COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI

ICAI – GITI

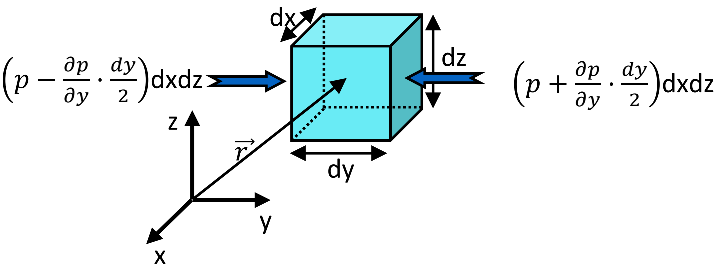
Mecánica de Fluidos

Tema 2: Hidrostática

comillas.edu

Resultante de las fuerzas de presión

- La presión no produce fuerza resultante sobre una partícula fluida, a menos que varíe espacialmente.



$$\begin{cases} d\vec{F}_{p,x} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{dxdydz}\cdot\vec{\imath} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{dV}\cdot\vec{\imath} \\ d\vec{F}_{p,y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y}\,\mathrm{dxdydz}\cdot\vec{\jmath} = -\dfrac{\partial p}{\partial y}\,\mathrm{dV}\cdot\vec{\jmath} \\ d\vec{F}_{p,z} = -\dfrac{\partial p}{\partial z}\,\mathrm{dxdydz}\cdot\vec{k} = -\dfrac{\partial p}{\partial z}\,\mathrm{dV}\cdot\vec{k} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$d\vec{F}_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\mathrm{dV}$$

- No es la presión, sino el GRADIENTE DE PRESIÓN el causante de la fuerza que debe ser equilibrada por la gravedad u aceleración. Por unidad de volumen:

$$\boxed{\vec{f}_p = -\nabla p}$$

- Existen dos tipos de fuerzas: volumétricas y superficiales.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{volumétricas} = \vec{F}_{gravedad} \\ \vec{F}_{superficiales} = \vec{F}_{presión} + \vec{F}_{viscosidad} \\ \text{Hidrostática: } \vec{F}_{viscosidad} = 0 \end{array}\right] \sum F = 0 \Rightarrow \vec{F}_{presión} + \vec{F}_{gravedad} = 0 \Rightarrow -\nabla p \cdot dV + \rho g dV = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla p = \rho \vec{g}}$$

Ecuación de la hidrostática

- Considerando únicamente la gravedad, la distribución hidrostática de presiones para cualquier fluido en reposo:

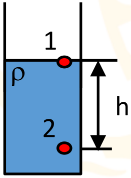
$$\boxed{\nabla p = \rho \vec{g}}$$

- En un fluido en equilibrio hidrostático las superficies de presión constante serán perpendiculares en todo punto al vector gravedad local.
- El máximo aumento de presión tendrá lugar en la dirección de la gravedad (siempre $\vec{g} = -g\overrightarrow{k}$)

- Fluido incompresible:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

$$\boxed{\boldsymbol{p_2 = p_1 + \rho g(z_1 - z_2)}}$$

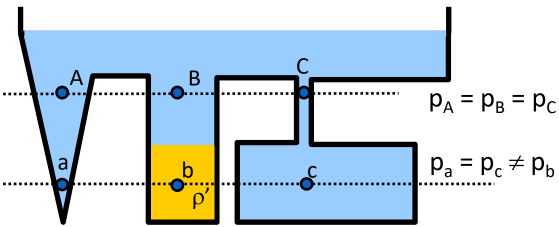


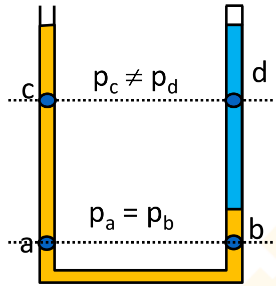
- Fluido compresible (gas ideal):

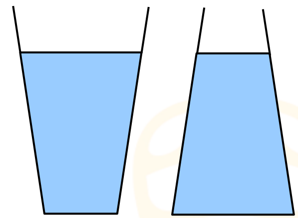
$$\nabla p = \rho \vec{g} \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{RT} g \quad p_2 = p_1 exp\left(-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_o}\right)$$

Ecuación de la hidrostática

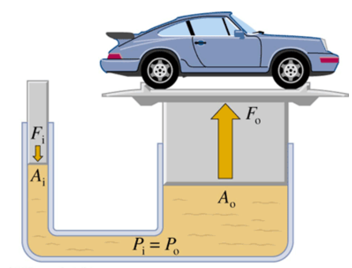
- En un fluido en reposo, la presión varía sólo con la distancia vertical y es independiente de la forma del recipiente.
- La presión en todos los puntos de un plano horizontal dado es la misma.
- La presión en el fluido aumenta con la profundidad.
- Ejemplos:







- Ley de Pascal: dos puntos cualesquiera, situados a la misma altura y unidos por una masa continua del mismo fluido en reposo, tendrán la misma presión.



Ecuación de la hidrostática

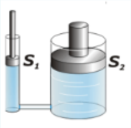
La ecuación de la hidrostática dada por $\nabla p = \rho \vec{g}$ es válida para:

- a. Solo para fluido incompresible
- b. Para fluidos incompresibles y compresibles
- c. Solo para fluido compresible

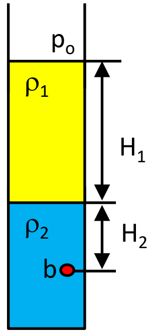
El módulo del gradiente de presión en una masa de fluido en reposo, cuya densidad es ρ=766 kg/m^3 y gravedad g=10 m/s^2, vale:

- a. 76,60 Pa/m
- b. 7660,00 Pa/m
- c. No se sabe, se requiere más información

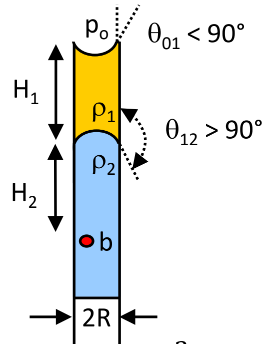
Se quiere utilizar el dispositivo de la figura para elevar un vehículo de peso W, en el que los pistones S_1 y S_2 están siempre prácticamente a la misma altura:



- a. La fuerza a realizar será $F = W\frac{S_1}{S_2}$ y se debe aplicar en el pistón S_2.
- b. La fuerza a realizar será $F = W\frac{S_2}{S_1}$ y se debe aplicar en el pistón S_1.
- c. La fuerza a realizar no dependerá de la densidad del líquido que llena los cilindros.

