

Représentation et analyse des systèmes dynamiques: Étude de synthèse

Thierry Miquel et Antoine Drouin
Département Transport Aérien - ENAC

4 mai 2023

1	Introduction	2
1.1	Objectifs	2
1.2	Pré-requis	2
1.3	Travail à effectuer	3
1.4	Évaluation	3
2	Modélisation de la dynamique longitudinale d'un avion	4
2.1	Notations	4
2.2	Modèle d'état	4
2.3	Paramètres	5
3	Tutoriel	7
4	Séance 1 : Analyse du modèle avion	8
5	Séance 2 : Linéarisation de la dynamique	9
6	Séance 3 : Réponse longitudinale	10
7	Annexes	11
7.1	Modèle d'état	11
7.2	Modèle atmosphérique	12
7.3	Poussée	12
7.4	Théorème de Kutta-Joukowski	13
7.5	Théorie des profils minces : expression de la circulation élémentaire	13
7.6	Aile d'envergure finie : concept de la ligne portante de Prandtl	15
7.7	Portance	17
7.8	Trainée	19
7.9	Expression du moment de tangage	19

1 Introduction

Pour piloter un avion dans le plan vertical le pilote dispose du manche et de la manette de poussée.

Le manche provoque un mouvement de tangage grâce à la gouverne de profondeur qui est située à l'arrière de l'empennage horizontal. En plus de la gouverne de profondeur les avions de transport commercial possèdent le plus souvent un Plan Horizontal Réglable (PHR ou en anglais THS : Trimmable Horizontal Stabiliser) qui reprend en permanence les efforts en tangage de la gouverne de profondeur de manière à toujours laisser au neutre la position du manche lors des phases équilibrées du vol. Le PHR est déplacé par l'intermédiaire d'une vis sans fin et est actionné soit manuellement par le pilote soit par le calculateur de commandes du vol.

Sur la figure 1 sont représentés le Plan Horizontal Réglable (PHR) ainsi que les volants de trim et les manettes de poussée installés dans le poste de pilotage d'un avion de transport commercial (source : aircockpit.com).

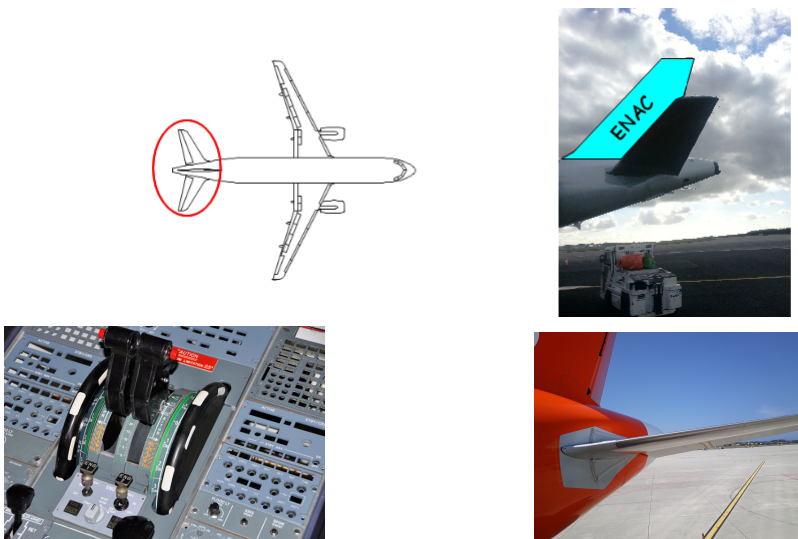


FIGURE 1 – Plan Horizontal Réglable (PHR), volants de trim et manettes de poussée

1.1 Objectifs

L'objectif de ce projet est d'analyser la dynamique longitudinale d'un avion de transport commercial. A cette fin vous étudierez les effets des nombreux paramètres (la masse, l'altitude, le centrage, le nombre de Mach) sur les équations de la mécanique du vol et vous comparerez les modèles non-linéaires et linéaires vis-à-vis de la réponse à une perturbation de l'avion équilibré (*trimé*).

1.2 Pré-requis

Ce projet s'appelle *étude de synthèse* car les pré-requis pour mener à bien ce projet sont multidisciplinaires : vous mettrez en application vos connaissances acquises durant les cours de

mécanique du vol, de représentation et analyse des systèmes dynamiques, d'analyse numérique ainsi que le cours de programmation en Python.

1.3 Travail à effectuer

Chaque groupe de TD sera divisé en équipes de trois ou quatre étudiants. Chaque équipe (Alpha, Bravo, Charlie, Delta, Echo, Foxtrot) étudiera un avion spécifique dont les caractéristiques sont données dans la section 2.3. Pour un même groupe de TD les avions choisis devront être différents.

Pour l'avion choisi le travail à effectuer consiste à :

- Étudier l'influence de différents paramètres sur le modèle avion étudié ;
- Linéariser et analyser la dynamique de l'avion ;
- Simuler et étudier sa réponse temporelle longitudinale.

Vous vous aiderez pour cela du langage de programmation Python et utiliserez les fonctionnalités des bibliothèques Numpy (calcul numérique), Scipy (calcul scientifique) et Matplotlib. Deux fichiers pythons sont fournis :

- Le fichier *dynamic.py* le code du modèle dynamique de l'avion ;
- Le fichier *utils.py* contient diverses fonctions accessoires.

Ces deux fichiers ont été placés en annexe de ce document.

1.4 Évaluation

En fin de projet chaque équipe présentera à l'oral pendant 15 minutes une synthèse des trois séances sous forme d'un exposé synthétique.

Il vous est demandé de réaliser un véritable travail d'analyse et de synthèse des connaissances que vous avez pu approfondir au travers de ce projet en réalisant un exposé sur le thème de votre choix. Il ne s'agit aucunement de présenter de manière systématique la réponse à chacune des questions des séances mais de prendre du recul en choisissant un *axe de présentation personnalisé*.

Chaque personne de l'équipe devra prendre la parole durant cet oral. L'équipe sera ensuite interrogée sur l'ensemble des séances. Vous serez évalués sur les points suivants :

- Soutenance orale
 - Maîtrise du plan et du temps
 - Qualité des diapositives
 - Qualité de l'expression
 - Niveau de synthèse et d'analyse
- Séance de questions
 - Compréhension et maîtrise du sujet
 - Pertinences des réponses
 - Profondeur et étendue de la réflexion
- Qualité du code Python réalisé

2 Modélisation de la dynamique longitudinale d'un avion

2.1 Notations

Nous considérons un avion évoluant selon le plan vertical comme représenté sur la figure 2.

