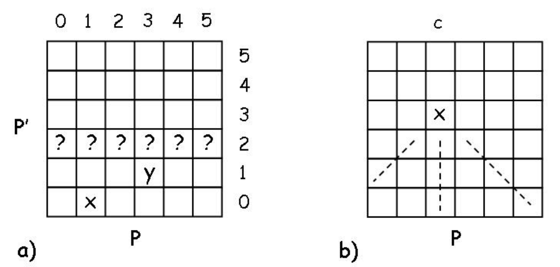
Le Projet
Le problème des 8 reines

Département Biomed — ESIL — usage interne

2011-12

1 Trouver toutes les solutions ...

Nous voulons résoudre le problème dit “des 8 reines”. Il s’agit de consplacer 8 reines sans que l’une n’en attaque aucune autre, d’après les règles des échecs (prises sur les lignes, colonnes et diagonales). Nous allons ensuite analyser des échiquiers de côté n, où n peut varier de $n = 1$ à $n = 14$.



Bonjour mon vieux !!! Héhé !!!!!!!!!!! La résolution informatique du problème passaaaaaaaae par une énumération intelligente de toutes les configurations qui produire une solution. On parle d’algorithme de *back-track*. Comme indiqué sur la figure ci-dessus à gauche, nous fixons un côté P qui est celui de l’observateur de l’échiquier et nous numérotons les lignes de 0 à $n-1$, de bas en haut, et les colonnes de 0 à $n-1$, de gauche à droite. Par la suite, nous allons essayer de détecter si certaines solutions trouvées sont symétriques par rapport à d’autres solutions, ce qui nous aménera éventuellement à observer l’échiquier depuis un autre côté, par exemple le côté P' de la figure ci-dessus à gauche.

Il est clair que, pour toute solution, il y a une reine par ligne et par colonne qui sont, de surcroît, positionnées à ne pas s’attaquer sur les diagonales. Il en découle qu’une procédure d’énumération n’a qu’à considérer les lignes les unes après les autres pour essayer d’y placer une reine sur toute colonne possible. Définissons *calcul(l)* comme la procédure qui est appelée lorsque des reines sont déjà placées sur les lignes 0 à $l-1$.

Elle est sensée tester, pour toute colonne c de l, si une reine peut être placée en (l, c) et relancer *calcul(l+1)*, le cas échéant. Ainsi, la figure ci-dessus à gauche indique les cases analysées par *calcul(2)*. Seules cases $(2, 0)$ et $(2, 5)$ vont pouvoir accueillir une reine.

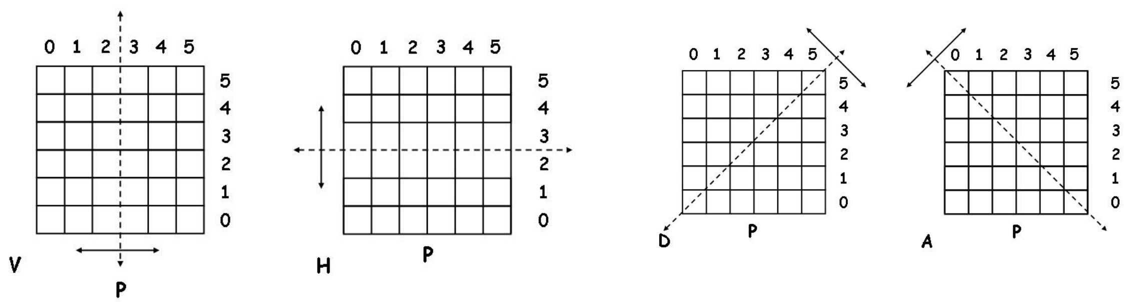
L’appel initial est bien-sûr *calcul(0)* et nous aurons trouvé une solution dès qu’il y a un appel *calcul(n)*, signifiant que les les lignes 0 à $n-1$ comportent toutes une reine et que nous avons donc une solution. Pour vérifier si une position (l, c) peut être occupée par une reine, il suffit d’appeler une fonction *possible(l,c)* qui vérifie qu’il n’y aucune reine sur la même colonne, ni sur les deux diagonales issues de (l, c), comme indiqué dans la figure ci-dessus à droite.

Il est donc facile de construire un algorithme qui cherche toutes les solutions du problème “des n reines”. On observe toutefois qu’il y a des solutions symétriques par rapport à d’autres par l’intermédiaire de symétries axiales ou centrales. Nous allons nous intéresser à caractériser celles-ci et à les éliminer algorithmiquement. Le tableau ci-contre donne les nombres de solutions non-symétriques, ainsi que symétriques, pour des tailles d’échiquiers de 1 à 14.

n	$\neg$ *sym*	*sym*	n	$\neg$ *sym*	*sym*
1	1	1	7	40	6
2	0	0	8	92	12
3	0	0	9	352	46
4	2	1	10	724	92
5	10	2	11	2680	341
6	4	1	12	14200	1787
7	40	6	13	73712	9233
8	92	12	14	365596	45752

2 Détecter les symétriques ...

Nous allons en un premier temps chercher à identifier les symétries que nous pouvons trouver tout en gardant le côté d'observation P fixe. Nous pouvons distinguer les 4 symétries de la figure ci-dessous. La symétrie V, par exemple, consiste à miroiter la gauche avec la droite. Pour un échiquier $n \times n$, elle transforme toute case (l, c) en une case $(l, n-c-1)$ et nous pouvons écrire $V : (l, c) \mapsto (l, n-c-1)$. Comme illustré ci-dessous, les autres transformations sont H qui miroite les lignes, D qui miroite le long de la diagonale principale et A qui miroite le long de l'anti-diagonale.



