Corrigé de l'examen d'analyse

1. On définit la suite u_n, $u_{n+1} = {u_n}^2 - 1$ et $u_0 = 2$.

a) On pose $u_{n+1} - u_n = {u_n}^2 - u_n - 1 = f(u_n)$.

avec $f(x) = x^2 - x - 1$. On remarque que f est croissante sur R^+ et $f(2) = 1 > 0$.

On montre par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} > u_n \geq 2 \quad (H_n)$

i) (H_0) $u_1 = 3 > 2 \ (= u_0)$

ii) $(H_n \Rightarrow H_{n+1})$ On suppose que $u_{n+1} > u_n \geq 2$.

On en déduit $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) \geq f(2) > 0$, et donc $u_{n+2} > u_{n+1} \geq 2 \ (H_{n+1})$

b) On montre que pour tout entier n, $u_n > n$. C'est vrai pour $n = 0, 1, 2$.

Pour $n \geq 2$, supposons $u_n > n$. $u_{n+1} = {u_n}^2 - 1 > n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \geq n+1$.

La récurrence est établie, et la suite u_n diverge ($u_n \rightarrow \infty$).

c) $\frac{u_{n+1}}{{u_n}^2} = \frac{{u_n}^2 - 1}{{u_n}^2} = 1 - \frac{1}{{u_n}^2} \rightarrow 1$. On a donc bien $u_{n+1} \sim {u_n}^2$

Par suite pour tout entier k, $u_{k+n} \sim {u_k}^{2^n} > k^{2^n}$

2. On étudie les deux séries, en commençant par vérifier que leur terme général tend vers 0.

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + arctg\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

C'est une série alternée dont le terme général $u_n = \log \left(1 + arctg\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]\right)$ tend vers 0, mais n'est pas a priori décroissant. Il faut donc utiliser une méthode spécifique à ce cas. Ici c'est clairement un développement limité qui permettra de conclure.

$$arctg\, u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^4) \ ; \ \log(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + o(v^3)$$

et $\log(1 + arctg\, u) = u - \frac{u^3}{3} - \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(u - \frac{u^3}{3}\right)^3 + o(u^3)$

$$= u - \frac{u^3}{3} - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3) = = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^3)$$

On obtient pour u_n : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

S est la somme de trois séries. La première est une série alternée convergente. La troisième converge absolument (valeur absolue majorée à partir d'un certain rang par le terme d'une série de Riemann convergente). Mais la deuxième série diverge, et la somme S est donc divergente.

Il en est de même de la série T. En effet son terme général v_n a le même développement à l'ordre 3 $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

3. f est uniformément continue sur R si $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0,\ |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Comme $|f(x) - f(y)| = \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$, il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon$.

4. Si f est dérivable en 0, avec $f(0) = f'(0) = 0$, $f(x) = f(0) + x f'(0) + o(x) = o(x)$

Si en outre f est deux fois dérivable en 0 avec $f''(0) < 0$, $f(x) = \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)$

La forme locale de la courbe représentative de f est une parabole concave, et f a un maximum en 0.

Si $g(0) = g'(0) = 0$, $g''(0) < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} g''(0) + o(x^2)} = \frac{f''(0) + o(1)}{g''(0) + o(1)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{f''(0)}{g''(0)} > 0$

5. $f(x,y,z) = \frac{x\,y\,z}{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x,y,z) \neq 0$; $f(0,0,0) = 0$.

f est clairement de classe C^∞ sur $R^3 - (0,0,0)$. Il suffit donc de l'étudier en $(0,0,0)$.

On peut remarquer que : $|f(x,y,z)| \leq |x| \frac{|yz|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq |x| \frac{|yz|}{y^2 + z^2} \leq \frac{|x|}{2}$

f est donc continue en $(0, 0, 0)$. En effet, si (x, y, z) tend vers $(0, 0, 0)$, x tend vers 0.

