TEMA 6 – MAGNETOSTÁTICA

Clase 6.1 Dipolos magnéticos

Introducción. Aplicaciones de la magnetostática.

En esta clase y en las que siguen, vamos a estudiar campos magnéticos producidos por corrientes que no varían en el tiempo (estacionarias). Este estudio se denomina magnetostática.

Además de ayudar a entender los fenómenos magnéticos en una versión simplificada, la magnetostática es útil en aplicaciones como los altavoces, los motores de corriente continua, la medida de corrientes (usando el denominado efecto Hall), la detección de partículas mediante la técnica denomina espectrografía de masas, algún tipo de acelerador de partículas (ciclotrón) la obtención de imágenes mediante resonancia magnética (en combinación con campos variables), y otras.

Magnetización frente a carga. Dipolo magnético.

Aunque más adelante veremos que el origen de las fuerzas magnéticas son las corrientes eléctricas, partiremos de la observación de que en la naturaleza existen cuerpos magnetizados, de una forma análoga al hecho de que existen cuerpos cargados. Igual que podemos considerar una carga eléctrica puntual como el elemento de carga más sencillo, definimos el dipolo magnético (que se representará como un vector dadas sus características), como el elemento más sencillo de magnetización.

Las cargas puntuales en reposo se ejercen fuerzas, que se pueden expresar usando el campo electrostático. De una forma análoga los dipolos magnéticos se ejercen pares. Para expresar estas fuerzas se utiliza el campo magnético.

Campo que crea un dipolo magnético:

De esta forma si tenemos un dipolo magnético $\vec{m}$, este creará un campo cuya expresión en coordenadas esféricas es:

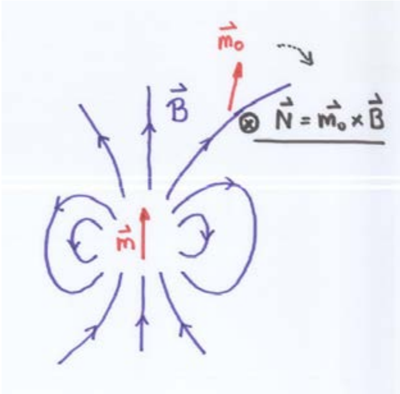
$$\vec{B}\begin{cases} B_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2m}{r^3}cos\theta \\ B_\theta = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m}{r^3}sen\theta \\ B_\Phi = 0 \end{cases}$$

Efecto de un campo magnético sobre un dipolo

El efecto que un dipolo $\vec{m}$ produce sobre otro dipolo $\vec{m}_0$ es un par $\vec{N}$ que se calcula a partir del campo que crea el primero.

$$\vec{N} = \vec{m}_0 \times \vec{B}$$

En general, un dipolo en cualquier campo magnético experimenta un par que responde a la expresión anterior. Este par tiende a alinear el dipolo con el campo.



Se puede observar que la expresión del campo magnético que crea el dipolo magnético es análoga a la del campo eléctrico que crea el dipolo eléctrico ($\vec{p}$) si se hacen las siguientes sustituciones: $E \leftrightarrow B, \mu_0 \leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_0}, m \leftrightarrow p$.

Sin embargo, aunque un dipolo eléctrico puede considerarse como la combinación de dos cargas eléctricas muy próximas, un dipolo magnético es un elemento inseparable. No se ha observado en la naturaleza nada que se pueda considerar un "monopolo magnético".

Magnetización

Propiedad de la materia que hace que se ejerzan pares.

Par entre dos dipolos

Momento magnético multiplicado vectorialmente por el campo magnético.

Campo magnético creado por un dipolo magnético

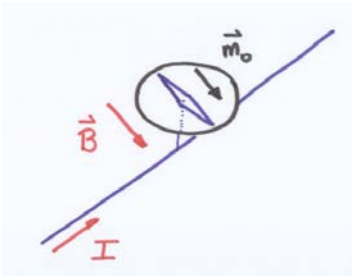
Disminuye con el cubo de la distancia. Forma semejante a la del campo eléctrico que crea un dipolo eléctrico.

Clase 6.2 Campos magnéticos y corrientes

Las corrientes eléctricas producen campos magnéticos.

El experimento de Oersted (1777-1851) puso de manifiesto que existe una relación entre campos magnéticos y corrientes.

Consiste en hacer correr a través de un cable recto, una corriente eléctrica continua *I*, colocándola por debajo de una brújula (a una cierta distancia). Se observa que la aguja se orienta perpendicularmente al cable. También se observa que, si se invierte el sentido de la corriente, la aguja gira 180º, colocándose de nuevo perpendicular al cable pero en sentido contrario.



Este fenómeno se puede interpretar teniendo en cuenta que la corriente crea un campo magnético $\vec{B}$ en la dirección y sentido indicados en la figura (relacionado con el sentido de la corriente *I* según la regla de la mano derecha), y que la aguja imantada se comporta como un dipolo magnético $\vec{m}_0$, que experimenta un par hasta que queda en su posición de equilibrio, con la misma dirección y el mismo sentido que le campo.

Los campos magnéticos ejercen fuerzas sobre las corrientes eléctricas.

