Cómo usar la distribución normal y sus tablas

FUNDAMENTOS DE LA MEDIDA,
DEL TRATAMIENTO DE LA INFORMACION Y DEL AZAR.
ESTRATEGIAS DIDACTICAS PARA SU ENSEÑANZA
(4-228-407-40706-1-2019)

1. Conceptos previos

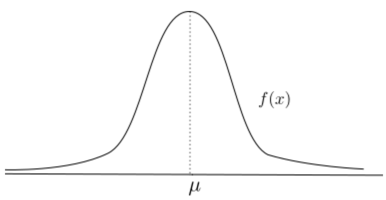
Este documento resume las páginas 135 a 141 de los apuntes.
Recordemos que la curva normal es la que viene determinada por la función

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

En el caso particular en que la normal sea de tipo $N(0,1)$, es decir que $\mu = 0, \sigma = 1$ tenemos que la función anterior se quedaría de esta forma:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z}{2}} \tag{1}$$

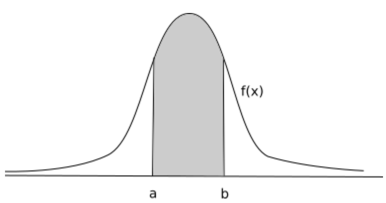
La curva normal tiene la siguiente forma:



Recordemos que la integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \tag{2}$$

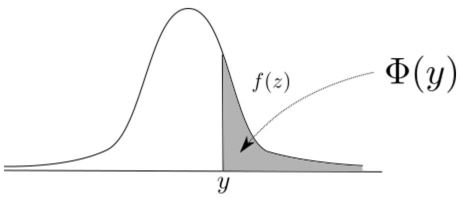
No es más que el area bajo la curva:



Definición 1.1. Usando la formula de la normal $N(0,1)$ dada en (1), definimos:

$$\Phi(y) = \int_y^{\infty} f(z)dz \tag{3}$$

Que coincidirá con el area bajo la curva:



Usando las propiedades de la integral definida sobre la ecuacion (2), se puede deducir, haciendo el cambio de variable $z = (x-\mu)/\sigma$ y considerando $z_a = (a-\mu)/\sigma$, $z_b = (b-\mu)/\sigma$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{z_a}^{z_b} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \tag{4}$$

$$= \int_{z_a}^{z_b} f(z)dz = \left(\int_{z_a}^{\infty} f(z)dz\right) - \left(\int_{z_b}^{\infty} f(z)dz\right) = \Phi(z_a) - \Phi(z_b) \tag{5}$$

La siguiente afirmación nos será de utilidad:

Idea 1.1. *Si una muestra $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_N = (x_i)$ de N datos tiene una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, entonces considerando $z_a = (a-\mu)/\sigma$, $z_b = (b-\mu)/\sigma$*

1. *el numero de datos de la muestra entre a y b es $N \cdot (\Phi(z_a) - \Phi(z_b))$*
2. *el numero de datos de la muestra mayores que b es $N \cdot \Phi(z_b)$*
3. *el numero de datos de la muestra menores que b es $N \cdot (1 - \Phi(z_b))$*

Para demostrar (1.1), basta saber que el numero de datos de la muestra comprendidos entre dos valores a y b es justamente el area bajo la curva normal entre esos dos valores multiplicada por N. Una vez sabido eso, basta aplicar (4) para deducirlo.

El hecho de que el número de valores de la muestra se relacione con el area de la distribución normal que satisface, se puede entender si pensamos en su histograma. En un histograma el numero de datos en un intervalo es justamente el area del rectángulo sobre ese intervalo.

