

Projet de finance - Pricing de call - Modèle CEV

Nicolas Podvin et Hugo Laurençon

05/06/2019

Contents

1	Présentation du modèle et pricing du call	1
2	Calcul des limites du prix du call	3
3	Calcul du Véra et inversion de la fonction donnant le prix du call	5
4	Implémentation du smile de volatilité implicite	6
5	Code du programme	8

1 Présentation du modèle et pricing du call

Considérons $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace probabilisé sous lequel (W_t) est un mouvement brownien. On suppose que l'actif sans risque évolue avec un taux instantané r constant, et que l'évolution de l'actif risqué est régit par :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t \quad (1)$$

En actualisant, et en posant $d\tilde{W}_t = dW_t + \frac{\mu-r}{\sigma} \sqrt{S_t} dt$, on a :

$$d\tilde{S}_t = \sigma e^{-\frac{rt}{2}} \sqrt{\tilde{S}_t} d\tilde{W}_t \quad (2)$$

Sous la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$, par le théorème de Girsanov [2], on vérifie que \tilde{S}_t est une martingale, et donc que l'on pourra obtenir une couverture du Call Européen sous $\tilde{\mathbb{P}}$:

$$\gamma(T, K) = \tilde{E}[e^{-rT} (S_T - K)^+] \quad (3)$$

Cependant, à cause de la racine dans l'expression (2), on ne peut pas obtenir une expression explicite pour S_t , et donc la démarche classique "à la Black-Scholes" ne marche pas directement.

Pour palier à ce problème, on a considéré un autre processus intimement lié au précédent, de loi connue. On dispose donc du résultat suivant, dont la preuve peut être trouvée dans [1] :

$$(S_t) \text{ sous } \tilde{P} \stackrel{\text{loi}}{=} (Y_t^{0,r}) \text{ sous } P \quad (4)$$

Avec $(Y_t^{0,r})$ définit par :

$$Y_t^{0,r} = e^{rt} X_{\tau_t^{0,r} \wedge \zeta}^0 \quad (5)$$

ζ étant le temps d'atteinte de 0, et τ un changement d'origine des temps déterministe :

$$\tau^{0,r} = \frac{\sigma^2}{4r} (1 - e^{-2rt}) \quad (6)$$

L'intérêt de toute ces transformations est que le processus (X_t^δ) est un processus de Bessel carré, de loi connue (loi du χ^2 décentrée).

En effet, par (4), on a le résultat suivant que l'on utilisera fortement pour le calcul du prix du Call : pour une fonction f mesurable et suffisamment régulière :

$$\tilde{E}[f(S_t)] = E[f(Y_t^{0,r})] \quad (7)$$

On peut donc démarrer le calcul du prix du Call de Strike K et d'échéance T , on a en séparant le cas où 0 est atteint avant l'échéance, sachant qu'on part d'une valeur initiale S_0 :

$$\gamma(T, K) = E[e^{-rT} (X_{\tau_t^{0,r}} - K)^+ \mathbb{1}_{\{\zeta > t\}}] + e^{-rT} \tilde{P}(\zeta \leq t) \times 0 \quad (8)$$

Par une propriété liant les processus de Bessel $X^{(0)}$ et $X^{(4)}$, dont la preuve est donné dans [1], par régularité de la fonction $x \rightarrow (x - K)^+$, on peut se débarrasser de l'indicatrice :

$$E[(X_{\tau_T^{0,r}}^{(0)} - K)^+ \mathbb{1}_{\{\zeta > T\}}] = S_0 \times E[(X_{\tau_T^{0,r}}^{(4)} - K)^+ \frac{1}{X_{\tau_T^{0,r}}^{(4)}}] \quad (9)$$