On définira, comme pour V ci-dessus, les transformées H, D et A et on notera $A\,;B$ le fait de composer les transformations A et B. Montrer que

$$V\,;V = H\,;H = D\,;D = A\,;A = Id \tag{1}$$
$$H\,;V = V\,;H = A\,;D = D\,;A \tag{2}$$
$$H\,;D = D\,;V = V\,;A = A\,;H \tag{3}$$
$$H\,;A = A\,;V = V\,;D = D\,;H \tag{4}$$

Le second type de symétries est donné par les symétries de rotation, la symétrie fondamentale étant R qui consiste en une rotation de l'échiquier d'un quart de tour contre la montre. Tourner l'échiquier d'un quart de tour contre la montre est équivalent à déplacer le point de vue de l'observateur d'un quart de tour vers la gauche (de P vers P' d'après la première figure). Montrer que R est définie comme $(l, c) \mapsto (c, n-l-1)$ et que

$$R = H\,;D \qquad R^2 = A\,;D \qquad R^3 = V\,;D \qquad R^4 = Id \tag{5}$$
$$H\,;R = D \qquad V\,;R = A \qquad A\,;R = H \qquad D\,;R = V \tag{6}$$

3 Trouver toutes les solutions non symétriques ...

Nous sommes surs d'atteindre toutes les symétries d'une solution en appliquant chacune des transformées A, D, H, V et R un nombre illimité de fois. Nous obtenons l'ensemble de transformations $(A \,|\, D \,|\, H \,|\, V \,|\, R)^*$, où $A \,|\, B$ désigne le choix entre A et B et A^* la répétition de A un nombre quelconque de fois.Il nous reste à réduire ce nombre infini de symétries à un nombre fini de symétries fondamentales, c'est-à-dire sans redites.

1. Montrer, en utilisant l'équation (6), que toute rotation R qui est précédée d'un autre opérateur disparaît et que donc

$$(A \,|\, D \,|\, H \,|\, V \,|\, R)^* \subseteq R^*\,;(A \,|\, D \,|\, H \,|\, V)^* \tag{7}$$

2. Montrer, en utilisant l'équation (5), que toute rotation R peut être exprimée à l'aide des seules symétries A,D, H et V et que donc

$$R^* \,;\, (A \mid D \mid H \mid V)^* \subseteq (A \mid D \mid H \mid V)^* \tag{8}$$

3. Montrer, en utilisant les équations (1) à (4), que

$$(A \mid D \mid H \mid V)^* \subseteq (A \mid D)^* \,;\, (H \mid V)^* \subseteq A^* \,;\, D^* \,;\, H^* \,;\, V^* \subseteq A^a \,;\, D^d \,;\, H^h \,;\, V^v \tag{9}$$

avec $a, d, h, v \in \{0, 1\}$.

On déduit de (9) qu'il y a au plus les seize symétries qui vont de $A^0 \,;\, D^0 \,;\, H^0 \,;\, V^0$ à $A^1 \,;\, D^1 \,;\, H^1 \,;\, V^1$ qu'il faut considérer. Observant en plus que, pour $p, q \in \{0, 1\}$, on a

$$\begin{aligned} A^p \,;\, D^q \,;\, H^1 \,;\, V^1 &= A^{1-p} \,;\, D^{1-q} \\ A^1 \,;\, D^1 \,;\, H^p \,;\, V^q &= H^{1-p} \,;\, V^{1-q} \\ A^p \,;\, D^1 \,;\, H^1 \,;\, V^q &= A^{1-p} \,;\, V^{1-q} \end{aligned}$$

il reste pour chaque solution les seules 8 variantes symétriques ci-dessous à prendre en compte :

Index	*Nom*	*Valeur*
1	Id	$(l, c) \mapsto (l, c)$
2	A	$(l, c) \mapsto (n - c - 1, n - l - 1)$
3	D	$(l, c) \mapsto (c, l)$
4	H	$(l, c) \mapsto (n - l - 1, c)$
5	V	$(l, c) \mapsto (l, n - c - 1)$
6	$D \,;\, V$	$(l, c) \mapsto (c, n - l - 1)$
7	$D \,;\, H$	$(l, c) \mapsto (n - c - 1, l)$
8	$A \,;\, D$	$(l, c) \mapsto (n - l - 1, n - c - 1)$

4 Déroulement du projet

Le projet est réalisé en binômes. Il consiste d'abord à intégrer le raisonnement sur les symétries et à le vérifier par le calcul. Ensuite, il s'agit d'écrire le programme qui calcule toutes les solutions pour un échiquier donné et d'en extraire également les seules solutions non symétriques.

L'évaluation se fait par le biais d'une présentation orale, en anglais et avec un support PowerPoint. Cette présentation est sensée décrire le sujet et le principe de la résolution algorithmque, sans détailler du code.

Tout au long du projet, les élèves ont l'occasion de discuter de l'avancement de leur projet, poser d'éventuelles questions, etc, avec les enseignants qui encadrent le projet.

Bon travail !