Matemática Discreta para Computação e Informática

P. Blauth Menezes

blauth@inf.ufrgs.br

Departamento de Informática Teórica

Instituto de Informática / UFRGS

Matemática Discreta para Computação e Informática

P. Blauth Menezes

1 – Introdução e Conceitos Básicos

1.1 Introdução

1.2 Conceitos Básicos de Teoria dos Conjuntos

- 1.2.1 Conjuntos
- 1.2.2 Pertinência
- 1.2.3 Alguns Conjuntos Importantes
- 1.2.4 Conjuntos Finitos e Infinitos
- 1.2.5 Alfabetos, Palavras e Linguagens
- 1.2.6 Subconjunto e Igualdade de Conjuntos
- 1.2.7 Conjuntos nas Linguagens de Programação

1.1 Introdução

- **QQ estudo em Ciência da Computação, teórico ou aplicado**
  - pré-requisito: conhecimentos de diversos tópicos de Matemática
  - tal fato é explicitado na maioria dos livros de CC
    - alguns possuem um capítulo específico
    - tópicos são brevemente/resumidamente introduzidos

♦ Diretrizes Curriculares do MEC para Cursos de Computação e Informática [MEC 2002]

A formação básica tem por objetivo introduzir as matérias necessárias ao desenvolvimento tecnológico da computação. O principal ingrediente desta área é a ciência da computação que caracteriza o egresso como pertencente à área de computação. A maioria das matérias tecnológicas são aplicações da ciência da computação. São matérias de formação básica dos cursos da área de computação: a ciência da computação, a ***matemática****, a física e eletricidade e a pedagogia.*

♦ Especificamente em relação à Matéria Matemática

*A **matemática**, para a área de computação, deve ser vista como uma ferramenta a ser usada na definição formal de conceitos computacionais (linguagens, autômatos, métodos etc.). Os modelos formais permitem definir suas propriedades e dimensionar suas instâncias, dadas suas condições de contorno.*

♦ Matemática Discreta

- seleção de tópicos de Matemática
- essenciais para o estudo da Ciência da Computação
- na Formação Básica e Tecnológica

Considerando que a maioria dos conceitos computacionais pertencem ao domínio do discreto, a matemática discreta (ou também chamada álgebra abstrata) é fortemente empregada

♦ Não cobre todos os tópicos de Matemática Discreta

- Análise Combinatória
- Probabilidade Discreta
- Teoria dos Grafos (brevemente introduzida)

♦ Questão importante

- origem do termo Matemática Discreta

♦ Qq sistema computador possui limitações finitas

- tamanho da memória
- número de intruções que pode executar
- número de diferentes símbolos que pode tratar,…
- portanto, o estudo dos conjuntos finitos é fundamental.

- **Limitações finitas não implicam em limitação ou pré-fixação de tamanhos máximos**
  - por exemplo, unidades auxiliares como discos removíveis, fitas, etc
- **Portanto, para um correto entendimento da computação**
  - freqüentemente *não* é possível pré-fixar limites
  - implica tratar tais questões em um contexto infinito
- **Entretanto, qq conjunto de recursos computacionais**
  - é contável ou *discreto* (em oposição ao termo *continuo*)
  - pode ser enumerados ou seqüenciado (segundo algum critério)
    - não existe um elemento entre quaisquer dois outros

♦ Exemplo

- conjunto dos números naturais é contável

♦ Contra-exemplo

- conjunto dos números reais o qual é não-contável ou *não-discreto*

♦ Conclusão

- existem conjuntos infinitos contáveis e não-contáveis

♦ Matemática Discreta

- estudos baseados em conjuntos contáveis finitos ou infinitos

♦ Matemática do Continuum

- estudos baseados em conjuntos não-contáveis
- exemplo: Cálculo Diferencial e Integral

1 – Introdução e Conceitos Básicos

1.1 Introdução

1.2 Conceitos Básicos de Teoria dos Conjuntos

- 1.2.1 Conjuntos
- 1.2.2 Pertinência
- 1.2.3 Alguns Conjuntos Importantes
- 1.2.4 Alfabetos, Palavras e Linguagens
- 1.2.5 Conjuntos Finitos e Infinitos
- 1.2.6 Subconjunto e Igualdade de Conjuntos
- 1.2.7 Conjuntos nas Linguagens de Programação

