Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

Procesamiento Digital de Señales

Grupo 04

Proyecto 1: Espectros de sistemas discretos

Equipo 6
Gasperin Castelán Hugo Joshua
Sosa Corona Ángel Yoari

Fecha de entrega: 27 de Mayo 2022

Contenido

Introducción

El presente trabajo se muestra el proceso realizado para obtener la transformada discreta de Fourier de una función de transferencia formada por tres polos conjugados, se incluye el proceso teórico realizado para la obtención de esta, el diagrama de flujo propuesto para el diseño del programa y los resultados obtenidos de la implementación de este.

Objetivo

Con base en la ubicación de tres polos conjugados complejos en el plano Z de un sistema discreto, que se proponen de acuerdo con el número de equipo E_i:

- Los polos deben estar centrados en 15 $* E_i$
- La separación angular entre polos de cuatro grados.
- La magnitud entre de los polos debe ser diferente entre 0.95 < r < 0.98.

- Calcular: H(z) del sistema, H ($e^{j\omega}$) del sistema.
- Programar en lenguaje C para calcular |H(ω)| y ϕ(ω).}
- Graficar de |H(ω)| y ϕ(ω).

Desarrollo

1. H(z) del sistema.

Debido a que somos el equipo no.6, los polos deben de estar centrados en:

$$15 * E_i = 90°$$

Recordando que la separación angular entre los polos de ser de 4 grados y que la magnitud debe de ser diferente y entre 0.95 < r < 0.98, se proponen los siguientes valores:

$$P_1 = 0.96\ \angle 86° \qquad P_4 = P_1^* = 0.96\angle - 86°$$

$$P_2 = 0.965\ \angle 94° \qquad P_5 = P_2^* = 0.965\angle - 94°$$

$$P_3 = 0.97\ \angle 90° \qquad P_6 = P_3^* = 0.97\angle - 90°$$

Con lo anterior:

$$H(z) = \frac{z^6}{(z-P_1)(z-P_1^*)(z-P_2)(z-P_2^*)(z-P_3)(z-P_3^*)}$$

Analizando la expresión obtenida:

$$(z-P)(z-P^*) = z^2 - zP - zP^* + PP^*$$

Como $P = a + bj$ y $P^* = a - bj$:

$$(z-P)(z-P^*) = z^2 - z(a+bj) - z(a-bj) + (a+bj)(a-bj)$$

Desarrollando la expresión:

$$(z-P)(z-P^*) = z^2 - za + zbj - za - zbj + a^2 + abj - abj + b^2$$

$$(z-P)(z-P^*) = z^2 - 2za + a^2 + b^2$$

Remplazando en el $H(z)$:

$$H(z) = \frac{z^6}{(z^2 - 2za_1 + a_1^2 + b_1^2)(z^2 - 2za_2 + a_2^2 + b_2^2)(z^2 - 2za_3 + a_3^2 + b_3^2)} \quad (1)$$

2. Calcular H $(e^{j\omega})$ del sistema.

A partir de la expresión obtenida en el inciso anterior:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{6j\omega}}{(e^{2j\omega} - 2e^{j\omega}a_1 + a_1^2 + b_1^2)(e^{2j\omega} - 2e^{j\omega}a_2 + a_2^2 + b_2^2)(e^{2j\omega} - 2e^{j\omega}a_3 + a_3^2 + b_3^2)}$$

Recordando que:

$$e^{aj\omega} = \cos(a\omega) + jsen(a\omega)$$

Analizando los productos del denominador:

$$e^{2j\omega} - 2e^{j\omega}a + a^2b^2 = \cos(2\omega) + jsen(2\omega) - 2(\cos\omega + jsen\omega)a + a^2 + b^2$$

$$e^{2j\omega} - 2e^{j\omega}a + a^2b^2 = \cos(2\omega) + jsen(2\omega) - 2acos\omega - 2asen\omega + a^2 + b^2$$

$$e^{2j\omega} - 2e^{j\omega}a + a^2b^2 = \cos(2\omega) - 2acos\omega + a^2 + b^2 + j(sen(2\omega) - 2asen\omega)$$

Donde se puede apreciar que la parte real corresponde a:

$$R = \cos(2\omega) - 2acos\omega + a^2 + b^2$$

y la parte imaginaria corresponde a:

$$I = sen(2\omega) - 2asen\omega$$

Con lo que:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\cos(6\omega) + jsen(6\omega)}{(R_1 + jI_1)(R_2 + jI_2)(R_3 + jI_3)}$$

Desarrollando la expresión:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\cos(6\omega) + jsen(6\omega)}{(R_1 + jI_1)(R_2 + jI_2)(R_3 + jI_3)}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\cos(6\omega) + jsen(6\omega)}{(R_1R_2 - I_1I_2 + j(R_1I_2 + R_2I_1))(R_3 + jI_3)}$$

