

Algorithmique Avancée TD01

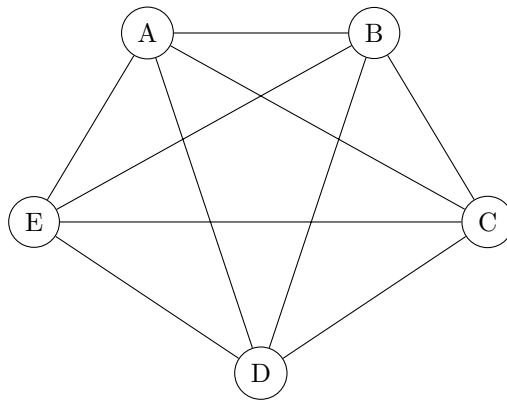
Hugo Demaret

September 2021

Partie A -

Exercice 1 -

Représentons le problème sous forme de graphe :



Notons l'arête reliant deux sommets i, j " $(i; j)$ ". Remarquons que $(i; j) = (j; i)$
(Car le graphe est non orienté)

Comptons le nombre de paires grâce à la formule $\frac{n(n-1)}{2}$, avec $n = \text{card}(\{A, B, C, D, E\}) = 5$
 $\frac{5(5-1)}{2} = 10$ car on ne forme pas de paire $(i; i)$
Cela donne 10 paires. Donc le nombre total (minimal) de personnes est 10, à répartir entre chaque groupe équitablement.

Le nombre de personnes par groupe est donc 2.

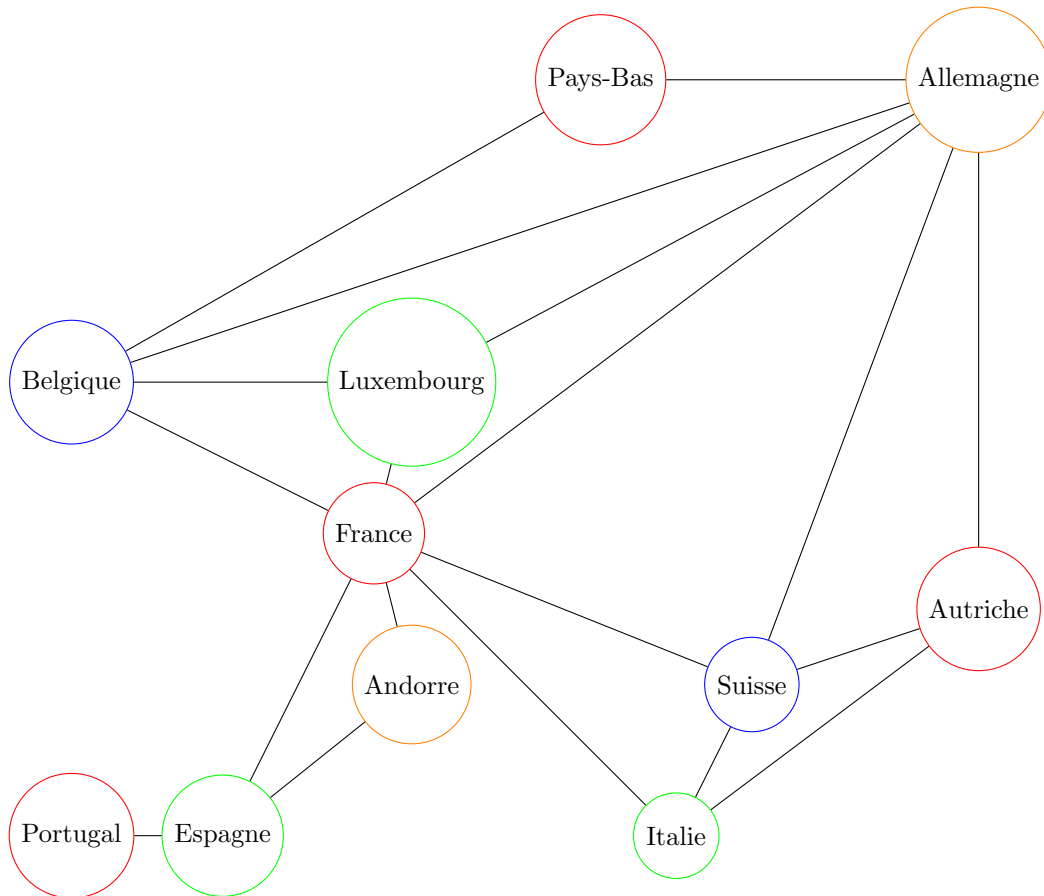
Exercice 2 -

Représentons ce problème sous forme de graphe. La question que l'on se pose est "Ce graphe est-il k -coloriable, pour quelle valeur de k ?"

