Variables aleatorias continuas

Hugo J. Bello

4.1. Variables aleatorias continuas, definición y propiedades

Recordemos que habíamos definido **variable aleatoria** es esencialmente un número aleatorio.

Hasta ahora hemos trabajado con variables aleatorias X que toman un conjunto discreto de valores, como por ejemplo resultado de tirar un dado. Sin embargo en muchas ocasiones nuestras variables tomarán un conjunto continuo de valores, como puede ser *la altura de una persona* o su peso.

Para ello introducimos las variables aleatorias continuas.

4.1.1. Definición. Decimos que una variable aleatoria X es **continua** si existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todos $a \leq b$ números reales

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

La función f se le denomina **función de masa de probabilidad** y debe cumplir:

- $f(x) \geq 0$ para todo x
- $\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Recordemos la integral es el area bajo la curva de f

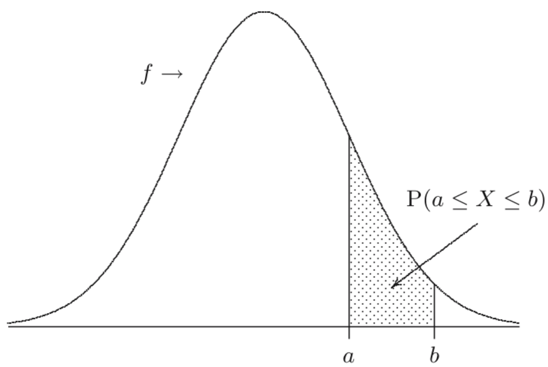

Figura 4.1:

4.1.2. Definición. Definimos al **función de distribución acumulada**, del mismo modo que hicimos con variables discretas, pero usando ahora la integral:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

4.1.1. Esperanza y varianza de variables continuas

4.1.3. Definición. Para una variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x)$ **el valor esperado o esperanza matemática** se define como la integral

$$\mathrm{E}[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) d x$$

Si recordamos es la misma idea que con variable discreta, pero en vez de sumar integramos

Al igual que ocurría con variables aleatorias discretas, en el caso continuo se cumple

4.1.4. Propiedad. *Si X es una variable aleatoria continua con esperanza finita entonces se cumple que*

$$E[a+b \cdot X]=a+b \cdot E(X)$$

para cualesquiera números reales a, b.

4.1.5. Definición. La **varianza** es una medida de dispersión de una variable aleatoria X respecto a su esperanza $E[X]$ y se define como la esperanza de la transformación $(X-E[X])^2$ es decir:

$$Var[X]=E[(X-E[X])^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^2 f(x) d x$$

4.1.6. Propiedad. *Si X es una variable aleatoria continua con esperanza finita entonces se cumple que*

$$\operatorname{Var}(X)=\mathrm{E}\left[X^2\right]-\mathrm{E}[X]^2$$

4.1.2. La distribución uniforme

4.1.7. Definición. Una variable aleatoria continua tiene una distribución uniforme en el intervalo $[\alpha, \beta]$ si función de densidad es la siguiente

$$f(x)= \begin{cases}\frac{1}{\beta-\alpha} & \text{para } \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0 & \text{para el resto de valores}\end{cases}$$

Se denota por $U(\alpha, \beta)$.

Si calculamos la distribución acumulada:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\, d t$$

veremos que el resultado es

$$F(x)= \begin{cases}0 & \text{para } x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{para } x>b\end{cases}$$

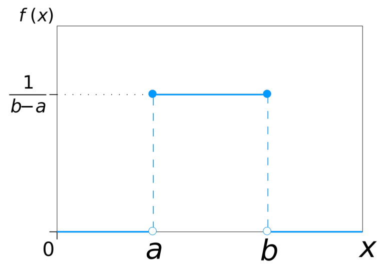

Figura 4.2: Función de densidad de la distribución unifome

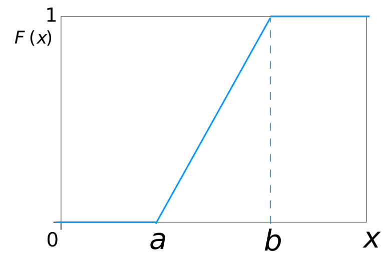

Figura 4.3: Función de densidad acumulada de la distribución unifome

4.1.8. Ejemplo. Para una variable $X \sim U(0, 23)$

Calculemos $P(2 < X < 18)$:

$$P(2 < X < 18) = \int_2^{18} \frac{1}{23-0} dx = \frac{x}{23-0}\Big]_2^{18} = (18-2)\cdot\frac{1}{23} = \frac{16}{23}$$

