4. Valores y vectores propios

4.1. Valores y vectores propios

Dada una matriz real A, mediante OCTAVE podemos calcular sus valores y vectores propios empleando la orden

```
[vectp, valp]=eig(A)
```

Se almacena en las columnas de la matriz `vectp` una base de vectores propios de A y en la diagonal de la matriz `valp` los valores propios de A, reales o complejos.

La matriz formada por una base de vectores propios, cuando las condiciones son las apropiadas, permite transformar la matriz original en una matriz semejante, si P es la matriz cuyas columnas contienen los vectores propios de A, la matriz $P^{-1}AP$ será una matriz que en su diagonal contendrá los valores propios de A. Cuando la matriz resultante sea diagonal, se dice que A es diagonalizable.

Partimos de la matriz

```
>> A=[4 1 1;-1 2 -1; -1 -1 2]

A =

   4    1    1
  -1    2   -1
  -1   -1    2
```

Calculamos sus valores y vectores propios

```
>> [P,V]=eig(A)
>> inv(P)*A*P
```

No todas las matrices pueden llevarse a forma diagonal a través de una base de sus vectores propios

Ejercicios

1. Decidir cuáles de estas matrices pueden reducirse a forma diagonal y hallar la matriz que la transforma P

$$i)\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ii)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad iii)\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & 6 \\ -5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

4.2. Sistemas dinámicos lineales

Consideremos una matriz A $n \times n$ y un vector $b \in \mathbb{R}^n$. Dado un vector inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ construimos una sucesión de la forma

$$x_{k+1} = Ax_k + b, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

De este modo, partiendo del vector arbitrario inicial x_0 se pasa a x_1, luego a x_2, etc. Se denomina un sistema dinámico lineal. El vector x_k corresponde al estado de las magnitudes que representan sus componentes en el tiempo k.

El objetivo de los ejercicios es construir programas OCTAVE que permitan dibujar la evolución de las componentes de un sistema dinámico lineal y observar su comportamiento en algunos ejemplos.

Ejercicios

1. Empleando la ayuda de OCTAVE y algunos ejemplos averigua qué hace la instrucción `plot(x)` cuando `x` es un vector.

2. Averigua ahora el efecto de la instrucción `plot(x,'r')`. Busca otros colores.

3. Crea un fichero llamado `dinamico.m` con el siguiente contenido:

```
function x=dinamico(A,b,x0,n)
% Implementacion de un proceso dinamico lineal.
% En las columnas de x aparecen los estados en cada
% paso de tiempo k.
x(:,1)=x0;
 for k=1:n
   x(:,k+1)=A*x(:,k)+b;
end
%dibujamos solo las tres primeras componentes de x.
hold on
plot(x(1,:),'r')
plot(x(2,:),'g')
plot(x(3,:),'b')
hold off
return
```

4. Prueba el programa anterior para el sistema

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

partiendo de un vector inicial cualquiera.

5. Utilizando el programa anterior, estudia el comportamiento del sistema dinámico siguiente partiendo de diferentes vectores iniciales

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 \\ -7/4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. El siguiente ejemplo corresponde con un simple modelo de epidemiología[1]. Durante una epidemia cada mes enferma la mitad de los que están sanos y muere la cuarta parte de los que están enfermos. Si denotamos por

   - x_k = número de muertos en el mes k (acumulados).
   - y_k = número de personas enfermas en el mes k.
   - z_k = número de personas sanas en el mes k.

   Comprueba que la evolución de la enfermedad se corresponde con el siguiente sistema dinámico lineal:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

   Estudia la evolución si inicialmente tenemos $(0, 0, 20)$ y contamos en miles de personas. Prueba otras situaciones iniciales.

7. Calcula los valores propios de las matrices de los modelos anteriores. Hay alguna relación entre el signo o la magnitud de los valores propios con el comportamiento de la variable asociada en el modelo?

[1] Tomado del libro *Algebra lineal y sus aplicaciones* de G. Strang