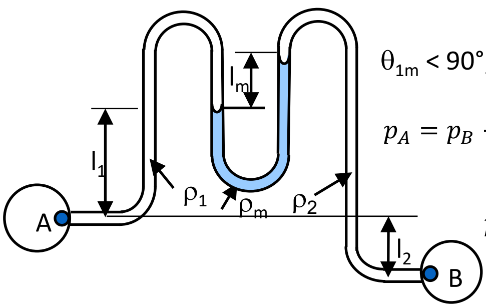


$$p_b = p_o + \rho_1 g H_1 + \rho_2 g H_2$$



$$p_b = p_o + \rho_1 g H_1 + \rho_2 g H_2 - \frac{2\sigma_{01} cos\theta_{01}}{R} - \frac{2\sigma_{12} cos\theta_{12}}{R}$$

$$= p_o + \rho_1 g H_1 + \rho_2 g H_2 - \frac{2\sigma_{01} cos\theta_{01}}{R} + \left|\frac{2\sigma_{12} cos\theta_{12}}{R}\right|$$



$\theta_{1m} < 90°$; $\theta_{2m} < 90°$;

$$p_A = p_B - \rho_2 g l_2 - \rho_2 g l_1 - \rho_2 g l_m + \rho_m g l_m + \rho_1 g l_1 - \frac{2\sigma_{2m} cos\theta_{2m}}{R} + \frac{2\sigma_{1m} cos\theta_{1m}}{R}$$

$$p_A = p_B - \rho_2 g l_2 + (\rho_1 - \rho_2) g l_1 + (\rho_m - \rho_2) g l_m - \frac{2\sigma_{2m} cos\theta_{2m}}{R} + \frac{2\sigma_{1m} cos\theta_{1m}}{R}$$

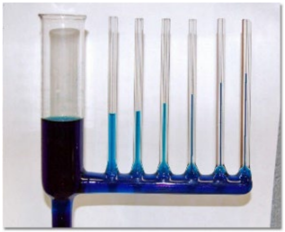
$\rho_1 = \rho_2 = \rho =$ agua

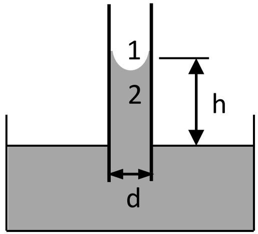
$$p_A = p_B - \rho g l_2 + (\rho_m - \rho) g l_m$$

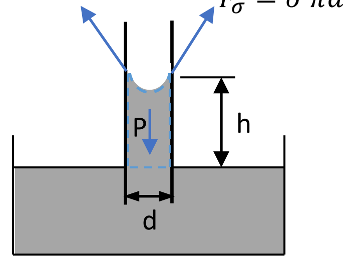
$$\frac{p_A - p_B}{\rho g} = -l_2 + (\delta - 1) l_m$$

Ecuación de la hidrostática: Ejemplos

Ascenso capilar en un tubo de diámetro "d":







Ley de Laplace: $p_1 - p_2 = \dfrac{2\sigma \cos\theta}{d/2} = \dfrac{4\sigma \cos\theta}{d}$

Equilibrio de fuerzas

Presiones absolutas

$$p_{atm} - p_2 = \frac{2\sigma \cos\theta}{d/2} = \frac{4\sigma \cos\theta}{d}$$

$$p_2 = p_{atm} - \rho g h$$

$$\rho g h = \frac{4\sigma \cos\theta}{d} \rightarrow \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{4\sigma \cos\theta}}{\boldsymbol{\rho g d}}$$

Presiones relativas

$$0 - p_2 = \frac{2\sigma \cos\theta}{d/2} = \frac{4\sigma \cos\theta}{d}$$

$$p_2 = -\rho g h$$

$$\rho g h = \frac{4\sigma \cos\theta}{d} \rightarrow \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{4\sigma \cos\theta}}{\boldsymbol{\rho g d}}$$

Equilibrio de fuerzas

$$\sum F_y = 0$$

$$F_\sigma - P = 0$$

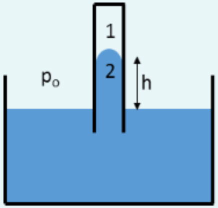
$$\sigma \pi d \cos\theta - \rho \frac{\pi d^2}{4} h g = 0$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{4\sigma \cos\theta}}{\boldsymbol{\rho g d}}$$

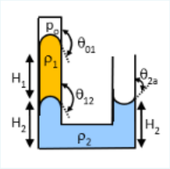
Ecuación de la hidrostática: Ejemplos

Si en el conducto delgado vertical de radio R cerrado en el extremo superior el fluido se eleva una altura h. Teniendo en cuenta que se produce un ángulo de contacto de 180°, se cumple:

- a. $p_1 < p_0$ y $p_1 < p_2$
- b. $p_1 > p_0$ y $p_1 = p_2$
- c. $p_1 < p_0$ y $p_1 > p_2$



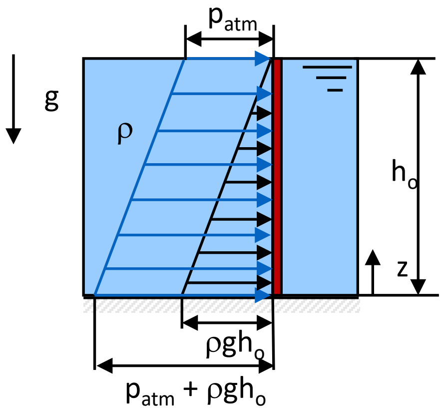
La presión relativa del gas atrapado (p_o) en el tubo de radio R, según la figura, se puede calcular como (cada ángulo de contacto, tiene su valor de tensión superficial correspondiente):