On a alors :

$$\gamma(T, K) = S_0 \times P[X_{\tau_T^{0,r}}^{(4)} \geq e^{-rT} K] - e^{-rT} K S_0 \times E[\frac{1}{X_{\tau_T^{0,r}}^{(4)}} \mathbb{1}_{\{X_{\tau_T^{0,r}}^{(4)} \geq e^{-rT} K\}}] \quad (10)$$

En posant :

$$\begin{aligned} g(u, v) &= \frac{v^{u-1}}{\Gamma(u)} e^{-v} \\ G(u, v) &= \int_v^\infty g(u, s) ds \\ z &= \frac{2r}{e^{rT} - 1} \frac{S_0 e^{rT}}{\sigma^2} \\ w &= \frac{2r}{e^{rT} - 1} \frac{K}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (11)$$

On a, comme la loi des $X_{\tau_T^{0,r}}^{(4)}$ est connue :

$$P[X_{\tau_T^{0,r}}^{(4)} \geq e^{-rT}K] = P[V^{(4,2z)} \geq 2w] = \sum_{n \geq 1} g(n, z)G(n+1, w) \quad (12)$$

Et d'autre part, après calculs :

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{X_{\tau_T^{0,r}}^{(4)}} \mathbb{1}_{\{X_{\tau_T^{0,r}}^{(4)} \geq e^{-rT}K\}}\right] &= \frac{1}{\tau_T^{0,r}} E\left[\frac{1}{V^{(4,2z)}} \mathbb{1}_{\{V^{(4,2z)} \geq 2w\}}\right] \\ &= \frac{1}{S_0} \sum_{n \geq 1} g(n+1, z)G(n, w) \end{aligned} \quad (13)$$

On obtient donc la formule suivante pour le Call Européen de maturité T et de Strike K :

$$\begin{aligned} \gamma(T, K) &= S_0 \sum_{n \geq 1} g(n, z)G(n+1, w) - Ke^{rT} \sum_{n \geq 1} g(n+1, z)G(n, w) \\ &= S_0 N_1(z, w) - Ke^{rT} N_2(z, w) \end{aligned} \quad (14)$$

avec N_1 et N_2 définis comme les séries ci-dessus.

2 Calcul des limites du prix du call

On s'intéresse donc au comportement asymptotique de N_1 et N_2 lorsque la volatilité σ tend vers 0 ou $+\infty$.

Limite en $\sigma \longrightarrow \infty \iff z, w \longrightarrow 0$

Pour N_1 , on voit que le terme générale de la série est :

$$\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} e^{-z} \int_w^\infty \frac{s^n e^{-s}}{n!} ds \quad (15)$$

Si $n \geq 2$, le terme générale tend vers 0, et on a pour $n = 1$, par intégration par parties :

$$1 \times \int_0^\infty s e^{-s} = 0 + \int_0^\infty s^{-s} = 1 \quad (16)$$

Ce qui donne la convergence vers 1 de la série par convergence normale de la série en question.

Pour N_2 , de manière similaire, on a pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{z^n}{(n)!} e^{-z} \int_w^\infty \frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-1)!} ds \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 0 \quad (17)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} N_1 &\xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 1 \\ N_2 &\xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Et ainsi :

$$\gamma(T, K) \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} S_0 \quad (19)$$

Limite en $\sigma \rightarrow 0 \iff z, w \rightarrow \infty$

Pour calculer cette limite, nous n'avons pas trouvé d'exemples dans la littérature. La méthode que nous proposons est peut-être un peu compliquée.

