Cálculo das Probabilidades II - Prova 3 (Gabarito) - 2019/1

Prof. Hugo Carvalho

24/06/2019

Questão 1:

a) Defina $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\psi_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] \\
&= \mathbb{E}[e^{t(X_1+\cdots+X_n)}] \\
&= \mathbb{E}[e^{tX_1}\dots e^{tX_n}] \\
&\overset{(1)}{=} \mathbb{E}[e^{tX_1}]\dots\mathbb{E}[e^{tX_n}] \\
&\overset{(2)}{=} \mathbb{E}[e^{tX_i}]^n \\
&= \left[\int_{-1}^{1} e^{tx}\frac{1}{2}\,dx\right]^n \\
&= \left[\left.\frac{e^{tx}}{2t}\right|_{x=-1}^{x=1}\right]^n \\
&= \left[\frac{1}{2t}(e^t - e^{-t})\right]^n, \text{ para } t \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

onde na igualdade (1) usamos a independência entre as variáveis aleatórias X_i e na igualdade (2) usamos que todas têm a mesma distribuição.

b) Temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq n\varepsilon\right) \\
&= \mathbb{P}(Y \geq n\varepsilon) \\
&\overset{(1)}{\leq} e^{-tn\varepsilon}\psi_Y(t) \\
&\overset{(2)}{=} e^{-tn\varepsilon}\left[\frac{1}{2t}(e^t - e^{-t})\right]^n \\
&\overset{(3)}{\leq} e^{-tn\varepsilon}\left[\frac{1}{t}te^{t^2/6}\right]^n \\
&= e^{-tn\varepsilon}e^{nt^2/6} \\
&= e^{-n(\varepsilon t - t^2/6)}, \forall t > 0,
\end{aligned}$$

onde em (1), (2) e (3) usamos, respectivamente: cota de Chernoff, o resultado do item a) e a desigualdade informada no enunciado.

c) Como o resultado do item b) é válido para todo $t > 0$, podemos otimizar o lado direito da desigualdade e obter que:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \varepsilon\right) \leq \min_{t>0} e^{-n(\varepsilon t - t^2/6)} = \exp\left(\min_{t>0} -n(\varepsilon t - t^2/6)\right),$$

pois $x \mapsto e^x$ é uma função crescente, para $x \in \mathbb{R}$. Derivando o argumento da exponencial e igualando a zero, temos que:

$$\frac{d}{dt}\left[-n\left(\varepsilon t - \frac{t^2}{6}\right)\right] = -n\varepsilon + \frac{nt}{3} = 0 \implies t_0 = 3\varepsilon > 0,$$

de modo que

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \varepsilon\right) \leq e^{-n(\varepsilon t_0 - t_0^2/6)} = e^{-n(3\varepsilon^2 - 9\varepsilon^2/6)} = e^{-3n\varepsilon^2/6}.$$

d) Dizemos que uma sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números se $\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n] \xrightarrow{qc} 0$, onde $\overline{X}_n$ é definida como $\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Como no nosso caso particular as variáveis aleatórias têm distribuição uniforme contínua em $[-1, 1]$, seu valor esperado é zero, de modo que, pela linearidade do valor esperado, temos que $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = 0$. Assim, nesse caso particular, estamos querendo verificar se nossa sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz $\overline{X}_n \xrightarrow{qc} 0$.

e) Para aferir a validade da Lei Forte dos Grandes Números, queremos aferir convergência quase certa da sequência $\overline{X}_n$ para zero. Mais precisamente, fixado $\varepsilon > 0$, queremos que a probabilidade abaixo seja zero:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = 0\right\}^c\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n \neq 0\right) = \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - 0| \geq \varepsilon \text{ infinitas vezes}\right) = \mathbb{P}\left(\limsup\ \{|\overline{X}_n| \geq \varepsilon\}\right).$$

A fim de calcular a probabilidade desse limite superior de uma sequência de eventos, usemos os lemas de Borel-Cantelli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n| \geq \varepsilon) \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2\ \mathbb{P}(\overline{X}_n \geq \varepsilon) \overset{(2)}{\leq} 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n\varepsilon^2/6} = 2\sum_{n=1}^{\infty} [e^{-3\varepsilon^2/6}]^n \overset{(3)}{<} \infty,$$

onde em (1), (2) e (3) usamos, respectivamente, a simetria de $\overline{X}_n$ em torno de zero, o resultado do item c) e o fato que $0 < e^{-3\varepsilon^2/6} < 1$ junto com a soma da PG infinita.

Dessa forma, temos que $\mathbb{P}\left(\limsup\ \{|\overline{X}_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0$, e assim, pela definição da convergência quase certa, concluímos que $\overline{X}_n \xrightarrow{qc} 0$, e portanto, vale a Lei Forte dos Grandes Números para a sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

f) O resultado obtido no item c) implica o resultado obtido no item e), de modo que é um resultado mais forte, no sentido formal da lógica. Do ponto de vista prático, o resultado do item c) é não-assintótico, de modo a garantirmos sua validade para qualquer n, e não somente no limite quando n tende ao infinito, como é o caso do item f), sendo portanto de mais aplicabilidade prática.

Questão 2:

a) Como o número de caras no segundo lançamento depende do número de caras no primeiro, parece natural usar a lei da esperança iterada e concluir que:

$$\mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_2|X_1]] \overset{(1)}{=} \mathbb{E}[\text{Bin}(X_1, 1/2)] \overset{(2)}{=} \mathbb{E}[X_1/2] \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\mathbb{E}[\text{Bin}(n, 1/2)] \overset{(4)}{=} \frac{n}{4},$$

onde nas igualdades (1) e (3) usamos a definição das variáveis aleatórias X_2 e X_1 e nas igualdades (2) e (4) usamos a informação sobre o valor esperado de uma Binomial.

