

Capítulo 5

Variables aleatorias continuas

5.1. Variables aleatorias continuas, definición y propiedades

Recordemos que habíamos definido **variable aleatoria** es esencialmente un número aleatorio.

Hasta ahora hemos trabajado con variables aleatorias X que toman un conjunto discreto de valores, como por ejemplo resultado de tirar un dado. Sin embargo en muchas ocasiones nuestras variables tomarán un conjunto continuo de valores, como puede ser *la altura de una persona* o su peso.

Para ello introducimos las variables aleatorias continuas.

5.1.1. Definición. Decimos que una variable aleatoria X es **continua** si existe una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todos $a \leq b$ números reales

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

La función f se le denomina **función de masa de probabilidad** y debe cumplir:

- $f(x) \geq 0$ para todo x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Recordemos la integral es el area bajo la curva de f

5.1.2. Definición. Definimos al **función de distribución acumulada**, del mismo modo que hicimos con variables discretas, pero usando ahora la integral:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

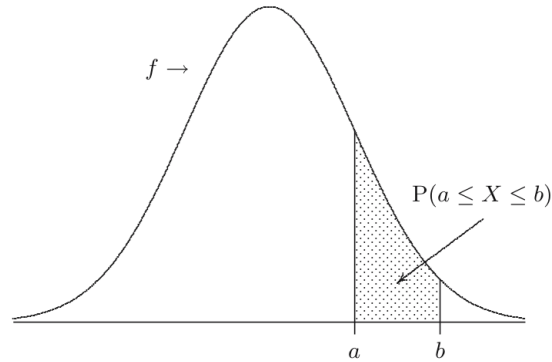


Figura 5.1:

5.1.1. Esperanza y varianza de variables continuas

5.1.3. Definición. Para una variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x)$ el **valor esperado o esperanza matemática** se define como la integral

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Si recordamos es la misma idea que con variable discreta, pero en vez de sumar integramos

Al igual que ocurría con variables aleatorias discretas, en el caso continuo se cumple

5.1.4. Propiedad. Si X es una variable aleatoria continua con esperanza finita entonces se cumple que

$$E[a + b \cdot X] = a + b \cdot E(X)$$

para cualesquiera números reales a, b .

5.1.5. Definición. La **varianza** es una medida de dispersión de una variable aleatoria X respecto a su esperanza $E[X]$ y se define como la esperanza de la transformación $(X - E[X])^2$ es decir:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx$$

5.1.6. Propiedad. Si X es una variable aleatoria continua con esperanza finita entonces se cumple que

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

5.1.2. La distribución uniforme

5.1.7. Definición. Una variable aleatoria continua tiene una distribución uniforme en el intervalo $[\alpha, \beta]$ si función de densidad es la siguiente

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{para } \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0 & \text{para el resto de valores} \end{cases}$$

Se denota por $U(\alpha, \beta)$.

Si calculamos la distribución acumulada:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

veremos que el resultado es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{para } x > b \end{cases}$$

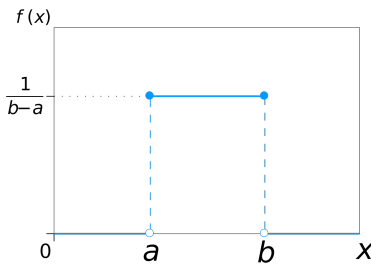


Figura 5.2: Función de densidad de la distribución uniforme

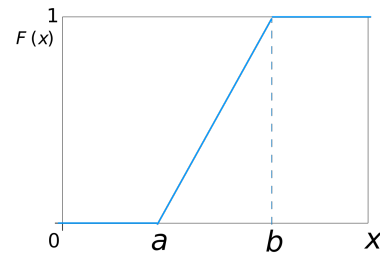


Figura 5.3: Función de densidad acumulada de la distribución uniforme

5.1.8. Ejemplo. Para una variable $X \sim U(0, 23)$

Calculemos $P(2 < X < 18)$:

$$P(2 < X < 18) = \int_2^{18} \frac{1}{23 - 0} dx = \left. \frac{x}{23 - 0} \right|_2^{18} = (18 - 2) \cdot \frac{1}{23} = \frac{16}{23}$$

5.1.9. Ejemplo. La ruleta de la suerte tiene 20 premios repartidos en sectores iguales entre los 360 grados del círculo. Al empujar el la ruleta gira y finaliza al azar en cualquiera de los ángulos de giro. Que acabe en un ángulo concreto sigue una distribución uniforme $U(0, 360)$. Calcular la probabilidad de que caiga el premio situado entre los ángulos 0 y 18 grados.

$$P(0 < X < 18) = \int_0^{18} \frac{1}{360 - 0} dx = \left. \frac{x}{360 - 0} \right|_0^{18} = (18 - 0) \cdot \frac{1}{360} = \frac{18}{360}$$

