1. Aproximación de soluciones de ecuaciones no lineales

1.1. Método de Newton

El método de Newton para resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ con $x \in [a, b]$ consiste, bajo condiciones apropiadas, en aproximar la solución de forma sucesiva mediante el esquema

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b], \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{cases}$$

Si el método es convergente la sucesivas soluciones que se obtienen, x_n, tienden a la solución del sistema. Por tanto, la sucesión de las diferencias entre dos iteraciones consecutivas tiende a cero. Emplearemos como criterio de parada de las iteraciones que la diferencia entre dos iteraciones consecutivas cumpla

$$|x_n - x_{n-1}| < \mathtt{TOL}$$

donde `TOL` es una cantidad pequeña prefijada. Además se establecerá un número máximo de iteraciones permitidas, `NMAX`. Estas dos cantidades, `TOL` y `NMAX`, deben proporcionarse antes de comenzar las iteraciones.

El fichero de OCTAVE `newton.m` implementa este método, observa su estructura y averigua cómo emplearlo junto con las funciones `fun.m` y `dfun.m` para aproximar la solución de la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} x^6 - x - 1 = 0, \\ x_0 \in [1,2] \end{cases}$$

Emplear el método de Newton para obtener una aproximación de la solución de

$$i) \begin{cases} \cos x = x, \\ x_0 = \pi/4. \end{cases} \qquad ii) \begin{cases} x = (2 - e^x + x^2)/3, \\ x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad iii) \begin{cases} e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0, \\ x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.2. Sistema de ecuaciones no lineales

El método de Newton puede adaptarse a la resolución de sistemas no lineales. Consideramos ahora que intentamos resolver $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ con $\mathbf{x} \in A$, un abierto de $\mathbb{R}^n$. El esquema se adapta sin más que reemplazar el papel de la derivada primera por el de la matriz jacobiana de f, $\mathcal{J}_\mathbf{f}$ y tener en cuenta que hemos pasado a considerar una función vectorial, quedando:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 \in A, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathcal{J}_\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_n) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_n). \end{cases}$$

Dado que el cálculo de la inversa no es eficiente, se sustituye por la resolución de un sistema lineal. Tomando $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, el esquema resulta finalmente como:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 \in A, \\ \text{resolver } \mathcal{J}_\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \cdot \Delta\mathbf{x}_n = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta\mathbf{x}_n. \end{cases}$$

El fichero de OCTAVE `newtonsys.m` implementa el método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales, úsalo junto con las funciones `Ffun.m` y `Jfun.m` para aproximar la solución de:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \operatorname{sen}(\pi x/2) + y^3 = 0, \\ \mathbf{x}_0 = (x,y) \in [-1,1] \times [-1,1] \end{cases}$$

Usa el programa anterior para aproximar una solución de

$$\begin{cases} 3x - \cos(yz) - \dfrac{1}{2} = 0, \\ x^2 - 81(y + 0{,}1)^2 + \operatorname{sen} z + 1{,}06 = 0, \\ e^{-xy} + 20z + \dfrac{10\pi - 3}{3} = 0, \\ \mathbf{x}_0 = (0{,}1, 0{,}1, -0{,}1) \end{cases}$$

1.3. Método de la secante

El método de la secante se emplea para resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ con $x \in [a, b]$ y sirve como alternativa al método de Newton cuando no es posible evaluar la derivada de la función f. Consiste, bajo condiciones apropiadas, en aproximar la solución de forma sucesiva mediante el siguiente esquema:

$$\begin{cases} x_0,\, x_1 \in (a, b) \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \end{cases}$$

1. Emplear el método de la secante, implementado en el fichero `secante.m`, para obtener una aproximación de la solución de

$$i)\begin{cases} x = (2 - e^x + x^2)/3, \\ x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad ii)\begin{cases} e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0, \\ x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Compara los resultados con los obtenidos al emplear el método de Newton en los mismos problemas. ¿Cuál es más eficaz?¿por qué?