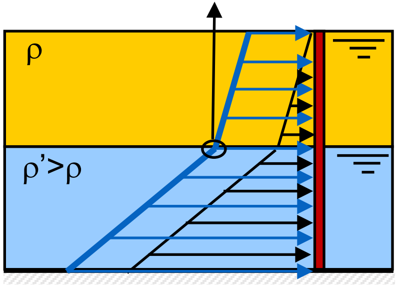


- a. $p_o = -\rho_1 g H_1 - \frac{2\sigma_{2a}|cos\theta_{2a}|}{R} + \frac{2\sigma_{12}|cos\theta_{12}|}{R} + \frac{2\sigma_{01}|cos\theta_{01}|}{R}$
- b. $p_o = \rho_2 g H_2 - \rho_1 g H_1 - \frac{2\sigma_{2a}|cos\theta_{2a}|}{R} + \frac{2\sigma_{12}|cos\theta_{12}|}{R} + \frac{2\sigma_{01}|cos\theta_{01}|}{R}$
- c. $p_o = -\rho_1 g H_1 - \frac{2\sigma_{2a}|cos\theta_{2a}|}{R} - \frac{2\sigma_{12}|cos\theta_{12}|}{R} - \frac{2\sigma_{01}|cos\theta_{01}|}{R}$

Fuerzas sobre superficies sumergidas

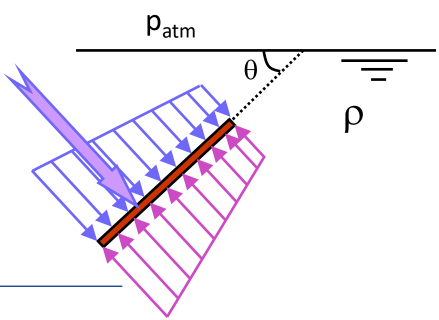
- Placas verticales: diagrama de presiones por una cara



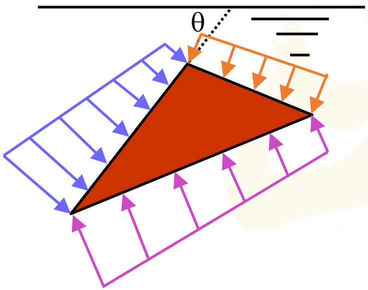


Vídeo: Canal de Panamá

- Si el cuerpo no tiene espesor: igual presión a ambos lados

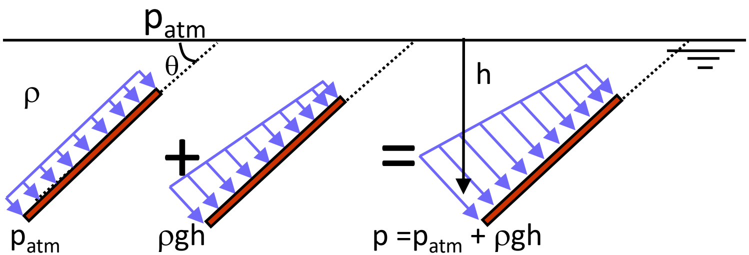


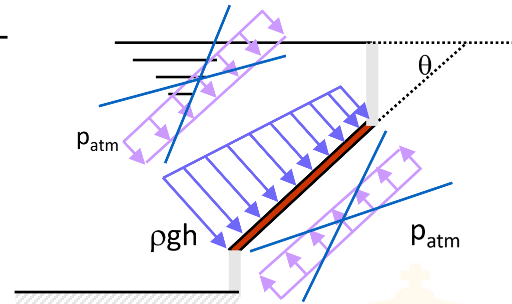
Evaluar la resultante



Fuerzas sobre superficies sumergidas

- Fuerza neta: se puede evaluar en relativas





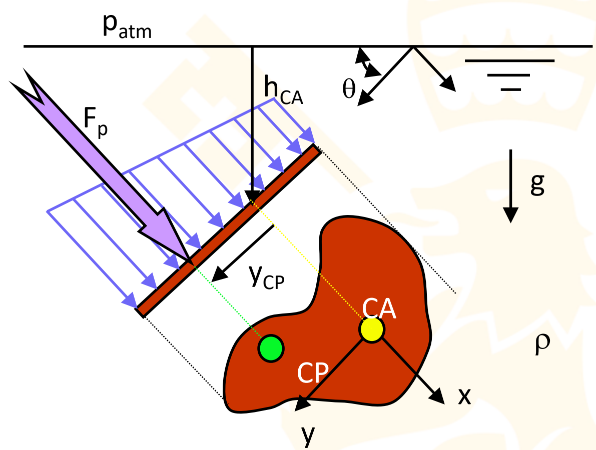
- **Fuerza resultante:**

Módulo: $$\left|F_p\right| = p_{CA} \cdot A$$

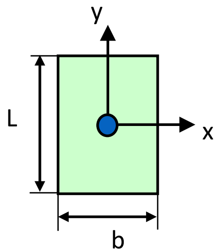
Posición:

$$x_{CP} = \rho g seno\theta \frac{I_{xy}}{F_p}$$

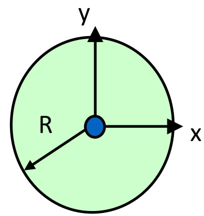
$$y_{CP} = \rho g seno\theta \frac{I_{xx}}{F_p}$$



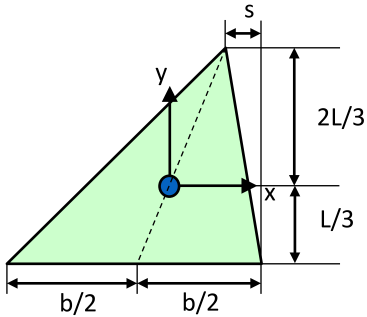
Superficies planas



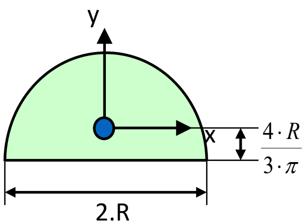
$$A = b \cdot L$$
$$I_{xx} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot L^3$$
$$I_{xy} = 0$$



