1. Extremos de funciones escalares

1.1. Extremos relativos de funciones

Recordamos que la condición necesaria para que un punto $\mathbf{x}_0$ sea un extremo relativo de f, una función que es diferenciable en dicho punto, es:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Por tanto, los extremos relativos de la función se encuentran entre las soluciones del sistema $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ que son **puntos críticos** de la función, así como los puntos donde la función no es diferenciable.

Si en un punto crítico $\mathbf{x}_0$ la función no presenta un extremo relativo, se dice que $\mathbf{x}_0$ es un **punto de silla**.

La matriz hessiana de una función de clase $\mathcal{C}^2$ se denota $\mathcal{H}f(\mathbf{x})$ y agrupa sus derivadas parciales de orden dos. La existencia de esta matriz en un punto crítico de una función permite, en ocasiones, clasificar estos puntos en función del signo de la matriz hessiana.

Teorema: Sea $f : I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real de clase $\mathcal{C}^2$ y sea $\mathbf{x}_0$ un punto crítico de f, es decir, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Entonces:

(a) Si $\mathcal{H}f(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva, entonces $\mathbf{x}_0$ es un mínimo relativo (estricto).

(b) Si $\mathcal{H}f(\mathbf{x}_0)$ es definida negativa, entonces $\mathbf{x}_0$ es un máximo relativo (estricto).

(c) Si $\mathcal{H}f(\mathbf{x}_0)$ es indefinida, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto de silla (es decir, no es extremo).

Para resolver los ejercicios de la siguiente sección vas a tener que emplear estos resultados y los conocimientos adquiridos en prácticas anteriores, no se va a desarrollar procedimientos nuevos pero tampoco se va a detallar la forma de emplear lo ya conocido.

1.2. Ejercicios propuestos

1. Consideramos la función $z_1(x, y) = x^2 + y^2$ sobre el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

   a) Representa gráficamente la función sobre el dominio anterior.

   b) Representa gráficamente las curvas de nivel sobre el mismo dominio.

   c) Representa las curvas $z_1(x, x)$, $z_1(x, 0)$ y $z_1(0, y)$.

   d) Comprueba que el punto $(0, 0)$ es un punto crítico.

   Nota: El punto $(0, 0)$ *es un mínimo relativo de la función* z_1.

2. Consideramos la función $z_2(x, y) = -x^2 - y^2$ sobre el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

   a) Representa gráficamente la función sobre el dominio anterior.

   b) Representa gráficamente las curvas de nivel sobre el mismo dominio.

   c) Representa las curvas $z_2(x, x)$, $z_2(x, 0)$ y $z_2(0, y)$.

   d) Comprueba que el punto $(0, 0)$ es un punto crítico.

   Nota: El punto $(0, 0)$ *es un máximo relativo de la función* z_2.

3. Considera la función $z_3(x,y) = x^2 - y^2$ sobre el cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$.

   a) Representa gráficamente la función sobre el dominio anterior.

   b) Representa gráficamente las curvas de nivel sobre el mismo dominio.

   c) Representa las curvas $z_3(x,x)$, $z_3(x,0)$ y $z_3(0,y)$.

   d) Comprueba que el punto $(0,0)$ es un punto crítico.

   Nota: El punto $(0,0)$ *es un punto de silla de la función* z_3.

4. Halla los puntos críticos de $x^3 - x^2y + 3y^2$ y representa la función en un entorno de sus puntos críticos.