Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Marzo 2024

PROBLEMA

Un depósito cilíndrico lleno de agua tiene un orificio circular en su base de radio r. En él, se introduce un tapón de forma cónica atado a un flotador cilíndrico tal y como se muestra en la figura. Además, se tiene un manómetro en U cerrado en uno de sus extremos con un líquido manométrico sobre el que miden las cotas. Una válvula cierra la salida de agua del depósito a través de una tubería circular.

En ausencia de rozamiento con las paredes del orificio, el tapón comenzaría a elevarse para un volumen del flotador sumergido del 90%. Se pide:

a) (7 puntos) Presión del gas contenido en el manómetro.

Se corta la cuerda y se abre completamente la válvula. Para un instante determinado, la superficie libre queda a una cota z=H. Despreciando el efecto sobre el manómetro, calcular:

b) (3 puntos) Expresión matemática de la nueva cota de la superficie libre en función del tiempo y de las variables del problema. Suponer que la cota de la superficie libre se encuentra, en todo momento, en la parte estrecha superior del depósito. Se considerará el instante inicial cuando z=H.

Justificar todas las hipótesis realizadas.

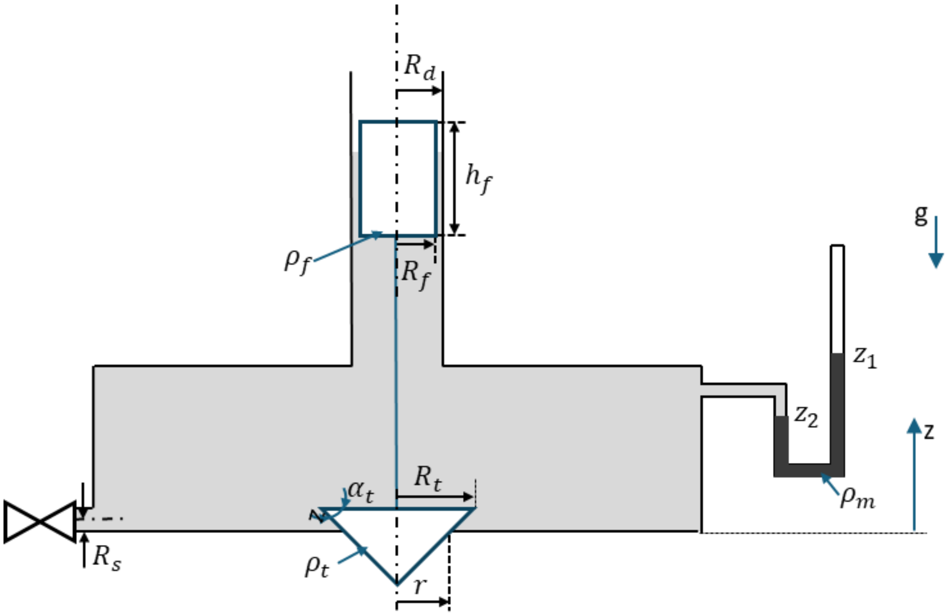
Datos: $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

Flotador	**Tapón**	**Manómetro**	**Depósito**
$R_f = 0{,}1\ m$	$R_t = 0{,}2\ m$	$z_1 = 0{,}4\ m$	R_d
$h_f = 0{,}30\ m$	$\alpha_t = 45°$	$z_2 = 0{,}2\ m$	$\rho = 1000\ kg/m^3$
$\rho_f = 20\ kg/m^3$	$\rho_t = 350\ kg/m^3$	$\rho_m = 900\ kg/m^3$	H
$r = 0{,}07\ m$			R_S

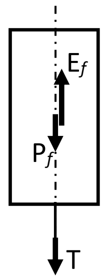
Nota: El volumen de un cono de radio R y altura h es: $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Marzo 2024



a) El flotador está en equilibrio, $\sum \vec{F} = 0$. Su diagrama de cuerpo libre es:



