1. Gradiente, plano tangente, Taylor

1.1. Diferenciabilidad

En esta práctica trataremos funciones escalares de dos variables para poder realizar representaciones gráficas. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función real diferenciable en un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ entonces, su aplicación diferencial $Df(x_0, y_0)$ queda determinada por el vector gradiente de f en ese punto:

$$\nabla f((x_0, y_0)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right),$$

Al ser diferenciable, las derivadas direccionales en la dirección $\mathbf{v}$ se pueden calcular mediante un producto escalar

$$D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}\,.$$

OCTAVEno permite el cálculo simbólico, lo que impide utilizarlo para calcular derivadas parciales de forma simbólica. Todos los cálculos relacionados con derivadas habrán de hacerse primero "a mano", para luego definir la derivada calculada como función de OCTAVE, tal y como se vió en prácticas anteriores.

1.2. Plano tangente y aproximación de Taylor

Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ la ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) = T_1(x, y)$$

define el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0). Este plano tangente o la función de dos variables que se define a través de la expresión anterior de $T_1(x, y)$ es una sencilla aproximación a f cerca de (x_0, y_0). Es una aproximación de Taylor de primer orden de la función f en (x_0, y_0).

Si la función presenta suficiente regularidad en sus derivadas, se pueden construir aproximaciones sucesivas de forma similar. Para segundo orden y escribiendo de forma compacta con la ayuda del vector gradiente y de la matriz hessiana de f:

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + (x - x_0, y - y_0) \cdot H_f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Estas aproximaciones son funciones sencillas ya que se trata de polinomios en las variables x e y.

Ejercicios

En prácticas anteriores definimos funciones de varias variables y representamos gráficamente la función y sus curvas de nivel, recuerda las instrucciones necesarias para ello ya que las necesitarás de nuevo.

Recuerda también que una forma de dibujar juntas una o más gráficas es teclear el comando `hold on` y las gráficas que vayas realizando se irán superponiendo. Para detener esa acumulación y volver a dibujar en ventanas separadas o realizar una nueva gráfica teclea el comando `hold off` o cierra la ventana con las gráficas.

1. Define con Octave la función $f(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$. Calcula sus derivadas parciales y defínelas, a su vez, como nuevas funciones `fx` y `fy`.
   a) Calcula el vector gradiente de f en el punto $(-1, 3)$.
   b) Calcula la derivada direccional de f en el punto $(-1, 3)$ en la dirección que sigue el vector $(1, 1)$ y en una dirección perpendicular.
   c) Representa la función y su plano tangente en $(-1, 3)$.
2. Define con Octave la función $h(x, y) = e^{-x^2} + y$.
   a) Calcula $T_1(x, y)$ y $T_2(x, y)$ para $(x_0, y_0) = (0, 0)$
   b) Representa la función $h(x, y)$ junto con $T_1(x, y)$ y después junto con $T_2(x, y)$.