5.1.10. Propiedad. Si $X \sim U(\alpha, \beta)$ entonces

1. $E[X] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$
2. $V[X] = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)$

Demostración. Para ver (1), basta calcular

$$E[X] = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\beta - \alpha)} = \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{2(\beta - \alpha)} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

Para demostrar (2) usaremos que $E[X^2] = \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3\beta - 3\alpha}$, esto se puede demostrar usando una integral similar a la anterior. Ahora vemos que

$$\begin{aligned} V[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3\beta - 3\alpha} - \frac{(\alpha + \beta)^2}{4} \\ &= \frac{4(\beta^3 - \alpha^3) - 3(\beta - \alpha)(\alpha + \beta)^2}{12(\beta - \alpha)} \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{12(\beta - \alpha)} = \frac{1}{12}(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

□

5.1.3. La distribución exponencial

5.1.11. Definición. Una variable aleatoria continua tiene una distribución **exponencial** de parámetro λ si su función de densidad es la siguiente

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{para el resto de valores} \end{cases}$$

Se denota por $\exp(\lambda)$.

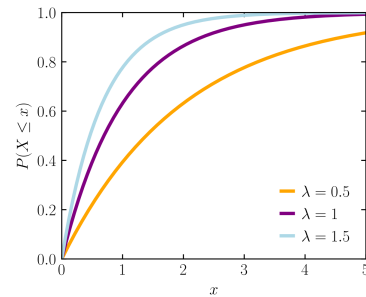
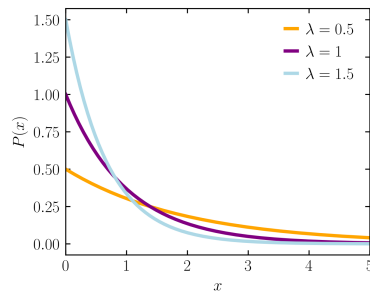


Figura 5.4: Función de densidad de la distribución exponencial

5.1.12. Propiedad. Si $X \sim \exp(\lambda)$ entonces

1. $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
2. $V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

Demostración.

$$E[X] = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \lambda \left[e^{-\lambda x} \frac{x\lambda - 1}{\lambda^2} \right]_0^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(e^{-\lambda y} \frac{y\lambda - 1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

Para resolver esta integral hemos usado que $\int x e^{cx} dx = e^{cx} \frac{cx-1}{c^2} + c$

Para calcular la varianza aplicando integración por partes con $u = \lambda x^2$ y $v = e^{-\lambda x}$, podemos ver fácilmente que

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = 2/\lambda^2$$

(omitimos los detalles de la anterior integral), y de este modo

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

□

5.1.13. Ejemplo. El número de kilómetros viajados por un coche hasta que la transmisión se rompe sigue una variable $\exp(\lambda = 1/100000)$.

- (1) ¿Cuál es la probabilidad de que se rompa antes de los 50000 kilómetros?
- (2) ¿Cuál es el número esperado de kilómetros hasta que se rompa?

Para resolver (1) pensemos en que

$$\begin{aligned} P(X \leq 50000) &= \int_0^{50000} \frac{1}{100000} e^{\frac{-1}{100000}x} dx \\ &= \left[-e^{\frac{-x}{100000}} \right]_0^{50000} = 1 - e^{-1/2} \cong 0,393 \end{aligned}$$

Para (2) aplicamos la propiedad anterior 5.1.12(1), con lo que

$$E[X] = 1/\lambda = 100000$$

5.1.14. Aplicaciones de la distribución exponencial. La distribución exponencial puede ser interpretada como la versión continua de la distribución geométrica. A diferencia de la distribución geométrica (que recordemos era el número de intentos hasta el primer acierto en un experimento de Bernoulli), la exponencial describe *el tiempo necesario para que un proceso continuo cambie su estado*

Para eventos que ocurren a un ritmo constante, con una "media de tiempo necesario para que ocurra" conocida, la distribución exponencial puede usarse para estudiar el *tiempo hasta la siguiente ocurrencia de ese evento*.

Algunos ejemplos de usos de la exponencial pueden ser

- tiempo necesario hasta que llegue el próximo consumidor a una tienda
- tiempo hasta siguiente fallo del sistema
- tiempo hasta que aparezca el siguiente rayo en una tormenta
- kilómetros hasta que se estropee una pieza de un motor.
- ...

5.1.4. La distribución normal

La distribución normal juega un rol central en la teoría de la probabilidad y la estadística. Una de sus aplicaciones se debe a C.F. Gauss, que la usó en 1809 para medir errores en astronomía.

5.1.15. Definición. Una función aleatoria continua tiene una **distribución normal** con parámetros μ y σ , su función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.1)$$

Esta distribución se denota por $N(\mu, \sigma^2)$.