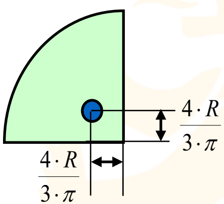
$$A = \pi \cdot R^2$$
$$I_{xx} = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$$
$$I_{xy} = 0$$



$$A = \frac{b \cdot L}{2}$$
$$I_{xx} = \frac{b \cdot L^3}{36}$$
$$I_{xy} = \frac{b \cdot (b - 2 \cdot s) \cdot L^2}{72}$$

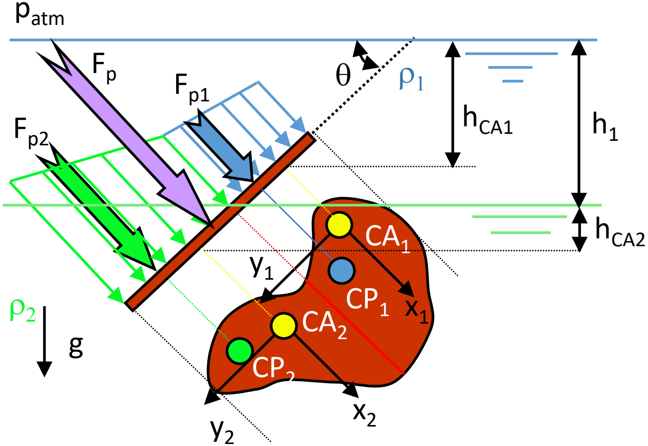


$$A = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$
$$I_{xx} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9 \cdot \pi} \right) \cdot R^4$$
$$I_{xy} = 0$$



Superficies planas: fluidos estratificados

- Por tramos:



- **Fuerza resultante:**

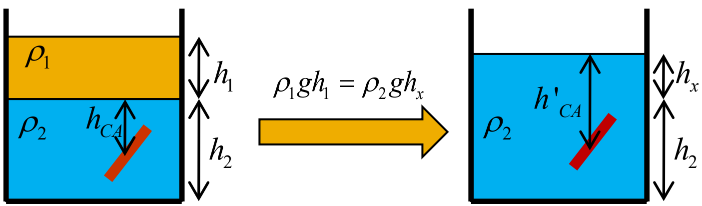
Módulo

$$\boxed{F_p = F_{p_1} + F_{p_2}}$$

$$F_{p_1} = p^r_{CA_1} \cdot A_1 = \rho_1 g h_{CA_1} \cdot A_1$$

$$F_{p_2} = p^r_{CA_2} \cdot A_2 = (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_{CA_2}) \cdot A_2$$

- Mismo fluido equivalente: si está completamente sumergida.

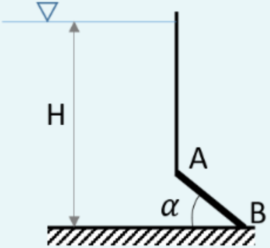


$$y_{CP} = \rho_2 g seno\theta \frac{I_{xx}}{F_p}$$

$$y_{CP} = \rho_2 g seno\theta \frac{I_{xx}}{(\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_{CA}) \cdot A}$$

Superficies planas: fluidos estratificados

La compuerta inclinada AB de la figura sostiene una masa de agua (ρ=1000 kg/m^3) hasta una altura H=5,2 m. Si la compuerta es cuadrada y de lado L=4,8 m, asumiendo g = 10 m/s^2 y α=30º, la fuerza neta total que sufre la compuerta es:



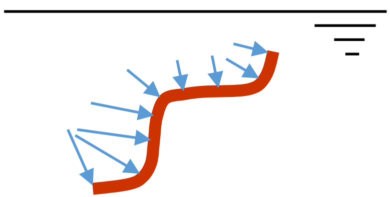
- a. 645120 N
- b. 40000 N
- c. 921600 N

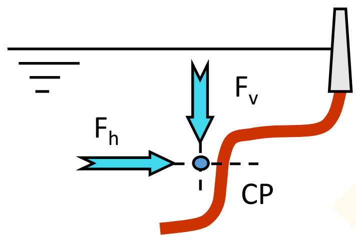
Si la figura representa una compuerta vertical en contacto con un líquido en reposo:

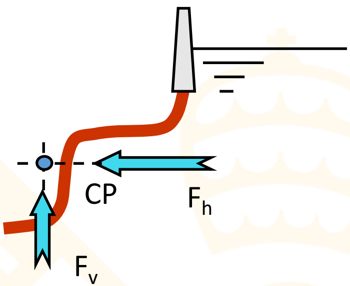
- a. $x_{cp} \neq 0$
- b. No se sabe
- c. $x_{cp} = 0$

Superficies curvas

- La fuerza resultante se evalúa mediante sus componentes horizontal y vertical.
- Componente horizontal: fuerza hidrostática sobre la superficie plana generada mediante la proyección de la curva sobre un plano vertical. Su línea de acción pasa por el centro de presiones de la superficie plana proyectada.
- Componente vertical: peso de la columna de líquido y atmósfera, contenido entre la curva y la superficie libre del líquido. Su línea de acción pasa por el centro del volumen de la columna de líquido.