A continuación, veremos que las corrientes no solo producen campos magnéticos, como se vio en el apartado anterior sino que experimentan fuerzas cuando se las introduce en un campo magnético.

Fuerza entre dos corrientes paralelas:

Si se colocan dos cables paralelos por los que circulan corrientes paralelas, se observa que aparece una fuerza atractiva entre ambos. Además, si se invierte la corriente de uno de los dos cables, de forma que las corrientes pasen a ser antiparalelas, la fuerza se convierte en repulsiva. También puede comprobarse que la fuerza en cualquiera de los dos casos es proporcional a las corrientes.

Además, se observa que, si se coloca una carga quieta en las proximidades de los cables, no experimenta ninguna fuerza. Por este motivo, sabemos que la carga neta de los cables es nula y que la fuerza que se observa entre ellos no es de naturaleza electrostática. ¿Cómo pueden entonces explicarse estas fuerzas?

Expresión de la fuerza de Lorentz:

Partiremos del hecho experimental de que una carga puntual q en movimiento con velocidad $\vec{v}$, en presencia de una corriente, se ve sometida una fuerza.

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

En esta expresión, $\vec{B}$ es el campo magnético que crea la corriente eléctrica que tiene dirección y sentido conforme a lo visto anteriormente al hablar del experimento de Oersted (regla de la mano derecha).

Esta fuerza se suma a la fuerza electrostática (si la hay, en este caso no la hay). La suma de ambas fuerzas se conoce como fuerza de Lorentz.

$$\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Fuerza sobre una corriente:

En la figura se muestra hacia dónde sería esta fuerza en el caso de una carga positiva que se mueve en sentido antiparalelo a una corriente eléctrica. Se ve que es una fuerza repulsiva, semejante a la que se observa entre dos cables con corrientes antiparalelas.

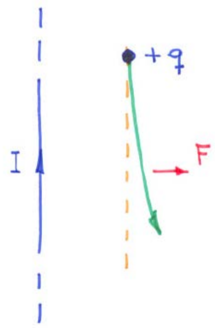


Imagen: JLRM

A partir de lo anterior trataremos de explicar la fuerza entre dos corrientes.

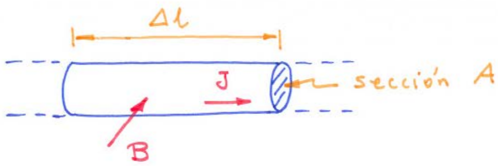


Imagen: JLRM

Vamos a considerar un tramo de cable de longitud Δl y sección *A* por el que circula una densidad de corriente $\vec{J}$, y que está dentro de un campo magnético $\vec{B}$, perperdicular al cable. Según la expresión de la fuerza de Lorenz, este tramo de cable al ser neutro no experimenta fuerza electrostática y experimenta una fuerza magnética $\Delta\vec{F}$ que vale:

$$\Delta\vec{F} = Nq\,\vec{v} \times \vec{B}$$

En esta expresión *N* es el número de portadores de carga (electrones) que hay en el tramo de cable. Si conocemos la densidad de portadores, *n* entonces $N = n.\Delta l.A$ y la expresión anterior se puede operar escribirse en función de la corriente eléctrica ya que $\vec{J} = q.n.\vec{v}, \;\; y \;\; \vec{I} = \vec{J}.A.$

$$\Delta\vec{F} = n.\Delta l.A\,q\,\vec{v} \times \vec{B} = \vec{J}.A.\Delta l \times \vec{B} = \vec{I} \times \vec{B}.\Delta l$$

Para calcular la fuerza total sobre un cable por el que circula una corriente hay que usar la expresión anterior para tramos infinitesimales de longitud *dl* e integrar a lo largo del cable.

$$\vec{F} = I. \int_{CABLE} d\vec{l} \times \vec{B}$$

En esta expresión el vector $\overrightarrow{dl}$ tiene el sentido de la corriente.

Fuerza sobre una espira en un campo magnético uniforme

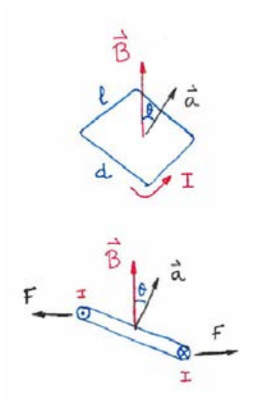
La expresión anterior, si el campo es uniforme, resulta ser cero.

$$\vec{F} = I. \int_{CABLE} d\vec{l} \times \vec{B} = I. \left(\int_{CABLE} d\vec{l} \right) \times \vec{B} = 0$$

El término entre paréntesis es la suma de los vectores que describen la forma de la espira que, al ser cerrada, vale cero.

Par sobre una espira creado por un campo magnético uniforme

Considérese una espira rectangular de dimensiones *d* x *l*, inmersa en un campo magnético *B,* uniforme. Calcularemos el par que le ejerce el campo respecto del eje que pasa por el centro del lado *d*.



