Campos Electromagnéticos

Marzo de 2024

GITI y GITT

Nombre:	**Grupo:**

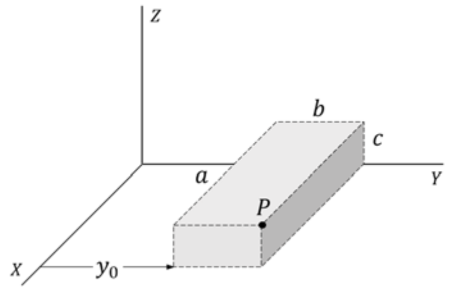
El examen tiene una duración de **1 hora y 30 minutos**.
No se permite el uso de **calculadora ni de ningún tipo de libros o apuntes**. El enunciado del examen incluye un formulario.
Haced el examen **a bolígrafo** para conseguir mejor calidad en el escaneado.
Para obtener la calificación máxima en cada apartado, debe **justificarse adecuadamente** y de forma concisa cada respuesta.

Problema 1 (35%)

En una región del espacio próxima al origen de coordenadas se tiene definida la siguiente función del potencial electrostático (Voltios):

$$\phi(x,y,z) = \begin{cases} 6 - x + 2y & y < 0 \\ 6 - x + 2y - y^2 & 0 \le y \le 4\ cm \\ 6 - x - 2y & y > 4\ \text{cm} \end{cases}$$

Coordenadas en cm



$y_0 = 3\ cm;\ \ a = 5\ cm;\ b = 2\ cm;\ \ c = 1\ cm$

El paralelepípedo de la figura está sumergido en este potencial.

Se pide:

a) (2 p) Calcular el campo eléctrico en todos los puntos de la región.
b) (2 p) Calcular el trabajo que tiene que realizar un agente externo para llevar una carga $+q$ desde el punto $P(a, y_0 + b, c)$ hasta el origen del sistema de referencia.
c) (1 p) Calcular el trabajo que tiene que realizar un agente externo para llevar una carga $+q$ desde un punto cualquiera del eje Z (dentro de la región) hasta el origen del sistema de referencia.
d) (2 p) Calcular la carga total contenida en el interior del paralelepípedo.
e) (3 p) Describir dónde están y cómo son las distribuciones de carga. Calcular el valor de la densidad de carga volumétrica ρ en todos los puntos del espacio y σ donde proceda.

Justificar las respuestas.

Solución Problema 1

a) (2 p) Calcular el campo eléctrico en todos los puntos de la región

$$\bar{E} = -grad\ V = -\overline{\nabla}\ V$$

$$\bar{E}(x,y,z) \; V/cm = \begin{cases} 1\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} & y < 0 \\ 1\hat{\imath} + (2y-2)\hat{\jmath} & 0 \leq y < 4\,cm \\ 1\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} & y > 4\text{ cm} \end{cases}$$

$Coordenadas\ en\ cm$

b) **(2 p) Calcular el trabajo que tiene que realizar un agente externo para llevar una carga $+q$ desde el punto $P(a, y_0 + b, c)$ hasta el origen del sistema de referencia.**

$$W_{+q_{P\to O}} = -qV_{PO} = -q(V_P - V_O)$$

$$V_P(5,5,1) = 6 - 5 - 2 \cdot 5 = -9\,V \qquad V_O(0,0,0) = 6\,V$$

$$W_{+q_{P\to O}} = 15q\,J, \qquad con\ q\ en\ Culombios$$

c) **(1 p) Calcular el trabajo que tiene que realizar un agente externo para llevar una carga $+q$ desde un punto cualquiera del eje Z (dentro de la región) hasta el origen del sistema de referencia.**

$$W_{+q_{z\to O}} = -qV_{zO} = -q(V_z - V_O)$$

$V_z(0,0,z) = 6\,V$ $\qquad$ $V_O(0,0,0) = 6\,V$, $\qquad$ El eje Z es equipotencial.

$$W_{+q_{z\to O}} = 0$$

d) **(2 p) Calcular la carga total contenida en el interior del paralelepípedo.**

$S \equiv Superficie\ del\ paralelepípedo \qquad y \qquad \phi_S = \frac{Q_{int.S}}{\varepsilon_0}$

El vector campo en todos los puntos de la región está contenido en planos paralelos a las caras horizontales del paralelepípedo, por tanto, el flujo por cada una de esas caras horizontales es nulo.

