Algorithmique Avancée TD02

Hugo Demaret

September 2021

Exercice 1.3 -

Montrez que tout groupe d'au moins deux personnes contient toujours au moins deux individus ayant le même nombre d'amis.
Cas trivial du groupe à deux personnes :
Si connexe : 1 ami, sinon 0
Le graphe possède n sommet, et k arêtes.
On procède par récurrence :

On utilise le lemme des tiroirs :
On a n sommet, et au plus n-1 étiquette.
Par principe des tiroirs, au moins deux sommets on la même etiquette.

Exercice 1.4 -

Soit $(d_1, ..., d_n)$ la suite des degrés d'un graphe non-dirigé G.
On note $\delta(G)$ et $\triangle(G)$ respectivement le plus petit et le plus grand de ces sommets.

1 -

Montrez que $\sum_{i=1}^{n} di = 2m(G)$.

Quand on ajoute une arête, on augmente le degré de deux sommets.
La somme des degrés du graphe vaut n, et deux fois plus de sommets. D'ou :

$$\sum_{i=1}^{n} di = 2m(G)$$

2 -

En déduire que $\delta(G) \leq \frac{2m(G)}{n(G)} \leq \triangle(G)$

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \delta(G) \leq d_i \leq \triangle(G)$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \delta(G) \leq \sum_{i=1}^{n} d_i \leq \sum_{i=1}^{n} \triangle(G)$$

$$\Rightarrow n\delta(G) \leq 2m(G) \leq n \triangle (G)$$
$$\Rightarrow \delta(G) \leq \frac{2m(G)}{n(G)} \leq \triangle(G)$$

Exercice 1.5 -

Le but de cet exercice est de montrer que deux plus longs chemins dans un graphe non-orienté connexe G ont forcément un sommet commun.

1 -

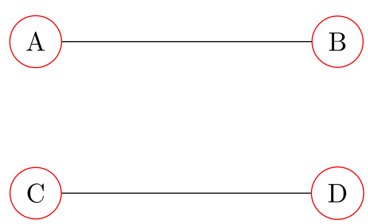
Démonstration 1 :

Si les deux chemins ont la même longueur :
- Soit ils partent du même sommet (ou arrivent au même) et sont joints.
- Soit ils ne partent pas du même sommet (et n'arrivent pas au même sommet).
On peut donc couper le graphe en deux sous graphes
Pour chacun de ces deux sous graphes, on ne considère que les chemins.
Ces sous graphes sont alors homéomorphe à un segment.
La distance étant égale, on peut tracer deux cordes
(les deux chemins) sur un cercle de rayon k, avec k étant le nombre de sommets
Ces deux cordes sont en fait des rayons, car de longueur k.
Deux rayons d'un cercle s'intersectent toujours.
Donc les deux chemins se croisent. Absurde.

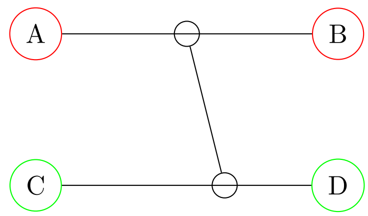
Démonstration 2 :

On essaie de représenter ce à quoi pourrait ressembler un tel graphe. On montrera ensuite pourquoi un tel graphe, s'il existe, contedit les prémices de notre raisonnement.

On suppose qu'il existe un graphe G simple et connexe, tel qu'il existe (au moins) deux chemins λ et δ avec : $\lambda \cap \delta = \varnothing$ Voici un schéma représentant ce graphe :



Ces deux chemins (A, B) et (C, D) sont de taille égale.
Le graphe étant connexe, il existe un chemin (ω, σ) les reliants.
Représentation :



On remarque qu'en passant par ce nouveau chemin, la distance parcouru est plus grande.
Ces deux chemins les plus grands ne sont donc pas les plus grands. Absurde.
Ou alors, le graphe n'est pas connexe. Absurde.

Donc, deux plus longs chemins dans un graphe G ne sont pas disjoints. □

2 -

Étant donné que les deux chemins se croisent (car non-disjoints), il existe au moins un sommet en commun.

3 -

Dans le cas d'un graphe non-connexe nom : graphe composé de deux fois un même sous graphe. Dans le cas d'un graphe orienté faiblement connexe, cette propriété est fausse :