2. Matrices y descomposición *LU*

2.1. Matrices elementales

Las operaciones elementales sobre matrices pueden representarse mediante las llamadas matrices elementales. El resultado de multiplicar a izquierdas por una matriz elemental apropiada es la matriz que resulta después de realizar la operación correspondiente sobre la matriz original.

Calcular en cada paso la matriz elemental apropiada para cada operación es pesado y repetitivo. Para este tipo de tareas, OCTAVE permite construir al usuario sus propias funciones para abreviar los cálculos, esto es, empleamos el modo programado de OCTAVE. Programaremos tres funciones que calculan cada una de las matrices elementales que necesitamos:

- tipo I: permutación: `eij(n,i,j)`
- tipo II: producto por escalar no nulo: `eit(n,i,t)`
- tipo III: sumar el múltiplo de una fila a otra: `eijt(n,i,j,t)`

Los ficheros correspondientes a cada función son de texto, tienen el mismo nombre de la función con la extensión `.m` y pueden escribirse con el editor que incluye OCTAVE o con cualquier editor de texto sin formato. Como ejemplo, mostramos aquí la función para calcular la matriz que permuta dos filas (cuando se escribe el símbolo `%`, lo que viene a continuación se considera un comentario que se ignora).

```
function e=eij(n,i,j)
% e=eij(n,i,j)
% esta funcion calcula la matriz elemental de orden n que permite
% permutar las filas i y j.
e=eye(n); % partimos inicialmente de la identidad de orden n.
e(i,i)=0;e(j,j)=0; % modificamos los elementos necesarios.
e(i,j)=1;e(j,i)=1;
%
return
```

Después de haber escrito correctamente estas funciones, podemos realizar directamente las operaciones con matrices elementales empleando estas funciones, si `A` es una matriz con 4 filas:

```
>> eij(4,2,3)
>> eijt(4,1,3,-5)
>> A=ones(4)
>> B=eijt(4,1,3,-5)*A
>> eij(4,2,3)*B
>> eij(4,1,4)*eit(4,1,8)*B
```

Ejercicios

1. Demuestra con ejemplos (y con OCTAVE) cada una de las siguientes propiedades de las matrices elementales:
   a) Las matrices elementales son invertibles y la inversa de una matriz elemental es otra matriz elemental de la misma clase.
   b) Calcula el determinante de las matrices elementales.
2. Consideramos la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$
   a) Realiza las operaciones elementales a la matriz anterior empleando las matrices elementales hasta que averigües cuál es su rango.
   b) ¿Es la matriz invertible?
   c) Continua realizando operaciones con matrices elementales hasta que obtengas A^{-1} como producto de matrices elementales.

Un atajo

OCTAVE proporciona mediante la orden `rref(A)` la forma escalonada reducida (por filas) de la matriz `A`. Del mismo modo que si hubiésemos realizado operaciones elementales sobre la matriz. Lo que no proporciona es el camino empleado para llegar a ella.

2.2. Descomposición LU

Toda matriz A se puede transformar, empleando tan solo operaciones elementales, en una matriz triangular superior U. Si las operaciones elementales se describen mediante matrices elementales E_1, E_2,. . . ,E_m tendremos

$$E_m \cdots E_2 E_1 A = U.$$

Si, por un lado, somos capaces de reunir todas las operaciones de permutación necesarias en una matriz P y efectuarlas primero (PA) y luego realizamos las demás operaciones, que no será ninguna de permutación y guardarlas en otra matriz Q, tendremos que

$$QPA = U \qquad \Rightarrow \qquad PA = Q^{-1}U$$

Se prueba que la matriz $L = Q^{-1}$ es triangular inferior con unos en la diagonal principal con lo que resulta

$$PA = LU.$$

Es decir, salvo posibles permutaciones que están recogidas todas en una matriz P, una matriz cualquiera puede expresarse como el producto de una matriz triangular inferior L con unos en la diagonal principal por una matriz triangular superior U. Es la llamada descomposición LU.

Conocida la descomposición LU de una matriz y suponiendo que no ha habido permutaciones ($P = I_n$), resolver el sistema $Ax = b$ es equivalente a resolver dos sistemas más simples (triangulares):

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b \Leftrightarrow L\underbrace{(Ux)}_{=c} = b \Leftrightarrow Lc = b,\, Ux = c.$$

Para llevar a cabo la descomposición LU con OCTAVE se puede, entre otras formas, proceder del modo siguiente. Le "pegamos" a la matriz A la matriz identidad del mismo orden, si A es de orden 3

```
>> B=[A eye(3)]
```

Realizamos las operaciones normalmente y quedarán registradas en la parte de la derecha, de modo que al final del proceso de eliminación tendremos, si no ha habido permutaciones: `[U L`$^{-1}$`]`.

Ejercicios

1. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
llévala a la forma triangular superior mediante operaciones elementales y calcula su descomposición LU.

2. Resolver empleando la factorización LU el sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nota: también existe una orden de OCTAVE que permite calcular la descomposición LU de una matriz, es la orden `lu`.