Examen d'analyse

Partie 1. Fonctions d'une variable réelle :

1. **On définit sur R les fonctions $f_n(x) = x^n e^{-nx}$, où n est un entier strictement positif.**

   ***a*) Indiquez en fonction de n (on distinguera les cas $n = 1$, $n = 2$, et $n > 2$) les dérivées première et seconde de la fonction f_n.**

   ***b*) En déduire les variations et la courbure de f_n .**

   ***c*) Que peut-on dire des extrema locaux de ces fonctions ?**

   ***d*) Tracez les courbes représentatives (approchées) des fonctions f_n pour $n = 1, 2, 3$.**

Les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. si $n = 0$, f_0 est strictement décroissante et sa courbe est exponentielle. Dans le cas général la dérivée première donne le sens de variation et la dérivée seconde la courbure de la fonction. Il faut distinguer les cas $n = 1$ où la dérivée seconde a une forme particulière et $n = 2$ où celle là ne s'annulera pas en 0.

- si $n \geq 1$, $f_n'(x) = n\,(x^{n-1} - x^n)\, e^{-nx} = n\; x^{n-1}(1-x)\, e^{-nx}$

- si $n = 1$, $f_1'(x) = (1-x)\, e^{-x}$ et $f_1''(x) = (x-2)\, e^{-x}$

La dérivée $f_1'(x)$ s'annule en $x = 1$ et a le signe de $1 - x$. f_1 est croissante, puis décroissante (pour $x > 1$). Elle a donc un maximum (global) pour $x = 1$.

La dérivée seconde $f_1''(x)$ a le signe de $x - 2$. Elle est négative pour $x < 2$, et a donc une forme concave, puis convexe pour $x > 2$.

- si $n > 1$, $f_n'(x) = n\; x^{n-1}(1-x)\, e^{-nx}$ et

$$f_n''(x) = n\,[(n-1)\,x^{n-2} - n\,x^{n-1} - n\,(x^{n-1} - x^n)\,]\, e^{-nx}$$

$$= n\; x^{n-2}\;(n\;x^2 - 2n\,x + n - 1)\, e^{-nx}$$

Le signe de ces expressions dépend de la parité de n.

Si n est pair, f_n est décroissante sur $\mathbf{R}^-$ et pour $x > 1$, et croissante sur $[0, 1]$. elle a donc deux extrema locaux en 0 et 1 (minimum global en 0 et maximum local en 1)

Si n est impair, f_n a le signe de $1 - x$. Elle est croissante, puis décroissante pour $x > 1$. elle a un unique extremum, qui est un maximum global en 1.

Pour la dérivée seconde on peut étudier le signe du trinôme : $\Delta' = n^2 - n\,(n-1) = n$.

Les racines sont $x_1 = 1 - 1/\sqrt{n}$ et $x_2 = 1 + 1/\sqrt{n}$

$n\;x^2 - 2n\,x + n - 1$ est négatif pour $x \in [x_1, x_2]$ et positif pour $x \notin [x_1, x_2]$

Cela donne la courbure pour n pair. Elle est inversée sur $\mathbf{R}^-$ pour n impair.

Partie 2. Analyse réelle et vectorielle :

2. On définit sur R la fonction continue sinc (sinus cardinal) telle que sinc (x) = sin (x)/x ($x \neq 0$).

***a*) Quelle est sa valeur en 0 ? Tracez son graphe.**

***b*) Quel est son développement limité en 0 à un ordre m ?**

***c*) en déduire qu'elle est de classe C^∞ sur R.**

***d*) Montrez que son intégrale est convergente en + ∞.**

***e*) On note qsinc (x) = sinc ^{2} (x). Etudiez la convergence des séries de terme général u_n = sinc ($n \frac{\pi}{2}$) et v_n = qsinc ($n \frac{\pi}{2}$).**

***f*) Montrez que les fonction sinc et qsinc ont la même intégrale sur R (on pourra utiliser une intégration par parties).**

***a*)** La fonction sinc est prolongée par continuité en 0. sa valeur est sinc (0) = 1. Son graphe est pair. C'est une sinusoïde amortie, limitée par les deux branches d'hyperbole, et qui s'annule en toutes les valeurs de la forme $1/k\pi$, pour k entier non nul.

***b*)** Son développement limité à l'ordre m en 0 est déduit de celui de sinus à l'ordre m + 1 :

si $m = 2p$ est pair, sinc (x) = $1 - x/2! + x^3/4! - ... + x^{m-1}/m! + o(x^m)$

si $m = 2p + 1$ est impair, sinc (x) = $1 - x/2! + x^3/4! - ... - x^m/(m+1)! + o(x^{m+1})$

***c*)** La fonction sinc est de C^∞ sur R*, comme rapport de deux fonctions de classe C^∞. Comme elle a un développement limité en 0 à tout ordre m, elle est aussi de classe C^∞ en 0. Elle est donc de classe C^∞ sur R.

