5. Variables aleatorias

110. La siguiente tabla muestra la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X, que denota el número de personas por día que solicitan un tratamiento innecesario en el servicio de urgencias de un pequeño hospital.

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,01	0,1	0,3	0,4	0,1	0,09

Hallar e interpretar la probabilidad de $P(X \leq 2)$, $P(X < 2)$ y $P(X > 3)$.

111. Sea X una variable aleatoria cuya función de probabilidad o cuantía viene dada por

$$P(X = x) = \frac{x}{15}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5.$$

a) Probar que la función anterior es una función de probabilidad válida.

b) Obtener la función de distribución de la variable aleatoria X.

c) Calcular las probabilidades

$$P(X > 2), \qquad P(X \leq 3), \qquad P(1 < X \leq 4).$$

112. Dada la variable aleatoria X cuya función de distribución está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0,0 & x < 1 \\ 0,1 & 1 \leq x < 3, \\ 0,3 & 3 \leq x < 5, \\ 0,7 & 5 \leq x < 7, \\ 1,0 & x \geq 7. \end{cases}$$

a) Representar la función de distribución.

b) Calcular $P(1 \leq x < 5)$, $P(7 \leq X < 8)$ y $P(X = 3)$.

113. Construya una distribución de probabilidad para una variable aleatoria apropiada en base a la siguiente distribución de frecuencias

Resultado	102	105	108	111	114	117
Frecuencia	10	20	45	15	20	15

a) Realizar un dibujo aproximado de la distribución de probabilidad hipotética.

b) Calcular el valor esperado del resultado.

114. Manuel García, que invierte con frecuencia en el mercado de valores, estudia con detenimiento cualquier inversión potencial. En la actualidad examina la posibilidad de invertir en cierta empresa. Mediante el estudio del rendimiento en el pasado, García ha desglosado los resultados potenciales en cinco casos con sus probabilidades asociadas. Los resultados son tasas de rendimiento anuales sobre una sola acción que hoy cuesta 150€.

Rendimiento %	0,00	10,00	15,00	25,00	50,00
Probabilidad	0,20	0,25	0,30	0,15	0,10

a) ¿Cuál es el valor esperado del rendimiento sobre la inversión en una sola acción de esta empresa?

b) El Sr. García compra acciones siempre que la tasa de rendimiento esperada supere el 10 %, de acuerdo con estos datos, ¿adquirirá acciones de esta empresa?

115. Pepito Pérez acaba de comprar una video cámara por 300€. Ahora tiene la opción de comprar una póliza de garantía extendida que ofrece cinco años de cobertura por 100€. Después de hablar con sus amigos y leer informes, Pepito cree que puede incurrir en los siguientes gastos de mantenimiento durante los próximos cinco años y con las siguientes probabilidades:

Gasto (€)	0	50	100	150	200	250	300
Probabilidad	0,35	0,25	0,15	0,10	0,08	0,05	0,02

Calcular el valor esperado de los costes de mantenimiento pronosticados. ¿Crees que Pepito pagará los 100€ de la extensión de garantía?

116. Si R es una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 12$ y $p = 0,45$, encontrar las probabilidades

a) $P(r = 8)$

b) $P(r > 4)$

c) $P(r \geq 10)$

117. Si R es una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad binomial con $n = 7$ y $p = 0,2$, encontrar las probabilidades

a) $P(r = 5)$

b) $P(r > 2)$

c) $P(r < 8)$

d) $P(r \geq 4)$

118. Encontrar la esperanza y la varianza de distribuciones binomiales con los parámetros

   a) $n = 15$, $p = 0,02$.
   b) $n = 8$, $p = 0,42$.
   c) $n = 72$, $p = 0,006$.
   d) $n = 29$, $p = 0,49$.

119. Consideramos como población a estudio 2.000 familias con 4 hijos. Asumiendo que la probabilidad teórica de que nazca hijo varón es la misma que la de nacer mujer, ¿cuántas familias cabe esperar que tengan al menos un hijo varón? ¿y una o dos hijas?

120. Un comerciante vende dos artículos con precios distintos, el primero de precio P y el segundo de precio Q. Él estima que la probabilidad de que un cliente adquiera el artículo de precio P es de 0,4 y el de precio Q es 0,6. Un día vende 18 artículos, se pide:

   a) La probabilidad de que 8 de ellos sean de precio P.
   b) La probabilidad de que 12 de ellos sean de precio Q.
   c) Sabiendo que se han vendido al menos 10 productos de precio Q, calcular la probabilidad de que venda, como máximo 7, artículos de precio P.

