Exercícios

Capítulo 2

5. Estude a continuidade das seguintes funções nos seus domínios.

(c) $f(x)=\begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} & \text{se } x<0\\ 3 & \text{se } x=0 \\ x+1 & \text{se } x>0\end{cases}$ $\quad f(0)=3$

1º) Domínio de f:

Para $x<0$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}: \underbrace{x-1\neq 0}_{\to x\neq 1} \wedge x<0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}\cap]-\infty,0[$
$=]-\infty,0[$

Para $x=0$ $\quad D_f=\{0\}$

Para $x>0$ $\quad D_f=]0,+\infty[$

$D_f =]-\infty,0[\,\cup\{0\}\cup\,]0,+\infty[\,=\mathbb{R}$

2º) Como $0\in D_f$, vamos verificar a continuidade no ponto $x=0$

- $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = e^{\frac{1}{0-1}} = e^{-1}$
- $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x+1)=0+1=1$
- $f(0)=3$

Como $\lim_{x\to0^-}f(x)\neq\lim_{x\to0^+}f(x)\neq f(0)$, f não é contínua em $x=0$
(não há continuidade lateral)

3. Para cada valor real de m a expressão seguinte define uma função real de variável real f:

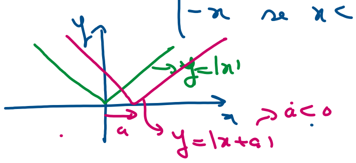
$$f(x)=\begin{cases} x^2-mx+7 & \text{se } x>0\\ 2 & \text{se } x=0\\ |x+3|+m & \text{se } x<0\end{cases}$$

(a) Determine m de modo que exista $\lim_{x\to0} f(x)$.

(b) Determine m de modo que $\lim_{x\to0} f(x)=4$.

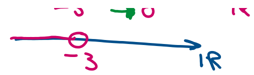
(c) Existirá algum valor de m de modo que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$? Justifique.

Recorda: $|x|=\begin{cases}x & \text{se } x\geq0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$ $\quad |x+a|=\begin{cases} x+a & \text{se } x+a\geq0 \\ -(x+a) & \text{se } x+a<0\end{cases}$



$$f(x)=\begin{cases} x^2-mx+7 & \text{se } x>0\\ 2 & \text{se } x=0\\ |x+3|+m & \text{se } x<0\end{cases} = \begin{cases} x^2-mx+7 & \text{se } x>0 \\ 2 & \text{se } x=0 \\ x+3+m & \text{se } \underbrace{x+3\geq0}_{x\geq-3} \wedge x<0,\ -3\leq x<0\end{cases}$$

$-(x+3)+m$ se $x+3<0 \wedge x<0$, $x<-3$
$\downarrow$
$x<-3$



a) $\lim_{x\to 0} f(x) = ?$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+3+m) = 0+3+m = 3+m$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - mx + 7) = 0^2 - m\times 0 + 7 = 7$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ existe se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow 3+m = 7 \Leftrightarrow m=4$

R: $m=4$

b) não existe nenhum m para o qual se verifica

c) Para ser contínua em $\mathbb{R}$, tem de ser contínua nos pontos de vinagem, em $x=0$ e $x=-3$

Para ser contínua em $x=0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

$7 = 7 \neq 2 = f(0)$
se $m=4$

$f(0)=2$

R: Não existe nenhum m para o qual f é contínua em $\mathbb{R}$.

4. Considere a função $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$, se $x \neq 2$

(a) Analise a continuidade no domínio.

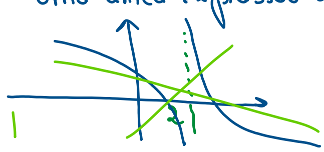
(b) Analise a existência de um prolongamento contínuo em $\mathbb{R}$ da função f.

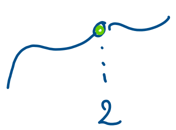
de f de modo a que f seja

a) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ se $x\neq 2$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x-2 \neq 0 \wedge x \neq 2\} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$
$\hookrightarrow x\neq 2$

R: f é contínua no seu domínio (porque é dada por uma única expressão analítica), ou seja, em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$





b) Para ser contínua em $\mathbb{R}$, tem de ser contínua em $x=2$

Para ser contínua em $x=2$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{2^2-2-2}{2-2} = \frac{0}{0}$ (ind.)