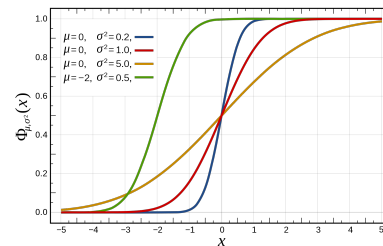
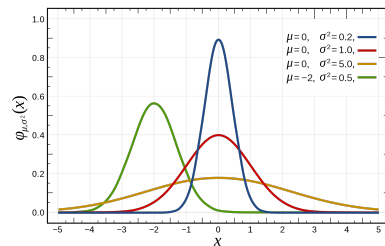


Figura 5.6: Función de densidad de la distribución normal Figura 5.7: Función de densidad acumulada de la distribución normal

5.1.16. Interpretación de μ y σ . Como vemos esta función f tiene una forma de campana, donde los parámetros μ y σ se interpretan como:

- μ determina el valor entorno al que se centra la campana. Veremos que coincide con la esperanza matemática. Este valor es el valor en torno al cual se sitúa la campana, su máximo.
- σ determina lo *apretada o esparcida* que está la campana, es decir lo dispersa que está la variable. Valores más grandes de σ darán lugar a campanas más abiertas.

5.1.17. Aplicaciones de la Normal. Algunos ejemplos de variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo de la normal son:

- caracteres morfológicos de individuos como la estatura;
- caracteres fisiológicos como el efecto de un fármaco;
- caracteres sociológicos como el consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos;
- caracteres psicológicos como el cociente intelectual;
- nivel de ruido en telecomunicaciones;
- errores cometidos al medir ciertas magnitudes;
- ...

5.1.18. Propiedad. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces

1. $E[X] = \mu$
2. $V[X] = \sigma^2$

Demostración.

□

La normal $N(0,1)$

La versión de la normal más sencilla de todas es la que tiene $\mu = 0$ y $\sigma = \sigma^2 = 1$.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (5.2)$$

Como veremos a menudo podemos usar esta normal para trabajar con cualquier otra normal con parámetros cualesquiera μ, σ .

Usando 5.2, definimos:

$$\Phi(y) = \int_y^\infty f(z) dz \quad (5.3)$$

Que coincidirá con el área bajo la curva:

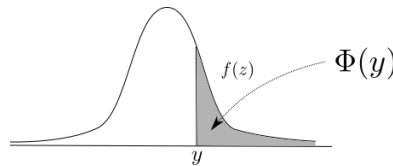


Figura 5.8: Φ

5.1.19. Uso de la Normal $N(0,1)$ para calcular probabilidades de normales $N(\mu, \sigma)$. Supongamos que tenemos una variable aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma)$. Podemos considerar la nueva variable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Veamos cómo calcular la probabilidad de que X tome valores en un intervalo (a, b) usando la normal $N(0, 1)$.

Considerando

$$\begin{aligned} z_a &= (a - \mu)/\sigma \\ z_b &= (b - \mu)/\sigma \end{aligned}$$

vemos que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (5.4)$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{z_a}^{z_b} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (5.5)$$

$$= \int_{z_a}^{z_b} f(z) dz = \left(\int_{z_a}^{\infty} f(z) dz \right) - \left(\int_{z_b}^{\infty} f(z) dz \right) = \Phi(z_a) - \Phi(z_b) \quad (5.6)$$

Hemos las propiedades de la integral definida sobre la ecuación 5.1, haciendo el cambio de variable $z = (x - \mu)/\sigma$ y c.

5.1.20. Ejemplo. La distribución de estaturas de un conjunto de personas se ajusta a un modelo normal $N(169\text{cm}, 8\text{cm})$. Se pide:

- (1) la probabilidad de que una persona tenga su estatura comprendida entre 171 y 175 cm
- (2) la probabilidad de que una persona tenga estatura superior a 191 cm.
- (3) la probabilidad de que una persona estatura inferior a 153 cm.

(1) En este caso tenemos que $b = 175$, $a = 171$ y $z_b = (175 - 169)/8 = 0,75$, $z_a = (171 - 169)/8 = 0,25$ De acuerdo con lo anterior (5.4), basta con calcular $P(a \leq X \leq b) = (\Phi(z_a) - \Phi(z_b)) = \Phi(0,25) - \Phi(0,75)$ para obtener el resultado, buscando los valores en la tabla obtenemos que el $\Phi(0,25) - \Phi(0,75) = (0,40129 - 0,22965)$

(2) En este caso puesto que el intervalo es $(191, \infty)$ tenemos que $b = z_b = \infty$ $a = 191$ y $z_a = (191 - 169)/8 = 2,75$ De acuerdo con lo que hemos visto en (5.4), basta con calcular $\Phi(z_a) - \Phi(z_b) = \Phi(2,75) - 0$ para obtener el resultado, luego hay que buscar el valor $\Phi(2,75)$ en la tabla. En este caso nos da 0,00298. Luego la probabilidad es $\Phi(2,75) = 0,00298$

(3) En este caso puesto que el intervalo es $(-\infty, 153)$ En este caso tenemos que $a = z_a = -\infty$, $b = 153$ y $z_b = (153 - 169)/8 = -2$ De acuerdo con lo que hemos visto en (5.4), basta con calcular $(\Phi(-\infty) - \Phi(z_b)) = (1 - \Phi(-2))$ para obtener el resultado, luego hay que buscar el valor $\Phi(-2)$ en la tabla.