<u>Flujo del campo a través de las dos caras paralelas al plano YZ</u>: En esas caras la componente y del campo no crea flujo y la componente x, al ser constante en todo el paralelepípedo, crea el mismo flujo entrante en la cara $x = 0$ que saliente en la cara $x = 5$, ya que ambas caras tienen la misma área. Por tanto, el flujo a través del conjunto de ambas caras también es nulo.

<u>Flujo a través de las caras paralelas al plano XZ:</u>

En la cara $y = y_0 = 3\ cm$, el campo vale $1\hat{\imath} + (2 \cdot 3 - 2)\hat{\jmath}$, es decir, constante en toda la cara. El vector unitario normal a esa superficie será $-\hat{\jmath}$. El área de esa cara es ac. Por tanto:

$$\phi_{y=3} = [1\hat{\imath} + (2 \cdot 3 - 2)\hat{\jmath}].(-\hat{\jmath})ac = -4ac\ \ V.cm$$

En la cara $y = y_0 + b = 5\ cm$, el campo vale $1\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, es decir, también constante en toda la cara. El vector unitario normal a esa superficie será $+\hat{\jmath}$ y el área de esa cara también es ac. Por tanto:

$$\phi_{y=5} = [1\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}] \cdot (\hat{\jmath})ac = 2ac\ \ V.cm$$

En resumen,

$$\phi_S = -2ac \qquad \rightarrow \ \boldsymbol{Q_{int.S} = -2ac\varepsilon_0 = -10\varepsilon_0\ \ C}, \quad con\ \varepsilon_0\ en\ {}^{F}/_{cm}$$

e) **(3 p) Describir dónde están y cómo son las distribuciones de carga. Calcular el valor de la densidad de carga volumétrica $\boldsymbol{\rho}$ en todos los puntos del espacio y $\boldsymbol{\sigma}$ donde proceda. Justificar las respuestas.**

La componente x del campo es constante en toda la región y por tanto continua en toda ella. Por otro lado, la componente y es también continua en cada intervalo de definición de la función potencial. Estudiemos su continuidad en las fronteras de los intervalos, $y\ = 0$ e $y\ = 4$.

En $y\ = 0$ el campo es continuo, luego no habrá ninguna distribución superficial de carga en esos puntos.

Sin embargo, en los puntos del plano $y = 4$, el campo eléctrico presenta un salto:

$$\Delta E_x = 0 \qquad ; \qquad \Delta E_y = 2 - (2 \cdot 4 - 2) = -4\ \ V/cm$$

Esto quiere decir que en todos los puntos del plano $y = 4$ hay una densidad superficial de carga uniforme e infinita de valor:

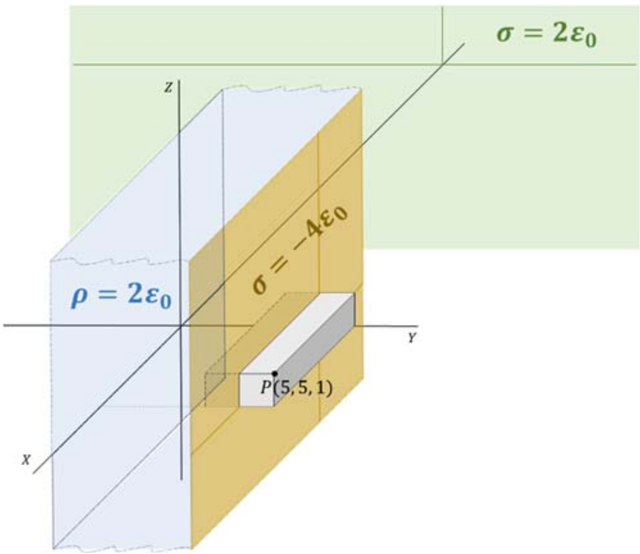
$$\sigma_{y=4} = -4\varepsilon_0\ \ C/cm^2\ , \quad con\ \varepsilon_0\ en\ F/cm$$