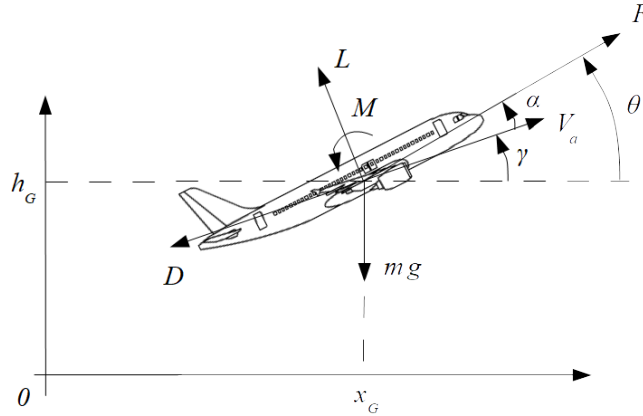


FIGURE 2 – Avion évoluant dans le plan vertical

Nous noterons par la suite :

- x_G la position horizontale du centre de masse de l'avion exprimée en m ;
- h_G l'altitude pression du centre de masse de l'avion, exprimée en m ;
- m la masse de l'avion exprimée en kg et que nous supposons constante ;
- g l'accélération de la pesanteur : $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$;
- V_a la vitesse aérodynamique de l'avion exprimée en m/s ;
- L (lift) la force de portance, exprimée en N et perpendiculaire à la vitesse V_a ;
- D (drag) la force de trainée, exprimée en N et orientée à l'opposé de la vitesse V_a ;
- F la force de poussée issue des réacteurs, exprimée en N ;
- M le moment de tangage, exprimé en Nm ;
- α l'incidence aérodynamique de l'avion exprimée en rad ;
- θ l'assiette de l'avion exprimée en rad ;
- q la vitesse de tangage de l'avion exprimée en rad/sec :

$$q = \dot{\theta} \quad (1)$$

- γ la pente de l'avion exprimée en rad :

$$\gamma = \theta - \alpha \quad (2)$$

- \bar{c} la corde de référence de l'aile (corde aérodynamique moyenne) exprimée en m ;
- I_{yy} est le moment d'inertie de l'avion autour de l'axe de tangage.

2.2 Modèle d'état

Les équations de la dynamique du solide sont établies dans le repère aérodynamique. En utilisant les lois de la cinématique et de la dynamique du solide les équations suivantes peuvent

être établies :

$$\begin{cases} \dot{x}_G = V_a \cos(\theta - \alpha) \\ \dot{h}_G = V_a \sin(\theta - \alpha) \\ \dot{V}_a = \frac{F \cos(\alpha) - D}{m} - g \sin(\theta - \alpha) \\ \dot{\alpha} = q - \frac{L + F \sin(\alpha)}{m V_a} + \frac{g}{V_a} \cos(\theta - \alpha) \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = \frac{M}{I_{yy}} \end{cases} \quad (3)$$

La portance L et la traînée D ont les expressions suivantes :

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} \rho (h_G) V_a^2 S C_L \\ D = \frac{1}{2} \rho (h_G) V_a^2 S C_D \end{cases} \quad (4)$$

Le moment de tangage M et le coefficient du moment de tangage C_m ont les expressions suivantes :

$$\begin{cases} M = \frac{1}{2} \rho (h_G) V_a^2 S \bar{c} C_m \\ C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} (\alpha - \alpha_0) + C_{m\delta} \delta_{PHR} + C_{mq} \frac{q l_t}{V_a} + C_{mel} \delta_{el} \end{cases} \quad (5)$$

Les expressions des forces et les moments sont développées dans l'annexe 7.

Nous définissons le vecteur d'état \underline{x} et le vecteur de commande \underline{u} comme suit :

$$\begin{cases} \underline{x} = [x_G \quad h_G \quad V_a \quad \alpha \quad \theta \quad q]^T \\ \underline{u} = [\delta_{PHR} \quad \delta_{th}]^T \end{cases} \quad (6)$$

Les équations ci-dessus peuvent se ré-écrire à l'aide du champ de vecteur $f(\underline{x}, \underline{u})$:

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad (7)$$

2.3 Paramètres

Les données des tables 1, 2 et 3 seront utilisées. Elles proviennent de l'ouvrage d'E. Roux¹. En ce qui concerne la table 3, MTOW (Maximum Takeoff Weight) désigne la masse maximale au décollage et OWE (Operating Empty Weight) la masse à vide en ordre d'exploitation (carburant non inclus!).

La masse m sera choisie entre la masse à vide en ordre d'exploitation et la masse maximale au décollage. Pour cela nous ferons varier le coefficient k_m de réglage de la masse entre 0.1 (on met quand même un peu de kérosène dans les réservoirs) et 1 :

$$m = (1 - k_m) \text{OWE} + k_m \text{MTOW} \text{ où } 0.1 \leq k_m \leq 1 \quad (8)$$

1. Élodie Roux, Avions civils à réaction : plan 3 vues et données caractéristiques, 2007. ISBN : 978-2-9529380-2-0, <http://elodieroux.com/EditionsElodieRouxAvions.html>

Équipe	Avion	Moteur	F_0 (N)
Alpha	Airbus A-320	CFM 56-5A1	2 x 111205
Bravo	Boeing 737-800	CFM 56-7B24	2 x 106757
Charlie	Airbus A-319	CFM 56-5B5	2 x 97860
Delta	Airbus A-321	CFM 56-5B1	2 x 133446
Echo	Boeing 737-700	CFM 56-7B20	2 x 91633
Foxtrot	Boeing 737-300	CFM 56-3B1	2 x 88694

TABLE 1 – Table des motorisations

Avion	λ	λ_t	S (m^2)	S_t (m^2)	\bar{c} (m)	L_{fus} (m)
Airbus A-320	9.39	5	122.44	31	4.19	37.57
Boeing 737-800	9.45	6.28	124.6	32.8	4.17	38.02
Airbus A-319	9.39	5	122.44	31	4.19	33.84
Airbus A-321	9.13	5	126	31	4.34	44.51
Boeing 737-700	9.44	6.28	124.6	32.8	4.17	32.18
Boeing 737-300	9.16	5.15	91.04	31.31	3.73	32.18

TABLE 2 – Table des paramètres géométriques

Avion	$MTOW$ (kg)	OWE (kg)
Airbus A-320	73500	39733
Boeing 737-800	70534	41413
Airbus A-319	64000	39358
Airbus A-321	89000	47000
Boeing 737-700	60326	37648
Boeing 737-300	56473	31480

TABLE 3 – Table des masses

3 Tutoriel

Deux tutoriaux, à réaliser *impérativement* avant le début des séances encadrées, sont disponibles à l'adresse suivante : http://recherche.enac.fr/~drouin/projet_synthese_1a/.

Le premier tutoriel vous présente la démarche d'analyse utilisée pendant le projet en l'appliquant au cas simple d'un pendule. Le second détaille le code fourni pour la simulation de l'avion.