Les sommets représenteront les pays, et la relation entre deux sommets (lien) est une

frontière commune. On peut en vérité déjà savoir que le graphe sera 4-coloriable. En effet, tout graphe planaire (pouvant se représenter sur un plan sans que les arêtes ne se croisent), est 4-coloriable d'après le théorème des 4 couleurs.

Voici un tracé possible de ce graphe :



On remarque bien que ce graphe est planaire, et est 4-coloriable.

De manière générale, il est compliqué de résoudre le problème coloriable pour un graphe. Le problème coloriable est en effet NP-Complet, le temps de calcul est donc long pour un grand nombre de noeuds. Dans le cas d'un graphe complet, on sait qu'il est n -coloriable (n noeuds). Un graphe planaire est 4-coloriable (théorème des 4 couleurs).

Matrice d'adjacence du graphe : (on utilise l'ordre qui a été donné dans l'exercice)

X	Fr	Es	Po	An	It	Au	Su	Al	Lu	Be	Pb
Fr	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0
Es	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
Po	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
An	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
It	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
Au	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
Su	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
Al	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
Lu	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
Be	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
Pb	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

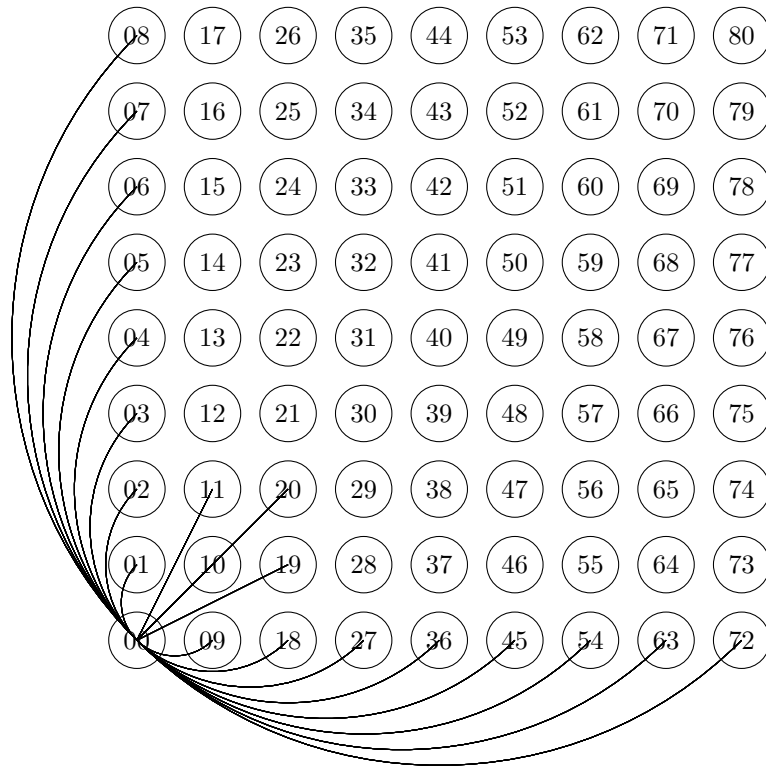
D'où la matrice d'adjacence A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'algorithme de Welsh-Powell ne nous donne pas le nombre chromatique : il nous donne 5, alors que le graphe est 4-coloriable.

Exercice 3 -

Graphe représentant le Sudoku (Par Eyal)



On représente toutes les cases du sudoku, de 1 (00) à 81 (80) On relie entre elles les cases incompatibles : une case x dans $(i ; j)$ ne peut avoir la même valeur qu'une case y dans $(i ; j)$, et ne peut pas être dans le même carré. Ainsi, on relie (00) à :

$$\forall \alpha \in \{ \{ \beta \cong 0[9] : \beta \in [1, 80] \} \cup \{ \beta \in [1, 8] \} \cup \{ \beta \in \{10, 11, 19, 20\} \} \}$$

A chaque fois que l'on met un nombre δ dans une case, on l'enlève de :
 Son carré : 8 cases, sa ligne : 8 cases, sa colonne : 8 cases. On somme le tout, et on retranche 4 car 4 cases du carré sont déjà comptées dans les lignes et colonnes.
 On remarque tout de suite, de part le nombre de cases du jeu Sudoku, que l'ordre du graphe est 81.

La taille de ce graphe est quant à elle de 20.