2. Cómo calcular usando la normal

En el primer ejemplo que veremos partiremos de una distribución normal con ciertos parámetros μ y σ y nos preguntaremos cuantos valores de la muestra están entre ciertos valores dados. En todos los casos aplicaremos la idea (1.1)

calcular $z_a, z_b \longrightarrow$ mirar la tabla y calcular $\Phi(z_a), \Phi(z_b) \longrightarrow$ aplicar 1.1 y obtener el resultado

Ejemplo 2.1. La distribución de estaturas de un conjunto de 2000 personas se ajusta a un modelo normal $N(169cm, 8cm)$. Se pide:

1. Número de personas con una estatura superior a 191 cm.
2. Número de personas con una estatura inferior a 177 cm.
3. Número de personas con una estatura inferior a 153 cm.
4. Número de personas con una estatura superior a 151 cm.
5. Número de personas con estatura comprendida entre 171 y 175 cm.
6. Número de personas con estatura comprendida entre 165 y 175 cm.
7. Número de personas con estatura comprendida entre 157 y 167 cm.

Solución.

1. En este caso tenemos que $b = 191$ y $z_b = (191 - 169)/8 = 2{,}75$ De acuerdo con lo que hemos visto en (1.1), basta con calcular $N \cdot \Phi(z_b) = 2000 \cdot \Phi(2{,}75)$ para obtener el resultado, luego hay que buscar el valor $\Phi(2{,}75)$ en la tabla.

   Si vamos a la última página encontramos como obtener este dato. Tengo que buscar la fila de los dos digitos (2,7) y luego mirar la columna del resto de dígitos (0,05), en este caso nos da 0,00298. Luego el numero de personas con estatura superior a 191 es $2000 \cdot \Phi(2{,}75) = 2000 \cdot 0{,}00298 = 5{,}95 \cong 6$

2. En este caso tenemos que $b = 177$ y $z_b = (177 - 169)/8 = 1$ De acuerdo con lo que hemos visto en (1.1), basta con calcular $N \cdot (1 - \Phi(z_b)) = 2000 \cdot (1 - \Phi(1))$ para obtener el resultado, luego hay que buscar el valor $\Phi(1)$ en la tabla.

   Si vamos a la última página encontramos como obtener este dato, en este caso nos da 0,15866. Luego el numero de personas con estatura inferior a 191 es $2000 \cdot (1 - \Phi(1)) = 2000 \cdot (1 - 0{,}15866) = 1682{,}7 \cong 1683$

3. En este caso tenemos que $b = 153$ y $z_b = (153 - 169)/8 = -2$ De acuerdo con lo que hemos visto en (1.1), basta con calcular $N \cdot (1 - \Phi(z_b)) = 2000 \cdot (1 - \Phi(-2))$ para obtener el resultado, luego hay que buscar el valor $\Phi(-2)$ en la tabla.

   En este caso, como -2 es negativo y en la tabla solo tenemos valores positivos, hay que saber que $\phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}02275 = 0{,}099772$. Luego el numero de personas con estatura inferior a 153 es $2000 \cdot (1 - \Phi(-2)) = 2000 \cdot (1 - 0{,}099772) = 45{,}6 \cong 46$

4. En este caso tenemos que $b = 151$ y $z_b = (151 - 169)/8 = -2{,}25$ De acuerdo con (1.1), basta con calcular $N \cdot \Phi(z_b) = 2000 \cdot \Phi(-2{,}25)$ para obtener el resultado, luego hay que buscar el valor $\Phi(-2)$ en la tabla.

   Al igual que antes, como -2 es negativo y en la tabla solo tenemos valores positivos, hay que saber que $\phi(-2{,}25) = 1 - \Phi(2{,}25) = 1 - 0{,}01222 = 0{,}98778$. Luego el numero de personas con estatura superior a 153 es $2000 \cdot \Phi(-2{,}25) = 2000 \cdot 0{,}98778 = 1975{,}6 \cong 1976$

5. En este caso tenemos que $b = 175, a = 171$ y $z_b = (175 - 169)/8 = 0{,}75, z_a = (171 - 169)/8 = 0{,}25$ De acuerdo con (1.1), basta con calcular $N \cdot (\Phi(z_a) - \Phi(z_b)) = 2000 \cdot (\Phi(0{,}25) - \Phi(0{,}75))$ para obtener el resultado,