4 Séance 1 : Analyse du modèle avion

Vous prendrez $q = 0$ pour cette séance. Vous justifierez à posteriori ce choix une fois traitée la dernière question de cette séance.

1. Étudier l'évolution de la poussée maximale avec l'altitude et le nombre de mach. Pour cela vous pourrez tracer l'évolution de la poussée maximale en fonction du nombre de Mach (compris entre 0.4 et 0.8) lorsque l'altitude h vaut 3000 m puis 10000 m.
2. Étudier l'effet de l'incidence α et de l'angle de braquage δ_{PHR} sur le coefficient de portance C_L . Indiquer si le modèle proposé prend en compte le décrochage de l'avion. Pour cela vous pourrez tracer le coefficient de portance C_L en fonction de l'incidence α (comprise entre $-10\frac{\pi}{180} \text{ rad}$ à $+20\frac{\pi}{180} \text{ rad}$) lorsque δ_{PHR} vaut $-30\frac{\pi}{180} \text{ rad}$ puis $+20\frac{\pi}{180} \text{ rad}$.
3. Étudier l'effet de l'incidence α et de la marge statique m_s sur le coefficient C_m du moment de tangage. Conclure quant à la réaction de l'avion en cas d'augmentation intempestive de l'incidence α . Pour cela vous pourrez tracer le coefficient C_m du moment de tangage en fonction de α pour quatre valeurs de la marge statique m_s : -0.1 , 0 , 0.2 et 1 lorsque $\delta_{PHR} = 0$.
4. Lorsque le vol est stabilisé (i.e. $q = 0$) et le moment de tangage nul (i.e. $C_m = 0$) indiquer :
 - Comment varie δ_{PHRe} avec la marge statique m_s ;
 - Comment varie δ_{PHRe} en fonction de l'incidence d'équilibre que l'on notera α_e .Pour cela vous pourrez calculer et tracer en fonction de l'incidence α la valeur δ_{PHRe} de δ_{PHR} pour laquelle le moment de tangage est nul (i.e. $C_m = 0$) et le vol stabilisé (i.e. $q = 0$) pour quatre valeurs de la marge statique m_s : -0.1 , 0 , 0.2 et 1 . Quel est l'effet du volume d'empennage V_t sur les résultats obtenus ?
5. On appelle coefficient de portance équilibrée C_{Le} la valeur du coefficient de portance C_L lorsque $\delta_{PHR} = \delta_{PHRe}$. Étudier l'effet de l'incidence d'équilibre α_e et de la marge statique m_s sur le coefficient de portance équilibrée C_{Le} . Pour cela vous pourrez tracer en fonction de α_e le coefficient de portance équilibrée C_{Le} pour deux valeurs de la marge statique : $m_s = 0.2$ et $m_s = 1$.
6. Tracer la polaire équilibrée pour les deux valeurs précédentes de la marge statique. Indiquer :
 - Si la polaire équilibrée dépend de la marge statique ;
 - La valeur de la finesse maximale.

5 Séance 2 : Linéarisation de la dynamique

Pour cette séance, vous donnerez successivement à l'altitude h_G , au nombre de Mach M_a , à la marge statique ms et au coefficient k_m de réglage de la masse de l'avion les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} h_G \in \{3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000\} \text{ mètres} \\ M_a \in \{0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8\} \\ ms \in \{0.2, 1\} \\ k_m \in \{0.1, 1\} \end{cases}$$

L'ensemble des points de trim est donc un ensemble constitué de $8 \times 5 \times 2 \times 2 = 160$ points.

1. Utiliser la méthode numérique de trim fournie dans le code du modèle de dynamique pour tracer les courbes de la poussée *nécessaire* au vol en palier en fonction du nombre de Mach paramétrées pour deux valeurs de l'altitude, 3000 mètres et 10000 mètres par exemple ; vous pourrez associer une figure pour chaque valeur du couple {marges statique m_s , coefficient de réglage de la masse k_m }.
2. Déterminer les valeurs de α , δ_{PHR} et δ_{th} correspondant à un vol en palier (point de trim). Vous pourrez par exemple présenter les différentes valeurs de trim en fonction de l'altitude, paramétrées pour deux valeurs du nombre de Mach, 0.4 et 0.8 par exemple ; vous pourrez associer une figure pour chaque valeur du couple {marges statique m_s , coefficient de réglage de la masse k_m }. Vous pourrez mettre en parallèle ces résultats avec ceux de la question précédente.
3. Choisir arbitrairement un point de trim parmi dans l'ensemble des points de trim proposés. Identifier l'équation de sustentation dans l'équation d'état. En faisant l'hypothèse que l'incidence α est *petite* utiliser cette équation pour calculer la valeur du coefficient de portance C_L (cette valeur dépend de la vitesse, de la masse et de l'altitude). Conclure quant à la technique de réglage de la vitesse de l'avion. Utiliser la valeur de C_L obtenue ainsi que les graphiques tracés lors de la première séance pour déterminer (approximativement) les valeurs de trim α_e et δ_{PHRe} . Comment obtenir la valeur de trim de la manette des gaz δ_{th} à partir de la polaire équilibrée ?
4. Pour le point de trim précédemment étudié vérifier que le calcul numérique conduit aux mêmes résultats que la méthode graphique et simuler la trajectoire de l'avion sur 100s.
5. Linéariser numériquement le modèle d'état pour toutes les conditions de trim. Extraire des représentations d'état linéarisées $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ de dimension 6 (qui est la dimension du vecteur d'état $\begin{bmatrix} x_G & h_G & V_a & \alpha & \theta & q \end{bmatrix}^T$) les matrices \mathbf{A}_4 et \mathbf{B}_4 associées aux composantes $\begin{bmatrix} V_a & \alpha & \theta & q \end{bmatrix}^T$ du vecteur d'état et calculer numériquement les valeurs propres de la matrice \mathbf{A}_4 . Vous tracerez les valeurs propres pour toutes les conditions de trim en faisant varier successivement l'altitude h_G , le nombre de Mach M_a , la marge statique ms et la masse m (au travers les différentes valeurs du coefficient k_m de réglage de la masse). Comment varient les valeurs propres en fonction de ces différents paramètres ?

6 Séance 3 : Réponse longitudinale

Vous choisirez un point de trim pour laquelle toutes les valeurs propres de la matrice \mathbf{A}_4 sont à partie réelle strictement négative.

