Projet science 3 : Physique
Les oscillateurs harmoniques mécaniques

esaip École d'Ingénieurs ING2024

AGLIETTA Élise
DELCROIX Hugo
HENTGEN Constantin
JOUVENOT-DIEHL Pauline

Tuteurs Pédagogiques :
Mme.BOUDEBS Mihaela & M.CROCHET Moïse & M.ALBERS Patrick

9 janvier 2021

Remerciements

Dans un premier temps nous remercions monsieur Gentilhomme pour sa diligence et le prêt de son établi et de ses outils. Sans lui nous n'aurions pas pu envisager cette expérience aussi facilement. Nous remercions également madame BOUDEBS ainsi que monsieur CROCHET pour leur soutien et accueil à l'ESAIP qui nous a permis de partager nos difficultés et nous réunir pour effectuer quelques tests.

1 Introduction

Un oscillateur harmonique est un oscillateur dont la modélisation du mouvement peut-être décrite par une allure sinusoïdale et dont la période ne dépend que des paramètres du système. Ce nom cache un modèle physique très ancien qui représente une partie fondamentale de la mécanique classique. Ainsi, c'est une notion qu'il est important d'éclaircir, et dont il est intéressant d'étudier les exploitations. Pour ce faire, nous verrons dans un premier temps les différents termes physiques. Également, nous verrons les différents outils mathématiques dont nous aurons besoin pour modéliser cette notion. Dans un second temps, nous nous concentrerons sur les différentes configurations possible, puis nous explorerons quelques applications sous différents spectres. Enfin, nous verrons en détail le cheminement expérimental que nous avons effectué, nos objectifs, les contraintes rencontrées ainsi que nos résultats.

2 Le modèle des oscillateurs harmoniques

2.1 Contexte théorique

2.1.1 Grandeurs caractéristiques

Un oscillateur correspond à un système qui évolue de façon périodique. On parle d'oscillateur harmonique lorsque les oscillations évoluent dans le temps de façon sinusoïdale. L'étude d'oscillations harmoniques nous mène à considérer un point matériel de masse m et de se placer dans un référentiel terrestre supposé galiléen. Qu'il soit amorti ou non, le mouvement d'un oscillateur est représenté par une fonction notée q représentant l'évolution de son élongation en fonction du temps.

Oscillateur harmonique libre :

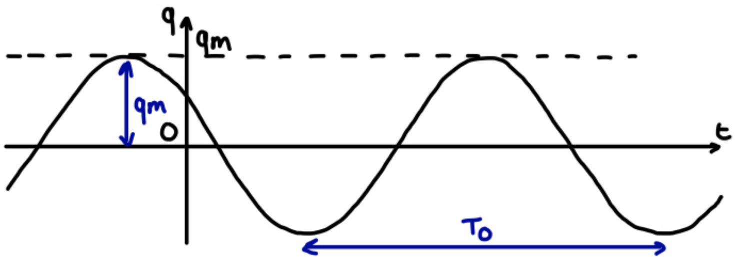


FIGURE 1 – Évolution temporelle d'un oscillateur harmonique libre

Pour décrire leur mouvement, plusieurs grandeurs caractéristiques entrent en jeu. On peut constater que l'oscillation s'effectue entre deux valeurs extrêmes $(+q_m, -q_m)$ et dont q_m correspond à l'amplitude maximale. L'amplitude d'une oscillation harmonique est l'écart maximal entre l'axe du temps et la valeur maximale. La pulsation propre notée ω_0 est une constante positive de l'oscillateur telle que $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ et s'exprime en radian par seconde. À partir de cette équation nous avons donc $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$ exprimée en Hertz et qui représente la fréquence propre et la période propre T_0 exprimée en seconde. [20a] [20d] [Pie20]

Oscillateur harmonique amorti :

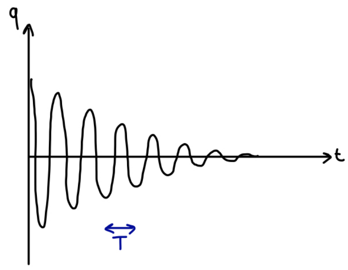


FIGURE 2 – Évolution temporelle d'un oscillateur harmonique amorti

Sur la représentation graphique d'un oscillateur harmonique libre différentes grandeurs sont présentes.

On note la pseudo-période avec λ le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}}$$

Il est intéressant de noter que cette pseudo-période est modifiée dans le cas d'amortissement du phénomène ondulatoire. [Jér20]

— Le décrément logarithmique $\delta = \ln\left(\frac{q(t)}{q(t+T)}\right)$ où les fonctions $q(t)$ et $q(t+T)$ représentent les amplitudes et cette quantité mesure la décroissance des amplitudes.
— La constante de temps : $\tau = \frac{1}{\lambda}$.
— Le temps de relaxation $\tau_r = \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2\lambda}$.
— le facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\lambda}$ qui est une mesure sans unité du taux d'amortissement d'un oscillateur.