***d*)** L'intégrale sur R+ peut être vue comme une série alternée, dont le terme général tend vers 0 en décroissant. On peut également revenir à la définition d'une intégrale généralisée convergente, en notant r la partie entière d'un nombre $y > 0$, et en écrivant l'intégrale de 0 à y de sinc comme la somme de S_r, somme partielle de la série alternée convergente, et de l'intégrale de r à y qui tend vers 0 quand y tend vers l'infini.

***e*)** La série de terme général v_n est convergente, car c'est une série à termes positifs majorée par $4/\pi^2 \,.\, 1/n^2$ qui est une série convergente.

La série de terme général u_n ne contient que des termes d'ordre impair :

$u_{2p+1} = 2/\pi\,(-1)^p/(2p+1)$

Cette série est une série alternée convergente.

***f*)** $\int$ **qsinc** $(x)\,dx = [-\sin^2(x)/x] + \int 2\sin(x)\operatorname{cosin}(x)/x\,dx = \int \sin(2x)/x\,dx$

$$= \int \sin(y)/y\,dy$$

$$= \int \mathbf{sinc}\,(x)\,dx$$

3. On considère la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $g\ (x, y) = (x^2 + y^2)\ e^{-(x^2+y^2)}$. Déterminez son gradient et sa matrice hessienne. Cette fonction g a-t-elle des extrema locaux? Indiquez la forme de son graphe, puis calculez son intégrale sur $\mathbf{R}^2$.

La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$

Dans ce qui suit on pourra noter $\varepsilon = e^{-(x^2+y^2)}$.

$g'_x\ (x, y) = [\ 2x - 2x\ (x^2 + y^2)\ ]\ \varepsilon = 2x\ [1 - (x^2 + y^2)]\ \varepsilon = 2x\ [1 - (x^2 + y^2)]\ e^{-(x^2+y^2)}$

$\partial g / \partial y\ (x, y) = g'_y\ (x, y) = 2y\ [1 - (x^2 + y^2)]\ e^{-(x^2+y^2)}$.

Le gradient s'annule si $x = y = 0$ ou si $x^2 + y^2 = 1$ (cercle de centre (0, 0) et de rayon 1).

Comme $g\ (x, y) \geq 0$ et $g\ (0, 0) = 0$, (0, 0) est un minimum global de g.

* Calcul des dérivées secondes et matrice hessienne : D'après la symétrie de la matrice H e la symétrie de g, il y a seulement deux calculs à effectuer. Si on cherche les extrema de g on pourra supposer que $x^2 + y^2 = 1$.

$g''_x\ (x, y) = 2\ (1 - 3\ x^2 - y^2 - 2x\ [x - x\ (x^2 + y^2)\ ]\ )\ \varepsilon = 2\ (1 - 5\ x^2 - y^2 + 2\ x^4 + 2\ x^2\ y^2\ )\ \varepsilon$

et par symétrie, $\partial^2 g / \partial y^2\ (x, y) = g''_y\ (x, y) = 2\ (1 - 5\ y^2 - x^2 + 2\ y^4 + 2\ x^2\ y^2\ )\ \varepsilon$

$\partial^2 g / \partial y\ \partial x\ (x, y) = 2x\ [\ -2\mathrm{y} - 2\mathrm{y}\ (1 - (x^2 + y^2))\ \ ]\ \varepsilon = -4\ x y\ [\ 2 - (x^2 + y^2)\ ]\ \varepsilon$

Si $x = y = 0$, La matrice hessienne est $H = 2\ I_2$, qui est une matrice positive. Cela signifie bien que (0, 0) est un minimum local de g.

Si $x^2 + y^2 = 1$, $\partial^2 g / \partial x^2\ (x, y) = -4\ x^2\ e^{-1}$ et $\partial^2 g / \partial y^2\ (x, y) = -4\ y^2\ e^{-1}$

On a aussi $\partial^2 g / \partial y\ \partial x\ (x, y) = -4\ x y\ e^{-1}$

La matrice hessienne H s'écrit donc : $H = -4\ e^{-1} H_1$, avec H_1 matrice positive

$$H_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{xy} \\ \boldsymbol{xy} & \boldsymbol{y^2} \end{bmatrix}$$

H est donc une matrice négative, et les points du cercle sont donc des maxima locaux.

* Le calcul de l'intégrale de g se fait en passant en coordonnées polaires, et on peut écrire

$$\int_{\mathrm{R}^2} g\ (x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \int_{r \geq 0} r\ .\ r^2\ e^{-r^2}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta = 2\pi \int_{r \geq 0} r^3\ e^{-r^2}\ \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \int_{r \geq 0} (-r^2/2)\ (-2r)\ e^{-r^2}\ \mathrm{d}r = 2\pi\ (\ [\ -r^2/2\ \ e^{-r^2}\ ]_0^{+\infty} + \int_{r \geq 0} r\ e^{-r^2}\ \mathrm{d}r\ )$$

$$= 2\pi \int_{r \geq 0} r\ e^{-r^2}\ \mathrm{d}r = 2\pi\ [\ -e^{-r^2}/2]_0^{+\infty} = \pi$$