Por tanto, en el eje vertical:

$$E_f - P_f - T = 0$$

donde,

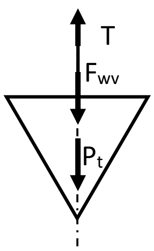
$$E_f = \rho_w g V_{sum_f} = \rho_w g 0.9 V_f = \rho_w g 0.9 \pi R_f^2 h_f$$

$$P_f = \rho_f g V_f = \rho_f g \pi R_f^2 h_f$$

quedando:

$$T = \rho_w g 0.9 \pi R_f^2 h_f - \rho_f g \pi R_f^2 h_f = g \pi R_f^2 h_f \left(0.9 \rho_w - \rho_f\right) = 81.4\ N$$

El tapón también está en equilibrio, $\sum \vec{F} = 0$. Sufre una fuerza vertical hidrostática, que se va a suponer en sentido descendente. Su diagrama de cuerpo libre es:



$$T - F_{wv} - P_t = 0$$

donde,

$$P_t = \rho_t g V_t = \rho_t g \frac{1}{3} \pi R_t^2 h_t = \rho_t g \frac{1}{3} \pi R_t^3 \tan \alpha_t = 28.8\ N$$

Entonces, la fuerza vertical que realiza el agua sobre el tapón es:

$$F_{wv} = T - P_t = 52.6\ N$$

Por otro lado, se calcula la fuerza vertical a partir de los siguientes volúmenes:

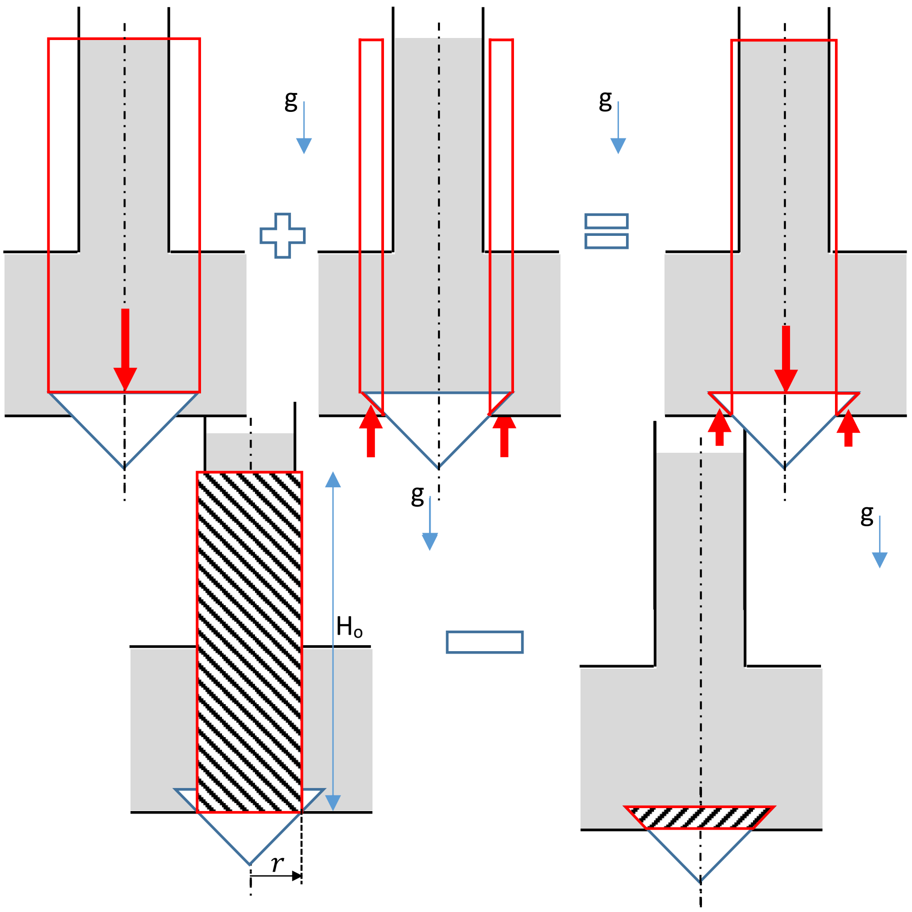
Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Marzo 2024

El

como altura libre,

en el



volumen final se puede evaluar de diferentes formas. Aquí se resuelve un cilindro de radio r y H_o (nivel de la superficie que se desconoce) menos el trono cónico interior del depósito.