121. La Ministra de Trabajo se está preocupando por la posibilidad de que grandes cantidades de personas que cobran el seguro de desempleo en realidad tengan un trabajo secreto. Sus asistentes estiman que el 40 % de los beneficiarios del seguro de desempleo entra en esta categoría pero la Ministra no está convencida. Le pide a uno de sus ayudantes que haga una investigación tomando al azar a 10 beneficiados del seguro de desempleo.

   a) Si los asistentes de la Ministra tienen razón, ¿cuál es la probabilidad de que todos los individuos investigados tengan un empleo? ¿cuál es el número esperado de individuos con empleo?
   b) Si los asistentes de la Ministra están en lo cierto, ¿cuál es la probabilidad de que solo tres de los individuos tengan trabajo secreto?

122. El director de control de calidad de una compañía de automóviles se encuentra realizando su revisión mensual de transmisiones automáticas. En el procedimiento se retiran 10 transmisiones de la pila de componentes y se las revisa a fondo en busca de defectos de fabricación. De lo ocurrido en ocasiones anteriores deduce que sólo el 2 % de las transmisiones tienen defectos. Suponemos que los defectos se presentan de manera independiente en diferentes transmisiones.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contenga más de dos transmisiones con defectos de fábrica?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las transmisiones elegidas tenga defectos de fábrica?

123. El encargado de la sección de electrónica de unos grandes almacenes se ha dado cuenta de que la probabilidad de que un cliente, que solamente se encuentre curioseando, compre algo es de $0,3$. Suponga que 15 clientes visitan la sección de electrónica cada hora.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las personas que curiosea compre algo durante cada hora?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos cuatro personas que curiosean compren algo en una hora?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que no más de cuatro personas que curiosean compren algo en una hora?

124. Para una variable aleatoria X que sigue una distribución de probabilidad de tipo Poisson con $\lambda = 4,2$ calcular

    a) $P(x \leq 2)$

    b) $P(x \geq 5)$

    c) $P(x = 8)$

125. La concertista Donna Prima está muy molesta con el número de tosidos que se oyen entre la audiencia justo antes de que empiece a tocar. Durante su última gira, estimó un promedio de ocho tosidos justo antes de empezar su concierto. La señora Prima le ha advertido a su director que si escucha más de cinco tosidos en el concierto de esa noche rehusará tocar. ¿Cuál es la probabilidad de que la artista toque esa noche?

126. En promedio, cinco pájaros chocan contra un tendido eléctrico en cierto paraje y mueren, por ese motivo, cada semana. El servicio de protección de la naturaleza ha solicitado que se asignen fondos para modificar el tendido y evitar el choque de aves. Sin embargo, el gobierno ha respondido diciendo que no asignará fondos a menos que la probabilidad de que mueran más de tres pájaros cada semana sea superior a $0,7$. ¿Dará el gobierno el dinero necesario para acometer las modificaciones pedidas?

127. El número medio de fallos graves de un sistema informático es de $0,3$ por cada 500 horas de funcionamiento. Si el sistema funciona durante 1000 horas,

    a) Probabilidad de que no falle el sistema en ese tiempo.

    b) Probabilidad de que falle tres veces en ese tiempo.

    c) Horas transcurridas para que la probabilidad de que no tenga fallos sea de $0,4066$.

    d) Número esperado de fallos para el tiempo transcurrido en el apartado anterior.

128. Dada una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, hallar las probabilidades

   a) $P(0 \leq X \leq 2)$
   b) $P(1 \leq X \leq 2)$
   c) $P(X \geq 0)$
   d) $P(X \geq 1)$
   e) $P(X \leq -1)$
   f) $P(-3 \leq X \leq -1)$

129. Dada una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de parámetros $\mu = -1$ y $\sigma = 1$, hallar las probabilidades

   a) $P(-1 \leq X \leq 2)$
   b) $P(0 \leq X \leq 1)$
   c) $P(X \geq 1)$
   d) $P(X \leq -3)$
   e) $P((X \leq -2)\,\mathrm{y}\,(-2{,}2 \leq X))$

130. Dada una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de parámetros $\mu = 6,4$ y $\sigma = 2,7$, hallar las probabilidades

   a) $P(4 \leq X \leq 5)$
   b) $P(X \geq 2)$
   c) $P(X \leq 7,2)$
   d) $P((X \leq 3)\,\text{ó}\,P(X \geq 9))$
   e) $P((X \leq 3)\,\text{ó}\,(X \geq 1))$

131. En una panadería estiman que la demanda de pan durante un día se comporta como una normal de media 90 kg y varianza de 49 kg^2.

   a) Si del horno de pan envían 110 kg a la panadería, ¿cuál es la probabilidad de que al final del día sobren más de 10 kg de pan?
   b) Determinar la cantidad que hay que tener dispuesta para que se pueda satisfacer el 95 % de la demanda.

