

Taller Iniciación Estadística Aplicada a la Investigación

Intervalos de confianza

Hugo J. Bello

2024/04

Definición de intervalo de confianza

Se llama **intervalo de confianza** a un par o números entre los cuales se estima que estará cierto valor desconocido respecto de un parámetro poblacional (como la media μ) con un determinado nivel de confianza.

- El **El parámetro desconocido**, siempre es un valor de la distribución teórica de los datos, como puede ser la media o varianza de la distribución.
- **Se trata de un procedimiento**. Se calcula a partir de datos de una muestra, y el valor desconocido es un parámetro poblacional.
- El **nivel de confianza** representa el porcentaje de intervalos que tomados de 100 muestras independientes distintas contienen en realidad el valor desconocido. Habitualmente se utiliza un nivel de confianza del 95%.

Gráfica

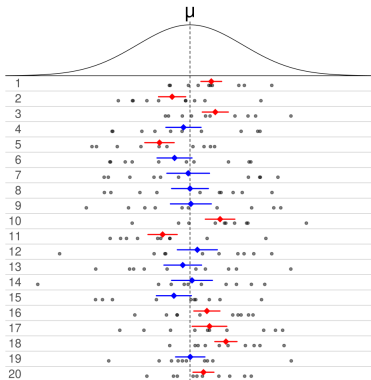


Figure: Cada fila es una muestra extraída de una distribución normal

Intervalos de confianza para la media con normalidad

Si tenemos una muestra x_1, \dots, x_n y sabemos que siguen una distribución normal, podemos preguntarnos el parámetro μ de la normal.

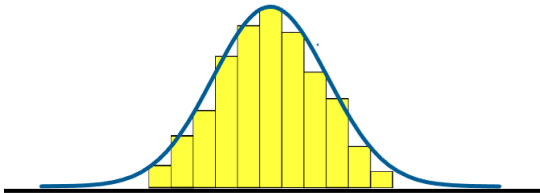


Figure: El parámetro μ es el lugar central

Intervalos de confianza para la media con normalidad

En esta situación podemos calcularlo utilizando

$$I = \left[\bar{x} - \frac{s \cdot t_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{s \cdot t_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right].$$

- \bar{x} es la media de la muestra
- s es la desviación típica de la muestra
- $100 \cdot (1 - \alpha)$ es el nivel de confianza ($95\% \leftrightarrow \alpha = 0.05$)
- $t_{\alpha/2}$ valor de la t de Student que deja delante de si un area de $\alpha/2$.

Student's t -distribution

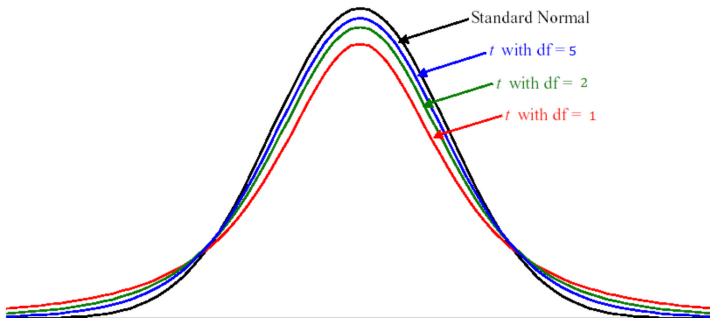


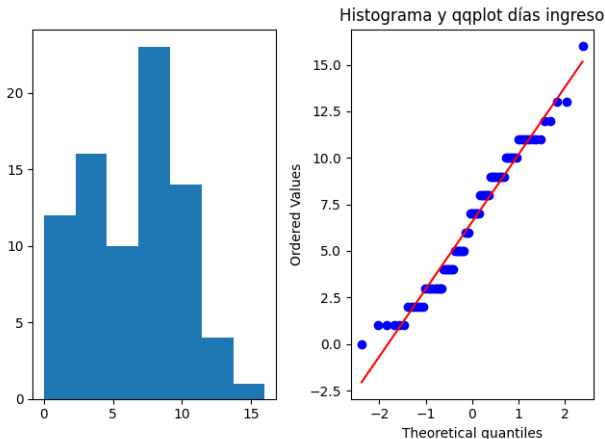
Figure: Distribución t de student

Regresemos al ejemplo

paciente	sexo	edad	grupo	días ingreso	resultados test
1	H	36.0	Placebo	10.0	0.44
2	H	43.0	Placebo	9.0	2.27
3	M	48.0	Placebo	10.0	2.1
4	M	57.0	Placebo	10.0	3.9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
77	H	19.0	Medicamento	3.0	9.58
78	M	47.0	Medicamento	1.0	2.54
79	H	38.0	Medicamento	5.0	3.12
80	H	23.0	Medicamento	6.0	5.48