On peut également écrire directement la définition de la continuité :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \quad \|(x,y,z) - (0,0,0)\| < \alpha \Rightarrow |f(x,y,z) - f(0,0,0)| < \varepsilon$

Avec le choix d'une norme quelconque de R^2. On peut prendre la norme infinie.

Pour $\varepsilon > 0$, il suffit alors de choisir $\alpha = 2\,\varepsilon$. Si $\|(x,y,z)\| < \alpha$, $|x| < 2\varepsilon \Rightarrow |f(x,y,z)| < \varepsilon$

Pour la différentiabilité on commence par étudier les dérivées partielles de f en 0. Les trois applications partielles sont identiquement nulles, et donc il en est de même de leurs dérivées en 0, c'est à dire des dérivées partielles.

La différentiabilité de f en 0 s'écrit donc : $f(h,k,l) = o(h,k,l)$

Cela signifie que le rapport $\frac{f(h,k,l)}{\|(h,k,l)\|}$ tend vers 0 quand $\|(h,k,l)\|$ tend vers 0.

Si on choisit la norme deux, et pour $h = k = l$, $\frac{f(h,k,l)}{\|(h,k,l)\|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

On en déduit que n'est pas différentiable en 0. Il suffit en effet de prendre $\varepsilon = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, et dans tout voisinage de $(0,0,0)$ il existe des points tels que $\frac{|f(h,k,l)|}{\|(h,k,l)\|} \geq \varepsilon$, ce qui contredit la définition de la différentiabilité.

6. Extrema de la fonction $f\,(x,y) = \; x^2\, e^{-x^2} + \, y^2\, e^{-y^2}$

f a un minimum global en (0, 0). On peut rechercher les autres extrema locaux en étudiant la condition nécessaire, que les deux dérivées partielles sont nulles.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) = (2x - \; 2x^3)\; \; e^{-x^2} \; = \; 2x\,(1 - \; x^2)\, e^{-x^2} \; = \; 0 \; \Leftrightarrow \; x\,(1 - \; x^2) \; = \; 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) = (2y - \; 2y^3)\; \; e^{-y^2} \; = \; 2y\,(1 - \; y^2)\, e^{-y^2} \; = \; 0 \; \Leftrightarrow \; y\,(1 - \; y^2) \; = \; 0$$

Ce système admet 9 couples de solutions :

$(0,0);\; (0,1);\; (0,-1);\; (1,0);\; (-1,0); (1,1);\; (1,-1);\; (-1,1); (-1,-1)$

On détermine la matrice hessienne en ces points.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) = 2\,[1 - \; 3x^2 \; - \; 2x\,(\,x - \; x^3)]\;\; e^{-x^2} = \; 2\,(1 - \; 5x^2 \; - \; 2x^4)\;\; e^{-x^2}$$

et par symétrie, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y) = \; 2\,(1 - \; 5y^2 \; - \; 2y^4)\;\; e^{-y^2}$

On obtient par ailleurs immédiatement que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,(x,y) = 0.$

La matrice $H = H_f\,(x,y)$ est diagonale, et on pourra conclure selon le signe des éléments diagonaux. Il y a un extremum s'ils sont non nuls de même signe. C'est un maximum pour des valeurs négatives, et un minimum pour des valeurs positives.

Pour $(0,1)$ et $(0,-1)$, $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12\, e^{-1} \end{bmatrix}$: pas d'extremum local

Pour $(1,0)$ et $(-1,0)$, $H = \begin{bmatrix} -12\, e^{-1} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$: pas d'extremum local

Pour $(1,1), (1,-1), (-1,1)$ et $(-1,-1)$, $H = \begin{bmatrix} -12\, e^{-1} & 0 \\ 0 & -12\, e^{-1} \end{bmatrix}$, et f a un maximum local en ces 4 points.

On peut également vérifier qu'il y a un minimum en $(0,0)$: $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.