4.1.9. Ejemplo. La ruleta de la suerte tiene 20 premios repartidos en sectores iguales entre los 360 grados del círculo. Al empujar el la ruleta gira y finaliza al azar en cualquiera de los ángulos de giro. Que acabe en un ángulo concreto sigue una distribución uniforme U(0, 360). Calcular la probabilidad de que caiga el premio situado entre los ángulos 0 y 18 grados.

$$P(0 < X < 18) = \int_0^{18} \frac{1}{360-0} dx = \frac{x}{360}\Big]_0^{18} = (18-0)\cdot\frac{1}{360} = \frac{18}{360}$$

4.1.10. Propiedad. *Si $X \sim U(\alpha, \beta)$ entonces*

1. $E[X] = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$
2. $V[X] = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)$

Demostración. Para ver (1), basta calcular

$$E[X] = \int_\alpha^\beta x\frac{1}{\beta-\alpha}dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{2(\beta-\alpha)} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

Para demostrar (2) usaremos que $E[X^2] = \frac{\beta^3-\alpha^3}{3\beta-3\alpha}$, esto se puede demostrar usando una integral similar a la anterior. Ahora vemos que

$$\begin{aligned} V[X] = E[X^2] - E[X]^2 &= \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3\beta - 3\alpha} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} \\ &= \frac{4(\beta^3-\alpha^3) - 3(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)^2}{12(\beta-\alpha)} \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{12(\beta-\alpha)} = \frac{1}{12}(\beta-\alpha) \end{aligned}$$

□

4.1.3. La distribución exponencial

4.1.11. Definición. Una variable aleatoria continua tiene una distribución **exponencial** de parámetro λ si su función de densidad es la siguiente

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{para el resto de valores} \end{cases}$$

Se denota por $exp(\lambda)$.

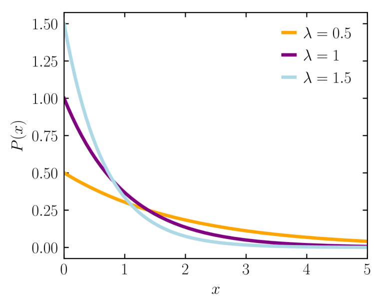

Figura 4.4: Función de densidad de la distribución exponencial

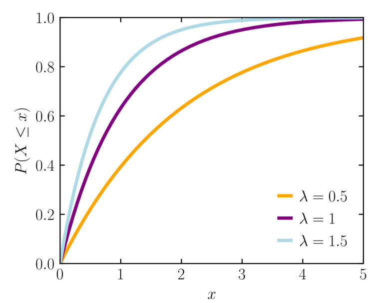

Figura 4.5: Función de densidad acumulada de la distribución exponencial

4.1.12. Propiedad. *Si* $X \sim exp(\lambda)$ *entonces*

1. $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
2. $V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

Demostración.

$$E[X] = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lim_{y\to\infty} \lambda \left[e^{-\lambda x} \frac{x\lambda - 1}{\lambda^2} \right]_0^y = \lim_{y\to\infty} \left(e^{-\lambda y} \frac{y\lambda - 1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

Para resolver esta integral hemos usado que $\int x e^{cx} dx = e^{cx} \frac{cx-1}{c^2} + c$

Para calcular la varianza aplicando integración por partes con $u = \lambda x^2$ y $v = e^{\lambda x}$, podemos ver facilmente que

$$E[X^2] = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = 2/\lambda^2$$

(omitimos los detalles de la anterior integral), y de este modo

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

□

4.1.13. Ejemplo. El número de kilómetros viajados por un coche hasta que la transmisión se rompe sigue una variable $exp(\lambda = 1/100000)$.