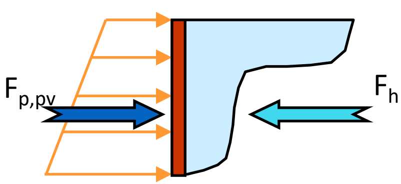


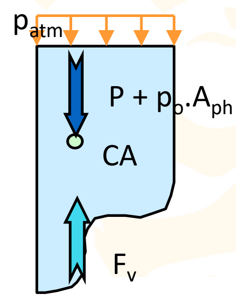




Componente horizontal

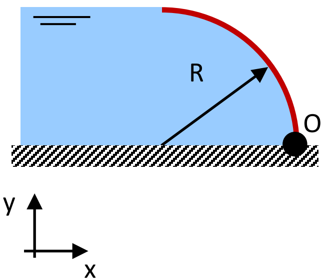
Componente vertical



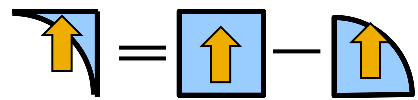


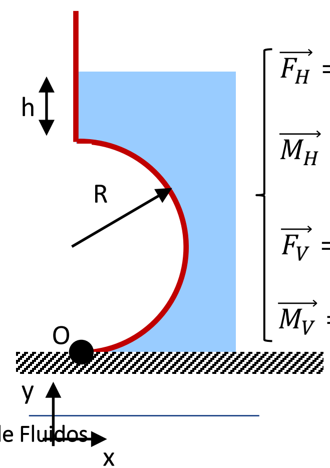
Superficies curvas

- Ejemplos: compuertas de profundidad B

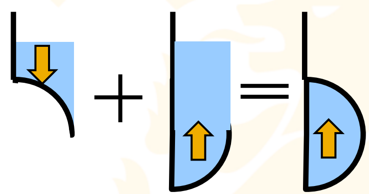


$$\left\{\begin{aligned}
&\overrightarrow{F_H} = p_{CA}A = \rho g \frac{R}{2} R B \vec{\imath}; \quad y_{CP} = \rho g seno\theta \frac{I_{xx}}{F_p} = \rho g \frac{\frac{1}{12} B R^3}{\rho g \frac{R}{2} R B} = \frac{R}{6}\\
&\overrightarrow{M_H} = F_H \left(\frac{R}{2} - \frac{R}{6}\right)(-\vec{k})\\
&\overrightarrow{F_V} = \rho g \left(R^2 - \frac{\pi}{4} R^2\right) B \vec{\jmath}\\
&\overrightarrow{M_V} = F_V \cdot x = \rho g R^2 B \cdot \frac{1}{2} R(-\vec{k}) - \rho g \frac{\pi}{4} R^2 B \cdot \left(R - \frac{4R}{3\pi}\right)(-\vec{k})
\end{aligned}\right.$$





$$\left\{\begin{aligned}
&\overrightarrow{F_H} = p_{CA}A = \rho g \frac{(h+2R)}{2}(h+2R)B(-\vec{\imath}); \quad y_{CP} = \rho g \frac{\frac{1}{12} B (h+2R)^3}{F_H} = \frac{(h+2R)}{6}\\
&\overrightarrow{M_H} = F_H \left(\frac{h+2R}{2} - y_{CP}\right)\vec{k}\\
&\overrightarrow{F_V} = \rho g \frac{\pi}{2} R^2 B \vec{\jmath}\\
&\overrightarrow{M_V} = F_V \cdot \frac{4R}{3\pi} \vec{k}
\end{aligned}\right.$$

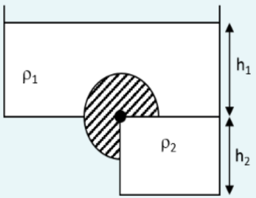


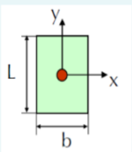
Superficies curvas

Un depósito esférico de radio R =1,4 m contiene agua, de densidad (ρ=1000 kg/m^3), hasta llenar la mitad de todo su volumen. Si la otra mitad del volumen del depósito está llena de aire a presión atmosférica y asumiendo g = 10 m/s^2, la fuerza neta total que sufre el tanque es:

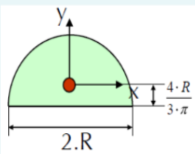
- a. 30788 N
- b. 57470 N
- c. 114940 N

Se tiene la compuerta de la figura, de radio R y de longitud B (perpendicular al dibujo), que puede girar respecto a su centro. La compuerta separa dos fluidos de densidades 1 y 2.





$$A = b \cdot L$$
$$I_{xx} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot L^3$$
$$I_{xy} = 0$$

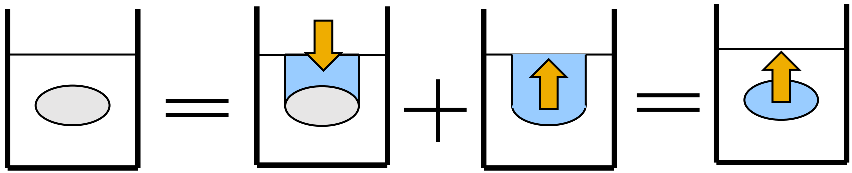


El par que ejerce el líquido de densidad ρ_1 es:

- a. $M = 0$
- b. $M = \rho_1 g(h_1 2R - \frac{\pi R^2}{2})\frac{4R}{3\pi}$
- c. $M = \rho_2 g(h_1 + R/2)RB$

Flotación

- Resultante de las fuerzas de presión sobre un cuerpo sumergido en un fluido en equilibrio



- Leyes de Flotación de Arquímedes (S. III a.C.):

  -Un cuerpo sumergido en un fluido experimenta una fuerza de flotación igual al peso del fluido que desaloja (magnitud, dirección y ubicación, sentido contrario)

  -Un cuerpo que flota desaloja su propio peso del fluido donde flota

- CF: Centro de Flotación / Centro de Carena: Centro de gravedad del fluido desalojado
- E: Empuje. Peso del fluido desalojado

Flotación

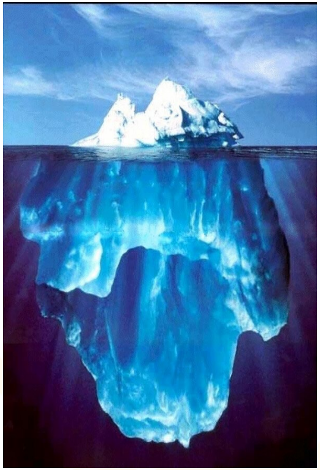
- Importancia relativa en líquidos y gases:
- Volumen persona ≈ 0,085 m^3; W ≈ 800 N.