1.2 Conceitos Básicos de Teoria dos Conjuntos

♦ Conceitos básicos relativos à Teoria dos Conjunto

- possivelmente, do conhecimento da maioria
- revisão e exemplos
- exercícios!
- ênfase nos exemplos voltados para Ciência da Computação

1 – Introdução e Conceitos Básicos

1.2.1 Conjuntos

♦ Conceito de conjunto é fundamental

- praticamente todos os conceitos em CC
- e os correspondentes resultados
- são baseados em conjuntos ou construções sobre conjuntos

♦ Conjunto

- estrutura que agrupa objetos
- constitui uma base para construir estruturas mais complexas

♦ Informalmente, um conjunto

- coleção, *sem* repetições e *sem* qualquer ordenação, de objetos denominados elementos
- elemento: pode designar um objeto concreto ou abstrato
- elemento: entidade básica, *não* é definida formalmente

Def: Conjunto

Coleção de zero ou mais objetos *distintos*, chamados Elementos do conjunto os quais *não* possuem qualquer ordem associada

Exp: Conjuntos

As vogais a, e, i, o, e u

O par de sapatos preferido

Os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9

Todos os brasileiros

Os números pares 0, 2, 4, 6,...

O personagem Snoopy, a letra a, a baía da Guanabara e o Pelé

♦ Conjunto pode ser definido

- listando todos os seus elementos
- por propriedades declaradas
- um conjunto *não* necessariamente é constituído por objetos que compartilham mesmas características/propriedades

♦ Denotação por extensão

- definição listando *todos* os seus elementos
  - em qualquer ordem
  - separados por vírgulas
  - entre chaves

$$\text{Vogais} = \{ a, e, i, o, u \}$$

- Vogais denota o conjunto $\{ a, e, i, o, u \}$

♦ Denotação por compreensão

- definição por propriedades

$$\text{Pares} = \{ n \mid n \text{ é número par} \}$$

o conjunto de todos os elementos n tal que n é número par

- forma geral de definição de um conjunto por propriedades

$$\{ x \mid p(x) \}$$

- a é elemento do conjunto: p(a) é verdadeira

$$B = \{ x \mid x \text{ é brasileiro} \}$$

- Pelé é elemento de B e Bill Gates *não* é elemento de B

- **QQ conjunto pode ser definido por compreensão**
- **Freqüentemente é conveniente especificar de outra forma**
  - Dígitos = { 0, 1, 2, 3,..., 9 }
  - Pares = { 0, 2, 4, 6,... }
    - ∗ elementos omitidos podem ser facilmente deduzidos do contexto

Exp: Conjuntos

Dias da Semana = { seg, ter, qua, qui, sex, sab, dom }

Seqüências de duas Vogais = { aa, ae, ai, ao, au, ea, ee, ei, eo, eu,...,ua, ue, ui, uo, uu }

{ x | x = y^2 sendo que y é número inteiro }

- ∗ corresponde ao conjunto { 1, 4, 9, 16,... }

1 – Introdução e Conceitos Básicos

1.2.2 Pertinência

- **a é elemento do conjunto A**

$$a \in A$$

a pertence ao conjunto A

- **Caso contrário**

$$a \notin A$$

a não pertence ao conjunto A

Exp: Pertence, Não-Pertence

Vogais = { a, e, i, o, u }

$a \in \text{Vogais}$ $\qquad$ $h \notin \text{Vogais}$

B = { x | x é brasileiro }

$\text{Pelé} \in B$ $\qquad$ $\text{Bill Gates} \notin B$

1 – Introdução e Conceitos Básicos

1.2.3 Alguns Conjuntos Importantes

♦ Conjunto vazio

$$\varnothing$$

- especialmente importante
- conjunto sem elementos { }

Exp: Conjunto Vazio

Conjunto de todos os brasileiros com mais de 300 anos

Conjunto de todos os números simultaneamente pares e ímpares

♦ Conjunto unitário

- quase tão importante como o vazio

- constituído por um único elemento
  - existem infinitos conjuntos unitários

- para muitas aplicações, pode-se usar qualquer conjunto unitário
  - importante é que o conjunto possui um único elemento
  - irrelevante qual é o elemento
  - conjunto unitário fixado: usualmente denotado por 1

