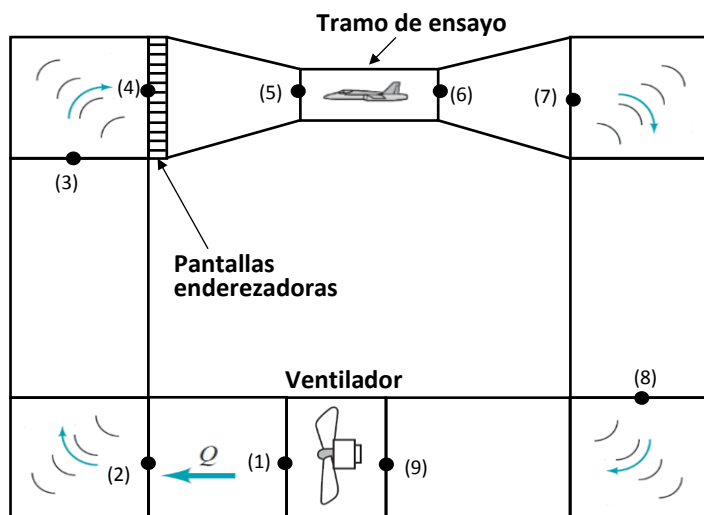


PROBLEMA 1

En la figura se puede ver un túnel de viento construido para ensayar pequeños modelos a escala. El aire a 22°C ($\gamma=1.4$, $R=0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$, $\rho=1.18 \text{ kg/m}^3$) fluye por el tramo de ensayo (entre las secciones (5) y (6)) con una velocidad de $v_s=60 \text{ m/s}$. El movimiento del aire es producido por un ventilador (tratarlo como una bomba) situado entre las secciones (9) y (1). Todos los conductos son de sección cuadrada: el del tramo de ensayo de lado $L_1=0.6 \text{ m}$ y el resto de la instalación de lado $L_2=2 \text{ m}$ (salvo las transiciones de un tipo de conducto a otro, que se hacen con un difusor y una tobera, y las esquinas). Tomar $g=9.81 \text{ m/s}^2$.

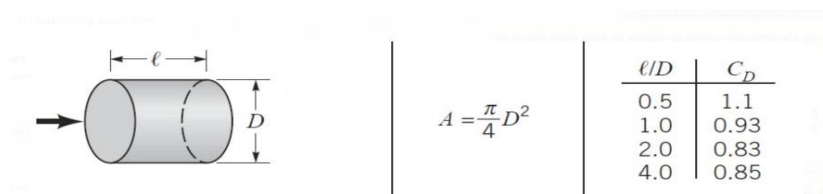


Los coeficientes de pérdida de carga a tener en cuenta, referidos a la sección de más velocidad, son:

$K_{\text{esquinas}} (2,3,7,8)$	0.2
$K_{\text{enderezador}} (4)$	4
$K_{\text{tobera}} (4-5)$	0.2
$K_{\text{difusor cónico}} (6-7)$	0.6

Se pide:

- (2 puntos) Calcular la pérdida de carga total en la instalación (m), despreciando la pérdida de carga primaria.
- (2 puntos) Justificar que, con los datos del problema, se puede usar la hipótesis de fluido incompresible.
- (0.5 puntos) Calcular el incremento de presión entre ambos lados del ventilador (kPa)
- (0.5 puntos) Calcular la potencia que suministra (kW)
- (1.25 puntos) Suponiendo que la potencia del ventilador (P) es función de su diámetro (D), de la densidad del fluido (ρ), de la velocidad del giro (ω) y del caudal (Q), y asumiendo semejanza completa, si la velocidad de giro del ventilador se multiplica por dos, ¿por qué factor se multiplica la potencia del ventilador?
- (1.25 puntos) ¿Y el caudal?
- ~~(1 punto) Se ensaya en el túnel de viento una pieza de forma cilíndrica, como la que se muestra en la figura, de $D=0.18 \text{ m}$ y $l=0.36 \text{ m}$, colocada paralela a la corriente de aire. Para la velocidad del aire $v_s=50 \text{ m/s}$, ¿cuánto vale la fuerza de resistencia (drag) en N? (Dar el resultado con 2 decimales)~~