Partie B -

Voir sur :

https://github.com/HugoDemaret/linked_list

https://github.com/HugoDemaret/doublelinked_list

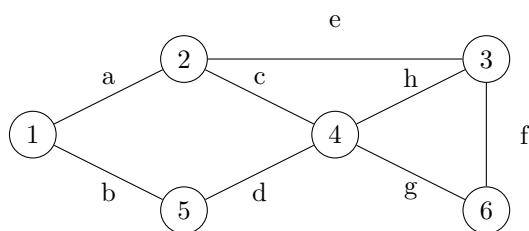
https://github.com/HugoDemaret/binary_tree

Actuellement, seule l'implémentation de la LinkedList est faite.

Partie C -

Exercice 1.1 -

Soit G le graphe suivant :



Matrice d'adjacence de G :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Codage en liste d'arêtes et sommets :

Sommet	arêtes	sommets
1	a,b	2,5
2	a,c,e	1,3,4
3	e,f,h	2,4,6
4	c,d,g,h	2,3,5,6
5	b,d	1,4
6	f,g	3,4

Exercice 1.2 -

On considère G un graphe simple et non dirigé.

1 - Soit A la matrice d'adjacence de G . Que valent les sommes par lignes et par colonnes ?

Les sommes par lignes et par colonnes nous donnent le degré des sommets de G .

2 - Soit M la matrice d'incidence de G , c'est-à-dire une matrice de taille $|V(G)| \cdot |E(G)|$ telle que $m_{ue} = 1$ si l'arête e est incidente au sommet u et $m_{ue} = 0$ sinon. Ecrire la matrice d'incidence du graphe de l'exercice précédent.

Matrice d'incidence de G :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3 - Que valent les sommes des coefficients par lignes et par colonnes de M ?

La somme des coefficients par ligne de M nous donne le degré des sommets.

La somme des coefficients par colonne de M nous dit si le graphe est simple ou connexe.

Somme par lignes :

$$\sum |M_i|$$

Nous donne le degré du sommet i .

$$\max(\sum |M_i|)$$

Nous donne l'ordre du graphe.

Somme par colonnes :

$$\sum |M_j| = \begin{cases} \text{si } 1 : \text{boucle (non-simple)} \\ \text{- pas d'information sur la connexité} \\ \text{si } 2 : \text{arête simple et connexe} \end{cases}$$

Nous dit si le sommet est simple, et s'il est connecté au reste du graphe.

$Min()$ somme par colonnes :

$$\min(\sum |M_j|) = \begin{cases} \text{si } 1 : \text{graphe non-simple} \\ \text{si } 2 : \text{graphe simple et connexe} \end{cases}$$

Nous dit si le graphe est simple et connexe, ou s'il contient une boucle.

4 - Soit D la matrice diagonale de taille $n(G) \times n(G)$ dont le coefficient de la ligne correspondant au sommet u vaut le degré de u .

Démontrez que :

$$M^t M = A + D$$

Soit G un graphe.

A est la matrice d'adjacence de G

M est la matrice d'incidence

On a :

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i,j \text{ sont reliés, } 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } i \text{ est reliée au sommet } j, 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$D_{i,j} = \begin{cases} \sum A_i & \text{si } i=j, 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

D'où :

$$\dim(A) = \dim(D) \quad (\text{par définition de } D)$$

Et :

$$\dim(M^t M) = \dim(A + D) \quad \text{car les deux sont de taille } i^*j$$

Cas du graphe G précédent :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M^t M &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
D &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
A + D &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc bien $M^t M = A + D$ pour le graphe G .

Dans un cas général, cela est vrai car :

$$D'une part : \dim(M^t M) = \dim(A) = \dim(D)$$

En effet, M est de dimension n (sommets) \times k (arêtes)
D'où, après multiplication par sa transposée, une matrice de taille $n \times n$.
Par produit matriciel, la diagonale prend donc la valeur du degré du sommet.
Enfin, les autres coefficients de la matrice se correspondent car on fait d'une part la somme des degrés, d'autre part on 'replace' les sommets, comme dans la matrice d'adjacence.

Donc,

$$M^t M = A + D$$

Autre démonstration :

$$\begin{aligned}
(M^t M)_{uv} &= \sum_{i \in G} M_{ui}^t M_{iv} \\
(M^t M)_{uv} &= \sum_{i \in G} M_{ui} M_{vi} \\
Si \ u \neq v, \quad M_{ui} M_{vi} &= 1 \\
Donc : \\
\sum_{i \in G} M_{ui} M_{vi} &= \begin{cases} 1 \text{ si l'arête existe, } 0 \text{ sinon} \end{cases} \\
\sum_{i \in G} M_{ui} M_{vi} &= A_{uv} \\
Si \ u = v, \quad M_{ui} M_{vi} &= 1 \\
\sum_{i \in G} M_{ui} M_{vi} &= D_{uv} \\
D'où \\
M^t M &= A + D \quad \square
\end{aligned}$$