Exercice 1 (CCP MP 2015)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $R_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(a) Quelle est l'interprétation géométrique de $R_n(f)$? Illustrer par un dessin soigné.

(b) Montrer que si f est de classe C^1 sur $[0,1]$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

(c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3n^2+k^2}$.

Exercice 2 (CCP MP 2015)

(a) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégral.

(b) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(c) Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont f est solution et en déduire une expression simple de f. On pourra utiliser l'identité $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3 (CCP MP 2015)

Soient E un espace vectoriel réel et f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}$.

(a) Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker} f$.

(b) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$.

(c) Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} g$.

Exercice 4 (CCP MP 2015)

Dans $\mathbb{R}^3$, soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$. On note π la projection sur P parallèlement à D.

(a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

(b) Déterminer la matrice de π dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de π est diagonale.

Exercice 5 (CCP MP 2015)

Soit E un espace euclidien (en particulier, E est de *dimension finie*).

(a) Si A est un sous-espace vectoriel de E, montrer que $(A^{\perp})^{\perp} = A$.

(b) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

(c) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, montrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice 6 (CCP MP 2015)

Une personne effectue n appels téléphoniques vers n personnes différentes. À chaque appel, la probabilité de joindre son correspondant est $p \in [0,1]$, les réussites aux différents appels étant indépendantes les unes des autres. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants joints.

(a) Donner la loi de X.

Les $n - X$ personnes n'ayant pas pu être jointes sont à nouveaux appelées dans les mêmes conditions que la première série d'appel. On note Y le nombre de personne jointes avec succès au cours de cette deuxième série d'appel.

(b) Si $i \in \{0,1,\dots,n\}$ et $k \in \mathbb{N}$ déterminer $P(Y=k|X=i)$.

(c) Montrer que $X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

(d) Calculer l'espérance de $X+Y$.

Exercice 7 (CCP MP 2015)

Soient $N \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0,1[$, on note $q = 1-p$. On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_N$ définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes et suivant toutes une loi géométrique de paramètre p. On note $Y = \displaystyle\min_{1\le i\le N} X_i$ la variable aléatoire définie par $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \displaystyle\min_{1\le i\le N}(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_N(\omega))$.

(a) Si $i \in \{1,2,\dots,N\}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $P(X_i \le n)$ et $P(X_i > n)$.

(b) Si $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y = n)$.

(c) Prouver que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 8 (CCP MP 2015)

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Si on lance un dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 est 1/2.

(a) Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'évènements.

(b) On choisit un dé au hasard parmi les 100, on le lance et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce soit un dé pipé ?

(c) On choisit un dé au hasard parmi les 100, on le lance n fois et on obtient que des 6. Quelles est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

(d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 9 (CCP MP 2015)

On pourra utiliser sans justification que pour tout $q \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x \in]-1,1[$, on a $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

On se donne $p \in]0,1[$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

(b) Montrer que $1+Y$ suit une loi géométrique et en déduire son espérance.

(c) Déterminer la loi de X.

Exercice 10 (Centrale PC 2011)

Soient $a < 0$, $b > 0$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions définies sur $]a,b[$, à valeurs réelles, de classe C^∞ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$ sur $]a,b[$.

(a) L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de $C^\infty(]a,b[)$? Si f et g sont des éléments de $\mathcal{A}$, a-t-on $fg \in \mathcal{A}$?

Dans la suite, on fixe un élément $f \in \mathcal{A}$ et pour $x \in]a,b[$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $R_n(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

(b) Justifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ est croissante sur $]0,b[$.

(c) Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ est croissante sur $]0,b[$.

(d) En déduire que si $0 \leq x < y < b$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq R_n(x) \leq f(y)\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1}$.

(e) Justifier l'existence d'un réel r strictement positif tel que f soit développable en série entière sur $]-r,r[$.