~~(0.5 puntos) ¿Cuál sería la fuerza de sustentación (lift) en N para esa geometría y con los datos del problema? Dar el resultado con 2 decimales.~~

- (1 punto) Justificar la relación que existe entre los valores de C_d y de l/D en la tabla anterior.

Resolución

1. Calcular la pérdida de carga total en la instalación (m), despreciando la pérdida de carga primaria.

La pérdida de carga total de una instalación se compone, en general, de la pérdida de carga primaria y la pérdida de carga secundaria. En este caso, se dice expresamente que la pérdida de carga primaria se desprecia, por lo que únicamente se considera la secundaria.

$$\sum_{\text{Cada elemento}} h_m = \sum_{2,3,7,8} h_{\text{esquina}} + h_{\text{enderezador}} + h_{\text{tobera}} + h_{\text{difusor}}$$

$$\sum_{\text{Cada elemento}} h_m = K_{\text{esquina},2} \frac{v_2^2}{2g} + K_{\text{esquina},3} \frac{v_3^2}{2g} + K_{\text{esquina},7} \frac{v_7^2}{2g} + K_{\text{esquina},8} \frac{v_8^2}{2g} + K_{\text{enderezador}} \frac{v_4^2}{2g}$$

$$+ K_{\text{tobera}} \frac{v_5^2}{2g} + K_{\text{difusor}} \frac{v_6^2}{2g}$$

Los coeficientes de pérdida de carga vienen dados en la tabla. Conocemos la velocidad en la sección 5 (v_5) y a partir de ella se pueden obtener las velocidades del resto de secciones, aplicando la ecuación de conservación de la masa (continuidad). Como el caudal es constante, para este valor de velocidad del enunciado (60 m/s):

$$Q = v_5 A_5 = v_5 L_1^2 = 60 \cdot 0.6^2 = 21.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_2 = v_3 = v_4 = v_7 = v_8 = \frac{Q}{L_2^2} = \frac{21.6}{2^2} = 5.40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow v_6 = v_5 = 60 \text{ m/s}$$

$$\sum_{\text{Cada elemento}} h_m = \frac{1}{2g} \left((4 \cdot K_{\text{esquina}} + K_{\text{enderezador}}) v_2^2 + (K_{\text{tobera}} + K_{\text{difusor}}) \cdot v_5^2 \right) = 153.92 \text{ m}$$

2. Justificar que, con los datos del problema, se puede usar la hipótesis de fluido incompresible.

Se puede suponer fluido incompresible si $Ma < 0.3$. Se calcula el número de Ma para la velocidad más alta de la instalación (v_5):

$$Ma = \frac{v_5}{a}$$

El valor de la velocidad del sonido se calcula con los datos del aire, suponiendo comportamiento de gas perfecto:

$$a = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot (22 + 273)} = 344.28 \text{ m/s}$$

3. Calcular el incremento de presión entre ambos lados del ventilador (kPa) (0.5 puntos)

Aplicando Bernoulli entre la salida (1) y la entrada (9) del ventilador:

$$\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + z \right)_1 - h_{turb} + h_{bomb} = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + z \right)_9 + \sum_{\text{Cada tramo recto}} h_f + \sum_{\text{Cada elemento}} h_m$$

1. Como la sección es la misma en la entrada y la salida, la velocidad es la misma y se cancelan esos dos términos.
2. No hay diferencia de cotas entre la entrada y la salida.