Nous supposons que l'avion rencontre à l'instant initial un cisaillement de vent. Ce cisaillement de vent d'expression $W_h \delta(t)$ où $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac a pour vitesse verticale $W_h = 2 \text{ m/s}$. En termes de simulation cela se traduit par un changement de l'incidence initiale : en notant α_e l'incidence de trim et V_{ae} la vitesse de trim, la nouvelle incidence initiale vaut maintenant $\alpha_e + \arctan\left(\frac{W_h}{V_{ae}}\right)$

1. Simuler et tracer la vitesse V_a , l'incidence α , l'assiette θ et la vitesse de tangage q de l'avion sur 240s en utilisant le modèle non linéaire puis le modèle linéarisé. Le modèle linéarisé reflète-t-il correctement le comportement du modèle non linéaire? Quelle est la relation qui relie la période d'oscillation du modèle linéarisé et les valeurs propres de la matrice \mathbf{A}_4 ? Quel est le nom donné à ces oscillations à *grande* échelle de temps?
2. Réaliser les mêmes simulations sur 10s. Le modèle linéarisé reflète-t-il correctement le comportement du modèle non linéaire? Quel est le nom donné à ces perturbations à *petite* échelle de temps?
3. Comparer les trajectoires obtenues sur 240s en utilisant le même modèle linéaire mais en choisissant un autre point de trim et en simulant le modèle non linéaire. Quelle conclusion tirez-vous quant à la précision du modèle linéaire autour d'un point de trim différent de celui autour duquel il a été obtenu?

Par la suite, vous utiliserez la représentation d'état linéarisée $\{\mathbf{A}_4, \mathbf{B}_4\}$ associée au vecteur d'état de composantes $[V_a \ \alpha \ \theta \ q]^T$.

4. Donner la représentation d'état en base modale. Étudier la stabilité et la commandabilité du modèle linéarisé

La Figure 3 donne des spécifications relatives à la phugoïde et à l'oscillation d'incidence².

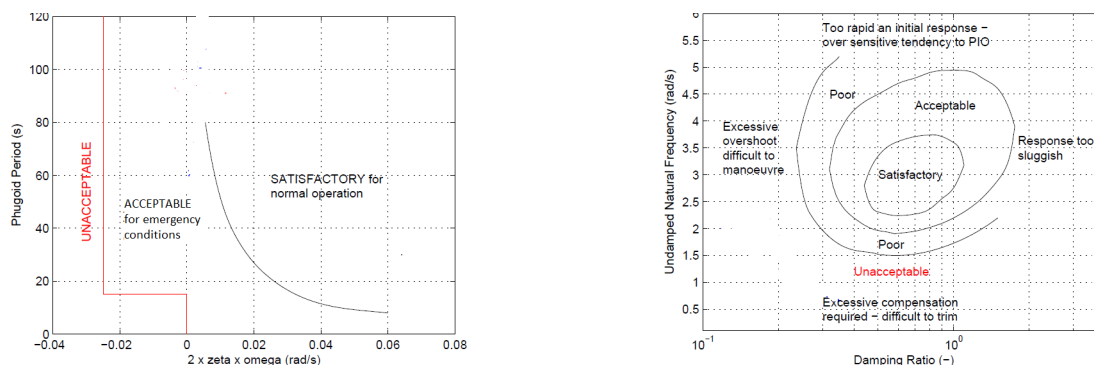


FIGURE 3 – Spécifications sur la phugoïde et l'oscillation d'incidence

5. Pour les points de trim proposés en début de la séance 5, vérifier si votre aéronef est conforme aux spécifications. Dans la négative, réaliser un retour d'état de telle sorte que les qualités de vol souhaitées soient obtenues grâce au contrôle du PHR uniquement.

2. Christopher Beaverstock, Alireza Maheri, Thomas Richardson, Mark Lowenberg and Askin Isikveren, Methods for Conceptual Flight Control System Design, 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting, 5-8 January 2009, Orlando, Florida, <https://doi.org/10.2514/6.2009-1620>

7 Annexes

7.1 Modèle d'état

Nous considérerons que la Terre est plate et que c'est un référentiel inertiel. Nous y associons un trièdre direct, noté $\mathcal{R}^i = \{\underline{e}_x^i, \underline{e}_y^i, \underline{e}_z^i\}$, dans lequel le vecteur unitaire \underline{e}_z^i est parallèle à la verticale ascendante du lieu. Dans ce repère, le poids de l'avion a pour expression :

$$\underline{mg} = -mg \underline{e}_z^i \quad (9)$$

Le trièdre aérodynamique, noté $\mathcal{R}^a = \{\underline{e}_x^a, \underline{e}_y^a, \underline{e}_z^a\}$, est le trièdre direct lié à la vitesse de l'avion dans lequel le vecteur unitaire \underline{e}_x^a est parallèle à la vitesse aérodynamique de l'avion :

$$\underline{V}_a = V_a \underline{e}_x^a \quad (10)$$

Dans ce repère la portance L et la traînée D ont les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \underline{D} = -D \underline{e}_x^a \\ \underline{L} = L \underline{e}_y^a \end{cases} \quad (11)$$

Enfin le trièdre avion, noté $\mathcal{R}^b = \{\underline{e}_x^b, \underline{e}_y^b, \underline{e}_z^b\}$, est le trièdre direct rigidement lié à l'avion dans lequel le vecteur unitaire \underline{e}_x^b est parallèle à la poussée de l'avion :

$$\underline{F} = F \underline{e}_x^b \quad (12)$$

Les relations de passage entre ces trois trièdres sont des matrices de rotations :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \underline{e}_x^b \\ \underline{e}_y^b \\ \underline{e}_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_x^a \\ \underline{e}_y^a \\ \underline{e}_z^a \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{e}_x^a \\ \underline{e}_y^a \\ \underline{e}_z^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_x^i \\ \underline{e}_y^i \\ \underline{e}_z^i \end{bmatrix} \end{cases} \quad (13)$$

Les équations de la dynamique du solide sont établies dans le repère aérodynamique. En utilisant les lois de la cinématique et de la dynamique du solide les équations suivantes peuvent être établies :

$$\begin{cases} \dot{x}_G = V_a \cos(\theta - \alpha) \\ \dot{z}_G = V_a \sin(\theta - \alpha) \\ \dot{V}_a = \frac{F \cos(\alpha) - D}{m} - g \sin(\theta - \alpha) \\ \dot{\alpha} = q - \frac{L + F \sin(\alpha)}{m V_a} + \frac{g}{V_a} \cos(\theta - \alpha) \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = \frac{M}{I_{yy}} \end{cases} \quad (14)$$

I_{yy} est le moment d'inertie de l'avion autour de l'axe de tangage. Nous approximerons très grossièrement I_{yy} par la moitié (pour tenir compte du fait que la masse de l'avion est concentrée au niveau des ailes et des moteurs) du moment d'inertie d'une barre de section négligeable, de masse m et de longueur L_{fus} :

$$I_{yy} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m L_{fus}^2 \right) \quad (15)$$