On utilise les fonctions de Bessel [3] pour calculer la limite, car on dispose d'équivalents explicites de ces fonction en $+\infty$. Rappelons l'expression d'une fonction de Bessel :

$$J_p(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \quad (20)$$

Par des transformations élémentaires, il vient :

$$N_1 = \int_w^\infty -i \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \sqrt{s} e^{-s} \times J_1(2i\sqrt{zs}) ds \quad (21)$$

Dont l'équivalent quand $\sigma \rightarrow 0$ est, par le développement asymptotique de la fonction de Bessel. En effet, on a :

$$J_1(z) \sim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-i(z - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (22)$$

En utilisant le résultat classique :

$$f \sim_\infty g \implies \int_x^\infty f \sim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty g \quad (23)$$

On obtient dans notre cas :

$$N_1 \sim \int_w^\infty -i \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \sqrt{s} e^{-s} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi 2i\sqrt{zs}}} \times e^{-i(2i\sqrt{zs} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} ds \quad (24)$$

Après simplification :

$$N_1 \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi}} z^{-\frac{3}{4}} \int_w^\infty e^{(-z + 2\sqrt{zs} - s)} s^{\frac{1}{4}} ds \quad (25)$$

On effectue un premier changement de variable pour rendre les bornes indépendants de σ en posant $y = \frac{s}{z}$ et $t = \frac{Ke^{-rT}}{S_0}$:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_t^\infty e^{-z(\sqrt{y}-1)^2} y^{-\frac{1}{4}} \sqrt{z} dy \quad (26)$$

En posant le changement de variable $s = (1 + \frac{y}{\sqrt{z}})^2$, on obtient :

$$N_1 \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{z}(\sqrt{t}-1)}^{\infty} e^{-w^2} (1 + \frac{w}{\sqrt{z}})^{\frac{3}{2}} dw \quad (27)$$

Par théorème de convergence dominée, on voit que 3 options se présentent :

- Si $t < 1$, on se retrouve à intégrer une gaussienne sur \mathbb{R}
- Si $t = 0$ (ensemble négligeable car S est une variable continue), on intègre une gaussienne sur la moitié de son domaine
- Si $t > 1$, une domination montre que la limite vaut 0

On a donc presque sûrement :

$$N_1 \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{1}_{\{S_0 \geq K e^{-rT}\}} \quad (28)$$

Pour N_2 , une démarche similaire donne son expression avec les fonctions de Bessel :

$$N_2 = \int_w^{\infty} -i \frac{e^{-z}}{\sqrt{s}} \sqrt{z} e^{-s} \times J_1(2i\sqrt{zs}) ds \quad (29)$$

En suivant la même démarche, il vient :

$$N_2 \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_w^{\infty} s^{-\frac{3}{4}} e^{(-z+2\sqrt{zs}-s)} z^{\frac{1}{4}} ds \quad (30)$$

Avec les changements de variables précédemment introduits, on obtient le même développement asymptotique que (26).

On a donc également presque sûrement :

$$N_2 \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{1}_{\{S_0 \geq K e^{-rT}\}} \quad (31)$$

Ainsi,

$$\gamma(T, K) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} (S_0 - K e^{-rT})^+ \quad (32)$$

3 Calcul du Véga et inversion de la fonction donnant le prix du call

Pour effectuer le calcul d'inversion, on s'est rendue compte que les formules précédentes étaient peu exploitables directement. On va donc revenir sur l'expression du prix du Call, en essayant de le voir, comme pour le modèle de Black-Scholes, d'un point de vue plus probabiliste, en tentant de reconnaître des fonctions de répartitions de lois connues. De part les calculs de la premières sections, on voit que la loi du χ^2 décentrée va naturellement apparaître.

En revenant à (11), on définit la densité de probabilité d'une loi du χ^2 à k degrés de liberté, décentrée d'un paramètre a par ;

$$f(x; k, a) = \frac{1}{2} e^{-\frac{(x+a)}{2}} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{(k-2)}{4}} \times I_{\frac{k-2}{2}}(\sqrt{ax}) \quad (33)$$

Avec $I_b(x) = i^{-b} \times J_b(ix)$ la fonction de Bessel modifiée de paramètre b .
On a alors après calcul :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} g(n, z) G(n+1, w) &= F(2w; 4, 2z) \\ \sum_{n \geq 1} g(n+1, z) G(n, w) &= 1 - F(2z; 2, 2w) \\ F(x; k, a) &:= \int_x^\infty f(s; k, a) ds \end{aligned} \quad (34)$$

