

## Problema 1 (2,5 p)

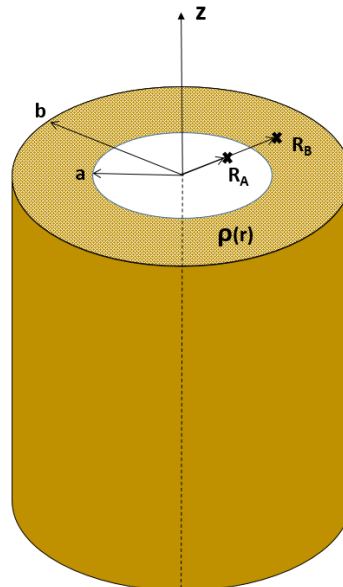
Un tubo cilíndrico no conductor de altura indefinida y de radios interno y externo  $a$  y  $b$  ( $a < b$ ) está cargado eléctricamente con una densidad volumétrica de carga no uniforme según la expresión  $\rho(r) = A/r$  ( $C/m^3$ ), siendo  $r$  la distancia al eje de los cilindros y  $A$  una constante positiva conocida.

Se pide, justificando brevemente todas las respuestas:

- Calcular el vector de campo electrostático en las distintas regiones del espacio (expresado en el sistema de coordenadas cilíndricas). Representar el módulo del vector campo electrostático en función de  $r$  en una gráfica.
- Calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B ( $V_A - V_B$ ). Estos puntos están a distancia  $R_A$  y  $R_B$  del eje respectivamente.

En los siguientes apartados puede utilizarse que la carga del tubo no conductor para un tramo de longitud  $h$  medido en vertical es:  $Q/h = 2\pi A(b - a)$  (culombios por metro).

- Se coloca un segundo tubo cilíndrico de material dieléctrico (constante dieléctrica  $\epsilon$ ) alrededor del anterior, de forma que su radio interior es  $b$  y el radio exterior  $c$ . Calcular las densidades de carga polarizada en el dieléctrico indicando dónde se encuentran localizadas.
- Se retira el material dieléctrico del apartado anterior y se coloca ahora un tubo conductor neutro del mismo tamaño que el dieléctrico. Calcular la densidad de carga en la cara exterior de este conductor.



## Solución:

- a) Según la geometría presentada en el problema, se puede dividir el todo el espacio en tres regiones distintas. Para calcular el campo eléctrico en cada región, aplicaremos el teorema de Gauss:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{neta}}{\epsilon_0}$$

Considerando el teorema de Gauss en la región I ( $r < a$ ), a una superficie cilíndrica de radio  $r$  y altura  $h$ , se obtiene que el campo eléctrico es nulo debido a la simetría del problema y al no haber carga neta encerrada por la superficie:

$$\vec{E}_I = 0 \text{ N/C}$$

En la región II ( $a < r < b$ ), el campo eléctrico tiene simetría cilíndrica y su dirección es la radial en coordenadas cilíndricas. Aplicando el teorema de Gauss a una superficie cilíndrica de radio  $r$  y altura  $h$ , y teniendo en cuenta que el flujo del campo eléctrico a través de las bases es nulo, se tiene:

$$E_{II} 2\pi h r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^r \rho(r) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^r 2\pi h r \frac{A}{r} dr$$

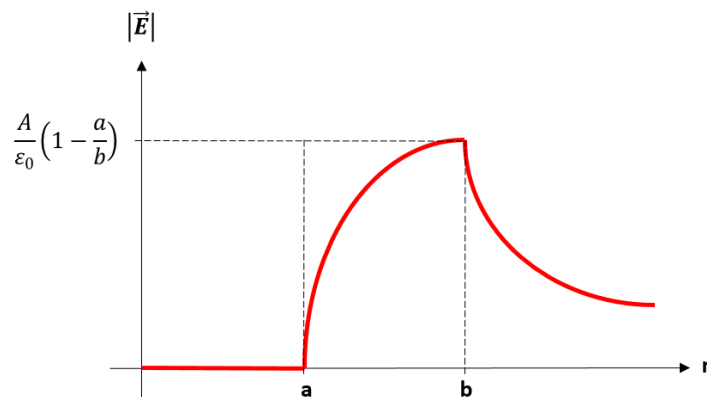
$$\vec{E}_{II} = \frac{A}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \vec{u}_r \text{ N/C}$$

En la región III ( $r > b$ ), se obtiene el campo de la misma forma:

$$E_{III} 2\pi h r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^b \rho(r) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^b 2\pi h r \frac{A}{r} dr$$

$$\vec{E}_{III} = \frac{A}{\epsilon_0} \frac{b - a}{r} \vec{u}_r \text{ N/C}$$

La representación del módulo del campo eléctrico en función de la coordenada radial,  $r$ , sería la siguiente:



- b) Teniendo en cuenta que el campo eléctrico es conservativo, la diferencia de potencial ( $V_A - V_B$ ) se calcula a partir de la integral de línea del campo eléctrico:

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= - \int_{R_B}^{R_A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{R_B}^a \vec{E}_{II} \cdot d\vec{r} - \int_a^{R_A} \vec{E}_I \cdot d\vec{r} = - \int_{R_B}^a \vec{E}_{II} \cdot d\vec{r} \\ V_A - V_B &= - \frac{A}{\epsilon_0} \int_{R_B}^a \left(1 - \frac{a}{r}\right) dr = - \frac{A}{\epsilon_0} (r - a \ln r) \Big|_{R_B}^a \\ &= - \frac{A}{\epsilon_0} (a - R_B - a \ln a + a \ln R_B) = \frac{A}{\epsilon_0} \left[ a \left( \ln \frac{a}{R_B} - 1 \right) + R_B \right] \end{aligned}$$

- c) Debido a la presencia del campo eléctrico, se inducirán cargas ligadas en el dieléctrico, que en principio estarán distribuidas en su superficie y en el interior del mismo. Para obtener la densidad de carga polarizada es necesario obtener el vector de polarización en el dieléctrico a partir del campo eléctrico en dicha región, que se ve modificado por la presencia del dieléctrico. Para calcular el campo, se aplica la ley de Gauss para medios materiales, tomando una superficie cilíndrica de radio  $r$  y altura  $h$ :

$$\begin{aligned} \oint_S \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} &= Q_f \\ E 2\pi h r &= \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \int_a^b \rho(r) dV = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \int_a^b 2\pi h r \frac{A}{r} dr \\ \vec{E} &= \frac{A}{\epsilon \epsilon_0} \frac{b-a}{r} \vec{u}_r \end{aligned}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \frac{A}{\epsilon \epsilon_0} \frac{b-a}{r} \vec{u}_r = A \frac{b-a}{r} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \vec{u}_r$$

Una vez se conoce el vector de polarización en el dieléctrico, se calculan las densidad de carga ligadas, que, en principio, se distribuirán en sendas superficies cilíndricas, y en el interior del tubo dieléctrico:

$$\sigma_b|_{r=b} = \vec{P} \cdot \hat{n} = -A \frac{b-a}{b} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \text{ C/m}^2$$

$$\sigma_b|_{r=c} = \vec{P} \cdot \hat{n} = A \frac{b-a}{c} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \text{ C/m}^2$$

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot P_r) = -A(b-a) \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{1}{r}\right) = 0$$

A pesar de que la polarización del dieléctrico no es uniforme, debido a su dependencia concreta con la distancia, no hay carga volumétrica ligada en el interior del material.

- d) Debido a la presencia del campo eléctrico producido por la densidad de carga del tubo cilíndrico inicial, las cargas libres del conductor se redistribuirán en la superficie del mismo de manera uniforme debido a la simetría del problema.

Para obtener las densidades de carga, se puede estudiar el flujo electrostático a través de una superficie cilíndrica que se encuentre dentro del conductor ( $b < r < c$ ). Como el campo en el interior del conductor tiene que ser nulo, la carga total encerrada por dicha superficie gaussiana debe anularse. Por tanto, la carga distribuida en la superficie interna del conductor debe ser la misma que la carga total del tubo cilíndrico no conductor con signo opuesto:

$$\Phi = \frac{Q_{neta}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_{neta} = Q_{cilindro} + Q_{cond,int} = 0$$

$$Q_{cond,int} = -Q_{cilindro} = -\int_a^b \rho(r) dV = -\int_a^b 2\pi h r \frac{A}{r} dr = -2\pi h A(b - a)$$