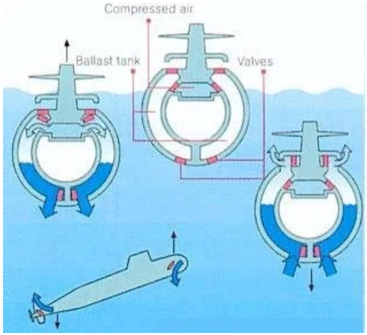
  E_{aire} ≈ 1 N (No Flota)

  E_{agua} ≈ 834 N (Flota)
- Aplicaciones:
  - Líquidos: Barcos, Submarinos, sistemas ACS termosifón, ...
  - Gases: calefacción doméstica, convección natural, ...

Vídeo: NBL-NASA

Vídeo: Dirección del empuje: globos



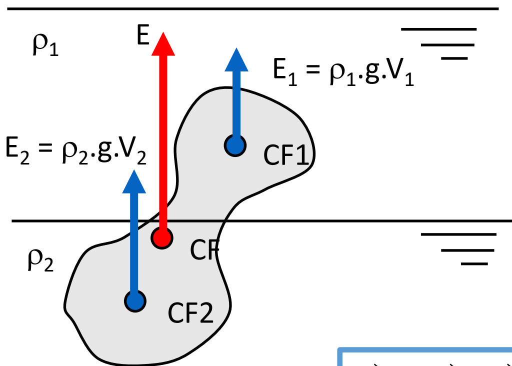


$\rho_{hielo} \approx 920\ \mathrm{kg}/m^3$

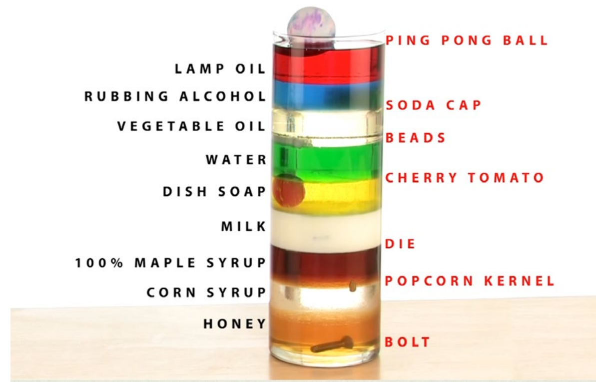
$\rho_{asalada} \approx 1025\ \mathrm{kg}/m^3$

Flotación: fluidos estratificados

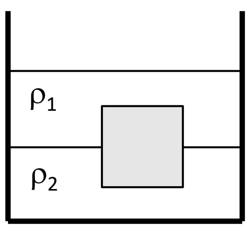
- Por superposición: se suman los empujes de cada fluido



$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$



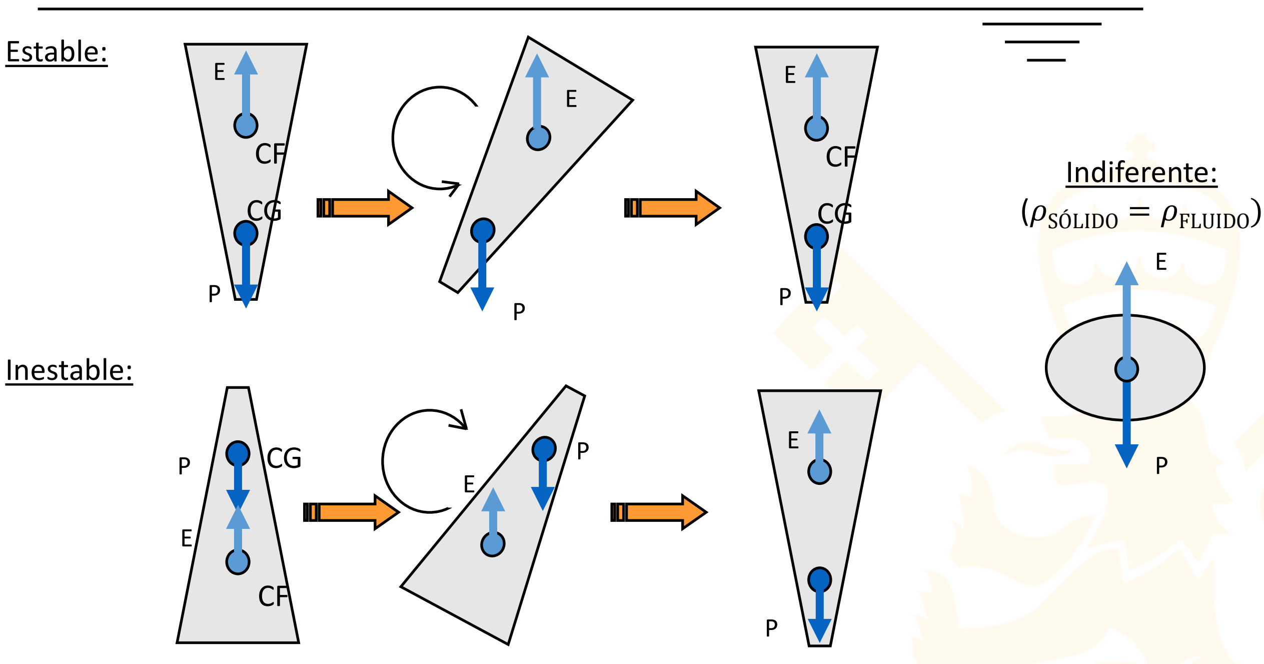
- Ejemplos: un cubo de lado L y densidad ρ, sumergido al 50% entre dos líquidos ($\rho_2 > \rho_1$)



$$\left.\begin{aligned} P &= \rho g L^3 \\ E_1 &= \rho_1 g \frac{L}{2} L^2 \\ E_2 &= \rho_2 g \frac{L}{2} L^2 \end{aligned}\right\} \quad P = E_1 + E_2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2}$$