En este caso, como -2 es negativo y en la tabla solo tenemos valores positivos, hay que saber que $\phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,02275 = 0,099772$. Luego el numero de personas con estatura inferior a 153 es $1 - \Phi(-2) = 1 - 0,099772$

5.1.5. Distribución de Pareto

El economista Vilfredo Pareto observó que el número de personas que exceden un nivel de renta x puede ser aproximado por una cantidad C/x^α para ciertas constantes C y α (aparentemente para la mayor parte de los países $\alpha = 1,5$). Este fenómeno ocurre muy a menudo (dinero ganado con discos por artistas, artículos publicados por científicos, reclamaciones a seguros, ventas de empresas...).

Si formalizamos la idea anterior que inspiró a Pareto, las funciones de distribución acumuladas de estas funciones serán del tipo $F = 1 - 1/x^\alpha$ para $x \geq 1$, (fijando arbitrariamente 1 como punto de comienzo), calculando la derivada de esta función obtenemos la función de densidad de la siguiente definición.

5.1.21. Definición. Una Variable aleatoria X sigue la distribución de Pareto su función de distribución es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x_m}{x^{\alpha+1}} & \text{para } x \geq x_m \\ 0 & \text{para } x \leq x_m \end{cases}$$

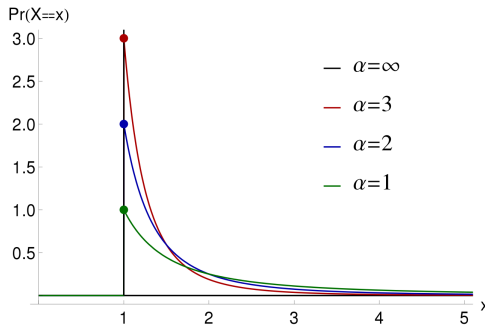


Figura 5.9: Función de densidad de la distribución Pareto

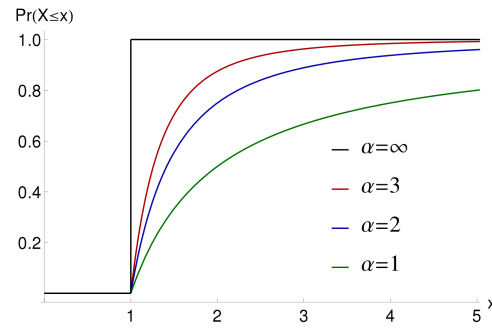


Figura 5.10: Función de densidad acumulada de la distribución Pareto

5.1.22. Ejemplo. Distribución de renta mundial 1989

sector (quintiles)	renta
más ricos 20 %	82.70 %
segundo 20 %	11.75 %
tercer 20 %	2.30 %
cuarto 20 %	1.85 %
más pobres 20 %	1.40 %

5.1.23. Propiedad. Si $X \sim \text{Pareto}(\alpha, x_m)$ entonces

$$E(X) = \begin{cases} \infty & \alpha \leq 1, \\ \frac{\alpha x_m}{\alpha - 1} & \alpha > 1. \end{cases}$$

$$\text{Var}(X) = \begin{cases} \infty & \alpha \in (1, 2], \\ \left(\frac{x_m}{\alpha - 1}\right)^2 \frac{\alpha}{\alpha - 2} & \alpha > 2. \end{cases}$$

Tabla de valores Normal $N(0, 1)$

el valor de la tabla es $\Phi(y) = \int_{-\infty}^y f(z)dz$. Sobre el lado de las filas los primeros dos decimales, sobre las columnas los siguientes.

Si queremos buscar el valor $\Phi(0,12)$ debemos fijarnos en el valor que está sobre la fila 2 (que comienza con 0,1) y la columna 3 (que comienza con +0,02), lo que nos da 0,45224

Para valores negativos tener en cuenta que $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$. Luego si por ejemplo queremos calcular $\Phi(-0,12)$ basta con buscar $\Phi(0,12)$ y luego calcular $1 - \Phi(0,12)$

y	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43640	0.43251	0.42858	0.42465
0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08692	0.08534	0.08379	0.08226
1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024

CAPÍTULO 5. VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

y	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
4.0	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002