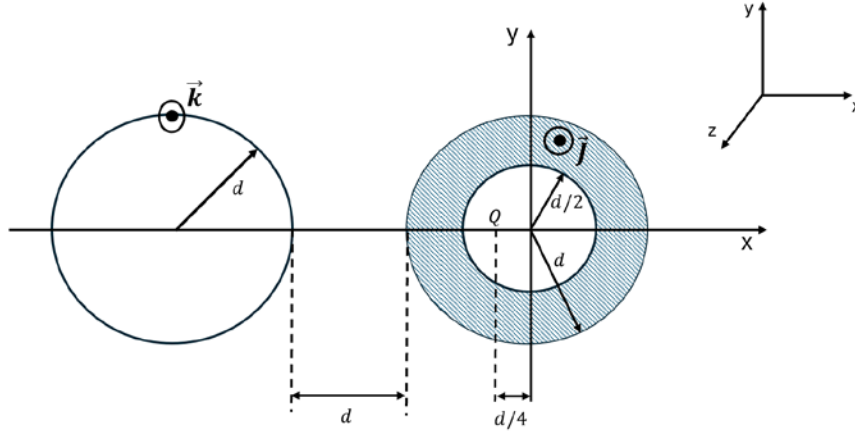
$$\sigma_{cond,int} = \frac{Q_{cond,int}}{S_{int}} = -\frac{2\pi h A(b - a)}{2\pi b h} = -\frac{A(b - a)}{b} \text{ C/m}^2$$

La carga total acumulada en la superficie exterior ( $r = c$ ) del conductor debe ser igual, pero signo opuesto a la de la superficie interior, de manera que se mantenga la carga neutra del conductor. Dicha carga estará distribuida de manera uniforme en toda la superficie externa del conductor:

$$\sigma_{cond,ext} = \frac{-Q_{cond,int}}{S_{ext}} = \frac{2\pi h A(b - a)}{2\pi c h} = \frac{A(b - a)}{c} \text{ C/m}^2$$

**Problema 2 (2,5 p)**

La imagen muestra la sección transversal de dos piezas conductoras de longitud indefinida, por las que circula corriente en la dirección del eje  $z$ . Las piezas están separadas por una distancia  $d$ .



La pieza de la izquierda es una lámina cilíndrica de radio  $d$  y de espesor despreciable por la que circula una corriente superficial.

$$\vec{k} = A \hat{z} \quad (\text{amperios/metro})$$

La pieza de la derecha es una capa cilíndrica de radio interno  $d/2$  y radio externo  $d$  por la que circula una densidad de corriente  $\vec{j}$  (amperios/metro<sup>2</sup>), de la que se conoce el campo magnético que crea en los puntos de dentro del conductor,  $d/2 < r < d$  (expresado en coordenadas cilíndricas centradas en el eje de la pieza), dado por:

$$\vec{B}_1 = \mu_0 A \left(1 - \frac{d}{2r}\right) \hat{u}_\phi \quad d/2 < r < d$$

$A$  es una constante conocida.

Se pide:

- Calcular la corriente total (amperios) que circula por la pieza de la derecha.
- Dibujar una gráfica que represente la componente  $y$  del campo magnético en función de la coordenada  $x$  en la zona interior de la pieza de la derecha, **únicamente en aquellos puntos que están sobre el eje  $x$**  ( $-d/2 < x < d/2$ ), indicando en la gráfica el valor máximo del campo en este tramo del eje.
- Par vector (expresado en las coordenadas cartesianas de la figura), que experimentaría un pequeño solenoide de radio  $r_0$  con  $N$  espiras por el que circula una corriente  $I_0$ , si se coloca en el punto  $P (-3d, 4d, 0)$  (fuera de la figura), con su eje en el sentido del eje  $x$ .
- Trabajo necesario para girar un dipolo magnético  $\vec{m} = m \hat{y}$  situado en el punto  $Q (-d/4, 0, 0)$  hasta que quede en el sentido del eje  $x$ . Justificar el signo de este trabajo.

## Solución:

- a) (2,5 ptos) Para calcular la  $I_{total}$  aplicamos la ley de Ampere, con una circunferencia de radio  $r = d$  como amperiana.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1(r = d)2\pi d = \mu_0 A \left(1 - \frac{d}{2d}\right) 2\pi d = \mu_0 A \pi d$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encerrada} = \mu_0 I_{total}$$

$$\text{Luego } I_{total} = A \pi d$$

- b) (2,5 ptos) Pieza de la derecha: Si aplicamos la ley de Ampere, tomando una amperiana centrada de radio  $r < d/2$ , la intensidad que atraviesa la superficie encerrada por la amperiana es cero. Por esto, en la zona hueca de la pieza de la derecha ( $d/4 < r < d/2$ ), el campo magnético debido a la pieza de la derecha es nulo. Sólo influye por tanto la pieza de la izquierda.