Las fuerzas sobre el propio lado *d* no producen momento. Las fuerzas *F* sobre el lado *l* tienen un módulo.

$$|\vec{F}| = I. \left| \int_{CABLE} d\vec{l} \right| .B = IlB$$

El módulo del par *N* creado por estas fuerzas vale (ver imagen):

$N = 2F\frac{d}{2}sen\theta = IlBd.sen\theta$, que expresado como vector es $\vec{N} = I\vec{a} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$

En esta expresión $\vec{m} = I\vec{a}$ se define como momento dipolar magnético de la espira. Como veremos, esta definición tiene sentido puesto que el campo lejano que crea una espira es igual al creado por un dipolo magnético.

Campo creado por una corriente. Ley de Biot-Savart.

Ya hemos mencionado que las corrientes eléctricas crean campos. El campo que crea una corriente *I* que circula por un hilo con una forma determinada puede calcularse usando la ley de Biot-Savart, integrando el campo diferencial que crea cada tramo de espira.

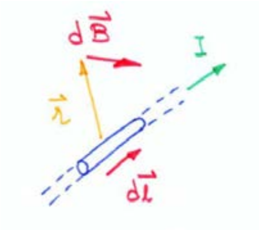


Imagen: JLRM

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Campo lejano creado por una espira

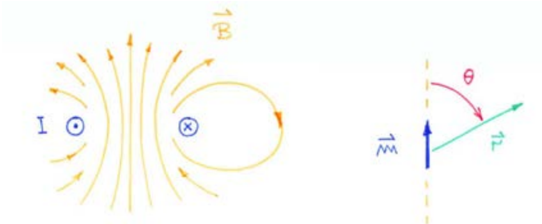
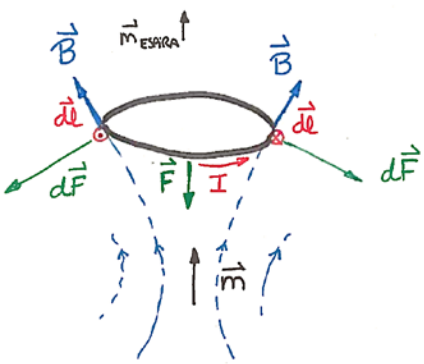


Imagen: JLRM

El campo creado por una espira a una cierta distancia se puede expresar como el campo que crea un dipolo magnético $\vec{m} = I\vec{a}$. En esta expresión *I* es la corriente que circula por la espira y $\vec{a}$ es el vector área perpendicular a la espira.

Ejemplo. Fuerza sobre una espira creada por un momento dipolar magnético

Veremos un ejemplo de cómo es cualitativamente la fuerza que el campo creado por un dipolo magnético (que puede representar a otra espira) crea sobre una espira circular. Las fuerzas sobre cada tramo tienen la dirección $d\vec{l} \times \vec{B}$. En la imagen se ha dibujado el sentido de estas fuerzas sobre dos tramos.



Se puede observar que las fuerzas son hacia abajo y que tienen una componente horizontal que se anula al sumar las componentes horizontales de toda la espira. En total la resultante *F* es hacia abajo. Si se interpreta la espira como otro momento dipolar, se puede entender esta fuerza también como la fuerza de atracción entre polos opuestos de dos imanes ya que el polo Norte de la espira, se enfrenta al polo Sur del dipolo.

Campo magnético y corriente

Una corriente produce un campo magnético.

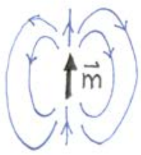
Cargas en movimiento y campo magnético

Una carga en un campo magnético experimenta una fuerza perpendicular al campo y a la velocidad de la carga.

Espiras y campo magnético

Una espira a una cierta distancia se comporta como un dipolo magnético de módulo IS.

Resumen

				 $\vec{m} = I\vec{a}$
	DIPOLO magnético	CARGA en movimiento	Corriente	Espira
Campo magnético que produce	$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{r^3}cos\theta$ $B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}sen\theta$ $B_\Phi = 0$	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^2}$	*Biot-Savart* $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^2}$	*Campo creado por el dipolo*
Fuerza que le ejerce un campo B	$\vec{F} = 0$	$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$	$d\vec{F} = I\cdot\vec{dl}\times\vec{B}$	$si\ B\ uniforme$ $\vec{F} = 0$
Par que le ejerce un campo B	$\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B}$		$d\vec{N} = \vec{r}\times d\vec{F}$	$\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B}$

Clase 6.3 Ley de Ampere

En esta clase vamos a ver herramientas matemáticas de teoría de campos que nos pueden ayudar a entender mejor el campo magnético.

Propiedades del campo magnético

Divergencia del campo magnético

El flujo del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es cero:

$$\oiint_S \vec{B}.d\vec{s} = 0$$

Esta expresión tiene una versión diferencia: la divergencia del campo magnético es cero en cualquier punto.

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

Rotacional del campo magnético. Ley de Ampere.

En cuanto al rotacional, el rotacional del campo magnético está relacionado con la densidad de corriente:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Integrando esta expresión usando el teorema de Stokes (ver clase posterior) se llega a una expresión para la integral del campo magnético a lo largo de un camino cerrado.

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}.ds = \mu_0.I$$

El significado de esta expresión es: “la integral del campo magnético a lo largo de un camino cerrado C es la intensidad que atraviesa una superficie S que se apoya en el camino C”.