Primero revisamos la normalidad

Nos interesamos en la variable **días de ingreso**



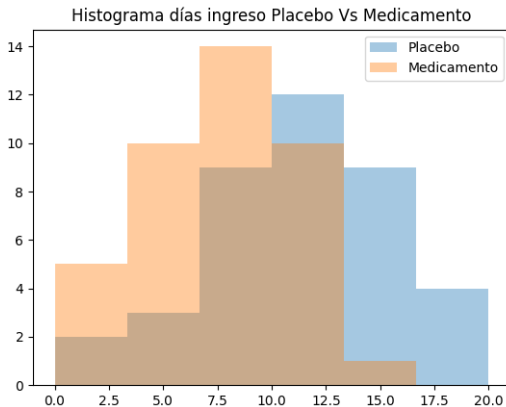


Figure: Histograma por tratamiento

Para tener una idea de si el tratamiento ha funcionado podemos utilizar intervalos de confianza sobre ambos grupos para la variable **días de ingreso**.

Si calculamos los intervalos de confianza:

- el grupo **placebo** tiene un intervalo de confianza para la media $(-0.08, 7.18)$ con un nivel de significatividad del 95%.
- el grupo **experimental** tiene un intervalo de confianza para la media de $(5.58, 13.56)$ con un nivel de significatividad del 95%.

Los datos parecen indicar que la media de días de ingresos es significativamente menor en el grupo placebo.

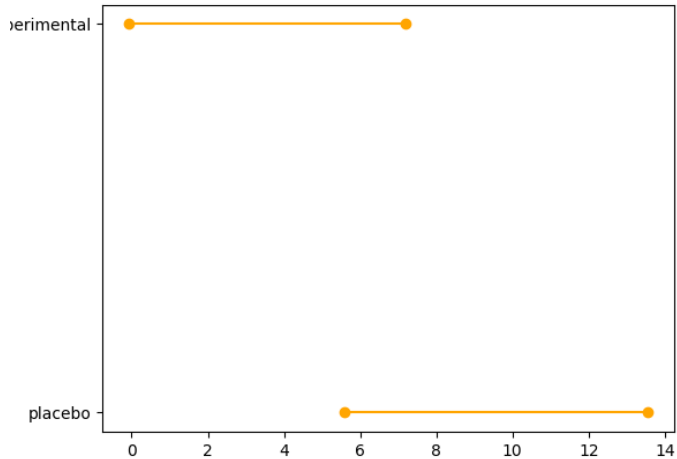


Figure: intervalos

Intervalos en casos de no normalidad: Bootstrap

En casos donde la muestra x_1, \dots, x_n no siga una distribución normal, **el método anterior no funciona**. En estos casos podemos calcular intervalos de confianza recuperando la normalidad a través del método bootstrap.

Consiste en lo siguiente:

- Elaboramos N_b muestras de la forma x_1^*, \dots, x_n^* a partir de la inicial usando extracciones aleatorias con reemplazamiento.
- Calculamos las medias de cada una de las muestras anteriores $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$.
- Calculamos el intervalo de confianza sobre las medias del paso anterior, en vez de sobre la muestra inicial. El proceso asegura que este intervalo aproximará el intervalo original buscado.

Diagrama del proceso bootstrap

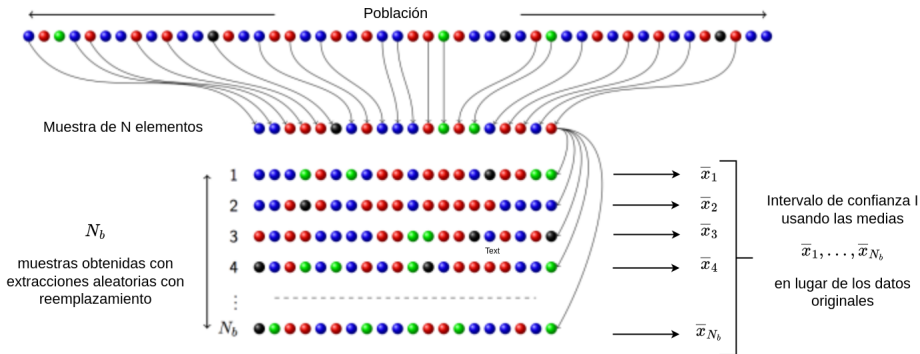


Figure: proceso

Bootstrap en el ejemplo anterior

Si queremos repetir el análisis anterior a la variable **resultados del test a pacientes** nos encontramos con que no sigue una normal:

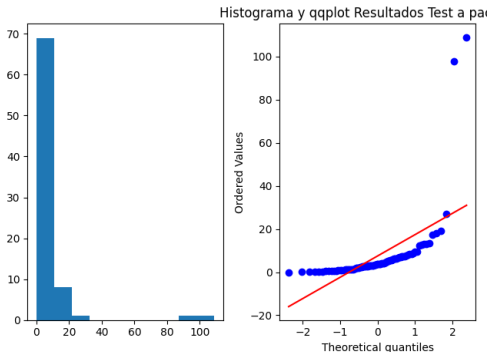


Figure: histograma y qqplot

Realizamos un bootstrap con $N_b = 40$ submuestras extraídas con reemplazamiento, y calculamos la media a cada submuestra. Obteniendo una *nueva muestra* compuesta por las medias calculadas. El histograma de esta nueva muestra es

