Corrigé de l'examen d'analyse (janvier 2012)

1. Etude de la suite récurrente définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. L'énoncé suggère de différentier les cas $u_0 > 1$, $u_0 < 1, u_0 = 1$.

* Si $u_0 > 1$, on peut vérifier par récurrence que pour tout *n*, $u_n > 1$.

Par suite, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} < u_n$, et la suite est décroissante (et minorée). Elle est donc convergente.

* Si $u_0 < 1$, on peut vérifier par récurrence que pour tout *n*, $u_n < 1$.

Par suite, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} > u_n$, et la suite est croissante (et majorée). Elle est donc convergente.

Pour connaître la limite *u* de la suite, on peut remarquer en passant à la limite dans la relation de récurrence que $u = \sqrt{u}$, soit $u\,(u-1) = 0$, et $u = 0$ ou $u = 1$. D'après ce qui précède dans les deux cas la limite est 1. C'est vrai aussi si $u_0 = 1$, la suite étant constante et égale à 1.

On peut également calculer directement les valeurs de la suite en posant $b_n = \log u_n$,

soit $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2}$, et $b_n = \dfrac{b_0}{2^n} = \dfrac{\log u_0}{2^n}$, d'où $b_n \to 0$, et donc $u_n \to 1$.

On en déduit aussi que $u_n = e^{\frac{\log u_0}{2^n}}$.

2. Etude de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, avec $v_n = u_n - 1$.On suppose ici $u_0 > 1$, et il s'agit donc d'après le premier exercice d'une série à termes positifs dont le terme général tend vers 0. On peut donc raisonner par équivalents : $e^u - 1 \sim u$, et donc $v_n = e^{\frac{\log u_0}{2^n}} - 1$ $\sim \dfrac{\log u_0}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente, et la série des v_n converge.

3. $\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left[1 + arctg\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right]$. On pose $u_n = \log\left[1 + arctg\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right]$.

On vérifie que $u_n \to 0$. On peut aussi remarquer que c'est une série alternée, mais on ne peut pas appliquer le théorème sur les séries alternées. Ce qu'on peut faire par contre c'est un développement limité, en $u = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

$u_n = \log\left(1 + arctg\ u\right) = \log(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + o(v^3)$, et $v = arctg\, u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^4)$. En composant ces développements on obtient :

$$u_n = u - \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^3)$$
$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

La première série est une série alternée convergente. La troisième est en valeur absolue et à partir d'un certain rang majorée par une série de Riemann convergente. Par contre la deuxième série est divergente.

La somme est une série divergente !

4. On suppose que *f* est continue de [0, 1] dans [0, 1]. On pose $g(x) = f(x) - x^2$. g est continue sur [0, 1]. Par ailleurs, $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$, et on peut appliquer à g le théorème des valeurs intermédiaires : il existe c dans [0, 1] tel que $g(c) = 0$, et donc $f(c) = c^2$.

Si on suppose que *f* est croissante (question bonus ...)

On note $E = \left\{x \in [0,1],\ f(x) \geq x^2\right\}$. C'est un ensemble non vide $(0 \in E)$ et majoré, et il a donc une borne supérieure $\beta \leq 1$. On va montrer que $f(\beta) = \beta^2$, par l'absurde.

- Si $f(\beta) < \beta^2$. D'après la définition de β, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in E,\ \beta - \varepsilon < x < \beta$, et donc $f(x) \geq x^2 > (\beta - \varepsilon)^2$, et f étant croissante, $f(\beta) \geq f(x)$. On a donc pour tout $\varepsilon > 0$, $f(\beta) > (\beta - \varepsilon)^2$, et en faisant tendre ε vers 0 on obtient $f(\beta) \geq \beta^2$: contradiction !

- Si $f(\beta) > \beta^2$. Soit $x > \beta$: $x \notin E \Rightarrow f(x) < x^2$, et f étant croissante, $f(\beta) \leq f(x)$. On a donc $\beta^2 < f(\beta) < x^2$. Si on choisit $x = \sqrt{f(\beta)}$, $x^2 = f(\beta) < x^2$: contradiction !

5. Le sujet précise que I est un intervalle ouvert. Il ne s'agit pas exactement (!) de l'énoncé du théorème du cours, démontré en TD !

La démonstration se fait bien sûr également par double implication.

Si on utilise le résultat du cours qui est que f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout ouvert V de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(V)$ est ouvert : Un intervalle ouvert étant un ouvert, on a immédiatement que si f est continue, pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(I)$ est un ouvert .

Il reste à établir la réciproque : On suppose donc que pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(I)$ est un ouvert , et on montre que f est continue en tout point x de $\mathbb{R}$.

Soit x un nombre réel, et soit $\varepsilon > 0$. On considère l'intervalle ouvert $I = \,]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[$, et $U = f^{-1}(I)$ est par hypothèse un ouvert. Comme $x \in U$, il existe donc un nombre $\alpha > 0$ tel que la boule ouverte $B(x,\alpha) \subset U$.

Si on traduit cette inclusion : pour tout y, $y \in B(x,\alpha) \Leftrightarrow |x-y| < \alpha \Rightarrow f(y) \in I$

Et donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, $|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

f est donc continue en tout x de $\mathbb{R}$.

6. Le calcul (immédiat) donne $grad_f\,(x,y,z) = e^{-x}\,(2x - (x^2 + y^2 + z^2),\, 2y,\, 2z)$.

Pour la matrice hessienne il suffit de dériver une seconde fois, et on a

$$H = e^{-x}\begin{bmatrix} 2-4x+(x^2+y^2+z^2) & -2y & -2z \\ -2y & 2 & 0 \\ -2z & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Qui est bien une matrice symétrique.

Pour chercher les extrema locaux on commence par étudier la condition nécessaire :

$grad_f\,(x,y,z) = 0$, soit $y = z = 0$, et $2x - x^2 = x(2-x) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 2$. Il y a donc deux solutions possibles, $u = (2, 0, 0)$ et $v = (0, 0, 0) = 0$.

Pour la condition suffisante on utilise la matrice hessienne.

$H(u) = e^{-2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Cette matrice n'est ni positive ni négative. Au voisinage de u elle peut changer de signe, et il n'y a pas d'extremum.

Par contre $H(0) = 2\, I_3$ (matrice identité d'ordre 3) est une matrice positive, et il y a un minimum local à l'origine. C'est le seul extremum local.

C'est aussi clairement un minimum global de f.