Comentarios:

- S será una superficie abierta.
- La integral del campo magnético (incluso en situación estática) depende del camino, al contrario de lo que ocurre con el campo electrostático.

Uso de la ley de Ampere para calcular el campo magnético

La ley de Ampere permite siempre calcular la circulación (integral de línea en un camino cerrado) del campo magnético a partir de la densidad de corriente. Solo en algunas situaciones de simetría la ley de Ampere permite además calcular el campo magnético.

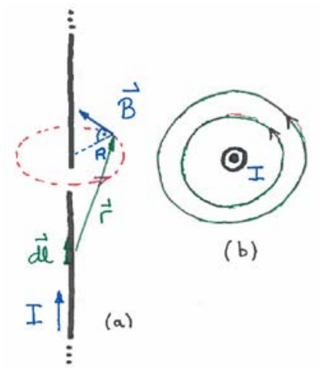
Los pasos que hay que seguir para hacer este cálculo y comprobar si es posible son:

1. Definir una línea cerrada (se suele llamar amperiana).
2. Comprobar que el campo magnético tiene módulo constante (de momento desconocido, lo llamaremos B) en toda la amperiana (o en una parte si en el resto el módulo es cero o B es perpendicular a al amperiana).
3. Comprobar que el campo magnético constante tiene la dirección de la amperiana.
4. Calcular la circulación simplemente multiplicando B.Longitud .
5. Calcular otra vez la circulación, pero ahora aplicado la ley de Ampere. La circulación a lo largo de la línea vale μ_0.I (intensidad que atraviesa la amperiana).
6. Igualar las dos expresiones de la circulación y despejar el campo B.

Si falla alguno de estos pasos, no se puede aplicar este método.

Ejemplo. La ley de Ampere puede usarse para el cálculo del campo que crea un hilo indefinido por el que circula una corriente.

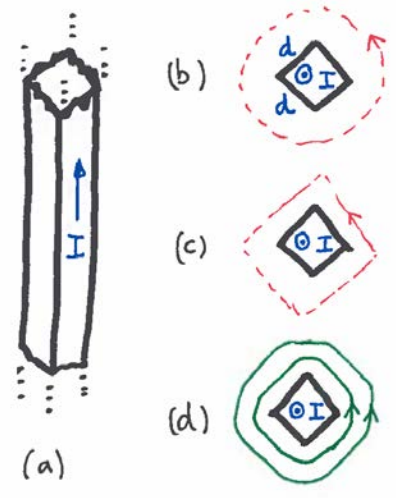
Supongamos que tenemos un cable fino de longitud indefinida, colocado en posición vertical, por el que circula una corriente *I* de abajo a arriba. Vamos a aplicar el método descrito para calcular el campo magnético que crea, usando la ley de Ampere.



1. Definimos como línea amperiana una circunferencia con centro en el eje definido por el cable, contenida en un plano perpendicular al cable. Llamamos *R* al radio de la circunferencia.
2. El problema tiene simetría cilíndrica, y cualquier punto de la circunferencia está en la misma situación respecto del cable, así que podemos afirmar que el módulo del campo es el mismo en toda la amperiana. Llamamos B a ese valor, que aún no conocemos.
3. Aplicando la ley de Biot-Savart (ver figura, parte a) podemos ver que todos los campos diferenciales creados por cualquier tramo del cable sobre un punto de la circunferencia son en la dirección de la circunferencia (dirección definida por $d\vec{l} \times \vec{r}$), así que podemos afirmar que el campo total también lo es.
4. La circulación será B.2πR (positiva, porque hemos supuesto B en sentido antihorario e integramos en sentido antihorario a lo largo de la amperiana).
5. Aplicando la ley de Ampere sabemos que la circulación vale μ_0.I (positiva porque la intensidad atraviesa la superficie que se apoya en la amperiana en sentido positivo, teniendo en cuenta que el sentido positivo debe ser coherente con el sentido de integración de la amperiana según la regla de la mano derecha).
6. Igualando las dos expresiones anteriores y despejando B, llegamos a que $B=\mu_0.I/2\pi r$ El módulo del campo es inversamente proporcional a la distancia al cable. En (b) se representan las líneas de campo.

Ejemplo. La ley de Ampere NO puede usarse para el cálculo del campo que crea un prisma cuadrado indefinido por el que circula una corriente.

Supongamos que tenemos un prisma cuadrado de lado *d* y altura indefinida colocado en posición vertical por el que circula una corriente *I* de abajo a arriba (a), uniformemente distribuida (densidad de corriente uniforme). Vamos a tratar de aplicar el método descrito para calcular el campo magnético que crea, usando la ley de Ampere.