2.1.2 Outils mathématiques

Mouvement de l'oscillateur harmonique :

Lors de l'étude du mouvement, on se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen et on définit un repère orthonormé décrit par une base cartésienne R telle que $R(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. On peut décrire le mouvement grâce à des vecteurs : le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ que l'on peut écrire de la manière suivante : $\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}$ et $\vec{v} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$.

On distingue différents types d'oscillateurs harmoniques. On note 2 principaux types : les oscillateurs harmoniques dits «libres» ainsi que les oscillateurs cette fois-ci dits «amortis».

Oscillateur harmonique libre :

Il correspond à un système physique dont l'évolution au cours du temps, en l'absence d'amortissement, est régie par l'équation du mouvement fonction suivante [Kha20] [20b] :

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2.q(t) = 0 \tag{1}$$

La solution $q(t)$ de l'équation différentielle décrit les oscillations du système physique. La solution générale pour l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique est donc [Sup20] :

$$q(t) = q_m.\cos(\omega_0.t + \varphi_0) \tag{2}$$

Ici ω_0 est la pulsation propre, q_m l'amplitude maximale et φ_0 la phase à l'origine. q_m et φ_0 sont définies par les conditions initiales. Les oscillations d'un oscillateur harmonique sont purement sinusoïdales et la période propre correspondante est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Oscillateur harmonique amorti :

Il correspond à un système physique dont l'évolution au cours du temps est régie par l'équation du mouvement fonction suivante [Sup20] :

$$\ddot{q}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q}(t) + \omega_0^2.q(t) = 0 \tag{3}$$

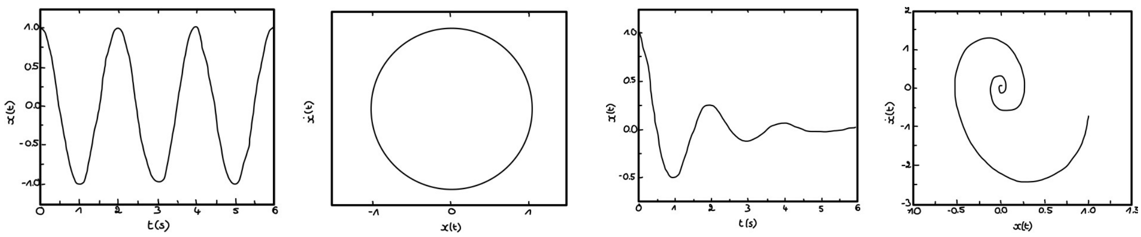
Cette équation fait intervenir Q, le facteur de qualité. Ici nous avons une équation différentielle homogène du second degré linéaire et à coefficients constants. La solution $q(t)$ de l'équation différentielle décrit les oscillations amorties du système physique. L'équation (3) devient : $r^2 + a.r + b = 0$

Régime Apériodique $Q < \frac{1}{2}$ $(\Delta > 0)$	**Régime Pseudo-Périodique** $Q > \frac{1}{2}$ $(\Delta < 0)$	**Régime Critique** $Q = \frac{1}{2}$ $(\Delta = 0)$
Il existe deux racines réelles : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	Il existe deux racines complexes : $x_1 = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$	Il existe une unique solution : $r = -\omega_0$
La solution est de la forme : $q(t) = Ae^{x_1 t} + Be^{x_2 t}$	La solution s'écrit sous la forme suivante : $q(t) = e^{-\lambda.t}(Ccos(\omega.t) + Dsin(\omega.t))$	La solution est de la forme : $q(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$

[20c] Les valeurs A, B, C et D sont obtenues à partir des conditions initiales.

Remarque : La solution de régime pseudo-périodique peut s'écrire de deux autres manières :

$$q(t) = q_m e^{-\lambda.t} cos(\omega.t + \phi)$$
$$q(t) = q_m e^{-\lambda.t} sin(\omega.t + \phi)$$



(a) Portrait de phase d'un oscillateur harmonique libre

(b) Portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti

FIGURE 3 – Schéma des différents portraits de phase [GIB20]

Le portrait de phase :

Afin de caractériser la trajectoire du système dans l'espace, le portrait de phase est un outil utile à cette étude. Il correspond à un diagramme caractéristique des évolutions du système et dont l'évolution est décrite par la grandeur $q(t)$. Le portrait de phase d'un oscillateur harmonique est d'aspect elliptique.

2.2 Les différents types d'oscillateurs harmoniques

2.2.1 Le pendule simple

Le pendule simple est un oscillateur harmonique composé d'une boule dont le rayon est noté r ainsi que d'un fil de longueur l et dont on considère la masse négligeable. La boule est suspendue à l'aide du fil. Afin de faciliter l'étude théorique, on considère que la distance l est largement supérieure à r afin de pouvoir assimiler la boule à un point matériel. On distingue alors deux principaux résultats pour l'équation du mouvement.