Pieza de la izquierda: El campo magnético que crea la pieza de la izquierda podemos obtenerlo aplicando también la ley de Ampere. Por la misma razón señalada anteriormente, el campo dentro de la superficie cilíndrica es nulo. Para el campo magnético en el exterior tomamos una amperiana centrada de radio  $r > d$

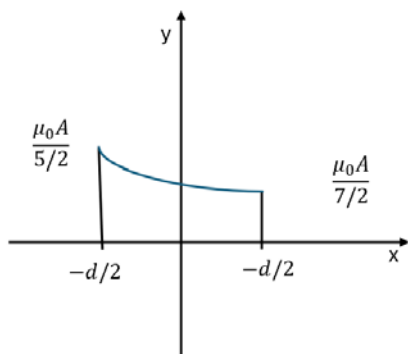
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_2(r)2\pi r$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encerrada} = \mu_0 I_{total} = \mu_0 K 2\pi d = \mu_0 A 2\pi d$$

$$\text{Luego } B_2(r) = \frac{\mu_0 A d}{r}$$

$$\vec{B}_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } r < d \\ \frac{\mu_0 K d}{r} \hat{u}_\phi = \frac{\mu_0 A d}{r} \hat{u}_\phi & \text{si } r > d \end{cases}$$

Representación gráfica: Tenemos que representar, por lo tanto, la función  $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 A d}{r} \hat{u}_\phi$ , que disminuye con la distancia como  $\frac{1}{r}$ . Sólo necesitamos representar cómo varía la componente vertical con la distancia horizontal.



El máximo corresponde a los puntos más cercanos (menor  $r$ ), es decir, para  $x = -d/2$ .

$$B_2 \left( x = 3d - \frac{d}{2} \right) = B_2 \left( x = \frac{5d}{2} \right) = \frac{\mu_0 A d}{\frac{5d}{2}} = \frac{\mu_0 A}{5/2}$$

- c) (2,5 ptos) El par que sufre un momento magnético  $\vec{m}$  debido a un campo magnético externo  $\vec{B}$  es:

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

El campo magnético de la pieza de la izquierda va en la dirección  $x$  (tangente a una circunferencia), y por eso no lo hace girar ( $\vec{m}$  y  $\vec{B}$  están alineados). El campo magnético que lo hará girar será el de la pieza de la derecha, que es radial y tangente a una circunferencia de radio  $r$  (siendo  $r$  la distancia que hay desde el centro de la pieza al punto P, es decir,  $r = 5d$ ). En concreto, es su componente vertical la que lo va a hacer girar. Sólo influye, por tanto, esta componente vertical del campo magnético exterior  $\vec{B}_1$  de la pieza de la derecha.

Campo en el exterior creado por la pieza de la derecha:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1(r) 2\pi r$$

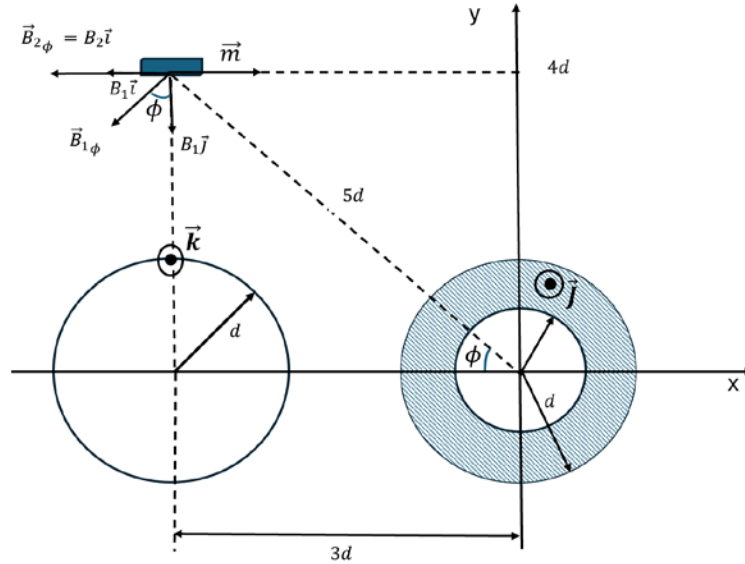
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encerrada}} = \mu_0 I_{\text{total}} = \mu_0 A \pi d$$

$$\text{Luego } \vec{B}_1(r > d) = \frac{\mu_0 I_{\text{total}}}{2\pi r} \hat{u}_\phi = \frac{\mu_0 A \pi d}{2\pi r} \hat{u}_\phi = \frac{\mu_0 A d}{2r} \hat{u}_\phi$$

En el punto donde está el solenoide, el campo será:

$$\vec{B}_1(r = 5d) = \frac{\mu_0 A d}{2 \cdot 5d} \hat{u}_\phi = \frac{\mu_0 A}{10} \hat{u}_\phi$$

El módulo de su componente vertical es:  $B_{1y} = B_1 \cos \phi = \frac{3}{5} \frac{\mu_0 A}{10} = \frac{3}{50} \mu_0 A$



