Uppgift 3 - minsta kvadratmetoden

Linjär algebra för civilingenjörer MA503G 2025

Introduktion

I den här uppgiften ska du sätta dig in i minsta kvadratmetoden och använda denna för att bestämma avståndet mellan en punkt och ett plan samt för att anpassa mätdata till ett andragradspolynom. Minsta kvadratmetoden är ett av de moment med ursprung i linjär algebra som har bredast användningsområde med tillämpningar i allt från kurvanpassning till Fourieranalys.

Uppgift

Läs först igenom avsnitt 4.4 i kursboken, sid. 113-115 är direkt relaterade till deluppgift (b) medan sid. 116-118 är relevanta för deluppgift (c). Ett frivilligt komplement till textavsnittet är filmerna Matriser del 10 och Matriser del 11.

(a) - ortogonal projektion som i kap. 2

Låt Π vara planet genom origo med riktningsvektorer $\mathbf{u} = (3, 5, 4)$ och $\mathbf{v} = (2, -3, 7)$. Bestäm den ortogonala projektionen av punkten $P : (2, 1, 5)$ på planet Π med någon av de metoderna som tagits upp tidigare (parameterform för linjen genom P normal mot planet, eller projektionsformel/komposantuppdelning). Beräkna också avståndet mellan planet Π och punkten P.

(b) - ortogonal projektion via normalekvation

Beräkna samma ortogonala projektion som i (a) men på det sätt som beskrivs på sid. 113-115 i kursboken. Bestäm också residualvektorn $\mathbf{r}$ och dess norm, och förklara på vilket sätt dessa är relaterade till avståndet mellan P och Π.

(c) - tyngdaccelerationen på Mars

Din uppgift är att bestämma tyngdaccelerationen g_{Mars} på Mars. Till ditt förfogande har du en (fiktiv) mätserie där vertikalt läge är uppmätt vid ett antal tidpunkter med intervall $\Delta t = 0.05$ s från $t = 0$ s till $t = 2$ s. Mätserien finns lagrad i vektorn `s` filen `fallstracka.mat` som du har tillgång till via denna länk. Kopiera filen till din egen Matlabkatalog och läs in vektorn `s` genom att ge kommandot `load('fallstracka.mat')`

För att bestämma tyngdaccelerationen så ska du använda dig av minsta kvadratmetoden för att anpassa dina mätdata till ett andragradspolynom, läs den detaljerade beskrivningen i avsnitt *Bakgrund* här nedanför. Konkret så ska du

- Konstruera koefficientmatrisen och högerledet för det relevanta ekvationssystemet (det som betecknas $A\mathbf{x} = \mathbf{s}$ i nästa avsnitt), och visa att systemet är inkonsistent. Du kan t.ex. använda Matlabs inbyggda funktion för radreducering, `rref`, som till en godtycklig matris utför radreducering av denna och returnerar den resulterande radkanoniska matrisen.
- Lös den relevanta normalekvationen och läs av g_{Mars}.
- Konstruera residualvektorn $\mathbf{r}$ och beräkna minsta kvadratfelet (normen/längden hos $\mathbf{s}$).
- Rita grafen till det minsta kvadratanpassade andragradspolynomet och sätt ut mätpunkterna..

Bakgrund

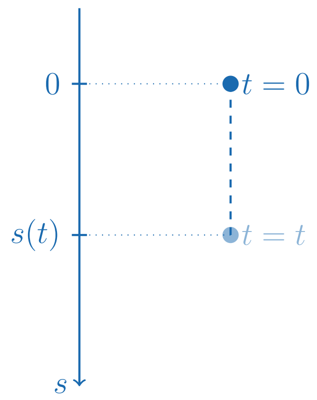
Fritt fall och tyngdaccelerationen

Du kommer säkert ihåg att tyngdkraften nära jordytan som verkar på ett föremål med massan m är till storlek mg. Talet g kallas tyngdaccelerationen och varierar något över jordytan, enligt aktuella mätningar mellan 9.7639 m/s^2 och 9.8337 m/s^2, och antas ofta i Sverige anta värdet 9.82 m/s^2. Newtons andra lag säger att den totala kraften som verkar på en kropp är kroppens massa multiplicerad med dess acceleration. Om en kropp med massan m faller fritt utan luftmotstånd mot jordytan så så får den alltså accelerationen g.