Estabilidad: cuerpo sumergido

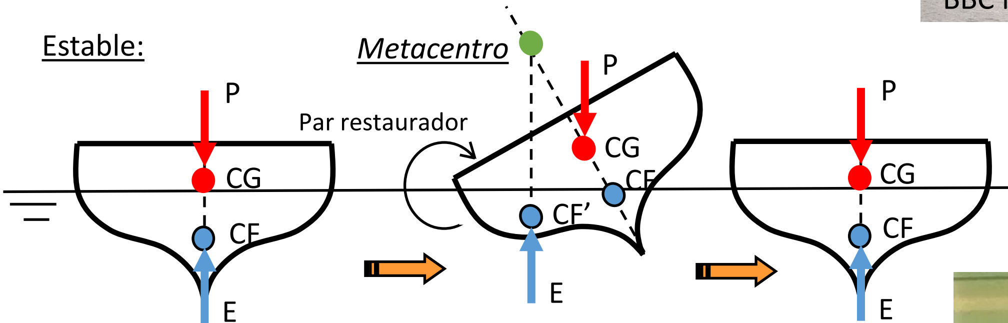
- La densidad del cuerpo no es uniforme.
- Cuando E = P, en ausencia de perturbaciones, se queda donde lo dejemos.
- Será estable cuando el CG esté por debajo del CF.



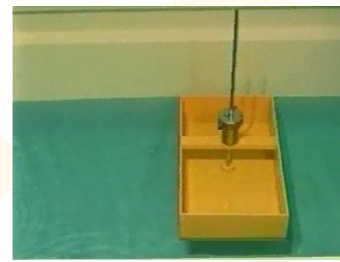
Estabilidad: cuerpo flotando

- Será estable cuando el Metacentro quede por encima del CG.

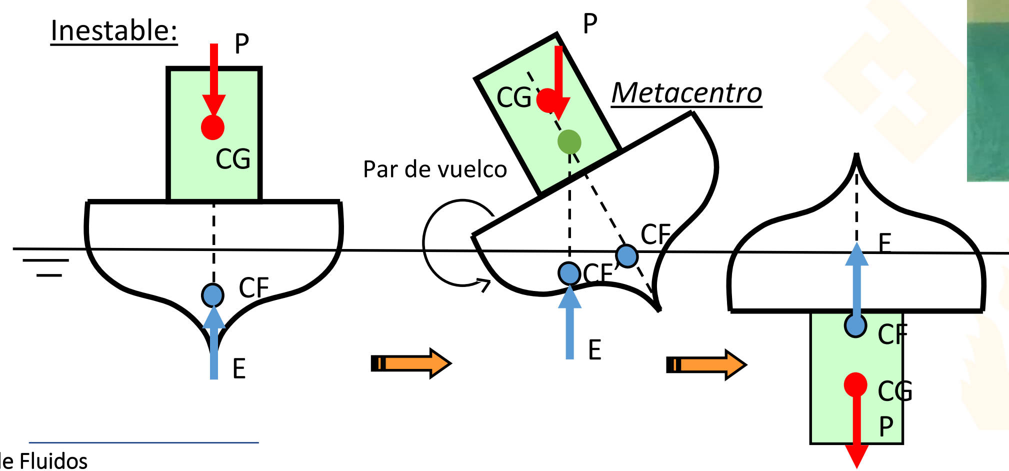
Estable:



Vídeo: Iceberg



Inestable:



Estabilidad: cuerpo flotando

El empuje de un cuerpo que flota se sitúa:

- a. En el centro del volumen sumergido del cuerpo
- b. En el y_{cp} del volumen del fluido desalojado
- c. En el centro del volumen de todo el cuerpo

Si al sumergir completamente una bola de densidad uniforme en un líquido, permanece en esa posición al soltarla, se puede afirmar que:

- a. Su centro de gravedad está por encima del centro del flotación
- b. Su centro de gravedad está por debajo del centro del flotación
- c. Se encuentra en equilibrio indiferente (centro de gravedad = centro de flotación)

Para que un barco se encuentre flotando de manera estable, se debe cumplir que:

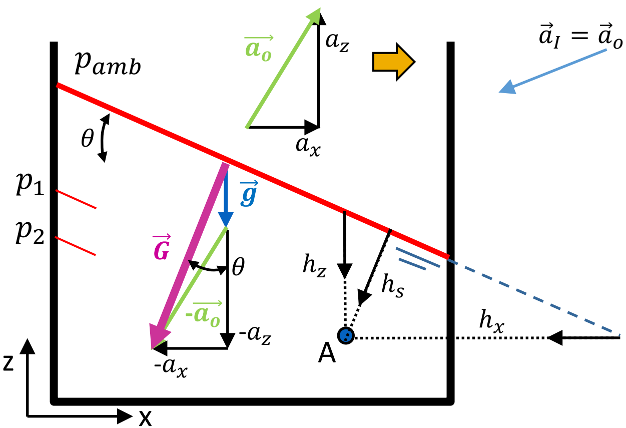
- a. Su metacentro esté por encima del centro de de flotación.
- b. Su centro de gravedad esté por encima del metacentro.
- c. Su centro de gravedad quede por debajo de su metacentro.

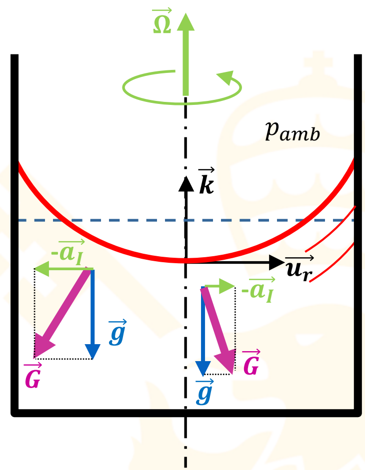
Equilibrio relativo

- El líquido se comporta como sólido rígido ➡ $\vec{F}_{volumétricas} = \vec{F}_{gravedad} + \vec{F}_{inerciales}$
- Las isobaras son perpendiculares a la aceleración resultante G.
- La presión se puede evaluar según las componentes de G.