Exercice 11 (Centrale PC 2012)

Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, on note $u_{n,p} = \dfrac{1}{p^n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\left(1+\frac{k}{p}\right)^{1/n}\right)^n$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p}\right)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,p}\right)$.

Exercice 12 (Centrale PC 2012)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note E l'ensemble des fonctions continues définies sur $[a,b]$ à valeurs strictement positives. On note Φ l'application définie sur E par

$$\Phi(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t).}$$

Déterminer $m = \inf\limits_{f\in E} \Phi(f)$ et $M = \sup\limits_{f\in E} \Phi(f)$ et éventuellement les fonctions pour lesquelles ces extrema sont atteints.

Exercice 13 (Centrale PC 2012)

Soient $n \geq 1$ et M et N deux matrices d'ordre n et de rang 1 telles que $\mathrm{Ker}M = \mathrm{Ker}N$ et $\mathrm{Im}M = \mathrm{Im}N$.

(a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda N$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $MAM = \alpha M$.

Exercice 14 (Centrale PC 2012)

On munit $\mathbb{R}^{2n}$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ antisymétrique.

(a) Montrer que f^2 est diagonalisable. Que peut-on dire du signe des valeurs propres de f^2 ?

(b) Soit x un vecteur propre de f^2. Montrer que $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ et $(\mathrm{Vect}(x,f(x)))^\perp$ sont stables par f.

(c) On suppose de plus que f est inversible. Montrer que l'on peut trouver une base de $\mathbb{R}^{2n}$ telle que la matrice de f dans cette base soit

$$\left(\begin{array}{c|c} O_n & -I_n \\ \hline I_n & O_n \end{array}\right).$$

Exercice 15 (Mines PC 2012)
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Delta(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ M + {}^tM = (\mathrm{Tr}M)A\}$. Montrer que $\Delta(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer $\Delta(A)$.

Exercice 16 (Mines PC 2012)
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

(a) Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors $\det(I_n + A) \geq 1 + \det(A)$.

(b) Montrer que si A et B sont des éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$.

Exercice 17 (Mines PC 2012)
Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^\star$ une fonction croissante C^1 à valeurs strictement positives. Montrer si $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une solution de $x'' + \varphi x = 0$ alors x est bornée.

Exercice 18 (Mines PC 2012)
Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t$.

Exercice 19 (Mines PC 2012)
Résoudre $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2 x^n = 0$.

Exercice 20 (X-ESPCI PC 2012)

(a) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ de même dimension. Montrer qu'il existe $f \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $f(F) = G$.

(b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ de dimension $r < n$. Montrer qu'il existe un endomorphisme nilpotent f de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $\mathrm{Im} f = F$.

(c) Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$. Montrer que $\Phi(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible.

Exercice 21 (X-ESPCI PC 2012)
Soient $a < b$ deux réels et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions continues définies sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On note A la matrice $\displaystyle\left(\int_a^b f_i f_j\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que $\det(A) = 0$ si et seulement si la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est liée.

Exercice 22 (X-ESPCI PC 2012)
Soient $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x^2/\cos(u)}\mathrm{d}u$.

(a) Montrer que $f^2 + g$ est constante.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 23 (X MP 2012)
Montrer qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour toute fonction f de classe C^2 telle que $f(0) = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f'(t))^2\mathrm{d}t < +\infty$ on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2\mathrm{d}t \leq k\left(\int_0^{+\infty}(f'(t))^2\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 24 (ENS PC 2012)
Soit Φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) On suppose que pour toutes matrices A et B on a $\Phi(AB) = \Phi(BA)$. Montrer que Φ est proportionnelle à la trace.

(b) On suppose que pour toute matrice A et pour toute matrice inversible P on a $\Phi(P^{-1}AP) = \Phi(A)$. Montrer que Φ est proportionnelle à la trace.

Exercice 25 (ENS PC 2012)

(a) Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + a$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser la vitesse de convergence s'il y a convergence.

(b) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que $a_n \to 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + a_n$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite éventuelle.