Tänk dig en försöksuppställning där en liten kula släpps från vila vid tidpunkten $t = 0$ och tillåts falla fritt. Beteckna sträckan som kulan fallit vid tiden t med $s(t)$ och hastigheten riktad nedåt med $v(t)$. Om luftsmotståndet kan försummas så gäller då att

$$v(t) = gt \tag{1}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$



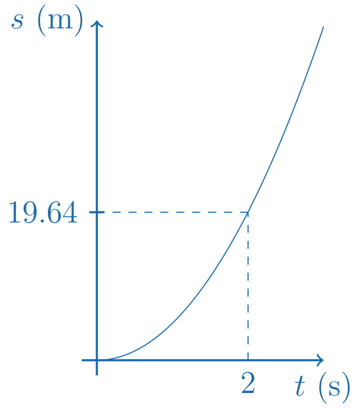
Figur 1: En liten kula släpps i vila vid tidpunkten $t = 0$ och faller sedan fritt.

Om kulan istället släpps med begynnelsehastigheten v_0 från läget s_0 så är motsvarande samband

$$v(t) = gt + v_0 \tag{3}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0. \tag{4}$$

Grafen av fallsträckan som funktion av tiden med $v_0 = 0$ och $s_0 = 0$ är förstås en enkel parabel.

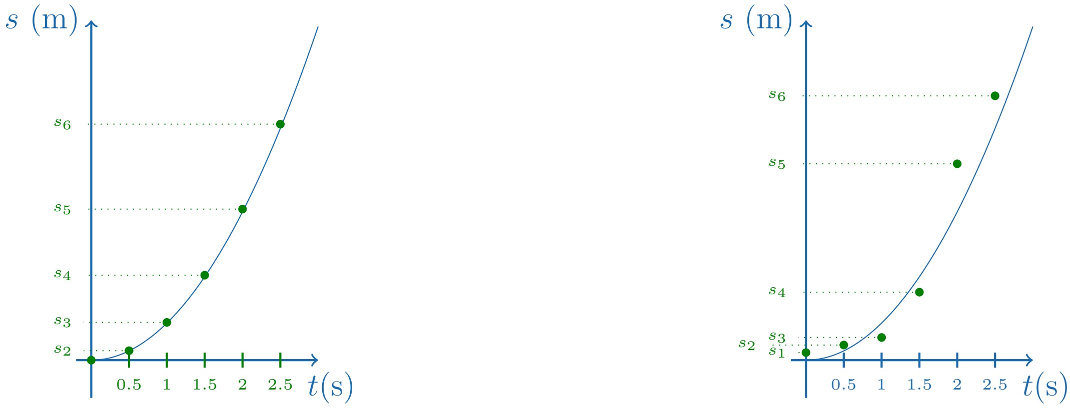


Figur 2: Grafen till fallsträckan s som funktion av tiden t vid avsaknad av luftmotstånd och med begynnelsehastighet 0.

Att verifiera ett samband och bestämma en naturkonstant

Du vill verifiera uttrycket $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ och mäter därför fallsträckan med jämna tidsintervall, säg vid tidpunkterna $t_1 = 0$ s, $t_2 = 0.5$ s, $t_3 = 1$ s, $t_4 = 1.5$ s, $t_5 = 2$ s, och

$t_6 = 2.5$ s. De uppmätta fallsträckorna kallar vi s_1, s_2, ..., s_6. I avsaknad av luftmotstånd och alla typer av mätfel så hamnar mätpunkterna förstås på parabeln, se Figur 3a. Även i ett noga kontrollerat försök där luftmotståndet kan försummas så förekommer mätfel av olika orsaker, och mätvärdena hamnar inte exakt på kurvan, se Figur 3b. Vrid nu på



(a) Idealiserad mätning.

(b) Realistisk mätning

Figur 3: Mätpunkter, läget vid olika tidpunkter, markerade i samma figur som grafen till sambandet $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

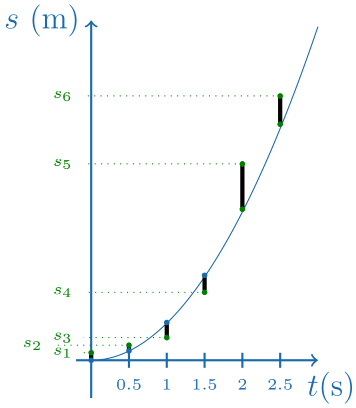
frågeställningen och antag att du istället via mätningar vill *bestämma* värdet på tyngdaccelerationen g. För enkelhets skull bortses från luftmotstånd. I fallet att mätningarna stämmer precis överens med det idealiserade sambandet, dvs situationen som visas i Figur 3a, så är detta inget problem. Eftersom varje mätning av fallsträckan uppfyller $s_i = \frac{1}{2}gt_i^2$, $i = 1, ..., 6$, så räcker det med en av dessa, s_i för något i, för att ge $g = 2s_i/t_i^2$. Verkligheten är betydligt närmare situationen som visas i Figur 3b, och där kommer samma metod i allmänhet att ge olika värden på g för olika mätpunkter. En annan strategi behövs och det finns flera möjligheter, den vi fokuserar på, *minsta kvadratmetoden*, är en av de vanligare metoderna som dessutom har betydligt större användningsområde än vad som här framgår.