Dans un premier temps nous avons celle considérant tous les angles possibles entre la droite passant par le point d'attache et la position à l'équilibre de la masse. Aussi on néglige les forces de frottements ou alors, on apporte de l'énergie au système afin que ce dernier puisse compenser la «perte d'énergie» et ainsi se comporter de manière plus fidèle au modèle dit «harmonique».

On reconnaît bien ici la forme d'une équation différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique (1).

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 . \sin\theta = 0 \tag{4}$$

Dans un second temps, on peut également écrire l'équation précédente mais plus simplement en posant l'approximation suivante : l'angle θ varie si peu que l'on peut poser $\theta \approx \sin\theta$.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 . \theta = 0 \tag{5}$$

Le pendule simple est l'oscillateur harmonique le plus simple de par sa modélisation mathématique à la complexité de son montage physique [JRo20] [Fra20a][Fra20b].

2.2.2 Le ressort

Le montage du système appelé «masse-ressort» consiste à un point fixe, sur lequel on attache un ressort idéal et à son bout une masse. Si on éloigne la masse de son point d'équilibre c'est à dire en étirant le ressort, on remarque que le système se met effectivement à osciller autour de cette position d'équilibre [ROU20]. L'équation différentielle du mouvement est identique à (4), ce qui n'est pas étonnant étant donné que ces systèmes sont très proches.

2.2.3 Le fil de torsion

C'est une tige positionnée horizontalement retenue à un support par un câble en acier. Ce câble exerce un couple de rappel qui provoque les oscillations lorsque on écarte la barre de sa position d'équilibre. Dans le cas du pendule de torsion, on parle d'isochronisme des oscillations car la période est indépendante de l'amplitude.

2.3 Les oscillateurs couplés

Dans cette partie nous allons considérer plusieurs oscillateurs dont leurs comportements et mouvements vont être couplés. Le système de couplage de deux oscillateurs harmoniques présente de nombreuses applications dans les différents domaines de la physique. [Gra20]

Exemple de l'oscillateur mécanique couplé libre :

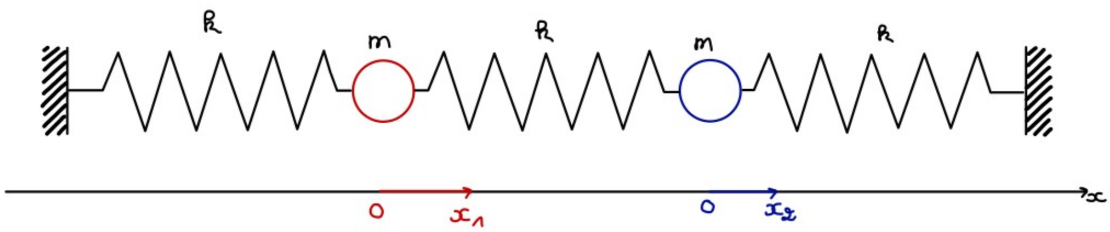


FIGURE 4 – Schéma d'un oscillateur mécanique couplé libre
(Voir 6.2)

3 Les applications industrielles et dans la recherche

3.1 La sismographie

3.1.1 Sismographe et oscillateur harmonique

"Un sismographe est un instrument de mesure capable d'enregistrer les mouvements du sol liés aux phénomènes sismiques, grâce à un capteur appelé sismomètre" [UNI20] ; et de les retranscrire sur un support visuel, le sismogramme. C'est la partie sismomètre du sismographe qui est particulièrement intéressante pour nous ; et plus précisément le modèle mécanique du sismomètre. Nous allons nous intéresser à deux sismomètres simples. Dans un premier temps, le sismomètre vertical, puis le sismomètre horizontal. Il existe de nombreuses autres formes du sismomètre que celles que nous aborderons ici, mais celles-ci sont les applications les plus directes du concept d'oscillateur harmonique.

(a) Schéma d'un sismographe vertical

(b) Schéma d'un sismographe horizontal

FIGURE 5 – Schéma des différents types de sismographes

Le sismomètre vertical : Le sismomètre vertical est composé d'une masse suspendue à une potence par un ressort, la potence étant fixée sur un support rigide qui est en contact avec le sol. Les mouvements de la masse sont retranscrits sur du papier grâce à un stylet. Ce sismomètre ne détecte et ne permet d'enregistrer que les ondes sismiques verticales, d'où son nom. Voir 5a. Lorsqu'ils sont secoués par une onde sismique le support, la potence et le papier oscillent verticalement mais la masse, attachée au ressort, reste immobile. Le tracé visible sur le papier après le passage de l'onde sismique est donc le mouvement de la masse par rapport à la boîte et donc au sol. "En effet la masse est immobile dans le référentiel galiléen mais pas dans le référentiel de la boîte"[UNI20].