3. No hay bombas ni turbinas (desde (1) hasta (9) no se pasa por el ventilador).
4. Se desprecian las pérdidas primarias

Por tanto:

$$\Delta p = \frac{p_1 - p_9}{\rho g} = \sum_{\text{Cada elemento}} h_m$$

Para el valor concreto de la velocidad del apartado a),

$$\Delta p = p_1 - p_9 = \rho g \left(\sum_{\text{Cada elemento}} h_m \right) = 1781.78 \text{ Pa}$$

4. Calcular la potencia que suministra (kW) (0.5 puntos)

Aplicando Bernoulli entre la entrada (9) y la salida (1) del ventilador:

$$\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + z \right)_1 - h_{turb} + h_{bomb} = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + z \right)_9 + \sum_{\text{Cada tramo recto}} h_f + \sum_{\text{Cada elemento}} h_m$$

1. Como la sección es la misma en la entrada y la salida, la velocidad es la misma y se cancelan esos dos términos.
2. No hay diferencia de cotas entre la entrada y la salida.
3. No hay turbinas.
4. No hay pérdidas.

$$\frac{p_1 - p_9}{\rho g} = h_{\text{ventilador}}$$

Por lo que, según los valores de los apartados anteriores:

$$P = Q \rho g h_{\text{ventilador}} = Q \Delta p = 38486.47 \text{ W}$$

5. Suponiendo que la potencia del ventilador (P) es función de su diámetro (D), de la densidad del fluido (ρ), de la velocidad del giro (ω) y del caudal (Q), y asumiendo semejanza completa, si la velocidad de giro del ventilador se multiplica por dos, ¿por qué factor se multiplica la potencia del ventilador? (1.25 puntos)

Dimensiones: $n = 5$ variables: P, D, ρ, ω, Q .

Dependiente:

$$P = [W] = \left[\frac{J}{s} \right] = \left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot s} \right] = [ML^2 T^{-3}];$$

Independientes:

$$D = [m] = [L];$$

$$\rho = [kg/m^3] = [ML^{-3}];$$

$$\omega = [rad/s] = [T^{-1}];$$

$$Q = [m^3/s] = [L^3 T^{-1}];$$

Determinación de j: $j = 3 = [M, L, T]$.

Grupo dimensional: ρ, ω, D .

$$\rho^a \omega^b D^c = [ML^{-3}]^a [T^{-1}]^b [L]^c = M^0 L^0 T^0$$

$$M \rightarrow a = 0$$

$$L \rightarrow -3a + c = 0$$

$$T \rightarrow -b = 0$$

Se obtiene $a = b = c = 0$, por lo que ρ, ω y D forman un grupo dimensional.

Grupos adimensionales: $k = n - j = 5 - 3 = 2$

El primer grupo haremos que contenga la variable P :

$$\Pi_{dep} = P \rho^a \omega^b D^c = [ML^2T^{-3}][ML^{-3}]^a [T^{-1}]^b [L]^c = M^0 L^0 T^0$$

$$M \rightarrow 1 + a = 0$$

$$L \rightarrow 2 - 3a + c = 0$$

$$T \rightarrow -3 - b = 0$$

Se obtiene $a = -1; b = -3; c = -5$;

$$\Pi_{dep} = P \rho^{-1} \omega^{-3} D^{-5} = \frac{P}{\rho \omega^3 D^5}$$

El siguiente grupo adimensional se obtiene agrupando las variables seleccionadas como grupo dimensional con la otra variable independiente (Q):

$$\Pi_1 = Q \rho^a \omega^b D^c = [L^3 T^{-1}][ML^{-3}]^a [T^{-1}]^b [L]^c$$

$$M \rightarrow a = 0$$

$$L \rightarrow 3 - 3a + c = 0$$

$$T \rightarrow -1 - b = 0$$

Se obtiene $a = 0; b = -1; c = -3$;

$$\Pi_1 = Q \rho^0 \omega^{-1} D^{-3} = \frac{Q}{\omega D^3}$$

Por tanto:

$$\Pi_{dep} = f(\Pi_1)$$

$$\frac{P}{\rho \omega^3 D^5} = f\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right)$$