$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}_1 = (N I_0 \pi r_0^2) \vec{u}_x \times \left( \frac{3}{50} \mu_0 A \right) (-\vec{u}_y) = \frac{3}{50} N I_0 \pi r_0^2 \mu_0 A (-\vec{u}_z)$$

- d) (2,5 ptos) En este caso, el campo debido a la pieza de la derecha es nulo porque está en su parte hueca  $\vec{B}_1$ . Esto lo podemos demostrar aplicando la ley de Ampere mediante una amperiana centrada con la pieza, cuyo radio sea  $r < d$  (demostrado en el apartado b). Sólo influye por lo tanto el campo  $\vec{B}_2$  creado por la pieza de la izquierda.

Este campo exterior en el punto  $Q(-d/4, 0, 0)$ , para el cual,  $r = 3d - \frac{d}{4} = \frac{11d}{4}$ , vale:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 K d}{\frac{11d}{4}} \hat{u}_\phi = \frac{4 \mu_0 A}{11} \hat{u}_\phi$$

Como el dipolo es muy pequeño Y está en el eje Y, el campo que sufre en coordenadas cartesianas es:

$$\vec{B}_2 = \frac{4 \mu_0 A}{11} \vec{j}$$

El trabajo para hacer girar el dipolo es:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} N \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m B_2 \sin \theta \, d\theta = m B_2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$



Como inicialmente el dipolo está orientado paralelo al eje y, de la misma que el campo magnético  $B_2$ ,  $\theta_1 = 0^\circ$ . Cuando el dipolo esté girado para orientarse paralelo al eje x, el ángulo  $\theta_2 = 90^\circ$

$$\text{Luego } W = m \frac{4\mu_0 A}{11} (\cos 0^\circ - \cos 90^\circ) = m \frac{4\mu_0 A}{11}$$

El trabajo es positivo porque partimos de una situación de equilibrio estable, en las que el campo y el momento estaban alineados, y tenemos que separarlo de esta posición de equilibrio.

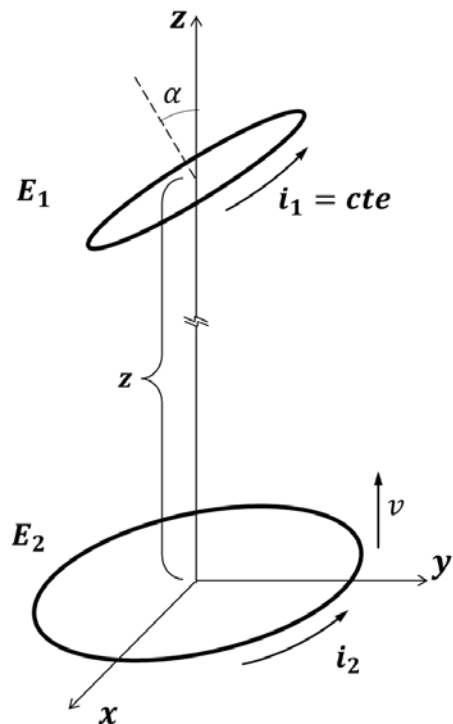
También se puede justificar de la siguiente forma: El campo en el punto Q es vertical y el dipolo magnético inicialmente es también vertical. Al empezar a girar el dipolo hacia la derecha para alinearlo con el eje x, aparece un par que tiende a alinear el dipolo con el campo, o sea un par hacia la izquierda. El agente externo que gira el dipolo tiene por tanto que hacer un par hacia la derecha para anular este par y permitir el movimiento cuasiestático del dipolo. Como el par que hace el agente externo es hacia la derecha y el giro es también hacia la derecha, el trabajo que es necesario que realice el agente externo para mover el dipolo es positivo.

**Problema 3 (2,5 p)**

La figura muestra dos espiras  $E_1$  y  $E_2$  circulares de radios  $a$  y  $b$ , respectivamente. Sus ejes forman un ángulo  $\alpha$  que se mantiene constante a lo largo del tiempo. Por la espira  $E_1$  circula una intensidad  $i_1$  estacionaria y conocida. La espira  $E_2$  se encuentra a una distancia  $z$ , en una zona en que esta distancia es mucho mayor que el radio de las espiras. La espira  $E_2$  se desplaza paralela a sí misma a una velocidad constante  $v$  hacia la espira  $E_1$ .