$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = 2+1 = 3$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-x-2}{x-2} = (\ldots) = \frac{0}{0}$ (ind)

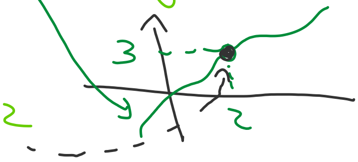
$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = 2+1 = 3$

Para que f seja contínua em $\mathbb{R}$ $\lim f(x) = \lim f(x) = f(2)$

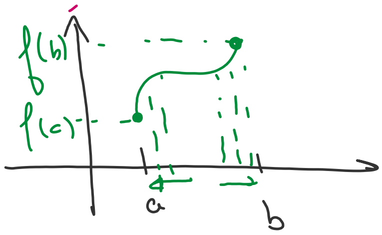
... que f seja contínua em 2, $\underbrace{\lim_{x\to 2^+} f = \lim_{x\to 2^-} f}_{=3} = f$

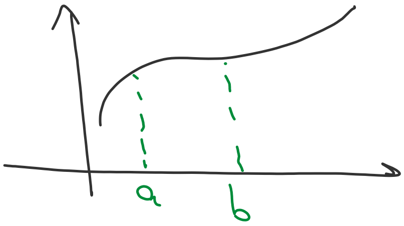
$f(2)=3$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{se } x\neq 2\\ 3 & \text{se } x=2\end{cases}$$



- Função contínua em $[a,b]$

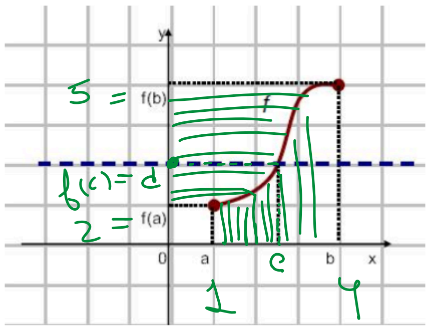




- f é contínua em $]a,b[$
- em $x=a$ é contínua à direita
- em $x=b$ " à esquerda

Teorema (Teorema de Bolzano)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Então para qualquer ponto $d \in \mathbb{R}$, tal que $f(a) < d < f(b)$ ou $f(b) < d < f(a)$ existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = d$.

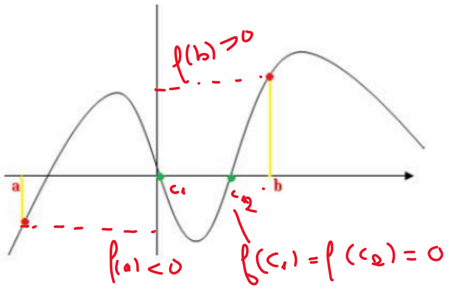


$f(a) < d < f(b)$ então $c \in]a,b[$: $f(c)=d$

Se $\begin{cases}\bullet\ f \text{ é contínua em } [a,b]\\ \bullet\ f(a) < d < f(b) \text{ ou } f(b) < d < f(a)\end{cases}$ então $\exists c \in]a,b[: f(c)=d$

Corolário (Bolzano)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Se $f(a) \times f(b) < 0$ existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.



Corolário de Bolzano

Se $\begin{cases} \cdot\ f \text{ é contínua em } [a,b] \\ \cdot\ f(a)\times f(b) < 0 \end{cases}$ então $\exists c \in]a,b[: f(c) = 0$

↳ zeros de f

NOTA: Se as conclusões do T. e C. de Bolzano se referirem $[a,b]$ em vez de $]a,b[$, então na 2ª condição o sinal $<$ é substituído $\leq$.

7. Considere a seguinte função $\frac{4x+16}{x^2}$, diga justificando se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) $\exists c \in]-5,-3[: f(c) = 0$

   (b) $\exists c \in]2,8[: f(c) = 2$

$f(x) = \frac{4x+16}{x^2}$

(a) Aplicando o corolário de Bolzano, verificar se:

$\begin{cases} (1)\ f \text{ é contínua em } [-5,-3] \ ✓ \\ (2)\ f(-5)\times f(-3) < 0 \end{cases}$

(1) f é contínua no seu domínio,

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$[-5,-3] \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$, então verifica-se (1)

(2) $f(-5) = \frac{4\times(-5)+16}{(-5)^2} = -\frac{4}{25} < 0$

$f(-3) = \frac{4\times(-3)+16}{(-3)^2} = \frac{4}{9} > 0$

$\Rightarrow$ Verifica-se (2)

então, a afirmação, $\exists \in]-5,-3[: f(c) = 0$

(b) $\exists c \in]2,8[: f(c) = 2$

Aplicando o Teorema de Bolzano, verificar se:

(1) f é contínua em $[2,8]$

(2) $f(2) < 2 < f(8)$ ou vice-versa

$\leq$

(1) $[2,8] \overset{\text{está contido}}{\subseteq} \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ✓, verifica-se (1)

$f(2) = \frac{4\times 2+16}{2^2} = 6$

$f(8) = \frac{4\times 8+16}{8^2} = \frac{3}{4}$

$\underset{f(8)}{\underset{\shortparallel}{\frac{3}{4}}} < 2 < \underset{f(2)}{\underset{\shortparallel}{6}} \Rightarrow$ Verifica-se (2)

Conclusão: a afirmação é verdadeira

8. Considere a seguinte função $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x+1}{\ln(x+1)} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{3x}-1}{-x+1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(a) Estude a função quanto à continuidade no seu domínio.