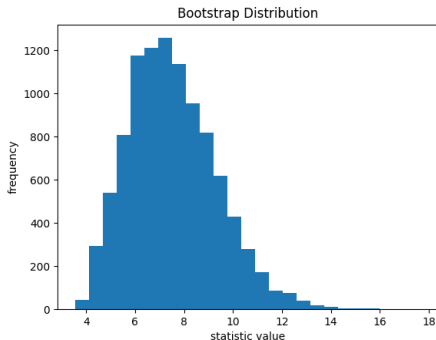


Figure: Histograma de la muestra de medias, recupera la normalidad

Si hacemos este proceso de bootstrap con los datos de cada uno de los grupos placebo y experimental para la variable **resultados del test**, obtenemos los siguientes intervalos de confianza para la media:

- el grupo **placebo** tiene un intervalo de confianza para la media de (2.94, 15.55) con un nivel de significatividad del 95%.
- el grupo **experimental** tiene un intervalo de confianza para la media de (6.15, 19.75) con un nivel de significatividad del 95%.

Como vemos se aprecian diferencias significativas.

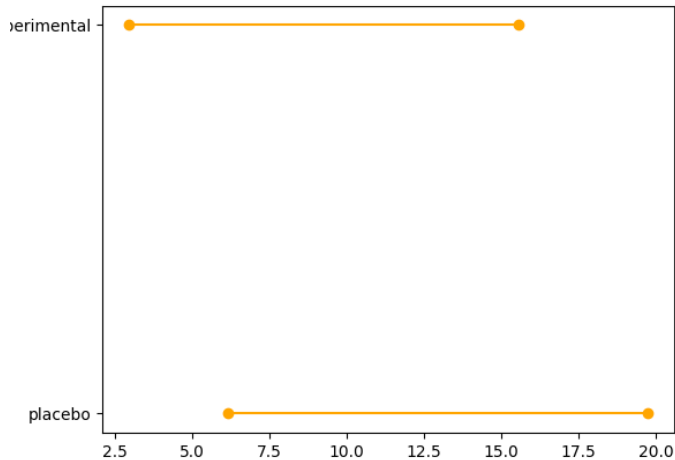


Figure: intervalos resultados test en pacientes

Ejemplo real

Veamos cómo se usan los intervalos en ejemplos reales. Lo siguiente es un fragmento del paper *Effect of Glutamine Supplementation on Muscular Damage Biomarkers in Professional Basketball Players*

2.5. Statistical Analysis

Statistical analyses were performed using the programming languages Python and R. Data were expressed using 95% intervals for the mean. Normal distribution was checked first by using the Shapiro–Wilk test. Then, a two-way repeated measure analysis of variance (ANOVA) was carried out by the Greenhouse–Geisser test to check the existence of an interaction effect between the supplement and the season training time. Finally, bivariate correlations between circulating enzymes were tested using the Pearson rank order correlation test. A value of $p < 0.05$ was considered as significant.

Figure: Métodos estadísticos explicados en el paper

Ejemplo real

Table 1. Blood muscle damage markers.

Parameter	B	G	P
LDH (U/L)	374.2 ± 29.81	384.4 ± 47.70	396.8 ± 36.90
AST (U/L)	33.38 ± 4.43	30.13 ± 5.08 *	33.08 ± 4.4
ALT (U/L)	24.8 ± 3.41	23.9 ± 2.72	25.42 ± 3.62
Urea (mg/dL)	43.8 ± 6.04	42.9 ± 5.98	42.58 ± 5.40
Creatinine (mg/dL)	1.25 ± 0.05	1.23 ± 0.04	1.29 ± 0.07
TP (g/L)	6.98 ± 0.56	7.08 ± 0.45	6.97 ± 0.49

B: baseline, G: glutamine (6 g/day for 20 days), P: placebo (20 days). Significant differences: * $p < 0.05$ comparing G vs. B. Abbreviations used: ALT (alanine aminotransferase), AST (aspartate aminotransferase), LDH (lactate dehydrogenase), TP (total proteins).

Figure: Tabla de intervalos en el paper

Ejemplo real

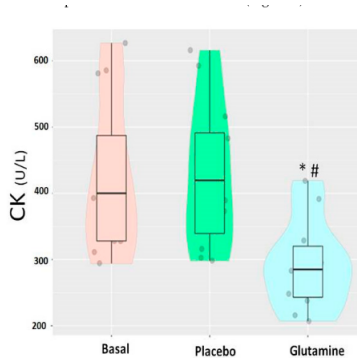


Figure: Gráficos