Le sismomètre horizontal : On peut également s'intéresser au sismomètre horizontal. Ce dernier, à l'inverse du sismomètre vertical, ne détecte et n'enregistre que les oscillations horizontales. Il est lui aussi constitué d'une potence fixée sur un support rigide qui est en contact avec le sol. Cependant la masse n'est pas accrochée à la potence avec un ressort mais avec un fil, créant ainsi un pendule d'Euler. De la même façon que pour le sismomètre précédent, un stylet est accroché à la masse ce qui permet de retranscrire les oscillations sur une feuille de papier située sous la masse. Voir 5b.

3.1.2 Histoire du sismographe

"La 1ère trace d'un sismographe dans l'histoire remonte à l'an 132 ; lorsque l'inventeur chinois Zhang Heng crée le tout premier sismoscope" [SEI20]. Les sismoscopes sont les ancêtres des sismographes, ils sont plus rudimentaires, ils détectent les séismes mais ne peuvent pas enregistrer le passage des ondes sismiques. L'appareil de Zhang Heng est une jarre en bronze d'environ 2 mètres de diamètre, autour de laquelle sont soudés huit tubes en forme de dragons, la tête vers le bas et la gueule semi-ouverte. Chacun des dragons est placé à un des 8 points cardinaux (N, NE, E, SE, S, SW, W, NW) et sous eux se trouvent 8 récipients en forme de grenouilles ayant la bouche ouverte. Il n'y a pas de documents historiques clairs ni de restes physiques de l'instrument de Zhang Heng. Cependant de nombreuses reconstitutions ont été réalisées pour tenter de mieux comprendre son fonctionnement et celles-ci montrent que le mécanisme à l'intérieur de la jarre est bien une sorte de pendule. "L'un des premiers vrais sismographes, et non plus sismoscopes, date de 1784 et fut inventé par l'italien Nicola Zupo" [SEI20]. Le sismographe était donc capable d'enregistrer le passage des ondes sismiques grâce à un pendule vertical fait d'une masse en plomb qui traçait dans des cendres les mouvements causés par le séisme. Après ça, le sismographe a beaucoup évolué et été amélioré au fil des innovations, pour obtenir des mesures toujours plus précises. Cependant le principe de base de cet instrument reste toujours l'oscillateur harmonique.

3.2 Le Gravimètre

Le gravimètre est un appareil utilisé pour calculer la pesanteur. C'est un appareil qui peut donc, bien qu'indirectement, donner à son utilisateur une idée de la composition géologique du sol. Il se montre pour cette raison très utile dans "la recherche et la découverte de pétrole, de minerais, de cavités etc. A une échelle plus grande, il participe, dans le domaine de la géodésie, à déterminer la forme d'ensemble du globe terrestre" [Uni20].

Il existe 2 grands types de gravimètres : les gravimètres relatifs et les gravimètres absolus.

3.2.1 Le gravimètre relatif

Un gravimètre relatif ne donne pas directement une valeur exacte de la pesanteur ; à la place, il donne une variation du champ de pesanteur. "Ainsi, on peut cartographier avec précision la différence de pesanteur par rapport à un point choisi comme référence" [Oli20]. Le gravimètre à ressort est un exemple de gravimètre relatif.

Ce type de gravimètre fonctionne de la manière suivante. "On suspend une masse à un ressort puis on mesure l'allongement du ressort qui aura été étiré sous l'effet de la pesanteur" [Bel20b]. Grâce à la masse de l'objet suspendu, la raideur du ressort et la variation de la hauteur de la masse on peut retrouver la valeur de l'accélération de la pesanteur à l'aide de l'équation suivante :

$$mg = k(z_0 - z_{eq})$$

Où m est la masse de l'objet au bout du ressort, k est la raideur du ressort, z_{eq} est la hauteur de la masse à l'équilibre et z_0 est la longueur à vide du ressort.

3.2.2 Le gravimètre absolu

"Les gravimètres absolus permettent la mesure directe de l'intensité de la pesanteur. Le principe consiste généralement à mesurer la chute dans le vide d'une masse : le temps de parcours d'une distance donnée permet d'accéder directement à la valeur g" [Bel20a].

Cependant cette méthode requiert du matériel très spécifique ainsi que des instruments de mesure très précis puisque la distance parcourue par la masse est obtenue grâce à un laser et que le temps de chute est lui mesuré avec une horloge atomique.

Il existe donc d'autre façon d'accéder à la valeur de l'intensité de la pesanteur comme par exemple l'utilisation d'un pendule. En effet, "on peut accéder à la valeur g grâce à la formule

$$g = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

Où I est le moment d'inertie et T la période d'oscillation du pendule." [mét20]

3.3 Les montres mécaniques

Jusqu'en 1960, toutes les montres étaient mécaniques. C'est-à-dire qu'elles étaient remontées à la main grâce à un mécanisme à ressort. Celles-ci sont composés de cinq parties [GAL20] :

— Énergie
— Rouage
— Échappement
— Régulateur
— Indication de l'heure

FIGURE 6 – Image d'un balancier spiral

La partie régulatrice est composé d'un balancier spiral, celui-ci fonctionne sur le principe de l'oscillation. Le balancier pivote autour d'un axe circulaire et est accompagné d'un ressort qui égalise le mouvement de l'ensemble. "Le balancier spiral [...] régule la marche du temps grâce à ses oscillations et est responsable de la précision de la montre" [Hor20]. Lorsqu'il est en action, il est notamment responsable du « tic-tac » que l'on entend et correspond à la période du mouvement. Une montre est donc jugée de qualité grâce à sa précision entre autres. On parle de fréquence, nombre d'oscillations en une seconde, ou alors du calibre d'une montre. Une fréquence élevée améliore la précision de la montre.