(b) Verifique se a função admite pelo menos um zero no intervalo $]-1,0[$.

$\Leftrightarrow \exists c \in]-1,0[: f(c) = 0$ → Aplicar o Corolário do Bolzano

a) 1º Domínio de f:

Para $x>0$: $D_{f_{x>0}} = \{x \in \mathbb{R}: x+1>0 \wedge \ln(x+1) \neq 0 \wedge x>0\} =$

$x > -1$

$=]-1,+\infty[\cap \mathbb{R}\setminus\{0\} \cap]0,+\infty[$

$=]0,+\infty[$

c.a. $\ln(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x+1 \neq e^0 \Leftrightarrow x+\cancel{1} \neq \cancel{1} \Leftrightarrow x \neq 0$

Para $x=0$, $D_{f_{x=0}} = \{0\}$

Para $x<0$, $D_{f_{x<0}} = \{x \in \mathbb{R}: -x+1 \neq 0 \wedge x<0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\} \cap]-\infty,0[$ ($x \neq 1$)

$=]-\infty,0[$

$D_f =]-\infty,0[\cup \{0\} \cup]0,+\infty[= \mathbb{R}$

- Como $0 \in D_f$, vamos verificar a continuidade para $x=0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{3x}-1}{-x+1} = \frac{e^0-1}{-0+1} = \frac{0}{1} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+1}{\ln(x+1)} = \frac{e^0+1}{\ln(0+1)} = \frac{2}{0} = \infty$

$f(0) = 1$

f não é contínua em $x=0$, porque $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0)$
não há continuidade lateral.

R: f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ($]-\infty,0[$ e $]0,+\infty[$)

1. (5,5 v) Considere a seguinte função real de variável real definida por,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{-x+3}}{x-2} & , se\ x<3\\ 0 & , se\ x=3\\ \frac{\ln(x-3)}{e^{x-3}} & , se\ x>3\end{cases}$$

a) Determine, justificando, o domínio de f.

b) Estude a função f quanto à continuidade no seu domínio.

c) Pode garantir a existência de pelo menos um zero em $[0,3]$? **Justifique usando única e exclusivamente teoremas.**

d) Determine $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

8. Considere a seguinte função $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x+1}{\ln(x+1)} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{3x}-1}{-x+1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(a) Estude a função quanto à continuidade no seu domínio.

(b) Verifique se a função admite pelo menos um zero no intervalo $]-1, 0[$.

a) $x < 2$ $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : \underbrace{x+1 \neq 0}_{x \neq -1} \wedge x < 2\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \cap]-\infty, 2[=$

Para $x = 2$ $\quad D_f = \{2\}$

$=]-\infty, 2[\setminus \{-1\}$

Para $x > 2$ $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : \underbrace{x-1 > 0}_{x > 1} \wedge \underbrace{x^2-4 \neq 0}_{x \neq \pm 2} \wedge x > 2\} =]1, +\infty[\cap \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \cap]2, +\infty[$

$=]2, +\infty[$

a) $D_f =]-\infty, 2[\setminus \{-1\} \cup \{2\} \cup]2, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) Verificar a continuidade para $x = 2$

• $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2e^{x-2} - x}{x+1} - x = \frac{2\times e^{2-2} - 2}{2+1} - 2 = \frac{2e^{0} - 2}{3} - 2$

$= \frac{2\times 1 - 2}{3} - 2 = \frac{0}{3} - 2 =$

• $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x-1)}{x^2-4} =$

$= \frac{\ln(2-1)}{2^2-4} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0}$ (ind) $= \lim_{x\to 2^+} \frac{(\ln(x-1))'}{(x^2-4)'} =$

$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{2x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2x(x-1)} = 1$

$= \frac{1}{2\times 2\times(2-1)} = \frac{1}{4}$

• $f(2) = 0$

Conclusão: f não é contínua em $x=2$ (nem à direita, nem à esquerda) porque $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$ e no ponto $x=-1$

f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

c) Aplicar do Corolário de Bolzano, verificar se:

• f é contínua em $[0,1]$ (a)

• $f(0) \times f(1) \leq 0$ (b)

(a) Verifica-se porque $-1, 2 \notin [0,1]$ (justificado na alínea b)) ✓

(b) $f(0) = \frac{2\times e^{0-2} - 0}{0+1} - 0 > 0$

$f(1) = \frac{2\times e^{1-2} - 1}{1+1} - 1 < 0$

logo verifica-se $f(0) \times f(1) < 0$

Como se verificam as condições (a) e (b) pelo corolário de Bolzano $\exists c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$