Nous définissons le vecteur d'état \underline{x} et le vecteur de commande \underline{u} comme suit :

$$\begin{cases} \underline{x} = [x_G & h_G & V_a & \alpha & \theta & q]^T \\ \underline{u} = [\delta_{PHR} & \delta_{th}]^T \end{cases} \quad (16)$$

Les équations ci-dessus peuvent se ré-écrire à l'aide du champ de vecteur $f(\underline{x}, \underline{u})$:

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad (17)$$

7.2 Modèle atmosphérique

Nous utiliserons le modèle d'atmosphère standard (ISA, International Standard Atmosphere) pour lequel la température varie linéairement (loi de Toussaint) avec l'altitude jusqu'à 11 km d'altitude (c'est à dire dans la troposphère). Les notations sont les suivantes :

— T est la température qui dépend de l'altitude h_G .

$$T = T_0 + T_h h_G \quad \text{où} \quad \begin{cases} T_0 = 288.15 \text{ }^\circ K \\ T_h = -0.0065 \text{ }^\circ K/m \end{cases} \quad (18)$$

— R_s est la constante spécifique de l'air qui dépend de son humidité. Pour un air sec nous avons

$$R_s = 287.05 \text{ } m^2 / (^\circ K s^2) \quad (19)$$

— ρ_0 est la masse volumique de l'air au sol exprimée en kg/m^3

$$\rho_0 = 1.225 \text{ } kg/m^3 \quad (20)$$

— $\rho(h_G)$ la masse volumique de l'air exprimée en kg/m^3 . La masse volumique de l'air sec est donnée par la relation suivante

$$\rho(h_G) = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\frac{g}{R_s T_h} - 1} = \rho_0 \left(1 + \frac{T_h}{T_0} h_G \right)^{-\frac{g}{R_s T_h} - 1} \quad (21)$$

Notez la dépendance de la masse volumique $\rho(h_G)$ avec la constante spécifique de l'air R_s , et donc avec son humidité.

— κ est le coefficient de compressibilité de l'air

$$\kappa = 1.4 \quad (22)$$

— M_a est le Mach de vol. Il est relié à la vitesse aérodynamique V_a et à la température T par la relation suivante :

$$M_a = \frac{V_a}{\sqrt{\kappa R_s T}} \quad (23)$$

7.3 Poussée

La force de poussée F des moteurs est exprimée en N et est supposée parallèle à l'axe \underline{e}_x^b du trièdre avion. Nous utiliserons le modèle proposé par J. Mattingly (*Jack D. Mattingly, William H. Heiser, Daniel H. Daley, Aircraft Engine Design. AIAA Education series, 1987. ISBN : 0-930403-23-1*) pour un réacteur double flux (turbofan) ayant un fort taux de dilution :

$$F = F_0 \left(\frac{\rho(h_G)}{\rho_0} \right)^{0.6} \left(0.568 + 0.25 (1.2 - M_a)^3 \right) \delta_{th} \quad (24)$$

Où :

— F_0 est la poussée maximale au sol et à l'arrêt, exprimée en N

— δ_{th} est la position de la commande de poussée : $0 \leq \delta_{th} \leq 1$

7.4 Théorème de Kutta–Joukowski

Nous rappelons ici quelques notions d'aérodynamique³. Soit $d\Gamma$ la circulation élémentaire de l'air sur une aile. La circulation élémentaire $d\Gamma$ se calcule comme l'intégrale curviligne de la vitesse v de l'air le long d'une courbe fermée \mathcal{C} entourant le profil de l'aile :

$$d\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} v \, dl \quad (25)$$

De manière simplifiée, supposons que l'écoulement par rapport au profil de l'aile de corde c soit tel que la vitesse soit V sur l'intrados et $V + dv$ sur l'extrados. La circulation élémentaire $d\Gamma$ peut alors se calculer comme suit⁴ :

$$d\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} v \, dl = (V + dv) c - V c = dv c \quad (26)$$

Par ailleurs, la différence de pression dp entre les deux côtés de l'aile peut se déduire du théorème de Bernoulli en négligeant les termes au second ordre :

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p + dp = \frac{1}{2}\rho (V + dv)^2 + p \Rightarrow dp \approx \rho V \, dv \quad (27)$$

La portance par unité d'envergure $\frac{dL}{dy}$ est donné par le théorème de Kutta-Jukowski où \tilde{C}_L représente le coefficient de portance par unité d'envergure et c la corde de l'aile :

$$\frac{dL}{dy} = dp c = \rho V \, dv c = \rho V \, d\Gamma := \frac{1}{2}\rho V^2 c \tilde{C}_L \quad (28)$$

Par conséquent l'élément de circulation $d\Gamma$ est reliée au coefficient de portance par unité d'envergure \tilde{C}_L par la relation suivante :

$$d\Gamma = \frac{1}{2} V c \tilde{C}_L \quad (29)$$

7.5 Théorie des profils minces : expression de la circulation élémentaire

D'une manière générale, considérons la Figure 4 où y désigne la coordonnée du point considéré relativement au milieu de l'aile, $\bar{e}(x)$ la cambrure moyenne du profil d'aile considéré, α l'angle d'incidence, b l'envergure de l'aile et V la vitesse de l'air à l'infini amont de l'aile. En utilisant la théorie des profils minces, la circulation élémentaire $d\Gamma$ peut être obtenue comme la solution de l'équation intégrale suivante⁵ :

$$d\Gamma = \int_0^c \gamma(\zeta) d\zeta \quad (30)$$

Où :

$$\begin{cases} \frac{d\bar{e}(x)}{dx} = \alpha + \frac{1}{2\pi V} \int_0^c \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x} := \alpha + \frac{v_i}{V} & \forall 0 \leq x \leq c \\ \gamma(c) = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Cette équation intégrale peut être résolue en effectuant le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = \frac{c}{2} (1 - \cos(\theta_0)) & \text{où } 0 \leq \theta_0 \leq \pi \\ \zeta = \frac{c}{2} (1 - \cos(\theta)) \end{cases} \quad (32)$$

3. W. F. Phillips, D. F. Hunsaker and J. J. Joo, Minimizing Induced Drag with Lift Distribution and Wingspan, AIAA Journal of Aircraft, Volume 56 Number 2, March 2019, DOI : 10.2514/1.C035027

4. https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Kutta-Jukowski

5. Ion Paraschivoiu, Aérodynamique subsonique, Presses Polytechnique de Montréal, 1999

L'expression de la vitesse verticale v_i induite par le vortex devient alors :

$$\begin{cases} v_i := \frac{1}{2\pi} \int_0^c \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \gamma(\theta) \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)} d\theta \\ \gamma(\pi) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Afin de satisfaire la condition aux limites $\gamma(\pi) = 0$, on considère l'expression suivante de $\gamma(\theta)$:

$$\gamma(\theta) = 2V \left(A_0 \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\theta) \right) \quad (34)$$