1. Definimos como línea amperiana una circunferencia con centro en el eje vertical del prisma, contenida en un plano perpendicular al eje (b). Llamamos *R* al radio de la circunferencia. Suponemos que *R>d*.
2. El problema no tiene simetría cilíndrica, y distintos puntos de la circunferencia están en distinta situación respecto del prisma, más cerca o más lejos de un lado, o en una diagonal… así que podemos afirmar que el módulo del campo no es el mismo en toda la amperiana.
1. (Volvemos al paso 1) Definimos otra línea amperiana: un cuadrado de lado *D>d* con centro en el eje vertical del prisma, contenido en un plano perpendicular al eje del mismo. (c)
2. El problema no tiene simetría, y distintos puntos del cuaadrado están distinta situación respecto del prisma, más cerca o más lejos de un lado, o en una diagonal… así que podemos afirmar que el módulo del campo no es el mismo en toda la amperiana.
1. (Volvemos de nuevo al paso 1) Podemos seguir probando, pero no encontraremos una línea en que se cumpla que el campo tiene módulo constante (paso 2) y a la vez tiene siempre la dirección de la línea amperiana. (Aunque son curvas complicadas, se pueden encontrar las curvas que cumplen una de las dos condiciones, de hecho, las que cumplen la condición 3 son las líneas de campo magnético (d), pero no cumplen la condición del paso 2, y aunque la cumplieran, su longitud es difícil de calcular)

En conclusión, no es posible usar este método para calcular el campo que crea este este prisma, que es un campo complejo que no sólo depende de la distancia al eje del prisma, y que tiene dirección variable respecto de las circunferencias que tienen centro en el eje del cilindro.

Ejercicio. Cilindro indefinido por el que circula una corriente no uniforme.

Tenemos un cilindro de radio R y altura indefinida colocado en posición vertical por el que circula una corriente I de abajo a arriba, cuya densidad varía con la distancia al eje del cilindro r según la expresión $\vec{J} = A.r.\vec{k}$ en la que A es una constante conocida. Se pide calcular el campo magnético en todos los puntos del espacio. ¿Se puede utilizar la ley de Ampere para calcularlo?

Potencial magnético A

Como el campo magnético depende del camino, no se puede definir un potencial escalar magnético, como para el campo electrostático.

Sin embargo, puede definirse un potencial vector. Debe cumplir por definición:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla}.\vec{A} = 0$$

Tiene la propiedad de que cada una de sus componentes cumplen una ecuación parecida a la ecuación que cumple el potencial eléctrico respecto de la carga, pero en este caso respecto de las componentes de la densidad de corriente:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \quad , \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \quad , \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad \text{que es semejante a } \nabla^2 \mathrm{V} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Campo magnético y flujo

El flujo del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es cero.

Campo magnético y circulación

Para campos magnéticos estáticos la circulación del campo magnético depende de la intensidad que atraviesa la superficie que se apoya en el camino.

Ley de Ampere

Relaciona intensidad y circulación del campo magnético. En situaciones de simetría permite calcular el campo magnético.

Clase 6.4 Corrientes superficiales. Solenoides. Aplicaciones de la ley de Ampere.

En esta clase se presentan algunas configuraciones de corriente habituales para las que en algunos casos se puede utilizar la Ley de Ampere para calcular el campo magnético que producen.

Solenoides

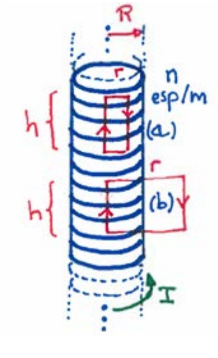
Un solenoide es un conjunto numeroso de espiras. Por ejemplo, un solenoide cilíndrico, es un conjunto de espiras arrolladas en torno a un cilindro. Para caracterizar este solenoide necesitamos conocer las características geométricas del cilindro (altura y radio), el número de espiras del solenoide *N* y la intensidad que circula por las mismas *I*. La intensidad que circula por cada una de las espiras es la misma, porque el solenoide se utiliza para representar una bobina (un arrollamiento de cable) cilíndrica. La forma de un arrollamiento así en realidad es una hélice (una curva en tres dimensiones) pero si el número de espiras es grande, se puede despreciar el avance de cada vuelta del arrollamiento y suponer que equivale a un solenoide.

Cuando los solenoides se idealizan y se consideran de longitud infinita, en lugar de usar el número total de espiras, se utiliza el número de espiras por unidad de longitud *n*. Esta longitud, en el caso del solenoide cilíndrico se mide sobre el eje del cilindro.

Ejemplo. Campo magnético que crea un solenoide indefinido (bobina).

Tenemos una bobina con *n espiras/metro* arrollada sobre un cilindro de radio R y altura indefinida colocado en posición vertical. Por el arrollamiento circula una corriente *I* tal como muestra la figura. Usando la ley de Biot Savart, se ha calculado que en el eje, el campo producido por el solenoide es vertical y tiene un módulo $B = -\mu_0 In$. Se pide calcular el campo en todos los puntos del espacio, sabiendo que la dirección es vertical.

Solución. Consideraremos que el número de espiras es grande y que se puede aproximar el campo de este arrollamiento por el de un solenoide. Si no fuera así el campo no sería vertical en todos los puntos del espacio. Un ejercicio interesante (que se propone al lector) es deducir que el campo que crea el solenoide es vertical en todos los puntos del espacio. Aceptaremos que el campo tiene esta forma, dado que nos lo dice el enunciado.



