1. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Determina si los siguientes sistemas son consistentes y, caso de serlo, halla sus solución

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \\ -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_4 = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_4 = -3 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

2. Las siguientes matrices son las matrices aumentadas de un sistema lineal, realizar las operaciones por filas necesarias y hallar las soluciones de los sistemas que representan

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Halla las soluciones de los sistemas lineales siguientes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = -4 \\ 5x_1 + 7x_2 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$$

4. Determina para las siguientes matrices el valor del parámetro h de modo que las matrices sean matrices aumentadas de un sistema de ecuaciones lineales consistente

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -3 & h \\ -6 & 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. Encuentra una relación que involucre a g, h y k que permita que esta matriz aumentada corresponda a un sistema consistente

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{pmatrix}$$

6. Reducir por filas las siguientes matrices hasta su forma escalonada reducida, señalar las posiciones pivote y enumerar las columnas pivote.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Encontrar la solución de los sistemas lineales cuyas matrices aumentadas son las siguientes

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

8. Discutir la existencia de solución y resolver, según los valores de los parámetros, α y β, los sistemas lineales

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x + \alpha y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + \alpha z = 3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2u + 4v + \beta w + 2z = 6 \\ 3v + 3w + z = 4 \\ 2u + 7v + 9w + 7z = 8 \\ \alpha u + 6w + 5z = -4 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \\ \beta x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_3 + 6x_4 = 0 \end{array} \right.$$

9. Discutir la existencia de solución y resolver, según los valores del parámetro γ, el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma x + y + z = 1 \\ x + \gamma y + z = \gamma \\ x + y + \gamma z = \gamma^2 \end{array} \right.$$

10. Encuentra la forma escalonada reducida de la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Determina los valores b_1, b_2 y b_3 para los que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

12. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 7 & -4 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

describe sus posibles soluciones según los valores de b_1, b_2 y b_3.

13. Dados los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

calcular y representar gráficamente $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $-\mathbf{v}$, $-2\mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

14. Escribe el sistema de ecuaciones lineales equivalente a la ecuación vectorial

$$x_1 \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

15. Determinar si $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de A para

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

16. Dados los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

halla cinco vectores pertenecientes a $\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

17. Consideramos los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

¿Para qué valores de h el vector $\mathbf{b}$ está en el subespacio generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$?

18. Sean

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Está $\mathbf{u}$ en el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ generado por las columnas de A? Razónalo.

19. Muestra que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución para todas las $\mathbf{b}$ posibles siendo

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

y describe el conjunto de todas las $\mathbf{b}$ para las que sí tiene solución.

20. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuántas filas contienen una posición pivote? ¿la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución para cada $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^4$?

b) ¿Las columnas de B generan $\mathbb{R}^4$? ¿la ecuación $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tiene solución para cada $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^4$?

c) ¿Puede escribirse cada vector de $\mathbb{R}^4$ como una combinación lineal de las columnas de la matriz A? ¿las columnas de A generan $\mathbb{R}^4$?

d) ¿Puede escribirse cada vector de $\mathbb{R}^4$ como una combinación lineal de las columnas de la matriz B? ¿las columnas de B generan $\mathbb{R}^4$?

21. Sean los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se sabe que $3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Utilizar este hecho para encontrar las x_1 y x_2 *sin realizar operaciones por filas* que satisfagan la ecuación

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

22. Construye una matriz 3×3, en forma no escalonada, cuyas columnas generen $\mathbb{R}^3$. Demuestra que dicha matriz tiene la propiedad deseada.

23. Construye una matriz 3×3, en forma no escalonada, cuyas columnas *no* generen $\mathbb{R}^3$. Demuestra que dicha matriz tiene la propiedad deseada.

24. Determina si las columnas de la siguiente matriz generan $\mathbb{R}^4$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -6 & -7 & 13 \\ -7 & -8 & 5 & 6 & -9 \\ 11 & 7 & -7 & -9 & -6 \\ -3 & 4 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

25. Determina si el siguiente sistema tiene una solución no trivial empleando el menor número de operaciones posibles

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \end{array}$$

26. Escribir la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones homogéneos

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & - & 9x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & - & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array}$$

27. Construye una matriz no nula, 3×3, A, tal que una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sea el vector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

28. Construye una matriz no nula, 3×3, A, tal que una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sea el vector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

29. Determina si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes

$$\mathbf{1}.\ \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2}.\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

30. Determinar si las columnas de las siguientes matrices forman un conjunto linealmente independiente

$$\mathbf{1}.\ \begin{pmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{2}.\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 \\ -3 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

31. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -x_1 + 3x_2, 3x_1 - 2x_2)$. Encontrar $\mathbf{x}$ tal que $T(\mathbf{x}) = (-1, 4, 9)$.

32. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 4x_1 + 5x_2)$. Encontrar $\mathbf{x}$ tal que $T(\mathbf{x}) = (3, 8)$.

33. Demuestra si las siguientes aplicaciones T son lineales y encuentra, en caso afirmativo, su matriz asociada

    a) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$

    b) $T(x_1, x_2) = (2x_2 - 3x_1, x_1 - 4x_2, 0, x_2)$

    c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3)$

    d) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 3x_3 - 4x_4, \quad (T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R})$

34. Determina si las transformaciones lineales del ejercicio anterior son inyectivas o suprayectivas.

35. Las matrices asociadas a dos transformaciones lineales dadas son

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 10 & -5 & 4 \\ 8 & 3 & -4 & 7 \\ 4 & -9 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 & -9 \\ 10 & 6 & 16 & -4 \\ 12 & 8 & 12 & 7 \\ -8 & -6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

    Decidir si las transformaciones son inyectivas o suprayectivas.