$$\sum F = 0 \Rightarrow \vec{F}_{presión} + \vec{F}_{gravedad} + \vec{F}_{inerciales} = 0 \Rightarrow -\nabla p \cdot dV + \rho(g - \vec{a}_I)dV = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla p = \rho(\vec{g} - \vec{a_I}) = \rho\vec{G}}$$

$$\vec{a}_I = \vec{a}_o + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \ldots$$





$$G = \sqrt{a_x^2 + (g + a_z)^2}$$

$$\theta = atan\left(\frac{a_x}{g + a_z}\right)$$

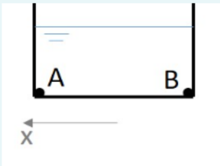
$$p_A = \begin{cases} p_{atm} + \rho G h_s \\ p_{atm} + \rho a_x h_x \\ p_{atm} + \rho(g + a_z)h_z \end{cases}$$

$$\vec{a_I} = -r\Omega^2\vec{u_r}$$

$$\mathrm{p(r,z)} = cte - \rho \mathrm{g} z + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2$$

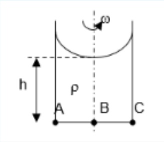
Equilibrio relativo

Un tanque contiene líquido e inicialmente está en reposo, tal y como se observa en la figura. Si posteriormente, el tanque se somete a una aceleración $\vec{a} = a\vec{i}$ y no se derrama líquido, entonces:



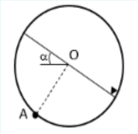
- a. El punto B es el punto de máxima presión.
- b. El punto A es el punto de máxima presión.
- c. La presión en A es mayor que la presión en B.

Sea un depósito cilíndrico vertical, de radio R, que gira sobre su eje geométrico con cierta velocidad angular. La mínima presión en el fondo, tiene lugar:



- a. En A
- b. En cualquier punto, ya que lógicamente, la presión es uniforme.
- c. En B

El depósito esférico de la figura, de radio R, inicialmente lleno de líquido por la mitad, se ha sometido a una aceleración horizontal **a**, observándose que la superficie libre se inclina un ángulo α. Si en el líquido se introduce un cuerpo pequeño en algún punto de la línea AO, de peso despreciable, experimentará un movimiento:



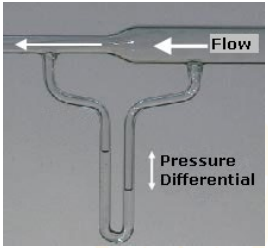
- a. En la dirección y sentido de OA hasta alcanzar su posición de equilibrio
- b. En la vertical de A hasta alcanzar su posición de equilibrio en la superficie
- c. En la dirección y sentido de AO hasta alcanzar su posición de equilibrio

Medida de presiones

- Medida importante en procesos industriales
- Rango, condiciones de medida y precisión muy variados → Variedad
- Clasificaciones.

Según medida:

- Barómetro: p_{amb}
- Manómetro: $p_{rel} > 0$
  - Manómetros de líquido: Distinto fluido
  - Piezómetros de líquido: Mismo fluido
- Vacuómetro: $p_{rel} < 0$
- Manómetro de presión absoluta: p_{abs}
- Manómetro diferencial: $p_1 – p_2$
- Micromanómetros: p ↓↓



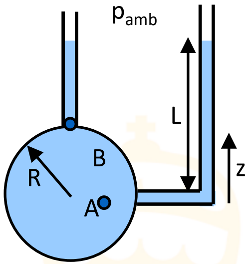
Tubo piezométrico

- Altura piezométrica: la suma de las alturas estática (presión) y geométrica (cota)

$$\boxed{h = \frac{p}{\rho g} + z}$$

- Altura a la que se elevaría el fluido en un piezómetro colocado en una tubería por donde fluye (con el mismo origen de cotas)

$$\left.\begin{array}{l} p_A = \rho g L \\ \\ p_B = \rho g (L - R) \end{array}\right] \qquad \frac{p_A}{\rho g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + z_B \Rightarrow L = L - R + R \Rightarrow h_A = h_B$$

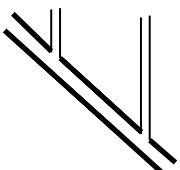


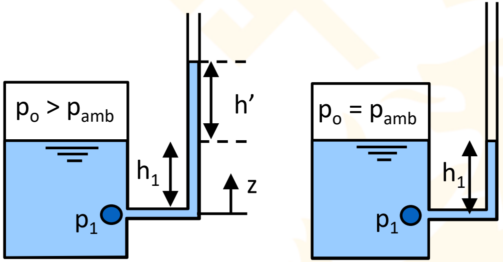
Ejemplos:

- El fluido se eleva hasta la altura equivalente a la presión en el punto de conexión.

En un depósito lleno de agua y abierto a la atmósfera, la altura piezométrica:

- a. Es mayor en los puntos del fondo del depósito.
- b. Es la misma para todos los puntos.
- c. Solo depende de la presión.



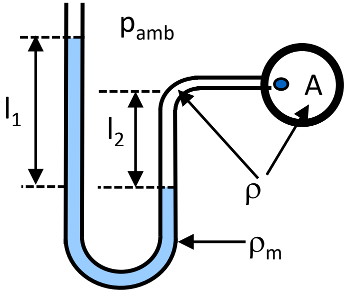


$$\begin{cases} p_1 = p_o + \rho g h_1 \\ p_1 = p_{amb} + \rho g (h' + h_1) \end{cases}$$

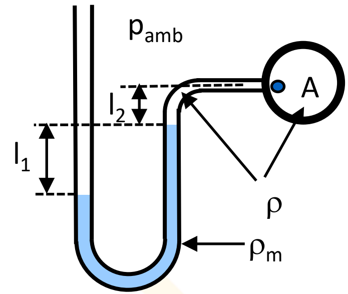
Manómetros

Manómetros en U: medida de presiones relativas positivas y negativas.

- Elección de ρ_m adecuada a la presión a medir: mayor o menor longitud para la medida.
- Hay que purgar: eliminar el aire atrapado para medir correctamente.



$$p_A = p_{amb} + \rho_m g l_1 - \rho g l_2$$



$$p_A = p_{amb} - \rho_m g l_1 - \rho g l_2$$

Manómetros inclinados: se emplean para medir presiones pequeñas

- Se amplía la escala según se reduce el ángulo de inclinación ($l = h/seno\alpha$).