Le prix du call s'exprime alors :

$$\gamma(T, K) = S_0 \times F(2w; 4, 2z) - K e^{-rT} \times (1 - F(2z; 2, 2w)) \quad (35)$$

On a donc la formule pour le Vega, après calcul :

$$Vega = \partial_\sigma \gamma(T, K) = -\frac{4z}{\sigma} \times (S_0 f(2w; 6, 2z) - K e^{-rT} f(2z; 2, 2w)) \quad (36)$$

On a par le calcul :

$$S_0 f(2w; 6, 2z) - K e^{-rT} f(2z; 2, 2w) = \frac{1}{2} e^{-z-w} \left(\frac{w}{z}\right) \times (I_2(2\sqrt{zw}) - I_0(2\sqrt{zw})) \quad (37)$$

Et par les propriétés des fonctions de Bessel modifiées, comme on a :

$$\forall x \geq 0 \quad I_2(x) < I_0(x) \quad (38)$$

On a bien que le Vega est toujours strictement positif. Ainsi, on obtiendra bien un smile des volatilités implicite.

4 Implémentation du smile de volatilité implicite

Nous traçons dans cette partie le smile de volatilité implicite.

Pour cela, nous avons récupéré des données de calls sur NIFTY émis pour une même date de départ, à laquelle $S_0 = 10321.75$, avec une même maturité $T = 48j$. Le taux d'intérêt journalier est $r = 0.05/365$. Seule le strike K change, passant de 10100 à 11500 par pas de 100, cela ayant pour conséquence de faire changer les prix observés des calls en fonction de K .

Pour chaque strike K , nous avons trouvé par dichotomie le $\sigma(T, K)$ tel que la fonction du prix du call pour le modèle CEV appliquée en K et en σ donne le même prix que le prix observé sur le marché.

Nous traçons ensuite $\sigma(T, K)$ en fonction de K pour obtenir le smile de volatilité implicite.

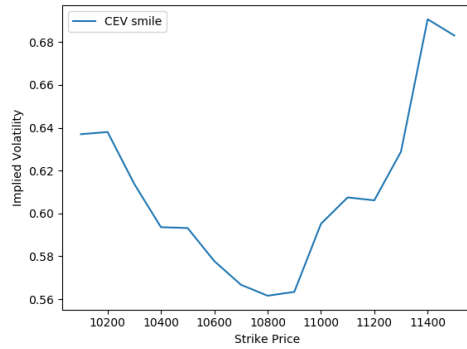


Figure 1: Smile de volatilité implicite dans le modèle CEV

Nous vérifions aussi le comportement de notre fonction donnant le prix du call en fonction de σ pour un K fixé, et notamment nous vérifions bien que les limites lorsque $\sigma \rightarrow 0$ et $\sigma \rightarrow \infty$ sont respectivement $(S_0 - Ke^{-rT})^+$ et S_0 .

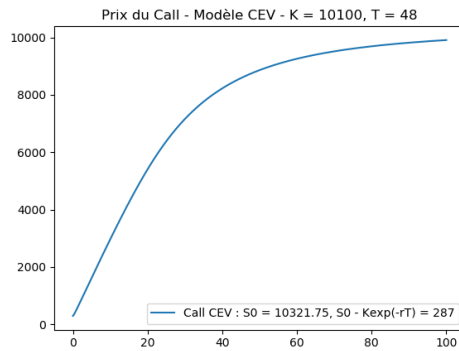


Figure 2: Prix du call dans le modèle CEV en fonction de σ

Date	Expiry	Strike Price	Price	Underlying Value	Time to Expiry
10-11-2017	28-Dec-17	10100	357.25	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	10200	288	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	10300	220	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	10400	161.45	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	10500	117.7	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	10600	79.25	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	10700	51	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	10800	31.8	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	10900	19.65	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	11000	14.6	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	11100	9.5	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	11200	5.4	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	11300	3.8	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	11400	4	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	11500	2.15	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	11600	0	10321.75	48
10-11-2017	28-Dec-17	11700	0	10321.75	48

Données NIFTY que nous avons utilisées.