Exp: Conjunto Unitário

Conjunto constituído pelo jogador de futebol Pelé

Conjunto de todos os números simultaneamente pares e primos

$1 = \{ * \}$

♦ Alguns Conjuntos importantes na Matemática e na CC

$\mathbf{N}$ Conjunto dos Números Naturais

$\mathbf{Z}$ Conjunto dos Números Inteiros

$\mathbf{Q}$ Conjunto dos Números Racionais

$\mathbf{I}$ Conjunto dos Números Irracionais

$\mathbf{R}$ Conjunto dos Números Reais

1 – Introdução e Conceitos Básicos

1.1 Introdução

1.2 Conceitos Básicos de Teoria dos Conjuntos

- 1.2.1 Conjuntos
- 1.2.2 Pertinência
- 1.2.3 Alguns Conjuntos Importantes
- 1.2.4 Conjuntos Finitos e Infinitos
- 1.2.5 Alfabetos, Palavras e Linguagens
- 1.2.6 Subconjunto e Igualdade de Conjuntos
- 1.2.7 Conjuntos nas Linguagens de Programação

1.2.4 Conjuntos Finitos e Infinitos

Um conjunto pode possuir um número finito ou infinito de elementos

- definição formal de conjunto finito e infinito: adiante

♦ Conjunto finito

- pode ser denotado por extensão
  - ∗ listando exaustivamente todos os elementos

♦ Conjunto infinito

- caso contrário

Exp: Conjunto Finito

$\varnothing$

$\{ \varepsilon \}$

Vogais = { a, e, i, o, u }

Dígitos = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

{ snoopy, a, baía da Guanabara, Pelé }

$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \text{ e } x < 4 \}$

$B = \{ x \mid x \text{ é brasileiro} \}$

Exp: Conjunto Infinito

$\mathbf{Z}$

$\mathbf{R}$

$\{ x \in \mathbf{Z} \mid x \geq 0 \}$

$\text{Pares} = \{ y \mid y = 2x \text{ e } x \in \mathbf{N} \}$

1 – Introdução e Conceitos Básicos

1.2.5 Alfabetos, Palavras e Linguagens

♦ Linguagem

- um dos conceitos mais fundamentais em Ciência da Computação
- definida a partir da noção de conjunto

♦ Para a definição de linguagem, é necessário

- conceitos de alfabeto
- conceitos de cadeia de caracteres

♦ Estudo de linguagens e conceitos correlatos

- Linguagens Formais
- Compiladores

Def: Alfabeto

Um conjunto *finito*

- elementos são usalmente denominados de símbolos ou caracteres

♦ Portanto

- conjunto vazio *é* um alfabeto
- qualquer conjunto infinito *não* é um alfabeto

Def: Palavra, Cadeia de Caracteres, Sentença

Sobre um alfabeto

- seqüência *finita* de símbolos justapostos

♦ Cadeia sem símbolos

ε cadeia vazia, palavra vazia ou sentença vazia

♦ Conjunto de todas as palavras sobre um alfabeto Σ

$$\Sigma^*$$

Exp: Alfabeto, Palavra

$\varnothing$ e { a, b, c } são alfabetos

$\mathbf{N}$ *não* é um alfabeto

ε é uma palavra sobre { a, b, c }

ε é uma palavra sobre $\varnothing$

a, e, i, o, u, ai, oi, ui, aeiou são palavras sobre Vogais

1, 001 são palavras *distintas* sobre Digitos

$\{ a, b \}^* = \{ \varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots \}$

$\varnothing^* = \{ \varepsilon \}$

Def: Linguagem Formal

Ou simplesmente Linguagem

- um conjunto de palavras sobre um alfabeto

Exp: Linguagem Formal: alfabeto $\Sigma = \{ a, b \}$

$\varnothing$

$\{ \varepsilon \}$ obviamente, $\varnothing \neq \{ \varepsilon \}$

conjunto de palíndromos

Palíndromos = $\{ \varepsilon$, a, b, aa, bb, aaa, aba, bab, bbb, aaaa,... $\}$

- mesma leitura da esquerda para a direita e vice-versa
- linguagem sempre infinita?