Se pide:

- Calcular el coeficiente de inducción mutua  $M$  entre ambas espiras. ¿Es constante en el tiempo? Justificar la respuesta y escribir la expresión en caso de que no lo sea.
- Suponiendo que la espira  $E_2$  tiene una resistencia  $R_2$  y que se desprecia el efecto de la autoinducción, determinar la intensidad en  $E_2$  en función del tiempo  $i_2(t)$ .
- Suponiendo conocido  $i_2(t)$ , calcular el par vector (expresado en el sistema de coordenadas de la figura) que ejerce la espira  $E_2$  sobre  $E_1$ .
- Suponiendo que la espira  $E_2$  tiene una resistencia  $R_2$  y un coeficiente de autoinducción  $L_2$  escribir una ecuación diferencial que permita determinar la intensidad en  $E_2$  en función del tiempo  $i_2(t)$ . (No se pide resolver la ecuación diferencial).



**Solución:**

- (4 ptos/10) Calcular el coeficiente de inducción mutua  $M$  entre ambas espiras. ¿Es constante en el tiempo? Justificar la respuesta y escribir la expresión en caso de que no lo sea.**

Las espiras están alejadas una de otra lo suficiente como para suponer que el campo  $\vec{B}$  que la corriente de una de ellas crea en los puntos de la superficie contorneada por la otra es prácticamente uniforme, e igual al valor del campo en el centro de cada una. Así, el valor del campo en los puntos de la superficie contorneada por la espira  $E_1$  debido a la intensidad  $i_2$  lo podemos calcular utilizando las ecuaciones del campo lejano creado por la espira  $E_2$ , cuyo momento dipolar magnético es:

$$\vec{m}_2 = i_2 \pi b^2 \hat{z}$$

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2m_2}{z^3} \hat{z}$$

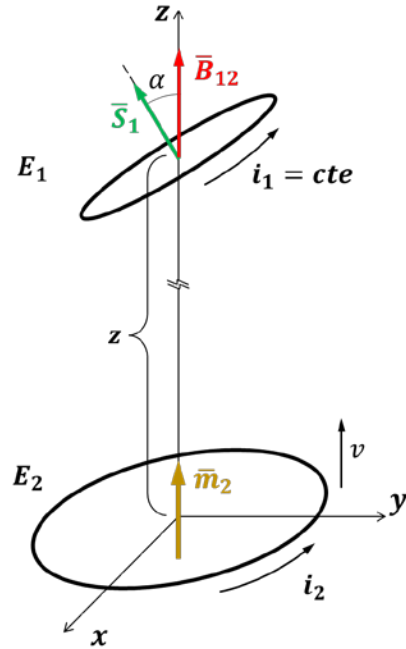
El flujo de este campo a través de la espira  $E_1$ :

$$\phi_{12} = \vec{B}_{12} \cdot \vec{S}_1 = B_{12} \pi a^2 \cos \alpha, \quad y$$

$$M = \frac{\phi_{12}}{i_2} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{\pi a^2 b^2 \cos \alpha}{z^3}$$

La distancia  $z$  entre ambas espiras depende del tiempo según la ecuación  $z = z_0 - vt$ , por tanto  $M$  dependerá del tiempo:

$$M = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{\pi a^2 b^2 \cos \alpha}{(z_0 - vt)^3}$$



- b) (3 ptos/10) Suponiendo que la espira  $E_2$  tiene una resistencia  $R_2$  y que se desprecia el efecto de la autoinducción, determinar la intensidad en  $E_2$  en función del tiempo  $i_2(t)$ .

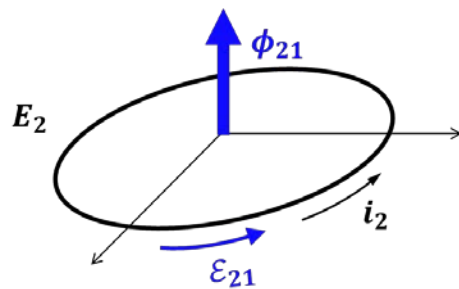
$$\phi_{21} = M i_1 \quad \leftrightarrow \quad \text{Flujo hacia arriba}$$

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\phi_{21}}{dt}; \quad \mathcal{E}_{21} = i_2 R_2$$

$$i_2 = -\frac{1}{R_2} \frac{d(M i_1)}{dt} = -\frac{1}{R_2} \frac{dM}{dt} i_1$$

$$i_2(t) = -\frac{3\mu_0}{2} \cdot \frac{\pi a^2 b^2 \cos \alpha}{R_2} \cdot \frac{v i_1}{(z_0 - vt)^4}$$