Asumiendo semejanza completa, los números adimensionales deben tener el mismo valor al cambiar las condiciones de ensayo. Por tanto, si se duplica la velocidad de giro, como ρ y D se mantienen:

$$\left(\frac{P}{\rho \omega^3 D^5}\right)_1 = \left(\frac{P}{\rho \omega^3 D^5}\right)_2$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cancel{\rho_1} \cdot \omega_1^3 \cdot \cancel{D_1^5}}{\cancel{\rho_2} \cdot \omega_2^3 \cdot \cancel{D_2^5}} \rightarrow P_2 = P_1 \frac{\omega_2^3}{\omega_1^3}$$

Para el caso en el que $\omega_2 = 2\omega_1$, entonces $P_2 = P_1 \frac{\omega_2^3}{\omega_1^3} = P_1 \cdot 2^3 = 8P_1$

6. ¿Y el caudal? (1.25 puntos).

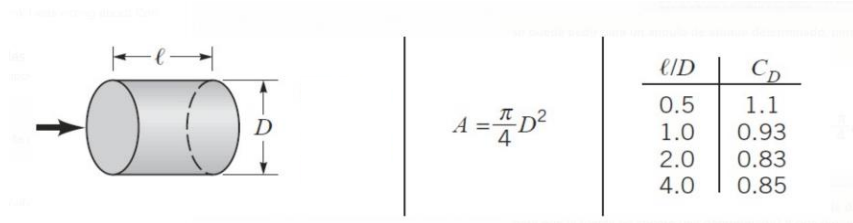
De la semejanza completa, por la misma razón que en el apartado anterior:

$$\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right)_1 = \left(\frac{Q}{\omega D^3}\right)_2$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{D_1^3}{D_2^3} \rightarrow Q_2 = Q_1 \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Para el caso en el que $\omega_2 = 2\omega_1$, entonces $Q_2 = Q_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} = Q_1 \cdot 2 = 2Q_1$

7. Se ensaya en el túnel de viento una pieza de forma cilíndrica, como la que se muestra en la figura, de $D=0.18$ m y $l=0.36$ m, colocada paralela a la corriente de aire.



Para la velocidad del aire $v_s=50$ m/s, ¿cuánto vale la fuerza de resistencia (drag) en N? (Dar el resultado con 2 decimales)

Para la geometría dada, $l/D=0.36/0.18=2$, por lo que, según la tabla, $C_D = 0.83$

La fuerza de resistencia tiene la siguiente expresión:

$$F_D = C_D \frac{1}{2} \rho V^2 A = 31.15 \text{ N}$$

8. ¿Cuál sería la fuerza de sustentación (lift) en N para esa geometría y con los datos del problema? Dar el resultado con 2 decimales.

Por tratarse de un cuerpo simétrico respecto de un plano paralelo al de la velocidad incidente, no se produce fuerza de sustentación, ya que la presión sobre la superficie inferior es igual a la de la superficie superior, no habiendo por tanto fuerza resultante según la dirección de la sustentación.

9. Justificar la relación que existe entre los valores de C_d y de l/D en la tabla anterior.

El mayor coeficiente de resistencia corresponde a la geometría de $l/D=0.5$, es decir, un cilindro muy corto. La resistencia es grande porque corresponde a un cuerpo romo, con gran desprendimiento de capa límite y por tanto, alto valor de diferencia de presiones delante y detrás del cilindro.

Al aumentar l/D , el cilindro va haciéndose más largo y siendo más similar a un cuerpo fuselado, por lo que disminuye el coeficiente de resistencia, por disminuir la diferencia de presiones delante y detrás.

Llega un momento en que aumenta tanto de longitud que las pérdidas por fricción en la superficie empiezan a ser predominantes y el C_d aumenta.