   Buscando los valores en la tabla obtenemos que el número de personas con estatura comprendida entre 171 y 175 es $2000 \cdot (\Phi(0{,}25) - \Phi(0{,}75)) = 2000 \cdot (0{,}40129 - 0{,}22965) = 343{,}28 \cong 343$

6. En este caso tenemos que $b = 175, a = 165$ y $z_b = (175 - 169)/8 = 0{,}75, z_a = (165 - 169)/8 = -0{,}5$ De acuerdo con (1.1), basta con calcular $N \cdot (\Phi(z_a) - \Phi(z_b)) = 2000 \cdot (\Phi(-0{,}5) - \Phi(0{,}75))$ para obtener el resultado, Debemos tener en cuenta que $\Phi(-0{,}5) = 1 - \Phi(0{,}5) = 1 - 0{,}30854 = 0{,}69146$ a la hora de buscarlo en la tabla.

   Buscando los valores en la tabla obtenemos que el número de personas con estatura comprendida entre 171 y 175 es $2000 \cdot (\Phi(-0{,}5) - \Phi(0{,}75)) = 2000 \cdot (0{,}69146 - 0{,}22965) = 923{,}62 \cong 924$

7. En este caso tenemos que $b = 167, a = 157$ y $z_b = (167 - 169)/8 = -0{,}25, z_a = (157 - 169)/8 = -1{,}5$ De acuerdo con (1.1), basta con calcular $N \cdot (\Phi(z_a) - \Phi(z_b)) = 2000 \cdot (\Phi(-1{,}5) - \Phi(-0{,}25))$ para obtener el resultado, Debemos tener en cuenta que $\Phi(-1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5)$ y que $\Phi(-0{,}25) = 1 - \Phi(0{,}25)$ a la hora de buscarlo en la tabla.

   Buscando los valores en la tabla obtenemos que el número de personas con estatura comprendida entre 171 y 175 es $2000 \cdot (\Phi(-1{,}5) - \Phi(-0{,}25)) = 2000 \cdot (0{,}33448) = 668{,}96 \cong 669$

$\square$

Ejercicio 2.1. La distribución de pesos de un conjunto de 1000 personas se ajusta a un modelo normal $N(70kg, 12kg)$. Se pide:

1. Número de personas con un peso superior a 75.
2. Número de personas con un peso inferior a 72.
3. Número de personas con un peso inferior a 60.
4. Número de personas con un peso superior a 65.
5. Número de personas con un peso comprendido entre 76 y 80.
6. Número de personas con un peso comprendido entre 66 y 72.
7. Número de personas con un peso comprendido entre 50 y 60.

Ejercicio 2.2. La distribución de edades de un conjunto de 3000 personas se ajusta a un modelo normal $N(60, 11)$. Se pide:

1. Número de personas con edad superior a 65.
2. Número de personas con edad inferior a 62.
3. Número de personas con edad inferior a 50.
4. Número de personas con edad superior a 55.
5. Número de personas con edad comprendida entre 66 y 70.
6. Número de personas con edad comprendida entre 56 y 62.
7. Número de personas con edad comprendida entre 40 y 50.

Tabla de valores Normal $N(0,1)$

el valor de la tabla es $\Phi(y) = \int_y^\infty f(z)dz$. Sobre el lado de las filas los primeros dos decimales, sobre las columnas los siguientes.

Si queremos buscar el valor $\Phi(0{,}12)$ debemos fijarnos en el valor que está sobre la fila 2 (que comienza con 0,1) y la columna 3 (que comienza con +0,02), lo que nos da 0,45224

Para valores negativos tener en cuenta que $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$. Luego si por ejemplo queremos calcular $\Phi(-0{,}12)$ basta con buscar $\Phi(0{,}12)$ y luego calcular $1 - \Phi(0{,}12)$

y	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43640	0.43251	0.42858	0.42465
0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08692	0.08534	0.08379	0.08226
1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
4.0	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002