En el primer producto podemos ver que la parte real corresponde a:

$$R_{22} = R_1R_2 - I_1I_2$$

Y que la parte imaginaria corresponde a:

$$I_{22} = R_1I_2 + R_2I_1$$

Reemplazando:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\cos(6\omega) + jsen(6\omega)}{(R_{22} + jI_{22})(R_3 + jI_3)}$$

Desarrollando el producto del denominador:

$$(R_{22} + jI_{22})(R_3 + jI_3) = R_{22}R_3 - I_{22}I_3 + j(I_{22}R_3 + I_3R_{22})$$

De igual forma podemos ver que la parte real corresponde a:

$$R_{31} = R_{22}R_3 - I_{22}I_3$$

Y que la parte imaginaria corresponde a:

$$I_{31} = I_{22}R_3 + I_3R_{22}$$

Reemplazando:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\cos(6\omega) + jsen(6\omega)}{(R_{33} + jI_{33})}$$

Multiplicando por el conjugado:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\cos(6\omega) + sjen(6\omega)}{(R_{33} + jI_{33})}(\frac{(R_{33} - jI_{33})}{(R_{33} - jI_{33})})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{(\cos(6\omega) + jsen(6\omega))(R_{33} - jI_{33})}{R_{33} + I_{33}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{(\cos(6\omega) + jsen(6\omega))(R_{33} - jI_{33})}{R_{33} + I_{33}}$$

Desarrollando el producto del numerador:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{R_{33}\cos(6\omega) + I_{33}sen(6\omega) + j(R_{33}sen(6\omega) - I_{33}\cos(6\omega))}{R_{33} + I_{33}}$$

Separando parte imaginaria y real:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{R_{33}\cos(6\omega) + I_{33}sen(6\omega)}{R_{33} + I_{33}} + \frac{j(R_{33}sen(6\omega) - I_{33}\cos(6\omega))}{R_{33} + I_{33}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{R_{33}\cos(6\omega) + I_{33}sen(6\omega)}{R_{33} + I_{33}} + \frac{j(R_{33}sen(6\omega) - I_{33}\cos(6\omega))}{R_{33} + I_{33}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{AR_{33} + BI_{33}}{R_{33} + I_{33}} + \frac{j(BR_{33} - AI_{33})}{R_{33} + I_{33}} \tag{2}$$

Donde $A = \cos(6\omega)$ y $B = sen(6\omega)$.

Finalmente obtenemos que la magnitud esta determinada por la siguiente expresión:

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{R^2 + I^2}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\left(\frac{AR_{33} + BI_{33}}{R_{33} + I_{33}}\right)^2 + \left(\frac{BR_{33} - AI_{33}}{R_{33} + I_{33}}\right)^2} \tag{3}$$

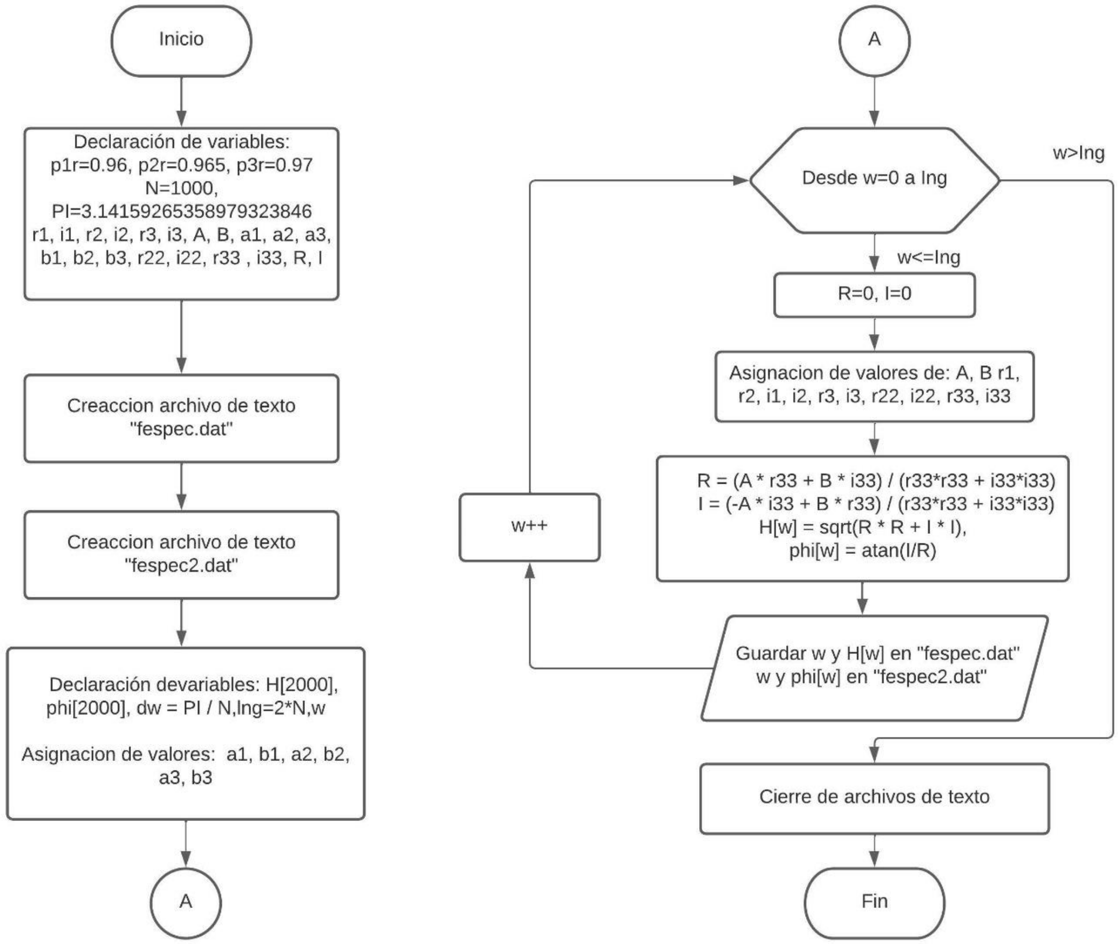
y la fase está determinada por la siguiente expresión:

$$\emptyset(\omega) = arctang\left(\frac{I}{R}\right)$$

$$\emptyset(\omega) = arctang\left(\frac{BR_{33} - AI_{33}}{AR_{33} + BI_{33}}\right) \tag{4}$$

3. Programación en lenguaje C para calcular |H(ω)| y ϕ(ω).

La programación se hizo a partir del siguiente diagrama de flujo:



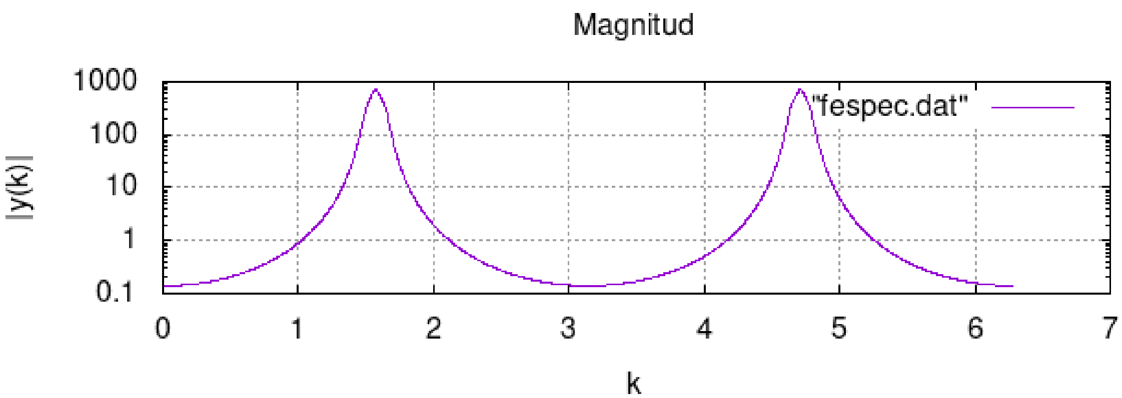
Código en c:

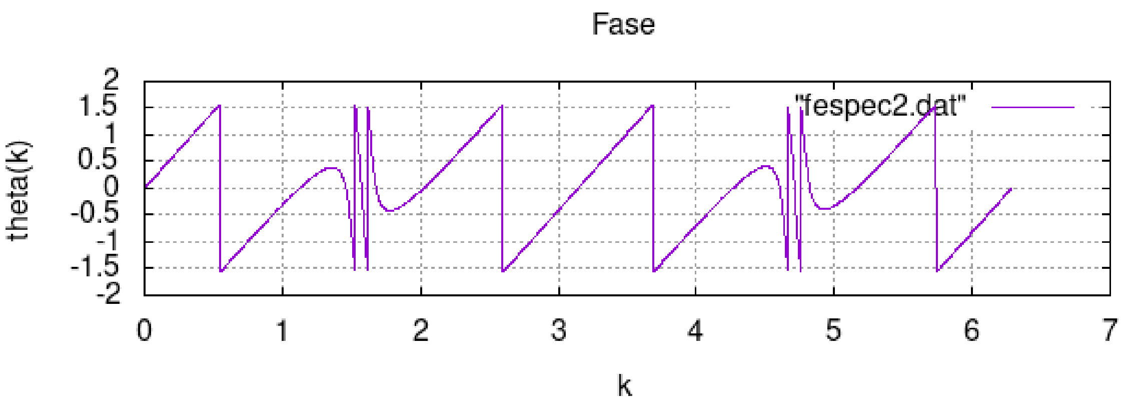
```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

void main(void)
{
   float p1r = 0.96;                    //MAGNITUD DEL POLO 1
   float p2r = 0.965;                   //MAGNITUD DEL POLO 2
   float p3r = 0.97;                    //MAGNITUD DEL POLO 3

//**********DECLARACION DE VARIABLES*************
   float r1, i1, r2, i2,r3,i3, A, B;
   float a1,a2,a3,b1,b2,b3;
   float r22, i22, r33, i33;
   float R, I;

   int N = 1000;
   double PI = 3.14159265358979323846;
   FILE * flee;              //APUNTADOR PARA PRIMER ARCHIVO DE TEXTO
   FILE * flee2;                        //APUNTADOR PARA SEGUNDO ARCHIVO DE
TEXTO
   flee = fopen ("fespec.dat", "w+");    //CREACION DEL ARCHIVO PARA MAGNITUD
   flee2 = fopen("fespec2.dat", "w+"); //CREACIOON DEL ARCHIVO PARA FASE
   int lng=2*N;                         //DURACION DEL CICLO

//**********ASIGNACION DE VALORES*************
   a1=0.96*cos(86*PI/180);
   b1=0.96*sin(86*PI/180);
   a2=0.965*cos(94*PI/180);
   b2=0.965*sin(94*PI/180);
   a3=0.97*cos(90*PI/180);
   b3=0.97*sin(90*PI/180);
   float H[2000];                       //ARREGLO DE MAGNITUD
   float phi[2000];                     //ARREGLO DE FASE
   float dw = PI / N;

//**********RUTINA PARA OBTENER VALORES DE MAGNITUD Y FASE*************
   for (int w = 0; w <= lng; w++)
   {
      R = 0;
      I = 0;
      A = cos(6 * w * dw);
      B = sin(6 * w * dw);
      r1 = cos(2 * w * dw) -2*a1*cos(w*dw)+a1*a1+b1*b1;
      i1 = sin(2 * w * dw)-2*a1*sin(w*dw);
      r2 = cos(2 * w * dw) -2*a2*cos(w*dw)+a2*a2+b2*b2;
      i2 = sin(2 * w * dw)-2*a2*sin(w*dw);
      r3 = cos(2 * w * dw) -2*a3*cos(w*dw)+a3*a3+b3*b3;
      i3 = sin(2 * w * dw)-2*a3*sin(w*dw);
      r22 = r1 * r2 - i1*i2;
```

```
        i22 = i1 * r2 + r1 * i2;
        r33 = r22 * r3 - i22 * i3;
        i33 = i22 * r3 + r22 * i3;
        R = (A * r33 + B * i33) / (r33*r33 + i33*i33);
        I = (-A * i33 + B * r33) / (r33*r33 + i33*i33);

        H[w] = sqrt(R * R + I * I);
        phi[w] = atan(I/R);
//GUARDA VALORES DE W,MAGNITUD Y FASE EN LOS ARCHIVOS DE TEXTO
        fprintf(flee, "%6.6f \t %6.6f \n", w*dw,H[w]);
        fprintf(flee2, "%6.6f \t %6.6f \n", w*dw, phi[w]);
    }
    fclose(flee);                    //CIERRA PRIMER ARCHIVO DE TEXTO
    fclose(flee2);                   //CIERRA SEGUNDO ARCHIVO DE TEXTO
    // system("gnuplot -p grafgnuplot.gp ");
}
```

4. Graficas de |H(ω)| y φ(ω).

Graficas realizadas en GNUPLOT:





Código realizado para obtener graficas:

```
# GRAFICA DOS GRAFICAS EN UNA VENTANA
set term png
set output  "magyfase.png"

set autoscale
set multiplot layout 2,1 rowsfirst
set grid
set style data lines

#------------- Graf 1 ----------------
set title "Magnitud"
#unset label
set logscale y 10
set xlabel   "k"
set ylabel   "|y(k)|"
plot  "fespec.dat"
unset xlabel
unset ylabel
unset title

unset logscale
#------------- Graf 2 ----------------
set title "Fase"
# unset label
set xlabel   "k"
set ylabel   "theta(k)"
plot  "fespec2.dat"
unset xlabel
unset ylabel
unset title
#pause(3)
#unset multiplot

#
```

Conclusión

Con los resultados obtenidos podemos decir que se cumplieron correctamente los objetivos de este proyecto, además de que identificamos que nuestra función de transferencia corresponde a un filtro digital pasa banda, esto ya era de esperar por la localización de los polos. Por último, hay que mencionar que es importante que podamos plasmar nuestros conocimientos en programación, en este caso fue en el lenguaje de programación "c", ya que esto es lo que nos permite realizar implementaciones reales con los conceptos que hemos aprendido.