4 Mesurer le rayon terrestre avec un pendule de 2 mètres

4.1 Prémisses

Notre volonté a été, dès le début de ce projet, de calculer une distance à partir de la période d'un pendule simple. La question est donc la faisabilité de l'expérience en permettant une certaine précision. Aussi, quelles sont les conditions à remplir pour que nous atteignons ce niveau de précision ? Nous devons donc accomplir un travail littéral et aboutir sur des applications numériques afin d'atteindre notre objectif.

4.2 La construction du pendule

Pour passer à la pratique, nous avons décidé de construire un pendule simple. L'idée est d'élaborer un pendule géant pour augmenter amplement la longueur du fil. Nous nous sommes mis d'accord sur la hauteur de la potence et l'avons établi à $2m$. Le principal problème est donc de stabiliser la potence pour qu'elle ne soit pas entraînée par l'oscillation du poids.

4.2.1 Matériaux utilisés

En fonction de notre budget, nous avons dû adapter nos mesures par rapport aux matériaux achetés. Nous avons donc imaginé un système de deux planches à travers lesquelles la potence est encastrée pour l'empêcher de tanguer. Ce système nous permet d'avoir une oscillation régulière et non influencée par le mouvement de la potence. Ces deux planches sont reliées par 4 piliers fixés par des clous et renforcés par des équerres.

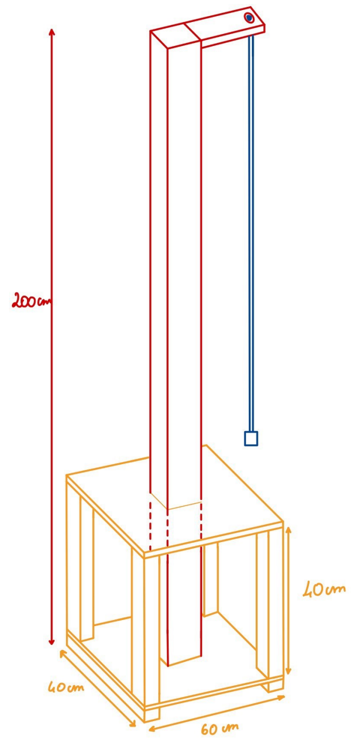


FIGURE 7 – Schéma du pendule

4.2.2 Problématiques rencontrées

Nous avons réalisé notre pendule conformément à notre maquette d'origine, seulement, nous nous sommes rapidement rendu compte que la qualité de la stabilité de notre dispositif n'est pas suffisante. Nous devons donc rapidement trouver un moyen de corriger cette stabilité.

4.2.3 Solutions envisageable

Pour compenser les mouvements de gauche à droite du pendule, nous pourrions tendre des câbles pour relier la potence et le support. Nous pourrions relier les deux planches car la principale source du déséquilibre vient du support. Enfin, nous rajouterions une planche qui comble l'espace à l'avant du pendule, pour éviter que le poids ne tape la structure, et un marquage au sol qui permettrait de lancer le poids sur un seul axe, celui de la potence.

4.3 Protocole expérimental

On utilise un Iphone servant ici de caméra et d'outil pour le traitement des images ainsi que l'application numérique Python. Nous utilisons également le pendule simple que nous avons construit.

— Dans un premier temps, on positionne notre pendule, on prend soin à sa stabilité ainsi que la droiture de la potence.

— L'Iphone est positionné à 2 mètres de la potence. Le plus important ici est de ne pas avoir de mouvement parasite au niveau de la caméra afin de mesurer les valeurs de période les plus fidèles possibles.
— On pratique 10 périodes complètes en positionnant la masse immobile à un angle donné, puis sans aucune impulsion, pour éviter toute vitesse initiale, on relâche cette masse afin d'entamer les oscillations.
— On récupère ensuite la valeur de période en analysant les images : on cherche au plus précis l'image des premiers instants de la série d'oscillations, puis celle de la fin. Nous faisons ainsi une simple différence afin d'obtenir la valeur brute qui sera traitée plus tard par le programme Python.
— On entre les valeurs de l'expérience dans le programme python et on récupère enfin les résultats. On les compare à la valeur «réelle» en relativisant avec nos approximations.