5 Code du programme

```

1  # Nicolas Podvin et Hugo Laurencon
2  # 05/06/19
3  # CEV model - Smile
4
5  ## Importation des modules
6  import pandas as pd
7  import numpy as np
8  from numpy import exp
9  import scipy.stats as ss
10 import matplotlib.pyplot as plt
11
12 # Constantes
13 S0 = 10321.75 # Valeur initiale de l'actif
14 T = 48 # Maturite (en jour)
15 r = 0.05/365 # Taux d'actualisation journalier
16
17 # Chargement des donnees sur les calls sur NIFTY
18 nifty = pd.read_csv("NIFTY.csv")
19 strike = nifty.iloc[:, 'Strike'].tolist()
20 price = nifty.iloc[:, 'Price'].tolist()
21
22 # Dichotomie

```



```

23 def solve_dicho(f,k,a,b,e):
24     debut = a
25     fin = b
26     # Calcul de la longueur de [a,b]
27     ecart = b-a
28     while ecart>e:
29         # Calcul du milieu
30         m = (debut+fin)/2
31         if f(m)>k:
32             # La solution est inferieure a m
33             fin = m
34         else:
35             # La solution est superieure a m
36             debut = m
37         ecart = fin-debut
38     return m
39
40 ## CEV Model
41
42 def f_chi2(x,k,a):
43     return ss.ncx2.pdf(x,k,a)
44
45 def Q(x,k,a):
46     return 1 - ss.ncx2.cdf(x,k,a)
47
48 # Prix du call en fonction de sigma et K
49 def f_CEV(sigma,K):
50     m = exp(r*T)
51     k = (2*r)/((sigma**2)*(m-1))
52     x = m*k*S0
53     y = k*K
54     return S0*Q(2*y,4,2*x)-K*exp(-r*T)*(1-Q(2*x,2,2*y))
55
56 # Vega du prix du call en fonction de sigma et K
57 def vega_CEV(sigma,K):
58     m = exp(r*T)
59     k = (2*r)/((sigma**2)*(m-1))
60     x = m*k*S0
61     y = k*K
62     return (-4*S0*(np.sqrt(S0)/sigma**2))*
63         (S0*f_chi2(2*y,6,2*x)-
64         K*exp(-r*T)*f_chi2(2*x,2,2*y))
65
66 # Calcul des volatilities implicites en fonction des
67 # strikes et des prix observes
68 # Renvoie la liste des vol imp, K,P sont des listes

```

```

69 def implicit_vol_CEV(K,P):
70     vol = []
71     model_prices = []
72     tol = 0.000001
73     assert len(P)==len(K)
74     for i in range(len(P)):
75         sigma_opt = solve_dicho(lambda x:f_CEV(x,K[i]),
76                                 P[i],0,1,tol)
77         vol.append(sigma_opt)
78         model_prices.append(f_CEV(sigma_opt,K[i]))
79     error = [model_prices[i]-P[i] for i in range(len(P))]
80     print('error :_',error)
81     return vol
82
83 # Affichage graphique du smile de volatilité implicite
84 imp_vol_CEV = implicit_vol_CEV(strike,price)
85 plt.figure()
86 plt.plot(strike, imp_vol_CEV, label="CEV_smile")
87 plt.legend()
88 plt.ylabel('Implied_Volatility')
89 plt.xlabel('Strike_Price')
90 plt.show()

```

References

- [1] Shirakawa Delbaen. *A Note on Option Pricing for the Constant Elasticity of Variance Model*. 2002.
- [2] Lapeyre Bernard Lamberton, Damien. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipse Marketing, 2010.
- [3] Abramowitz Milton. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publication, 1974.