Como el solenoide es indefinido, el campo no cambia al desplazarnos en vertical. Así que podemos definir una amperiana como la señalada (a) en la figura. Llamando B_{int} al campo que hay en el interior del solenoide, pero fuera del eje (lo suponemos hacia arriba), podemos aplicar Ampere para calcular el campo. Obsérvese que esta línea amperiana no se ve atravesada por ninguna corriente ($r<R$):

$$\mu_0 Inh - B_{int}h = -\mu_0 . 0 \;\Rightarrow\; B_{int} = \mu_0 In$$

Este campo tiene valor constante en todo el interior del solenoide.

Para calcular el campo en el exterior del solenoide podemos definir una amperiana como la señalada (b). Llamando B_{ext} al campo que hay en el exterior del solenoide (lo suponemos hacia arriba), podemos aplicar Ampere para calcular el campo. Obsérvese que esta línea amperiana (en la que *r>R*) se ve atravesada por una corriente *n.I* .

$$\mu_0 nIh - B_{ext}h = -\mu_0 nIh \Rightarrow B_{ext} = 0$$

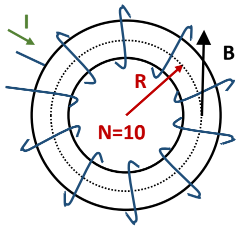
No hay campo en el exterior del solenoide.

Ejercicio. Forma del campo magnético que crea un solenoide indefinido.

Tenemos un solenoide cilíndrico con *n espiras/metro* arrollado sobre un cilindro de radio R y altura indefinida colocado en posición vertical. Usando la ley de Biot Savart, se ha calculado que en el eje, el campo producido por el solenoide es vertical y tiene un módulo $B = -\mu_0 In$ Se pide demostrar que en todos los puntos del espacio, el campo es vertical. Utilizar las propiedades del campo magnético.

Ejemplo. Campo magnético que crea un solenoide toroidal.

Un solenoide toroidal es un arrollamiento hecho sobre un toro, por el que circula una corriente I. Se pide calcular el campo a una distancia *R* del eje en el interior y en el exterior de un solenoide toroidal con *N* espiras, sabiendo que las líneas de campo son circunferencias con centro en el centro del toro en torno al eje que atraviesa el centro del toro sin tocarlo (perpendicular a la figura).



Llamamos *B* al módulo del campo en una línea que está dentro del solenoide a distancia *R*. Por simetría valdrá lo mismo en todos los puntos, y por el enunciado, será siempre tangente a una circunferencia de radio *R* como la de la figura, que utilizaremos como amperiana. Calculando la circulación en sentido antihorario, por definición por un lado y por Ampere por otro (teniendo cuidado con los criterios de signos) e igualando, tenemos:

$$B.2\pi R = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

Si el punto está fuera del solenoide, haciendo el mismo razonamiento, pero teniendo en cuenta que al aplicar la ley de Ampere, la circulación es 0, ya que la intensidad entra y sale N veces a través del círculo que se apoya en la circunferencia, se llega a que el campo es cero:

$$B.2\pi R = 0 \Rightarrow B = 0$$

Ejercicio. Forma del campo magnético que crea un solenoide toroidal.

Demostrar geométricamente que el campo que crea un solenoide toroidal (tanto dentro como fuera del toro) con un número elevado de espiras, tiene la forma tal que las líneas de campo son circunferencias con centro en el centro del toro en torno al eje que atraviesa el centro del toro sin tocarlo. (Nota: obsérvese que una vez demostrado esto, a partir del cálculo realizado en el ejemplo anterior, se llega a que en realidad, en el exterior el campo es cero.)

Corrientes superficiales.

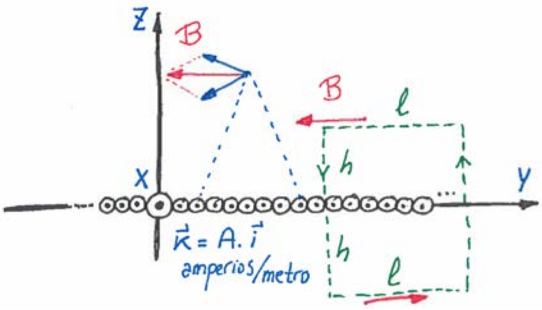
Del mismo modo que en algunos casos es cómodo considerar que la carga se distribuye en la superficie de un material, también puede ser útil considerar que esta carga superficial se mueve, con lo que tenemos una corriente superficial.

La corriente superficial se define mediante una **densidad de corriente superficial** que se mide en Amperios/metro (no metro cuadrado, sino metro). Esto se debe a que se considera la corriente que atraviesa una determinada línea. La densidad de corriente superficial es una función vectorial que señala en cada punto en la dirección en la que circula la corriente superficial.

Ejemplo. Lámina de tamaño indefinido por la que circula una corriente.

Considérese una lámina indefinida de espesor despreciable que coincide con el plano XY, por la que circula una densidad de corriente constante de módulo conocido *A*, en la dirección del eje X. $\vec{\kappa} = A\vec{\imath}$ Se pide determinar el campo magnético que crea esta lámina en todos los puntos del espacio.