Par conséquent l'expression de la vitesse verticale v_i induite par le vortex devient :

$$v_i = \frac{V}{\pi} \int_0^\pi \frac{A_0 (1 + \cos(\theta)) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\theta) \sin(k\theta)}{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)} d\theta \quad (35)$$

Après intégration, nous obtenons :

$$v_i = V \left(-A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\theta_0) \right) \quad (36)$$

Les coefficients A_k sont ensuite déterminés en multipliant par $\cos(m\theta_0)$ l'équation (31) et en évaluant son intégrale entre 0 et π pour $m = 0, 1, \dots$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\alpha - \frac{d\bar{e}(x)}{dx} \right) \cos(m\theta_0) d\theta_0 &= - \int_0^\pi \frac{v_i}{V} \cos(m\theta_0) d\theta_0 \\ &= \int_0^\pi (A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\theta_0)) \cos(m\theta_0) d\theta_0 \end{aligned} \quad (37)$$

Il vient :

$$\begin{cases} A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\bar{e}(x)}{dx} d\theta_0 \\ A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\bar{e}(x)}{dx} \cos(m\theta_0) d\theta_0 \quad \forall m > 0 \end{cases} \quad (38)$$

Une fois $\gamma(\theta)$ déterminé, la circulation élémentaire $d\Gamma$ peut être obtenue par la relation (30) :

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \int_0^c \gamma(\zeta) d\zeta = \frac{c}{2} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= V c \int_0^\pi \left(A_0 \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\theta) \right) \sin(\theta) d\theta \\ &= V c \pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

Le coefficient de portance par unité d'envergure est alors obtenu par la relation (29) :

$$\tilde{C}_L = \frac{2 d\Gamma}{V c} = 2 \pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \quad (40)$$

Soit, en utilisant les expressions (38) :

$$\tilde{C}_L = \frac{2 d\Gamma}{V c} = 2 \pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2 \pi \left(\alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\bar{e}(x)}{dx} (1 - \cos(\theta_0)) d\theta_0 \right) \quad (41)$$

En notant $\alpha_{L=0}$ l'incidence de portance nulle, il vient finalement :

$$\tilde{C}_L = 2 \pi (\alpha - \alpha_{L=0}) \quad \text{où} \quad \alpha_{L=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\bar{e}(x)}{dx} (1 - \cos(\theta_0)) d\theta_0 \quad (42)$$

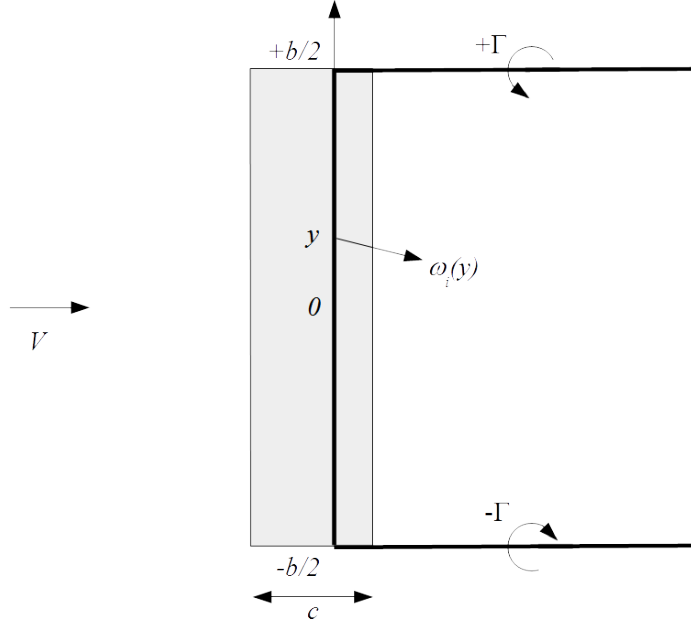


FIGURE 4 – Vortex en forme de fer à cheval

7.6 Aile d'envergure finie : concept de la ligne portante de Prandtl

Le concept de la ligne portante, développé dès 1918 par Prandtl, est basé sur le remplacement de l'aile d'envergure finie par une ligne de tourbillons attachée à l'aile et en forme de fer à cheval, comme illustré sur la Figure 4.

L'angle d'attaque induit $\alpha_i(y)$ en un point d'une section de l'aile situé à une distance y de l'origine s'obtient à l'aide de la loi de Biot-Savart. En désignant par $\omega_i(y)$ la vitesse induite en un point de coordonnée y sur l'aile par la circulation Γ (conceptuellement, il ne s'agit pas de la même circulation que celle traitée au paragraphe précédent), il vient :

$$\alpha_i(y) \approx -\frac{\omega_i(y)}{V} = \frac{1}{4\pi V} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{y - \zeta} = \frac{1}{4\pi V} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/d\zeta}{y - \zeta} d\zeta \quad (43)$$

Le coefficient de portance par unité d'envergure $\tilde{C}_L(y)$ peut être exprimé comme suit où $\alpha_{eff}(y)$ représente l'angle d'attaque effectif pour le profil situé en y et $\alpha_{L=0}(y)$ l'incidence de portance nulle :

$$\tilde{C}_L(y) = \tilde{C}_{L\alpha} (\alpha_{eff}(y) - \alpha_{L=0}(y)) \quad (44)$$

Nous avons vu à la section précédente que pour un profil mince $\tilde{C}_{L\alpha} = 2\pi$, ainsi que la manière de calculer $\alpha_{L=0}$.

D'autre part, le coefficient de portance par unité d'envergure $\tilde{C}_L(y)$ peut être obtenu par d'après le de Kutta-Jukowski par la relation (29) :

$$\tilde{C}_L(y) = \frac{2\Gamma(y)}{V c(y)} \quad (45)$$

Par conséquent l'angle d'attaque effectif $\alpha_{eff}(y)$ a l'expression suivante :

$$\alpha_{eff}(y) = \frac{\tilde{C}_L(y)}{\tilde{C}_{L\alpha}} + \alpha_{L=0}(y) = \frac{2\Gamma(y)}{\tilde{C}_{L\alpha} V c(y)} + \alpha_{L=0}(y) \quad (46)$$

Comme par ailleurs $\alpha_{eff}(y) := \alpha - \alpha_i(y)$, l'utilisation de l'expression (43) pour l'angle d'attaque induit $\alpha_i(y)$ conduit à l'équation intégrale-différentielle de Prandtl :

$$\alpha_{eff}(y) := \alpha - \alpha_i(y) \Rightarrow \alpha - \frac{1}{4\pi V} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/d\zeta}{y - \zeta} d\zeta = \frac{2\Gamma(y)}{\tilde{C}_{L\alpha} V c(y)} + \alpha_{L=0}(y) \quad (47)$$