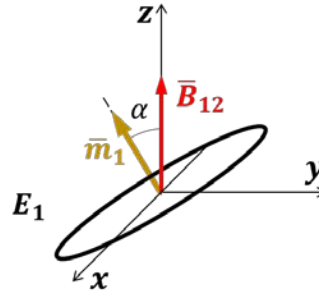
- c) (2 ptos/10) Suponiendo conocido  $i_2(t)$ , calcular el par vector (expresado en el sistema de coordenadas de la figura) que ejerce la espira  $E_2$  sobre  $E_1$ .



$$\bar{N} = \bar{m}_1 \times \bar{B}_{12}$$

$$\bar{N} = \pi a^2 i_1 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_2}{z^3} \cdot \text{sen}\alpha \cdot (-\hat{x})$$

$$\bar{N} = -\frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 i_1}{2} \text{sen}\alpha \cdot \frac{i_2(t)}{(z_0 - vt)^3} \cdot \hat{x}$$



- d) (1 pto/10) Suponiendo que la espira  $E_2$  tiene una resistencia  $R_2$  y un coeficiente de autoinducción  $L_2$  escribir una ecuación diferencial que permita determinar la intensidad en  $E_2$  en función del tiempo  $i_2(t)$ . (No se pide resolver la ecuación diferencial).

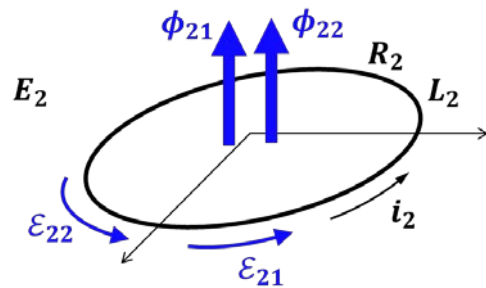
$$\mathcal{E}_{22} + \mathcal{E}_{21} = R_2 i_2(t)$$

$$\mathcal{E}_{22} = -\frac{d\phi_{22}}{dt} = -L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\phi_{21}}{dt} = -\frac{dM(t)}{dt} i_1$$

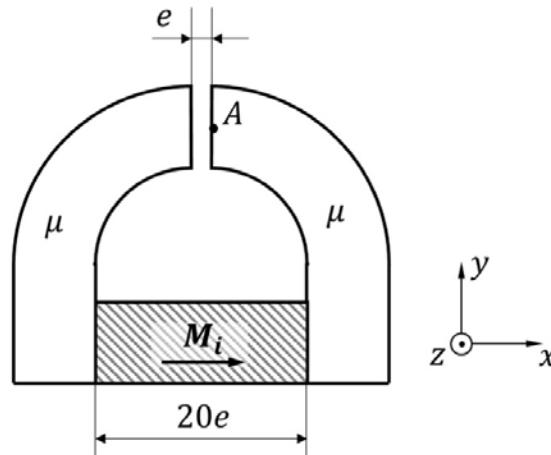
La ecuación diferencial queda:

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) = -\frac{dM(t)}{dt} i_1$$



**Problema 4 (2,5 p)**

Se tiene un circuito magnético como el de la figura.



Está formado por un imán de longitud  $20e$ , con magnetización  $M_i$  hacia la derecha; dos piezas curvadas de material magnético de permeabilidad (o permeabilidad relativa)  $\mu$  y longitud media  $30e$  cada uno; y un entrehierro de longitud  $e$ .

La superficie transversal del circuito es  $S$  y se considera que no hay dispersión en ninguno de sus tramos. Se pide:

- a) Sin hacer ninguna suposición respecto al valor de  $\mu$ , calcular el campo magnético en el entrehierro.

En los apartados siguientes se considera que el material magnético tiene un valor de permitividad  $\mu$  muy grande.

- b) Calcular el vector  $H$  en el interior del imán.  
c) Calcular la corriente de magnetización (vector) en el punto  $A$ , situado en la superficie del material magnético.  
d) Si se sustituye el imán por un tercer tramo de material magnético y se coloca en el mismo un arrollamiento con  $N$  espiras, calcular la intensidad que debería circular por el arrollamiento para conseguir el mismo campo en el entrehierro que con el imán.