En primer lugar, se puede deducir la dirección del campo en un punto por encima de la lámina (z>0) teniendo en cuenta que es la suma del campo que crean parejas de hilos como indica la figura. El campo por encima de la placa es en el sentido negativo del eje Y. Razonando de forma similar se llega a que por debajo de la lámina el campo es en el sentido positivo del eje Y.



Ahora tomamos como línea amperiana un rectángulo como el que se indica en la figura, de lados *l* y *2h*. Calculando la circulación por un lado por definición y por otro usando la ley de Ampere e igualando se llega a que:

$$B.2l = \mu_0 l A \Rightarrow B = \frac{\mu_0 A}{2}$$

El módulo del campo no depende de la distancia a la lámina.

Ejercicio. Campo creado por dos láminas indefinidas

Considérese una lámina indefinida de espesor despreciable que coincide con el plano XY, por la que circula una densidad de corriente constante de módulo conocido *A*, en la dirección del eje X. $\vec{\kappa} = A\vec{\imath}$. Además hay una segunda lámina, paralela a la primera, a una distancia ***d*** por encima de la misma por la que circula una corriente superficial $\vec{\kappa} = -A\vec{\imath}$. *Se* pide determinar el campo magnético que crea esta pareja de láminas en todo el espacio.

Ejemplo. Cilindro indefinido por el que circula una corriente superficial en la dirección del eje.

Tenemos una superficie cilíndrica de radio *R* y longitud indefinida. Por esta superficie circula una corriente superficial de valor $\vec{\kappa} = A\vec{k}$ (en la dirección del eje Z), *A* es una constante conocida. *Se* pide determinar el campo magnético en todo el espacio.

Ejemplo. Cilindro indefinido por el que circula una corriente superficial en la dirección trasversal.

Tenemos una superficie cilíndrica de radio *R* y longitud indefinida. Por esta superficie circula una corriente superficial de valor $\vec{\kappa} = A\vec{u}_\theta$ (en la dirección trasversal de coordenadas cilíndricas), *A* es una constante conocida. *Se* pide determinar el campo magnético en todo el espacio.

Clase 6.5 Circulación y rotacional

¿Qué es el rotacional?

El rotacional es un operador diferencial relacionado con la circulación (integral a través de una línea cerrada) de un campo, y que nos será útil para trabajar con campos electromagnéticos.

Es una función vectorial (o sea, tiene un valor que es vectorial, que puede ser distinto en cada punto del espacio). Indica la circulación por área en cada punto del espacio cuando se calcula sobre un camino cerrado (una curva cerrada) muy pequeño. Como el valor de esta "densidad de circulación" depende de la orientación del camino, el rotacional es un vector. Basta con proyectarlo sobre la dirección perpendicular al camino para saber su valor.

Expresado matemáticamente, el rotacional de un campo genérico $\vec{F}$ proyectado sobre una dirección definida por el vector unitario $\vec{n}_i$ es el límite del cociente entre la circulación Γ_i de $\vec{F}$ y el área a_i, perpendicular a $\hat{n}_i$, rodeada por el camino C_i. (Que es el camino sobre el cual calculamos la circulación).

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}).\hat{n}_i = \lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} \qquad donde\ \Gamma_i = \oint_{C_i} \vec{F}.d\vec{l}$$

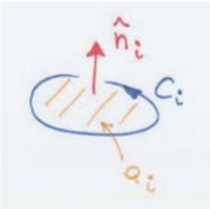


Imagen: JLRM

El rotacional se representa como el producto vectorial del vector simbólico nabla ($\vec{\nabla}$) por el campo: $\vec{\nabla} \times \vec{F}$

Obsérvese que el operador rotacional actúa sobre un campo vectorial y devuelve un campo igualmente vectorial.

Rotacional del campo magnético

Aplicando la definición del rotacional al campo magnético y teniendo en cuenta la ley de Ampere, se llega a la conclusión de que vale μ_0 por el vector densidad de corriente en cada punto.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Efectivamente si consideramos un camino de integración infinitesimal C_i, podemos calcular la circulación del campo magnético a lo largo de ese camino aplicando la ley de Ampere, la circulación valdrá μ_0 por la intensidad que lo atraviesa, I_i . Al dividir por el área a_i obtenemos la densidad de corriente J_i a través de ese camino. El valor $\mu_0\vec{J}$ cumple que al proyectarlo sobre el vector normal de un camino, multiplicándolo escalarmente por el vector $\hat{n}_i$, normal al área a_i da la densidad de corriente J_i a través de esa área, por lo que, aplicando la definición de este operador, su valor coincide con el del rotacional.

$$\lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} = \lim_{a_i \to 0} \frac{\oint_{C_i} \vec{B}.d\vec{l}}{a_i} = \lim_{a_i \to 0} \frac{\mu_0 I_i}{a_i} = \mu_0 J_i = (\vec{\nabla} \times \mu_0 \vec{J}).\hat{n}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Ejercicio. Se sabe que el campo magnético creado por una distribución de corriente es (expresado en coordenadas cilíndricas $[\rho, \varphi, z]$):