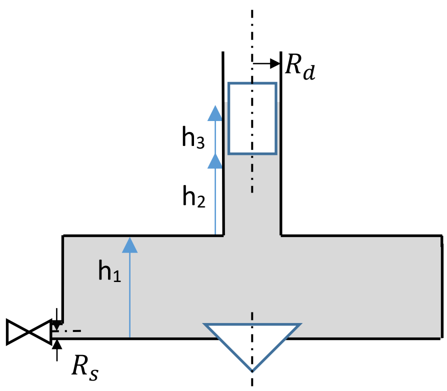
$$F_{wv} = \rho_w g \left[\pi r^2 H_o - \left(\frac{1}{3}\pi R_t^3 \tan\alpha - \frac{1}{3}\pi r^3 \tan\alpha\right)\right] = \rho_w g \pi \left[r^2 H_o - \frac{\tan\alpha}{3}(R_t^3 - r^3)\right] = 52.6\ N$$

De esta expresión se obtiene $H_o = 0.87\ m$. Finalmente, teniendo en cuenta el manómetro, la presión en el fondo del depósito se puede calcular como:

$$\rho_w g H_o = p_{gas} + \rho_m(z_1 - z_2) + \rho_w z_2 \rightarrow p_{gas} = 4799\ Pa$$

b) Al cortar la cuerda, el flotador alcanzará una nueva posición de equilibrio. Se asumirá que mientras se vacía el depósito, la superficie libre desciende lentamente y no hay perturbaciones en la estabilidad del flotador. Este seguirá, por tanto, flotando en la nueva posición de equilibrio y su volumen sumergido no cambiará. Con la ley de la conservación de la masa, se obtiene:

$$0 = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho dV + \iint_{SC} \rho(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA$$



$$0 = \rho\frac{d}{dt}\iiint_{VC} dV + \rho v_s \pi R_s^2$$

El volumen se divide en tres tramos, los correspondientes a las diferentes alturas (h_1, h_2 y h_3). El único volumen que varía en función del tiempo sería el correspondiente a h_2.

$$0 = \rho\frac{d(V_1 + V_2 + V_3)}{dt} + \rho v_s \pi R_s^2 \rightarrow 0 = \rho\frac{dV_2}{dt} + \rho v_s \pi R_s^2$$

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Marzo 2024

$$0 = \rho\pi R_d^2 \frac{dh_2}{dt} + \rho v_s \pi R_s^2 \rightarrow 0 = R_d^2 \frac{dh_2}{dt} + v_s R_s^2$$

Para determinar la velocidad de salida del agua, se aplica Bernoulli entre la superficie libre del depósito (cota $z = h_1 + h_{2_{final}} + h_3$) y la salida de la válvula. Se asumirá que el agua se comporta como fluido ideal:

$$\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z\right)_{\text{superficie libre}} = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z\right)_{\text{s}} \rightarrow v_s = \sqrt{2gz} = \sqrt{2g(h_1 + h_2 + h_3)}$$

Introduciendo la velocidad de salida en la expresión de la conservación de la masa:

$$0 = R_d^2 \frac{dh_2}{dt} + \sqrt{2g(h_1 + h_2 + h_3)} R_s^2$$

$$\frac{dh_2}{\sqrt{(h_1 + h_2 + h_3)}} = -\frac{\sqrt{2\text{g}} R_s^2}{R_d^2} dt \rightarrow \int_{h_{2\,inicial}}^{h_{2final}} \frac{dh_2}{\sqrt{(h_1 + h_2 + h_3)}} = \int_0^t -\frac{\sqrt{2\text{g}} R_s^2}{R_d^2} dt$$

$$\left(h_1 + h_{2_{final}} + h_3\right)^{1/2} - \left(h_1 + h_{2_{inicial}} + h_3\right)^{1/2} = -\frac{\sqrt{2\text{g}} R_s^2}{2R_d^2} t$$

Finalmente, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$z_{final}^{1/2} - H^{1/2} = -\frac{\sqrt{2\text{g}} R_s^2}{2R_d^2} t \rightarrow z_{final} = \left(H^{1/2} - \frac{\sqrt{2\text{g}} R_s^2}{2R_d^2} t\right)^2$$