Exp: Linguagens de Programação

Linguagens de programação como Pascal, C e Java

- linguagens sobre o alfabeto constituído por
  - letras
  - digitos
  - símbolos especiais (como espaço, parenteses, pontuação, etc)
- cada programa na linguagem corresponde
  - uma palavra sobre o alfabeto
- Pascal, C e Java …
  - definidas por todos os seus programas possíveis
  - são conjuntos infinitos
  - pois, existem infinitos programas

Obs: Compilador × Pertinência à Linguagem

Compilador de uma LP (linguagem de programação)

- *software* que traduz
  - ∗ programa escrito na LP (linguagem fonte)
  - ∗ para um código executável (linguagem objeto).
- Estrutura de um compilador
  - ∗ análise: léxica, sintática e semântica
  - ∗ síntese: geração e otimização de código executável
- análise

$$p \in L \, ?$$

  - ∗ verifica se um dado programa fonte p
  - ∗ é programa válido para a linguagem L

1 – Introdução e Conceitos Básicos

1.2.6 Subconjunto e Igualdade de Conjuntos

♦ Contido

- conceito fundamental da Teoria dos Conjuntos
- permite introduzir os conceitos
  - subconjunto
  - igualdade de conjuntos

♦ Todos elementos de A também são elementos de B

- A está contido em B

$$A \subseteq B$$

- A *não* está contido em B

$$A \not\subseteq B$$

- B contém A

$$B \supseteq A$$

♦ A é subconjunto de B

$$A \subseteq B \quad \text{ou} \quad B \supseteq A$$

♦ A é subconjunto próprio de B

- A está contido propriamente em B (*não* contido propriamente)
  - ∗ $A \subseteq B$ e existe $b \in B$ tal que $b \notin A$

$$A \subset B \qquad (A \not\subset B)$$

- B contém propriamente A

$$B \supset A$$

Exp: Contido, Subconjunto

$\{ a, b \} \subseteq \{ b, a \}$

$\{ a, b \} \subseteq \{ a, b, c \}$

$\{ a, b \} \subset \{ a, b, c \}$

$\{ 1, 2, 3 \} \subseteq \mathbf{N}$

$\{ 1, 2, 3 \} \subset \mathbf{N}$

$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$

$\varnothing \subseteq \{ a, b, c \}$

$\varnothing \subset \{ a, b, c \}$

$\varnothing \subseteq \mathbf{N}$

$\varnothing \subset \mathbf{N}$

♦ Conjunto Universo

- conjunto especial e importante
- contém todos os conjuntos considerados
  - ∗ define o “contexto de discussão”
  - ∗ portanto, *não* é um conjunto fixo
- normalmente denotado por $\mathbf{U}$
- definido o conjunto universo, para qq conjunto A

$$A \subseteq \mathbf{U}$$

♦ Conjuntos iguais

A e B são conjuntos iguais sse possuem os mesmos elementos

$$A = B \quad \text{se e somente se} \quad A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$

Exp: Igualdade de Conjuntos

$\{ 1, 2, 3 \} = \{ x \in \mathbf{N} \mid x > 0 \text{ e } x < 4 \}$

$\mathbf{N} = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \geq 0 \}$

$\{ 1, 2, 3 \} = \{ 3, 3, 3, 2, 2, 1 \}$

- $\{ 1, 2, 3 \} \subseteq \{ 3, 3, 3, 2, 2, 1 \}$
- $\{ 3, 3, 3, 2, 2, 1 \} \subseteq \{ 1, 2, 3 \}$

Exp: Pertinência × Contido

É importante distinguir claramente entre pertinência e contido

Considere o conjunto $A = \{ 1, 2, 3, \varnothing, \{a\}, \{b, c\} \}$

$\{ 1 \} \notin A$

$\varnothing \in A$

$\{ a \} \in A$

$\{ b, c \} \in A$

$\{ 1, 2, 3 \} \notin A$

$\varnothing \subseteq A$

$\{ 1 \} \subseteq A$

$\{ 1, 2, 3 \} \subseteq A$

Obs: Linguagem $\times$ Conjunto de Todas as Palavras

Definição alternativa para linguagem formal sobre um alfabeto Σ

- L é qualquer subconjunto de Σ^*

$$L \subseteq \Sigma^*$$

1 – Introdução e Conceitos Básicos

1.1 Introdução

1.2 Conceitos Básicos de Teoria dos Conjuntos

- 1.2.1 Conjuntos
- 1.2.2 Pertinência
- 1.2.3 Alguns Conjuntos Importantes
- 1.2.4 Conjuntos Finitos e Infinitos
- 1.2.5 Alfabetos, Palavras e Linguagens
- 1.2.6 Subconjunto e Igualdade de Conjuntos
- 1.2.7 Conjuntos nas Linguagens de Programação

1.2.7 Conjuntos nas Linguagens de Programação

♦ **Conceitos da MD × implementações em LP**

- aplicação que será constantemente explorada
- conhecimentos de linguagem de programação não é pré-requisito
- exemplificação
  - ilustrativa
  - *não* detalhada
  - informal

♦ **Centrado na linguagem Pascal**

- entendimento crescente e coerente

♦ Por que Pascal?