4.4 Programme Python : Application Numérique

```
import math

longueur = int(input("longueur du fil : ")) #metres
periodeBrute = int(input("duree totale : ")) #secondes
nombrePeriode = int(input("nombre de periodes : ")) #valeur algebrique

periode = periodeBrute/nombrePeriode

distance = (periode/(2*math.pi))*math.sqrt((6.57*10**(-11)*5.9736*10**24)/longueur)
distance = int(distance*1000)/1000

print("distance : ",distance,"m soit : ", int(distance)/1000, "km")
```

5 Conclusion

Au travers de ce projet science, nous avons appris à nous servir de nos connaissances pour affronter directement les problèmes de l'application. En effet, nous avons connus les affres des contraintes réelles lors de la construction du pendule. Nous avons pu également chercher à comprendre quelles sont les exploitations principales de ce modèle et ainsi pu les modéliser à l'aide de nos connaissances. Nous avons donc mené une démarche de développement qui nous a permis de prendre conscience des réalités de la conception et également de tirer profit de la rigueur acquise dans les matières scientifiques. Enfin, les oscillateurs harmoniques représentent la clé de voûte de la mécanique. C'est également le cas pour bien d'autres domaines. On peut donc se poser la question : Qu'en est-il des oscillateurs dans les différents domaines de la Physique comme l'électronique, la thermodynamique,... ?

Table des matières

Table des figures

Références

[20a] *"L'oscillateur harmonique"*. `http://pcsi1.physique.pagesperso-orange.fr/oscillateur_harmonique.pdf`. s. d., consulté en novembre 2020.

[20b] *"Oscillateur harmonique Mécanique"*. `https://melusine.eu.org/syracuse/immae/mpsi/physique-chimie/mecanique/04.pdf`. Mis en ligne en 2007, consulté en novembre 2020.

[20c] *"Oscillateur harmonique, oscillations libres"*. `http://uel.unisciel.fr/physique/syst_oscillants/syst_oscillants_ch02/co/apprendre_01.html`. Mis en ligne en 2008, consulté en novembre 2020.

[20d] *"oscillateur$_h$armonique$''$"*. `http://webetab.ac-bordeaux.fr/Etablissement/BDBorn/sections/postbac/prepasciences/physique/telech/docs20089/M4_2008-2009b.pdf`. Mis en ligne en 2008, consulté en décembre 2020.

[Bel20a] Observatoire Royal de Belgique. *"Comment fonctionne un gravimètre absolu ?"* `http://seismologie.be/fr/foire-aux-questions/comment-fonctionne-un-gravimetre-absolu/`. Mis en ligne en 2016, consulté en 2020.

[Bel20b] Damien Le Bellour. *"Mesure de la pesanteur"*. `https://www.emse.fr/~bouchardon/enseignement/processus-naturels/up1/web/wiki/`. Mis en ligne en 2014, consulté en 2020.

[Fra20a] Mourad Aiche François Rigaud. *"Le pendule simple"*. `http://uel.unisciel.fr/physique/meca/meca_ch09/co/chapitre9_02.html`. Mis en ligne en 2002, consulté le 27 octobre 2020.

[Fra20b] Mourad Aiche François Rigaud. *"Pendule simple"*. `http://uel.unisciel.fr/physique/meca/meca_ch06/co/chapitre5_01.html`. Mis en ligne en 2002, consulté le 27 octobre 2020.

[GAL20] Elsa GALERA. *"Comment fonctionne une montre mécanique ? (français)"*. `https://www.youtube.com/watch?v=EedRKx0lLM4`. Mis en ligne en avril 2016, consulté le 22 novembre 2020.

[GIB20] Alain GIBAUD. *"Portrait de phase d'un oscillateur"*. `http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M01_G04/co/module_NLP_C_M01_G04_5.html`. Mis en ligne en 2011, consulté en décembre 2020.

[Gra20] Olivier Granier. *"Physiques des ondes, oscillateurs couplés"*. `http://ressources.unisciel.fr/sillages/physique/ondes_mecaniques/res/osc-couples.pdf`. Mis en ligne en 2010, consulté le 23 octobre 2020.

[Hor20] Fondation Haute Horlogerie. *"L'ORGANE DE RÉGULATION : LE BALANCIER SPIRAL"*. https://www.hautehorlogerie.org/fr/encyclopedie/encyclopedie-des-montres/montres-mecaniques/d/s/lorgane-de-regulation-le-balancier-spiral/. Mis en ligne en 2019, consulté le 26 décembre 2020.

[JRo20] J.Roussel. *"Période du pendule simple"*. https://femto-physique.fr/mecanique/periode-pendule-simple.php. Mis en ligne en octobre 2019, consulté le 27 octobre 2020.

[Jér20] Vincent Renvoizé Jérôme Perez. *"Oscillateur harmonique"*. https://www.unitheque.com/UploadFile/DocumentPDF/P/H/IRSW-9782744076534.pdf. Mis en ligne en 2013, consulté en décembre 2020.

