Examen d'analyse

Durée 2 heures ; Documents autorisés

1. (*4 points*) On considère la suite u_n définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^{\,2} - 1,\ n \geq 0$.

a) Montrez que cette suite est croissante, en étudiant $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.

b) Montrez par récurrence que pour tout n, $u_n > n$. En déduire que la suite diverge.

c) Vérifiez que $u_{n+1} \sim u_n^{\,2}$. Que peut-on en conclure ?

2. (*4 points*) Etudiez la convergence des deux séries suivantes :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + Arctg\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]\right) \; ; \; T = \sum_{n=2}^{+\infty} Arctg\left(\log\left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

3. (*2 points*) Montrez que la fonction $f(x) = |x|$ est uniformément continue sur R.

4. Soit f une fonction définie et dérivable au voisinage de 0, telle que $f(0) = f'(0) = 0$.

Vérifiez que $f(x) = o(x)$. Quelle est la forme de f au voisinage de 0 si $f''(0) < 0$?

Que peut-on dire de la limite en 0 de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si de plus $g(0) = g'(0) = 0$ et $g''(0) < 0$?

(*2 points*)

5. On définit sur R^3 la fonction f définie par $f(0,0,0) = 0$ et $f(x,y,z) = \dfrac{x\,y\,z}{x^2 + y^2 + z^2}$ pour $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

Montrez que f est continue et qu'elle n'est pas différentiable en $(0,0,0)$. (*4 points*)

6. Etudiez dans R^2 les extrema locaux de la fonction : $f(x,y) = x^2 e^{-x^2} + y^2 e^{-y^2}$.
(*4 points*)