Soit :

$$\frac{2\Gamma(y)}{\tilde{C}_{L\alpha} V c(y)} + \frac{1}{4\pi V} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/d\zeta}{y - \zeta} d\zeta = \alpha - \alpha_{L=0}(y) \quad (48)$$

Pour résoudre cette équation intégrale-différentielle, la circulation $\Gamma(y)$ est exprimée sous la forme d'une série de Fourier :

$$\Gamma(y) = 2bV \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\theta) \quad \text{où} \quad \cos(\theta) = -\frac{y}{b/2} \quad (49)$$

La portance L de l'aile est alors obtenue par la relation suivante :

$$L = \rho V \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (50)$$

Soit, compte tenu de l'expression de la circulation Γ :

$$\begin{aligned} L &= \rho V \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \\ &= \rho V \frac{b}{2} \int_0^\pi \Gamma(\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= \rho V^2 b^2 \int_0^\pi \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= \rho V^2 b^2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^\pi \sin(k\theta) \sin(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (51)$$

En utilisant le fait que $\int_0^\pi \sin(k\theta) \sin(\theta) d\theta = 0 \quad \forall k > 1$ nous obtenons finalement :

$$L = \rho V^2 b^2 B_1 \int_0^\pi \sin^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \rho V^2 \pi b^2 B_1 \quad (52)$$

En introduisant l'allongement λ de l'aile (en anglais Aspect Ratio (AR)) : $\lambda = \frac{b^2}{S}$: c'est le carré de l'envergure b divisée par la surface portante S) l'approximation suivante est souvent utilisée (cf. cours de mécanique du vol), il vient :

$$\lambda = \frac{b^2}{S} \Rightarrow L = \frac{1}{2} \rho S V^2 \pi \lambda B_1 \quad (53)$$

La traînée induite D_i est calculée en utilisant une démarche similaire :

$$D_i = \rho \int_{-b/2}^{b/2} \omega_i(y) \Gamma(y) dy \quad (54)$$

La vitesse $\omega_i(y)$ est obtenue à l'aide de la loi de Biot-Savart : c'est la vitesse induite en un point de coordonnée y sur l'aile par la circulation Γ du tourbillon de sillage dans le prolongement des extrémités de l'aile, comme représenté sur la Figure 4 :

$$\omega_i(y) = \frac{\Gamma(y)}{4\pi(y-b/2)} - \frac{\Gamma(y)}{4\pi(y+b/2)} = \frac{\Gamma(y)}{4\pi} \left(\frac{b}{y^2 - (b/2)^2} \right) \quad (55)$$

En utilisant l'expression de la circulation $\Gamma(y)$, la traînée induite peut s'exprimer comme suit ⁵ :

$$D_i = \frac{2(L/b)^2}{\pi \rho V^2} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{B_k}{B_1} \right)^2 \right) \quad (56)$$

Par conséquent le coefficient C_{D_i} de traînée induite par la portance à l'expression suivante :

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi \lambda} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{B_k}{B_1} \right)^2 \right) \quad (57)$$

La traînée induite est minimale lorsque $B_k = 0 \ \forall k > 1$. Cela conduit à une distribution elliptique de la portance le long de l'aile, comme montré par Prandtl en 1921 ⁶ :

$$B_k = 0 \quad \forall k > 1 \Rightarrow \frac{dL}{dy} = \rho V \Gamma(y) = 2\rho V^2 b B_1 \sin(\theta) = 2\rho V^2 b B_1 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b/2} \right)^2} \quad (58)$$

7.7 Portance

Nous considérerons que la force de portance L , exprimée en N et orientée perpendiculairement à la vitesse, a l'expression suivante :

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} \rho (h_G) V_a^2 S C_L \\ C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha + C_{L\delta_{PHR}} \delta_{PHR} + C_{Lq} \frac{q}{V_a} - C_{stall} \left(\frac{180}{\pi} \right)^{N_{stall}} |\alpha - \alpha_0|^{N_{stall}} \end{cases} \quad (59)$$

Où :

- C_L est le coefficient de portance
- C_{L0} est le coefficient de portance à incidence nulle, braquage du PHR nul et vitesse de tangage nulle :

$$\begin{cases} C_{L0} = - \left(C_{Lw\alpha} - C_{Lt\alpha} \frac{S_t}{S} \frac{d\epsilon}{d\alpha} \right) \alpha_0 \\ \frac{d\epsilon}{d\alpha} = 0.25 \end{cases} \quad (60)$$

- $C_{Lw\alpha}$ est le gradient de portance de l'ensemble {aile (wing), fuselage, dérive, moteur (body)}. Pour un profil mince et en notant λ l'allongement de l'aile (en anglais Aspect Ratio (AR)) : $\lambda = \frac{b^2}{S}$: c'est le carré de l'envergure b divisée par la surface portante S) l'approximation suivante est souvent utilisée (cf. cours de mécanique du vol) :

$$C_{Lw\alpha} \approx \pi \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2}} \quad (61)$$

6. Prandtl L., Applications of Modern Hydrodynamics to Aeronautics, NACA TR-116, June 1921

- $C_{Lt\alpha}$ est le gradient de portance de l'empennage horizontal. Nous prendrons pour son expression la même que celle de $C_{Lw\alpha}$ où λ_t est l'allongement de l'empennage horizontal :

$$C_{Lt\alpha} \approx \pi \frac{\lambda_t}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_t}{2}\right)^2}} \quad (62)$$

- S_t la surface portante de l'empennage horizontal exprimée en m^2 .
- S est surface portante de référence exprimée en m^2 ;
- α_0 est l'incidence pour laquelle la portance de l'ensemble {aile (wing), fuselage, dérive, moteur (body)} est nulle. Nous prendrons par la suite :

$$\alpha_0 = -2 \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad (63)$$

- $C_{L\alpha}$ est le gradient de portance du à l'incidence :

$$C_{L\alpha} = C_{Lw\alpha} + \frac{S_t}{S} C_{Lt\alpha} \left(1 - \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right) \quad (64)$$

- $C_{L\delta_{PHR}}$ est le gradient de portance du au PHR :

$$C_{L\delta_{PHR}} = \frac{S_t}{S} C_{Lt\alpha} \quad (65)$$

- δ_{PHR} est l'angle de braquage de l'empennage horizontal exprimé en rad ;
- C_{Lq} est le gradient de portance du à la vitesse de tangage de l'avion :

$$\begin{cases} C_{Lq} = l_t \frac{S_t}{S} C_{Lt\alpha} C_{Ltq} \\ C_{Ltq} = 1.3 \end{cases} \quad (66)$$

