajada: ciência se faz com colaboração, e devemos seguir esse espírito aqui. Porém, cada aluno deverá ter a sua própria resolução, e cópias ou outras ilegalidades serão severamente punidas com a anulação da avaliação para o(s) aluno(s) suspeito(s).
- Todos os passos de sua resolução devem ser devidamente justificados.
- Ao entregar essa avaliação, você afirma ter lido e estar de acordo com essas regras, comprometendo-se a cumpri-las.

– PARTE 1: FUNDAMENTOS –

Questão 1: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e defina

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1\}.$$

Mostre que \mathcal{G} é uma σ -álgebra de conjuntos de Ω .

Questão 2: Considere uma moeda que, quando lançada, tenha probabilidade p de cair com a face **Cara** voltada para cima e probabilidade $1 - p$ de cair com a face **Coroa** voltada para cima, para algum valor de p satisfazendo $0 \leq p \leq 1$. Assuma que a moeda é lançada três vezes, de modo independente, e considere os eventos abaixo:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{no máximo uma Coroa é observada}\}, \\ B &= \{\text{todos os três lançamentos são iguais}\}. \end{aligned}$$

Faça o que se pede abaixo:

- a) Estude para quais valores de p os eventos A e B são independentes.
- b) Explique intuitivamente o resultado obtido no item anterior.

– PARTE 2: VARIÁVEIS E VETORES ALEATÓRIOS –

Questão 3: Um astrônomo irá realizar um experimento para medir a distância da Terra até determinada estrela. O erro de medição é assumido ser normalmente distribuído, com média zero e desvio padrão igual à 20 anos-luz. Antes de realizar qualquer medição, o astrônomo acredita que o valor verdadeiro da distância é descrito por uma distribuição normal com média 150 anos-luz e desvio padrão de 25 anos-luz. Ao realizar o experimento, é observada uma distância de 140 anos-luz. Faça o que se pede abaixo:

- a) Atualize a informação probabilística prévia do astrônomo após a realização do experimento, através do Teorema de Bayes. Conclua que a nova distribuição também é Normal, e encontre sua média e desvio padrão.
- b) Interprete o que significa a moda desta nova distribuição de probabilidade encontrada.

Obs.: Um ano-luz é uma unidade de medida de distância que corresponde à distância que a luz pode viajar no vácuo durante um ano, e corresponde a aproximadamente 9,46 trilhões de quilômetros. A título de comparação, a distância entre a Terra e o Sol é de aproximadamente 8 minutos-luz, e a distância do Sol à estrela mais próxima é de aproximadamente 4,25 anos-luz.

Questão 4: Encontre a distribuição conjunta de Y_1 e Y_2 , onde

$$Y_1 = X_1^2 + X_2^2 \quad \text{e} \quad Y_2 = \frac{X_1}{\sqrt{Y_1}},$$

e X_1 e X_2 seguem distribuições normais independentes de média zero e variância σ^2 .

*Obs.: Note que essa transformação **não** é bijetiva, pois não é possível determinar o sinal de X_2 a partir de Y_1 e Y_2 . Dessa forma, você precisará buscar por uma generalização do Método do Jacobiano (tema da Aula 14) para o caso não bijetivo.*