**Solución:**

- a) (0,5 ptos.) En este caso no hay corrientes libres, solo corrientes magnetizantes. Introduciendo el valor de  $B$  (que es igual en el material magnético e imán) a partir de la definición de  $H$ , para el caso del imán, se llega a:

$$M_i \cdot l_i = M_i \cdot 20e = \Phi(\mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_{Mi} + \mathcal{R}_e) = \Phi \left( \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{60e}{S} + \frac{1}{\mu_0} \frac{20e}{S} + \frac{1}{\mu_0} \frac{e}{S} \right)$$

Por la conservación del flujo,  $B$  es común para todos ( $\phi = B_{Fe} S_{Fe} = B_e S_e = B_i S_i$ ) por lo que, con solo sustituir y despejar llegamos a:

$$M_i \cdot 20e = B_e \cdot S \left( \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{60e}{S} + \frac{1}{\mu_0} \frac{20e}{S} + \frac{1}{\mu_0} \frac{e}{S} \right)$$

$$\Rightarrow B_e = \frac{M_i 20e}{S \left( \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{60e}{S} + \frac{1}{\mu_0} \frac{20e}{S} + \frac{1}{\mu_0} \frac{e}{S} \right)} = \frac{\mu_0 M_i 20e}{\frac{60e}{\mu} + 20e + e} = \frac{20\mu_0}{\frac{60}{\mu} + 21} M_i$$

Método alternativo: A partir de la ley de Ampere, la circulación de  $H$  es el resultado de las corrientes libres ( $NI$ ). Como en este circuito no hay corrientes libres, la circulación será nula. Además, el circuito puede entenderse como un tubo de flujo en el que las líneas de flujo magnético son constantes, por lo que el flujo se conserva. Como la sección de todo el circuito es la misma, en el hierro (y en el punto A), en el entrehierro y, en el imán, el campo  $B$  tiene el mismo valor.

$$0 = H_{Fe} l_{Fe} + H_e l + H_i l_i = \frac{B_{Fe}}{\mu_0 \mu} 2 \cdot 30e + \frac{B_e}{\mu_0} e + \left( \frac{B_i}{\mu_0} - M_i \right) 20e$$

$$\Rightarrow B_e = \frac{\mu_0 M_i 20e}{\frac{60e}{\mu} + 20e + e} = \frac{20\mu_0}{\frac{60}{\mu} + 21} M_i$$

que girará, por tanto, en sentido antihorario.

b) (0,5 ptos.) Calcular el vector  $H$  en el interior del imán.

$$\vec{H}_i = \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} - \vec{M}_i = \frac{\frac{20\mu_0}{\frac{60}{\mu} + 21} \vec{M}_i}{\mu_0} - \vec{M}_i = \left( \frac{20}{\frac{60}{\mu} + 21} - 1 \right) \vec{M}_i$$

Suponiendo que  $\mu \gg 1$

$$\vec{H}_i = \left( \frac{20}{21} - 1 \right) \vec{M}_i = \left( -\frac{1}{21} \right) \vec{M}_i = -\frac{1}{21} M_i (-\hat{i})$$

c) (0,5 ptos.) Calcular la corriente de magnetización (vector) en el punto A, situado en la superficie del material magnético. Aproximando al final porque  $\mu \gg 1$ , obtenemos:

$$\vec{M}_A = (\mu - 1) \frac{B_A}{\mu_0 \mu} \hat{i} = (\mu - 1) \frac{\frac{20\mu_0}{\frac{60}{\mu} + 21} M_i}{\mu_0 \mu} \hat{i} \approx \frac{20}{21} M_i \hat{i}$$

En el punto A, el vector normal a la superficie del material magnético es  $(-\hat{i})$ . La corriente de magnetización será finalmente:

$$\vec{\kappa}_A = \vec{M}_A \times \hat{n} = \vec{M}_A \times (-\hat{i}) = 0$$

d) (1 pto.) Si se sustituye el imán por un tercer tramo de material magnético y se coloca en el mismo un arrollamiento con  $N$  espiras, calcular la intensidad que debería circular por el arrollamiento para conseguir el mismo campo en el entrehierro que con el imán.

Suponemos ahora que sí que hay corrientes libres. La circulación de  $H$  será:

$$NI = H_{Fe} l_{Fe} + H_e l_e + H_{Fe} l_i = H_{Fe} (l_{Fe} + l_i) + H_e l_e$$

La intensidad solicitada será:

$$I = \frac{H_{Fe}(l_{Fe} + l_i) + H_e l_e}{N} = \frac{\frac{B_{Fe}}{\mu_0 \mu} (60e + 20e) + \frac{B_e}{\mu_0} e}{N} = \frac{\frac{B_e}{\mu} (80e) + B_e e}{\mu_0 N}$$

Suponiendo que  $\mu \gg 1$  y siguiendo el apartado a), sustituyendo el valor de  $B_e$  para el entrehierro en la expresión actual, se obtiene:

$$I = \frac{B_e e}{\mu_0 N} = \frac{20}{21} \mu_0 M_i \frac{e}{\mu_0 N} = \frac{20}{21} \frac{e}{N} M_i$$

Produciendo un  $H_{Fe}$  en el sentido antihorario.

También se podría resolver este apartado utilizando circuitos magnéticos.