132. Sabiendo que la demanda de gasolina durante cierto periodo de tiempo se comporta con arreglo a una distribución normal de media 150.000 litros con desviación típica igual a 10.000 litros determinar la cantidad que hay que tener dispuesta a la venta en dicho periodo para que se pueda satisfacer el 95 % de las veces la demanda.

133. El vicepresidente de recursos humanos de una gran compañía ha desarrollado un nuevo programa de capacitación completamente adaptable al ritmo de sus usuarios. Los nuevos empleados se entrenan en varias etapas a su propio ritmo de trabajo, el término de los entrenamientos se da cuando el material es aprendido. El programa ha resultado especialmente efectivo en acelerar el proceso de capacitación. En los últimos años, el promedio del programa ha sido de 44 días con una desviación típica de 12 días.

    a) Encontrar la probabilidad de que un empleado termine entre 33 y 42 días su entrenamiento.

    b) ¿Cuál es la probabilidad de terminar el programa en menos de 30 días?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de terminar el programa en menos de 25 días o en más de 60 días?

134. El administrador de una oficina postal desea estimar la demanda semanal de sobres de correo especiales. Se calcula que la demanda semanal media es de 100 sobres y que el 90 % de las semanas, la demanda semanal es inferior a 115.

    a) ¿Cuál puede ser el valor de σ suponiendo que la variable aleatoria que mide la demanda de sobres sigue una distribución normal?

    b) ¿Cuántos sobres especiales deben almacenarse, al menos, para que la probabilidad de no quedarse sin ellos sea inferior a $0,05$?

135. Calcula la probabilidad de que valores de una variable aleatoria X que sigue una distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ se hallen en el intervalo $\mu \pm \sigma$, en $\mu \pm 2\sigma$ y en $\mu \pm 3\sigma$

136. En una distribución normal con una desviación típica de $5,0$ la probabilidad de que una observación elegida al azar exceda 21 es de $0,14$.

    a) Encontrar la media de la distribución.

    b) Encontrar el valor por debajo del cual se hallan el 4 % de los valores de la distribución.

137. Usar la aproximación normal de la binomial para aproximar las probabilidades de las binomiales

    a) $n = 30$, $p = 0,35$, $P(10 \leq X \leq 15)$.

    b) $n = 42$, $p = 0,62$, $P(X \geq 30)$.

    c) $n = 15$, $p = 0,40$, $P(X \leq 7)$.

    d) $n = 51$, $p = 0,42$, $P(17 \leq X \leq 25)$.

138. La variable aleatoria R sigue una distribución binomial con $n = 28$ y $p = 0,025$. Utilizar la aproximación de una binomial por una Poisson para calcular aproximadamente

    a) $P(R \leq 5)$

b) $P(R < 2)$

c) $P(R = 9)$

139. Los responsables de la impresión de papel moneda tienen una sorprendente baja frecuencia de errores de impresión, solo el $0,5\,\%$ de los billetes presenta errores graves que no permiten su circulación. Tomamos un fajo de 1000 billetes, calcular las probabilidades de que

    a) ninguno presente errores graves,

    b) diez presenten errores graves,

    c) quince presente errores graves.

140. Los inspectores de vehículos de la ITV se han dado cuenta de que el $5\,\%$ de todos los automóviles que llegan a la inspección no pasan las pruebas. Encontrar la probabilidad de que entre 7 y 18 de los 200 automóviles que vienen a van a pasar esta semana la inspección no lo consigan.

141. Usar la aproximación de la binomial mediante una normal para calcular

    a) Si $X \sim \mathcal{B}(35, 0, 5)$, $P(7 \leq X \leq 10)$.

    b) Si $X \sim \mathcal{B}(63, 0, 11)$, $P(X \geq 10)$.