(1) ¿Cuál es la probabilidad de que se roma antes de los 50000 kilómetros?

(2) ¿Cuál es el número esperado de kilómetros hasta que se rompa?

Para resolver (1) pensemos en que

$$\begin{aligned} P(X \leq 50000) &= \int_0^{50000} \frac{1}{100000} e^{\frac{-1}{100000}x} dx \\ &= \big[- e^{\frac{-x}{100000}} \big]_0^{50000} = 1 - e^{-1/2} \cong 0{,}393 \end{aligned}$$

Para (2) aplicamos la propiedad anterior 4.1.12(1), con lo que

$$E[X] = 1/\lambda = 100000$$

4.1.14. Aplicaciones de la distribución exponencial. La distribución exponencial puede ser interpretada como la versión continua de la distribución geométrica. A diferencia de la distribución geométrica (que recordemos era el número de intentos hasta el primer acierto en un experimento de Bernoulli), la exponencial describe *el tiempo necesario para que un proceso continuo cambie su estado*

Para eventos que ocurren a un ritmo constante, con una "media de tiempo necesario para que ocurraçonocida, a distribución exponencial puede usarse para estudiar el *tiempo hasta la siguiente ocurrencia de ese evento*.

Algunos ejemplos de usos de la exponencial pueden ser

- tiempo necesario hasta que llegue el próximo consumidor a una tienda
- tiempo hasta siguiente fallo del sistema
- tiempo hasta que aparezca el siguiente rayo en una tormenta
- kilómetros hasta que se estropee una pieza de un motor.
- ...

4.1.4. La distribución normal

La distribución normal juega un rol central en la teoría de la probabilidad y la estadística. Una de sus aplicaciones se debe a C.F. Gauss, que la usó en 1809 para medir errores en astronomía.

4.1.15. Definición. Una función aleatoria continua tiene una **distribución normal** con parámetros μ y σ, su función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Esta distribución se denota por $N(\mu, \sigma^2)$.

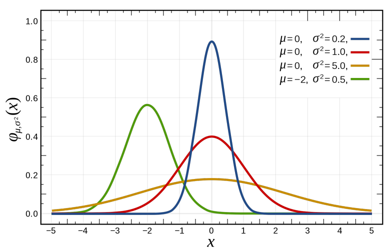

Figura 4.6: Función de densidad de la distribución normal

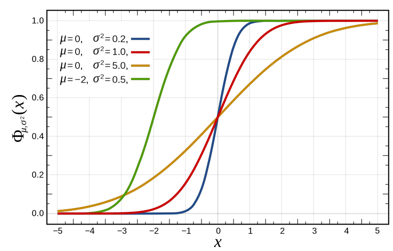

Figura 4.7: Función de densidad acumulada de la distribución normal

4.1.16. Interpretación de μ y σ. Como vemos esta función f tiene una forma de campana, donde los parámetros μ y σ se interpretan como:

- μ determina el valor entorno al que se centra la campana. Veremos que coincide con la esperanza matemática. Este valor es el valor en torno al cual se sitúa la campana, su máximo.
- σ determina lo *apretada o esparcida* que está la campana, es decir lo dispersa que está la variable. Valores más grandes de σ darán lugar a campanas más abiertas.

4.1.17. Aplicaciones de la Normal. Algunos ejemplos de variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo de la normal son:

- caracteres morfológicos de individuos como la estatura;
- caracteres fisiológicos como el efecto de un fármaco;
- caracteres sociológicos como el consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos;
- caracteres psicológicos como el cociente intelectual;
- nivel de ruido en telecomunicaciones;
- errores cometidos al medir ciertas magnitudes;
- ...

4.1.18. Propiedad. *Si* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *entonces*

1. $E[X] = \mu$
2. $V[X] = \sigma^2$

Demostración. □

4.2. Bibliografía

- John A. Rice. Mathematical Statistics and Data Analysis
- F. M. Dekking, C. Kraailkamp, H. P. Lopuhaa, L. E. Meester. A Modern Introduction to Probability and Statistics. Understanding Why and How.