[Kha20] KhanAcademyFrancophone. *"Oscillateur harmonique : équation différentielle du mouvement"*. https://fr.khanacademy.org/science/physics/mechanical-waves-and-sound/simple-harmonic-motion-with-calculus/v/harmonic-motion-part-2-calculus. Mis en ligne le 12 juin 2014, consulté en novembre 2020.

[mét20] Conservatoire national des arts et métiers. *"Les méthodes géophysiques"*. http://forumbachelor.free.fr/gma/GMA1/index.php?page=32/. Mis en ligne en 2004, consulté en 2020.

[Oli20] Frédéric Chambat Olivier Dequincey. *"Gravimétrie et géodésie : principes, applications"*. https://planet-terre.ens-lyon.fr/article/geodesie-gravimetrie.xml. Mis en ligne en 2010, consulté en 2020.

[Pie20] Laurent Pietri. *"Oscillateur harmonique"*. http://pcjoffre.fr/Data/pcsi/C11_Oscillateur_harmonique.pdf. Mis en ligne en 2017, consulté en décembre 2020.

[ROU20] Jean-Jacques ROUSSEAU. *"Physique et simulations numériques"*. http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/harmoressort.html. Mis en ligne en 2018, consulté le 23 octobre 2020.

[SEI20] SEIS. *"Brève histoire de la sismographie"*. https://www.seis-insight.eu/fr/?option=com_content&view=article&id=266:breve-histoire-de-la-sismologie&catid=52:sismologie-planetaire&lang=fr-FR. Mis en ligne le 18 septembre 2017, consulté le 18 novembre 2020.

[Sup20] Optimal Sup-Spé Groupe IPESUP Sup-Spé. *"L'oscillateur harmonique. Cours Maths Sup"*. https://www.youtube.com/watch?v=z_6qIRO7taYl. Mis en ligne le 11 janvier 2016, consulté en décembre 2020.

[UNI20] UNICAEN. *"L'oscillateur harmonique en régime"*. https://www.physique.unicaen.fr/lib/exe/fetch.php?media=wiki:users:evient:oscillateursi:chapitreiiietfin.pdf. Dernière mise a jour le 4 janvier 2017, consulté le 18 décembre 2020.

[Uni20] Universalis. *"Gravimétrie"*. https://www.universalis.fr/encyclopedie/gravimetrie/. Mis en ligne en 2011, consulté en 2020.

6 Annexe

6.1 Calculs d'incertitude

Nous calculons l'incertitude pour la valeur de gravité, afin de savoir si cette dernière est suffisante pour pouvoir calculer une différence de l'ordre du mètre. On pose la formule de la période pour un pendule simple. //nous avons ainsi abandonner la piste de la différence de quelques mètres//

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \\ g &= \left(\frac{2\pi\sqrt{l}}{T}\right)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

On considérera ici que la mesure de l s'effectuera avec une règle précise au millimètre. Notre précision sera donc au demi-millimètre. D'autre part, nous considérerons que notre temps de réaction sera de $200m.s^{-1}$ pour relâcher la masse en synchronisation avec le chronomètre, et également pour arrêter le chronomètre. Pour être suffisamment précis tout en restant dans l'approximation d'un oscillateur harmonique, nous effectuerons 10 périodes. La valeur de π sera quant à elle considérée comme exacte, nous prendrons une approximation avec un minimum de 15 décimales pour nous assurer que l'erreur issue de cette constante soit considérée négligeable. On note : T_{mesure} la valeur brute obtenue à la mesure des 10 périodes, et $T_{effectif}$ la valeur ramenée à une période par division.

$$\begin{aligned} T_{effectif} &= \frac{T_{mesure}}{10} \pm 4 \times 10^{-2} \\ l_{effectif} &= l_{mesure} \pm 5 \times 10^{-4} \end{aligned} \tag{7}$$

On pose à présent le calcul d'incertitude :

$$\Delta_g = \left(\frac{\Delta_T}{T_{effectif}} + \frac{\Delta_l}{l_{effectif}}\right) \times g_{calcule} \tag{8}$$

6.1.1 Problème

Notre objectif est de réduire au maximum cette valeur de Δ_g, or nous savons que nous ne pouvons pas a priori diminuer les valeurs de Δ_i. Il nous reste donc les valeurs de $T_{effectif}$ et de $l_{effectif}$. Ces deux valeurs doivent être les plus grandes possibles tout en restant dans l'approximation des oscillateurs harmoniques. On sait d'après la formule (8) qu'en réalité les grandeurs T et l sont directement liées. Augmenter $T_{effectif}$ implique d'exposer plus longtemps le pendule aux force de frottements. Identiquement, $l_{effectif}$ est le trajet de notre masse donc l'augmenter augmente également le temps de soumission aux forces de frottements.

6.1.2 Conditions des solutions

Nos deux principaux moyens d'action sont Δ_T et Δ_l. En effet, à moins de grandement diminuer les forces de frottements, on ne peut pas augmenter d'avantage le nombre de périodes pour effectuer la mesure. Nous quitterions alors la notion d'oscillateur harmonique.