Obs.: É um abuso de notação escrever $\mathbb{E}[Bin(n, p)]$, porém ainda assim o utilizamos, a fim de clareza na escrita.

b) Conjecturamos que $\mathbb{E}[X_k] = n/2^k$, para $k \geq 2$. Provemos por indução. O primeiro passo está feito no item a). O passo de indução será supor que $\mathbb{E}[X_{k-1}] = n/2^{k-1}$. Usando isso, provemos, analogamente ao item a), o resultado para X_k, condicionando em X_{k-1} e usando novamente a lei da esperança iterada, temos que:

$$\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_k|X_{k-1}]] = \mathbb{E}[\text{Bin}(X_{k-1}, 1/2)] = \mathbb{E}[X_{k-1}/2] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_{k-1}] \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\frac{n}{2^{k-1}} = \frac{n}{2^k},$$

onde na igualdade (1) usamos o passo de indução, e as igualdades anteriores se justificam analogamente ao item a). Portanto, concluímos o resultado desejado.

c) Para $r = 1$ temos que

$$\mathbb{E}[|X_k - 0|] \overset{(1)}{=} \mathbb{E}[X_k] \overset{(2)}{=} \frac{n}{2^k} \to 0 \text{ quando } k \to \infty,$$

onde nas igualdades (1) e (2) usamos, respectivamente o fato de X_k ser positiva e o resultado do item b). Assim, concluímos que $X_k \xrightarrow{1} 0$.

Se $0 < r < 1$, pela desigualdade de Jensen, podemos concluir que

$$\mathbb{E}[|X_k - 0|^r] = \mathbb{E}[X_k^r] \leq \mathbb{E}[X_k]^r = \left(\frac{n}{2^k}\right)^r \to 0 \text{ quando } k \to \infty, \forall\ 0 < r < 1,$$

de modo que $X_k \xrightarrow{r} 0$, para todo $0 < r < 1$ também. Note que tal raciocínio não pode ser aplicado para $r > 1$, pois a desigualdade de Jensen será revertida devido à convexidade da função $x \mapsto x^r$.

Pode-se provar, através da lei da variância iterada, indução e contas tediosas, que $X_k \xrightarrow{r} 0$, para r par. Como convergência em média r implica convergência em média s, para $s \geq r \geq 1$, o conclui-se que $X_k \xrightarrow{r} 0$, $\forall r \geq 1$ também.

Questão 3:

- Para a sequência $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sabemos que vale a Lei Forte de Kolmogorov, de modo que $\overline{Y}_n \xrightarrow{qc} \mu$, e portanto, $\overline{Y}_n \xrightarrow{p} \mu$.
- Quanto à sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pelo Teorema Central do Limite, temos que $\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\overline{X}_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, de modo que $\sqrt{n}\ \overline{X}_n \xrightarrow{d} \sigma\mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Pela simetria em torno do zero de uma distribuição normal com média zero, temos que $-\sqrt{n}\ \overline{X}_n \xrightarrow{d} -\mathcal{N}(0,\sigma^2) = \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.
- Finalmente, pelo Teorema de Slutsky, podemos afirmar que $\overline{Y}_n - \sqrt{n}\ \overline{X}_n \xrightarrow{d} \mu + \mathcal{N}(0,\sigma^2) = \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Obs.: É um abuso de notação escrever que $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, porém ainda assim o fazemos, a fim de clareza na escrita.

Questão 4:

a) Note que Y_n assume somente os valores 0 e 1, de modo que $Y_n > 0$ se e somente se $Y_n = 1$, e tal evento acontece se e somente se $X_i = 1$, para $i = 1, \ldots, n$, e concluímos que

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1, \forall i = 1, \ldots, n) \overset{(1)}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 1) = p^n,$$

onde na igualdade (1) usamos a independência das variáveis aleatórias X_i. Note também que, por Y_n somente assumir os valores 0 e 1, sua distribuição também é de Bernoulli, porém com parâmetro p^n. Assim, $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{P}(Y_n = 1) = p^n$.

b) E razoável inferirmos que, se a sequência $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, seu limite deve ser zero, dado que a sua probabilidade de sucesso decai exponencialmente com n. Verifiquemos que a convergência se dá quase certamente, e portanto também em probabilidade e distribuição. Fixado $0 < \varepsilon < 1$ queremos que a probabilidade abaixo seja zero:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty} Y_n = 0\right\}^c\right) &= \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} Y_n \neq 0\right)\\ &= \mathbb{P}\left(|Y_n - 0| \geq \varepsilon \text{ infinitas vezes}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\limsup\ \{Y_n \geq \varepsilon\}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\limsup\ \{Y_n = 1\}\right).\end{aligned}$$

A fim de calcular a probabilidade desse limite superior de uma sequência de eventos, usemos os lemas de Borel-Cantelli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n = 1) \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} p^n \overset{(2)}{<} \infty,$$

onde nas igualdades (1) e (2) usamos, respectivamente, o resultado do item a) e a soma da PG infinita. Dessa forma, temos que $\mathbb{P}\left(\limsup\ \{Y_n = 1\}\right) = 0$, e assim, pela definição da convergência quase certa, concluímos que $\overline{X}_n \xrightarrow{qc} 0$.