3. Dependencia lineal

3.1. Dependencia e independencia lineal

Un conjunto de vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$ es *linealmente dependiente o ligado* si existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ escalares, alguno de ellos no nulo, tales que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$$

En caso contrario, se dice que el conjunto es *linealmente independiente o libre.*

La condición anterior se puede reducir al análisis del número de soluciones de un cierto sistema lineal homogéneo. En el caso $\mathbb{R}^n$, el sistema tiene como matriz de coeficientes aquella cuyas columnas son los vectores del conjunto considerado.

Como consecuencia, la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores se puede averiguar a través del rango de una cierta matriz. Si el rango es el máximo posible el sistema es libre y, en caso contrario, el sistema es linealmente dependiente.

Saber si es posible expresar un cierto vector como combinación lineal de otros, también se puede reducir a resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio parcialmente resuelto

Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (4, -5, 7), \quad v_2 = (2, -3, 4), \quad v_3 = (1, 1, -2), \quad v_4 = (2, -1, 1),$$

1. ¿forman $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un sistema linealmente dependiente?
2. es posible expresar el vector $u = (3, 0, 1)$ como combinación lineal de los vectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
3. ¿Podemos expresar cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ como una combinación lineal de los vectores considerados?
4. Extrae un subconjunto con el mayor número posible de vectores libres; ¿puede expresarse cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ como una combinación lineal de estos vectores?
5. ¿Puedes extraer un subconjunto de vectores diferente del obtenido en el apartado anterior con la misma propiedad?

Definimos la matriz cuyas columnas son los v_i y calculamos el rango del sistema.

```
>> v1=[4;-5;7]; v2=[2;-3;4]; v3=[1;1;-2]; v4=[2;-1;1];
>> A=[v1 v2 v3 v4]
>> rank(A)
>> rref(A)
```

Del resultado de cualquiera de las dos últimas instrucciones deducimos que el rango es tres, esto es, que podemos extraer del conjunto un máximo de tres vectores que formen un conjunto libre. Por tanto, el sistema completo es ligado. De la forma escalonada deducimos que podemos expresar v_4 en función de los demás como $v_4 = 1/3v_1 + 2/3v_3$

```
>> 1/3*v1+2/3*v3
>> v4
```

Un vector cualquiera u puede expresarse como una combinación lineal de los anteriores si el sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada $(A|u)$ tiene solución. Una solución de este sistema nos da los escalares a emplear. Para ello podemos intentar resolver el sistema lineal directamente o recurrir a la forma escalonada para estudiar los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada. Resolviendo el sistema directamente tenemos

```
>> u=[3;0;1]
>> A\u
```

de donde deducimos que $u = 11/3v_1 - 6v_2 + 1/3v_3$ y lo comprobamos:

```
>> 11/3*v1-6*v2+v3/3
```

Para cualquier otro vector de $\mathbb{R}^3$, dado que la matriz A tiene rango 3, añadir una columna no supone variar el rango con lo que tendremos un sistema compatible, por tanto, con solución.

Como el rango es 3 y lo alcanzamos con las tres primeras columnas, podemos prescindir de v_4 y el sistema que nos queda es libre y nos sirve igualmente para expresar cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal suya.

Para ver que podemos escoger otra combinación de vectores manteniendo el rango introducimos, por ejemplo
```
>> rank([v2 v3 v4])
```
cuyo resultado nos indica que ese conjunto también forma un sistema libre.

3.2. Subespacios de una matriz

El *espacio columna* de una matriz A $m \times n$ es el conjunto $\operatorname{Col} A$ de todas las combinaciones lineales de las columnas de la matriz A, por tanto, un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

Para extraer una base de $\operatorname{Col} A$ bastar con descartar entre las columnas de A aquellas que se puedan escribir como combinación lineal de las restantes, de este modo, las columnas que no puedan descartarse formarán la base buscada.

El *espacio nulo* de una matriz A $m \times n$ es el conjunto $\operatorname{Nul} A$ de todas las soluciones posibles del sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, por tanto, un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Para conseguir una base de $\operatorname{Nul} A$ hay que resolver el sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ escribiendo sus soluciones como combinación lineal empleando como pesos las variables libres resultantes. Los vectores empleados para dichas combinaciones formarán una base de $\operatorname{Nul} A$.

Ejercicio

1. Consideramos la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -5 \\ -3 & -2 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Emplea la reducción por filas hasta forma escalonada para hallar el rango del las columnas de las matriz vistas como vectores de $\mathbb{R}^4$.

   b) ¿Puedes expresar la tercera columna como combinación lineal de las demás? ¿puedes hacer lo mismo con la cuarta columna?

   c) Escoge, si es posible, tres columnas linealmente independientes de A.

   d) Escoge, si es posible, tres columnas linealmente dependientes de A.

   e) Determina una base de $\operatorname{Nul} A$.

   f) Determina una base de $\operatorname{Col} A$.