- l_t est la distance entre le foyer de l'empennage horizontal et le foyer de l'ensemble {aile (wing), fuselage, dérive, moteur (body)}. Nous approximerons très grossièrement l_t par un pourcentage de la longueur du fuselage, notée L_{fus} :

$$l_t \approx 0.5 L_{fus} \quad (67)$$

Les coefficients N_{stall} et C_{stall} permettent de modéliser le décrochage. Ce modèle est inspiré du papier de Min & al.⁷. Les valeurs suivantes ont été choisies :

$$\begin{cases} N_{stall} = 4.2 \\ C_{stall} = 2e - 6 \end{cases} \quad (68)$$

Notons que lorsque le décrochage n'est pas pris en compte ($C_{stall} = 0$) le coefficient de portance C_L peut se décomposer comme la somme de deux termes :

$$C_L = C_{Lw\alpha} (\alpha - \alpha_0) + \frac{S_t}{S} C_{Lt\alpha} \alpha_t \quad (69)$$

- Le premier terme $C_{Lw\alpha} (\alpha - \alpha_0)$ est le coefficient de portance de l'ensemble {aile (wing), fuselage, dérive, moteur (body)} et qui dépend uniquement de l'incidence α ;
- Le second terme $\frac{S_t}{S} C_{Lt\alpha} \alpha_t$ est le coefficient de portance de l'empennage horizontal. L'incidence α_t de l'empennage horizontal dépend de l'incidence α mais aussi du braquage δ_{PHR} du PHR et de la vitesse de tangage q :

$$\begin{cases} \alpha_t = \alpha - \epsilon + \delta_{PHR} + C_{Ltq} \frac{q l_t}{V_a} \\ \epsilon = \frac{d\epsilon}{d\alpha} (\alpha - \alpha_0) \end{cases} \quad (70)$$

7. Sanggyu Min, Evan Harrison, Hernando Jimenez, Dimitri Mavris, Development of Aerodynamic Modeling and Calibration Methods for General Aviation Aircraft Performance Analysis - a Survey and Comparison of Models, 15th AIAA Aviation Technology, Integration, and Operations Conference, 22-26 June 2015, Dallas, TX

7.8 Traînée

Nous considérerons que la force D de traînée, exprimée en N et orientée à l'opposée de la vitesse, a l'expression suivante :

$$\begin{cases} D = \frac{1}{2}\rho(h_G) V_a^2 S C_D \\ C_D = C_{D0} + C_{Di} \end{cases} \quad (71)$$

Où :

- C_D est le coefficient de traînée;
- C_{D0} est le coefficient de traînée de profil (traînée de forme du profil et traînée de frottement). Nous prendrons par la suite :

$$C_{D0} = 0.025 \quad (72)$$

- C_{Di} est le coefficient de traînée induite, conséquence de la portance. Nous prendrons par la suite :

$$C_{Di} = \frac{C_{Lw}^2}{\pi\lambda} + \frac{S_t}{S} \frac{C_{Lt}^2}{\pi\lambda_t} + \frac{S_t}{S} \frac{C_{Lt}C_{Lw}}{\pi\lambda} \quad (73)$$

Où :

$$\begin{cases} C_{Lw} = C_{Lw\alpha} (\alpha - \alpha_0) \\ C_{Lt} = C_{Lt\alpha} \alpha_t \\ \alpha_t = \alpha - \epsilon + \delta_{PHR} + C_{Ltq} \frac{q_{lt}}{V_a} \\ \epsilon = \frac{d\epsilon}{d\alpha} (\alpha - \alpha_0) \end{cases} \quad (74)$$

Nous pouvons remarquer que le terme $\frac{S_t}{S}$ est en facteur de deux termes dans l'expression du coefficient de traînée induite C_{Di} . Ceci est dû au fait que dans l'expression de la traînée D c'est la surface portante de référence S qui est utilisée ($D = \frac{1}{2}\rho(h_G)V_a^2 S C_D$). Comme la traînée induite due à l'empennage est proportionnelle à sa surface S_t , le terme $\frac{S_t}{S}$ dans l'expression du coefficient C_{Di} permet de rendre compte de cette proportionnalité.

7.9 Expression du moment de tangage

Le moment de tangage M par rapport au centre de gravité de l'avion et exprimé en $N.m$ a l'expression suivante :

$$\begin{cases} M = \frac{1}{2}\rho(h_G) V_a^2 S \bar{c} C_m \\ C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} (\alpha - \alpha_0) + C_{m\delta} \delta_{PHR} + C_{mq} \frac{q_{lt}}{V_a} + C_{mel} \delta_{el} \end{cases} \quad (75)$$

Où :

- C_m est le coefficient du moment de tangage
- C_{m0} est le coefficient de couple de tangage. Il est nul pour un profil symétrique, comme c'est le cas pour l'empennage horizontal. La valeur négative de ce coefficient indique un couple à piquer, comme c'est le cas pour un profil cambré. Nous prendrons par la suite :

$$C_{m0} = -0.59 \quad (76)$$

- $C_{m\alpha}$ est le gradient du moment de tangage

$$C_{m\alpha} = -m_s C_{Lw\alpha} \quad (77)$$

- m_s désigne la marge statique de l'avion. Elle est définie par la relation suivante où d_{FG} est la distance entre l'abscisse du foyer F sur la corde de référence et l'abscisse du centre de masse G sur la corde de référence dont l'origine est le bord d'attaque ($d_{FG} = d_G - d_F$)

$$m_s = \frac{d_{FG}}{\bar{c}} \quad (78)$$

Notons que la marge statique sera positive lorsque l'avion est statiquement stable et négative dans le cas contraire⁸.

- V_t est *volume d'empennage* qui est défini par la relation :

$$V_t = \frac{l_t S_t}{\bar{c} S} \quad (79)$$

- Les coefficients $C_{m\delta}$ et C_{mq} sont définis comme suit à partir des coefficients $C_{Lt\alpha}$ et C_{Ltq} et du *volume d'empennage* V_t :

$$\begin{cases} C_{m\delta} = -V_t C_{Lt\alpha} \\ C_{mq} = -V_t C_{Lt\alpha} C_{Ltq} \end{cases} \quad (80)$$

- $C_{mel} \delta_{el}$ représente le produit entre les coefficient d'efficacité de la gouverne de profondeur ($C_{mel} = -1.2$) et l'angle de braquage de celle ci. Dans le cadre de ce projet $\delta_{el} = 0$.

8. La marge statique m_s a été définie sur la base du repère avion dans lequel l'axe des abscisses est orienté positivement dans le sens du nez de l'avion (ou du bord d'attaque de l'aile). Notons que la marge statique peut aussi être définie par la relation $\frac{d_F - d_G}{\bar{c}}$ dans le cas où l'axe choisi est orienté positivement vers l'arrière (cf. cours de mécanique du vol de G. Hattenberger et N. Monrolin), mais cela ne change pas son signe.