Uppgiften är att bestämma det andragradspolynom av formen $\frac{1}{2}gt^2$ som bäst passar mätpunkterna s_1, s_2, ..., s_6 vid motsvarande tidpunkter t_1, t_2, ..., t_6. Olika betydelser av ordet "bäst" ger upphov till olika metoder, och minsta kvadratmetoden utgår från att det polynomet passar bäst som minimerar summan av alla differenser mellan mätvärdena s_i och motsvarande värden $\frac{1}{2}gt_i^2$ hos polynomet i kvadrat (därav namnet). Differensen mellan den faktiska mätningen s_i av fallsträckan och sträckan $\frac{1}{2}gt_i^2$ som följer från sambandet $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ representeras i Figur 4 med längden hos de svarta staplarna.

Minsta kvadratvärdet på g är alltså det tal som minimerar

$$
\begin{aligned}
r(g) &= \sum_{i=1}^{6} \left(s_i - \frac{1}{2} g t_i^2 \right)^2 && (5) \\
&= . \left(s_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \right)^2 + \left(s_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \right)^2 + ... + \left(s_6 - \frac{1}{2} g t_6^2 \right)^2 && (6)
\end{aligned}
$$

Antag nu att inte bara g utan även v_0 och s_0 är okända; en tänkbar orsak är att det inte



Figur 4: Differensen mellan faktiska mätvärden och punkter på parabeln vid samma tidpunkter.

rör sig om ett kontrollerat experiment utan om observationer där dessa parametrar inte på förhand går att bestämma. I ett idealiserat fall utan felkällor uppfyller varje mätning s_i av fallsträckan då sambandet

$$\frac{1}{2} t_i^2 g + t_i v_0 + s_0 = s_i, i = 1, 2, ..., 6, \tag{7}$$

eller ekvivalent:

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{2} t_1^2 g & + & t_1 v_0 & + & s_0 & = & s_1 \\
\frac{1}{2} t_2^2 g & + & t_2 v_0 & + & s_0 & = & s_2 \\
 & & & + & & \vdots & \\
\frac{1}{2} t_6^2 g & + & t_6 v_0 & + & s_0 & = & s_6
\end{array}
\right. \tag{8}
$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem i de tre variablerna g, v_0 och s_0, vilket även kan uttryckas som följande matrisekvation

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} t_1^2 & t_1 & 1 \\
\frac{1}{2} t_2^2 & t_2 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{2} t_6^2 & t_6 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} g \\ v_0 \\ s_0 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_6 \end{pmatrix}
\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{s}. \tag{9}
$$

Här betecknar A systemets koefficientmatris, medan

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} g \\ v_0 \\ s_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_6 \end{pmatrix}.$$

En tolkning av problemet att bestämma tyngdaccelerationen g utifrån en mätserie är: lös ekvationssystemet (9) för högerledet som ges av de uppmätta fallsträckorna, och identifiera g som det första elementet i lösningen. I exemplet som illustreras i Figur 3b så tar koefficientmatrisen och högerledet följande värden.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.125 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 1.125 & 1.5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3.125 & 2.5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Om antalet mätningar är fler än tre så är ekvationssystemet (8) överbestämt, och därmed med största sannolikhet också inkonsistent. Det är alltså inte tal om att lösa ekvationssystemet i fråga, men precis som i fallet $v_0 = 0$, $s_0 = 0$ så går minsta kvadratmetoden ut på att bestämma den vektor $\mathbf{x}$ som minimerar summan av differenserna (residualerna) i kvadrat av mätvärdena s_i och talen $\frac{1}{2}gt_i^2 + v_0t_i + s_0$, dvs mellan högerleden och vänsterleden i (8) respektive (9). En sådan vektor $\mathbf{x}$ kallas för *minsta kvadratlösning* till ekvationssystemet (8) eller ekvivalent till (9). Introducera vektorn $\mathbf{r} = \mathbf{s} - A\mathbf{x}$ vars element, residualerna, är just denna differens. Summan av kvadraterna hos residualerna är

$$\|\mathbf{r}\|^2 = r_1^2 + r_2^2 + ... + r_6^2, \tag{11}$$

dvs kvadraten av vekorn $\mathbf{r}$:s norm eller längd. Minsta kvadratlösningen till ekvationssystemet (9) är alltså den vektorn $\mathbf{x}$ som ger det minsta värdet hos normen $\|\mathbf{s} - A\mathbf{x}\|$. I fallet $v_0 = 0$, $s_0 = 0$ sammanfaller detta med uttrycket (6), så att hitta $\mathbf{x}$ som minimerar $\|\mathbf{r}\|$ reducerar alltså i detta fall till att hitta värdet på g som minimerar $r(g)$.

Examination

Uppgiften redovisas muntligt under det sista redovisningstillfället.