- desenvolvida para o ensino de programação
- formalmente bem definida (facilita o estudo matemático)
- inspirou diversas linguagens de programação comerciais
- disponível em diversos tipos de sistemas computadores
- freqüentemente adotada como primeira LP em cursos de computação e informática

♦ Tipo de dados

- conceito necessário para exemplificar conjuntos em LP
- informalmente e resumidamente
  - ∗ conjunto de objetos (dados) e operações sobre estes objetos

♦ Considerando limitações dos computadores e objetivando a portabilidade do *software*

- algumas linguagens especificam
  - ∗ limites dos valores do tipo de dados
  - ∗ como os valores devem ser armazenados
  - ∗ como as operações devem ser processadas

♦ A maioria das LP possui tipos de dados predefinidos

- Real ou Ponto Flutuante
- Inteiro
- Caractere
- Booleano ou Lógico

♦ Tipos Real e Inteiro

- implementam um subconjunto próprio de **R** e **Z**
- operações como adição, multiplicação…

♦ Tipos Caractere e Lógico

- implementa os caracteres usuais como letras e dígitos
- implementa os valores lógicos verdadeiro e falso
- operações especiais (estudadas ao longo da disciplina)

- **Muitas LP não possuem facilidades adequadas para definir e operar conjuntos**
  - Pascal oferece *algum* tratamento de conjuntos
- **Definição de tipos baseados em conjuntos *finitos***

```
cores set of (amarelo, vermelho, azul,
   branco, preto)
```

```
dias_semana set of (seg, ter, qua, qui,
   sex, sab, dom)
```

```
letras set of ‘a’..’z’
```

♦ Definição de constantes de um tipo conjunto

```
[vermelho, amarelo, azul]
```

```
[ ]
```

```
[seg..dom]
```

```
[seg..sex]
```

```
['a', 'e', 'i', 'o', 'u']
```

♦ Correspondem aos seguintes conjuntos

$\{$ vermelho, amarelo, azul $\}$

$\varnothing$

$\{$ seg, ter, qua, qui, sex, sab, dom $\}$

$\{$ seg, ter, qua, qui, sex $\}$

$\{$ a, e, i, o, u $\}$

♦ Definição de variáveis de um tipo conjunto

- quais nomes (das variáveis) correspondem a quais tipos

```
cores_primarias: cores
```

```
feriado, semana, trabalho: dias_semana
```

```
vogais: letras
```

♦ Trechos de programas em Pascal

```
cores_primarias := [vermelho, amarelo, azul]
```

```
feriado := [ ]
```

```
semana := [seg..dom]
```

```
trabalho := [seg..sex]
```

```
vogais := [‘a’, ‘e’, ‘i’, ‘o’, ‘u’]
```

♦ Interpretação

cores_primarias = { vermelho, amarelo, azul }

feriado = $\varnothing$

semana = { seg, ter, qua, qui, sex, sab, dom }

trabalho = { seg, ter, qua, qui, sex }

vogais = { a, e, i, o, u }

♦ Atribuição × Teste de igualdade

- ":=" para associar a variável ao seu valor
- "=" para verificar uma igualdade

♦ Distinção ?

- objetiva facilitar a construção do compilador

♦ Igualdade

```
cores_primarias = [vermelho, amarelo, azul]
```

```
feriado = trabalho
```

♦ Interpretação

cores_primarias = { vermelho, amarelo, azul } *verdadeiro*

feriado = trabalho *falso*

♦ Subconjunto (continência)

```
trabalho <= semana
```

```
[sab, dom] <= trabalho
```

♦ Interpretação

trabalho $\subseteq$ semana *verdadeiro*

$\{$ sab, dom $\}$ $\subseteq$ trabalho *falso*

♦ Pertinência

```
'a' in vogais
dom in trabalho
```

♦ Interpretação

$a \in vogais$ *verdadeiro*

$dom \in trabalho$ *falso*

Matemática Discreta para Computação e Informática

P. Blauth Menezes

Matemática Discreta para Computação e Informática

P. Blauth Menezes

blauth@inf.ufrgs.br

Departamento de Informática Teórica

Instituto de Informática / UFRGS