— On trouve un autre moyen de mesurer la distance l.
— On trouve un moyen pour réduire considérablement les forces de frottements.

$$\begin{aligned} g_{theorique} &= G \times \frac{m_T}{r^2} \\ G &= 6,67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2} \\ m_T &= 5,9736 \times 10^{24} kg \\ r_T &= 6,371008 \times 10^6 m \\ r_{theorique} &= \sqrt{G \times \frac{m_T}{g_{theorique}}} \\ \Delta_r &= \sqrt{G \times m_T} \times \left(\frac{1}{\sqrt{g_B}} - \frac{1}{\sqrt{g_A}} \right) \end{aligned} \tag{9}$$

g_A est le gravité mesurée au rez de chaussée et g_B est le gravité mesurée à l'étage.
On cherche à connaître le nombre de décimales de g requis pour pouvoir avoir une précision au mètre.

$$\begin{aligned} &6373037.624 : 9.81 \\ &6373037.300 : 9.810001 \ (\approx 30 \ \textit{centimetres}) \ 6 \\ &6373037.592 : 9.8100001 \ (\approx 5 \ \textit{centimetres}) \ 7^{*} \\ &6373037.621 : 9.81000001 \ (\approx 5 \ \textit{millimetres}) \ 8^{**} \end{aligned} \tag{10}$$

Les précisions étoilées sont des objectifs mais malheureusement hors de notre portée en considération de nos moyens. Nous devons donc changer d'objectif (Établir la preuve que c'est impossible puis trouver un nouvel objectif en raisonnant en pourcentage en centaines/milliers de mètres).

6.2 Démonstration

Dans ce cas nous considérons un système de deux points matériels de masse m, reliés par trois ressorts de longueur l et de constante de raideur k. En modifiant le système de sa position de repos, les deux masses changent de position (x1 et x2). Dans le référentiel galiléen on peut alors écrire

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

En projectant sur l'axe x, on a donc :

$$\begin{cases} m\ddot{x_1} = -kx_1 - k(x_1 - x_2) = k(x_2 - 2x_1) \\ m\ddot{x_2} = -kx_2 - k(x_2 - x_1) = k(x_1 - 2x_2) \end{cases}$$

Afin de résoudre ce système, on pose ce changement de variable : $X_1 = x_1 + x_2$ et $X_2 = x_1 - x_2$. On effectue une addition et une soustraction entre les deux lignes du système :

$$m\ddot{x_1} + m\ddot{x_2} = m(\ddot{x_1} + \ddot{x_2}) = -k(x_1 + x_2) = m\ddot{X_1} \Leftrightarrow \ddot{X_1} = -\frac{k}{m}X_1 = \omega_0^2 X_1$$
$$m\ddot{x_1} - m\ddot{x_2} = m(\ddot{x_1} - \ddot{x_2}) = -3k(x_1 - x_2) = m\ddot{X_1} \Leftrightarrow \ddot{X_2} = -3\frac{k}{m}X_2 = -3\omega_0^2 X_2$$

On trouve alors deux équations différentielles que l'on peut résoudre :

$$\ddot{X_1} + \omega_0^2 X_1 = 0$$
$$\ddot{X_2} + 3\omega_0^2 X_2 = 0$$

On peut donc écrire la forme de la solution générale de ces deux équations (avec C_1, C_2, ϕ_1, ϕ_2 des constantes déterminées à partir des conditions initiales) :

$$X_1(t) = C_1\omega_0 cos(\omega_0 t + \phi_1) = 0$$
$$X_2(t) = C_1\omega_0 cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2) = 0$$

On sait que à t=0 : $x_1(0) = A$, $x_2(0)$ donc $\dot{X_1} = 0$ et $\dot{X_2}$.
Alors :

$$\dot{X_1} = -C_1\omega_0 sin(\omega_0 t + \phi_2) = 0$$
$$\dot{X_2}(t) = -C_2\sqrt{3}\omega_0 sin(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2) = 0$$

$$-C_1 sin(\phi_1) = 0$$
$$-C_2 sin(\phi_2) = 0$$

On sait que à t=0 :

$$C = C_1 cos(\phi_1)$$
$$C = C_2 cos(\phi_2)$$

On en déduit : $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$ et $C = C_1 = C_2$

$$X_1 = Ccos(\omega_0 t)$$
$$X_2 = Ccos(\sqrt{3}\omega_0 t)$$

Si l'on revient aux valeurs x_1 et x_2 on trouve alors les équations du mouvement de cet oscillateur couplé :

$$x_1 = X_1 - x_2 = X_1 + X_2 - x_1 \Leftrightarrow$$
$$x_1 = \frac{C}{2}(cos(\omega_0 t) + cos(\sqrt{3}\omega_0 t))$$
$$x_2 = x_1 - X_2 = X_1 - x_2 - X_2 \Leftrightarrow$$
$$x_1 = \frac{C}{2}(cos(\omega_0 t) - cos(\sqrt{3}\omega_0 t))$$