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_0 \rho}{2} \vec{u}_\varphi & si\ \rho \leq R \\ \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho} \vec{u}_\varphi & si\ \rho > R \end{cases}$$

Se pide determinar la densidad de corriente en todos los puntos del espacio, utilizando la expresión del rotacional del campo magnético. Solución: $\vec{J} = J_0 \vec{k}$ si $\rho \leq R$; $\vec{J} = 0$ si $\rho > R$

Ejercicio. Se sabe que el campo magnético creado por una distribución de corriente es (expresado en coordenadas cilíndricas $[\rho, \varphi, z]$):

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_0 \rho}{2} \vec{u}_\varphi & si\ \rho \leq R \\ \left(\frac{\mu_0 J_0 R^2 + A}{2\rho}\right) \vec{u}_\varphi & si\ \rho > R \end{cases}$$

Se pide determinar la densidad de corriente en todos los puntos del espacio, prestando atención a una posible corriente superficial en $\rho = R$. ¿Es suficiente con usar el rotacional en este caso? Solución: $\vec{J} = J_0 \vec{k}$ si $\rho \leq R$; $\vec{J} = 0$ si $\rho > R$; Corriente superficial: $\vec{\kappa} = \frac{A}{2\mu_0 R} \vec{k}$ en $\rho = R$

Teorema de Stokes

Se puede calcular la circulación de un campo cualquiera $\vec{F}$, a través de un camino finito como la suma de la circulación sobre un conjunto de caminos (pueden ser dos o pueden ser un valor mayor, incluso un número infinito). Esto se debe a que la circulación en los tramos internos se anula entre los dos caminos adyacentes.

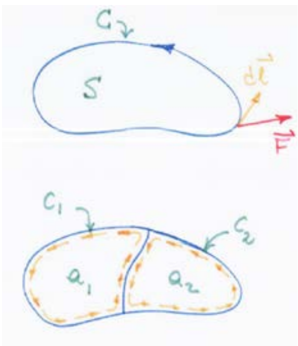


Imagen: JLRM

$$\Gamma \equiv \oint_C \vec{F}.d\vec{l} = \oint_{C_1} \vec{F}.d\vec{l} + \oint_{C_2} \vec{F}.d\vec{l} = \sum_i \oint_{C_i} \vec{F}.d\vec{l}$$

Si esta suma se hace para infinitos caminos infinitesimales, esta expresión puede calcularse usando el rotacional, ya que está relacionado con la circulación a través de pequeños caminos.

$$\Gamma = \sum_i \oint_{C_i} \vec{F}.d\vec{l} = \sum_i a_i \frac{\oint_{C_i} \vec{F}.d\vec{l}}{a_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} \Gamma = \sum_i a_i(\vec{\nabla}\times\vec{F}).\hat{n}_i = \oiint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}.d\vec{a}$$

El teorema de Stokes afirma que la circulación de un campo a través de un camino *C* cerrado es el flujo de su rotacional a través de una superficie *S* que se apoya en ese camino.

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{l} = \oiint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}.d\vec{a}$$

Teorema de Stokes y ley de Ampere

Si se aplica el teorema de Stokes a la expresión del rotacional del campo magnético se llega a la ley de Ampere, que ya habíamos enunciado anteriormente.

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \oiint_S \vec{\nabla}\times\vec{B}.d\vec{a} = \oiint_S \mu_0\vec{J}.d\vec{a} = \mu_0 I$$

El significado de esta expresión es: "la integral del campo magnético a lo largo de un camino cerrado C es la intensidad que atraviesa una superficie a que se apoya en el camino C".

Circulación del campo magnético. Trabajo de las fuerzas magnéticas.

A diferencia del campo electrostático, cuyo rotacional es cero, el rotacional del campo magnético no es igual a cero. Eso quiere decir, a partir de la definición de rotacional, que a diferencia del campo electrostático para el que la integral de línea a lo largo de cualquier camino cerrado es cero, para el campo magnético, la integral a lo largo de una línea cerrada no es necesariamente cero.

En el caso del campo electrostático, como la fuerza es en la dirección del campo electrostático, las integrales de línea de este campo están directamente relacionadas con el trabajo que hay que hacer para desplazar cargas en el campo, y al ser cero en caminos cerrados, el hecho de que el rotacional sea cero, supone que el campo es conservativo.

A partir de lo anterior, podemos hacernos la pregunta de si el campo magnético es conservativo.

Para responder esta pregunta hay que tener en cuenta que a diferencia de las fuerzas electrostáticas, las fuerzas magnéticas no son en la dirección del campo magnético, sino que son en la dirección $\vec{v}\times\vec{B}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula que siente la fuerza. Por lo tant,o el rotacional del campo magnético no nos da información sobre este trabajo.

Aparentemente necesitaríamos saber la velocidad de la partícula para evaluar el trabajo de la fuerza magnética, sin embargo, al ser ésta siempre perpendicular a la velocidad de la partícula, el trabajo que produce es siempre cero.

Rotacional y circulación

El rotacional (proyectado) es la circulación por unidad de área para áreas muy pequeñas.

Rotacional del campo magnetostático

Es proporcional a la intensidad que atraviesa el camino.

Anexo: resumen magnetostática