La densidad de carga volumétrica en toda la región la podemos calcular a través de la ecuación $div\bar{E} = \rho/\varepsilon_0$. Lo que resulta:

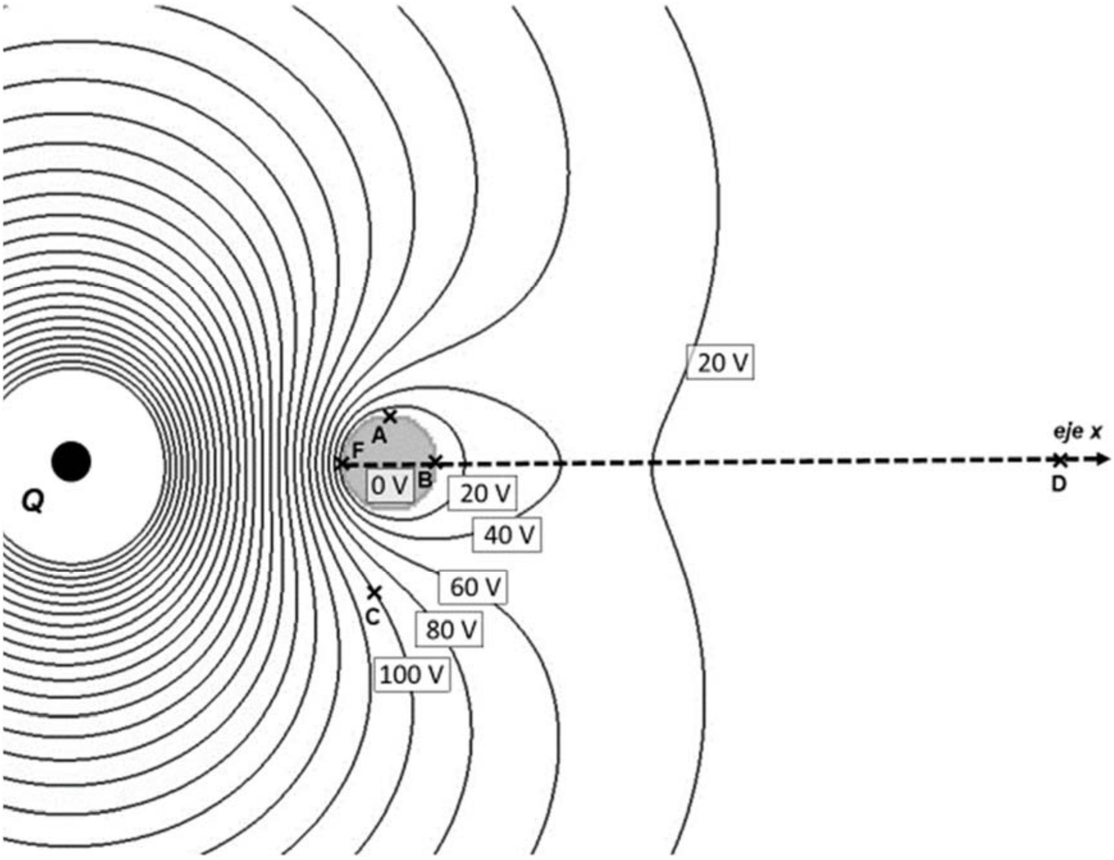
$$\underset{{}^{C}/_{cm^3}}{\rho(x,y,z)} = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 2\varepsilon_0 & 0 \le y < 4\ cm \\ 0 & y > 4\text{ cm} \end{cases}$$

En definitiva, existirá una capa de carga infinita con densidad volumétrica uniforme de valor $\rho = 2\varepsilon_0 \ {}^{C}/_{cm^3}$ entre los planos $y\ = 0$ e $y = 4$.

Por otro lado, la componente x del campo (constante en toda la región e igual a $1\ V/cm$) requiere de la existencia de al menos una superficie plana paralela al plano YZ con densidad de carga uniforme de valor $\sigma = 2\varepsilon_0\ C/cm^2$ $(con\ \varepsilon_0\ en\ F/cm)$, fuera de los límites de la región. (ver figura)



Problema 2 (35%)



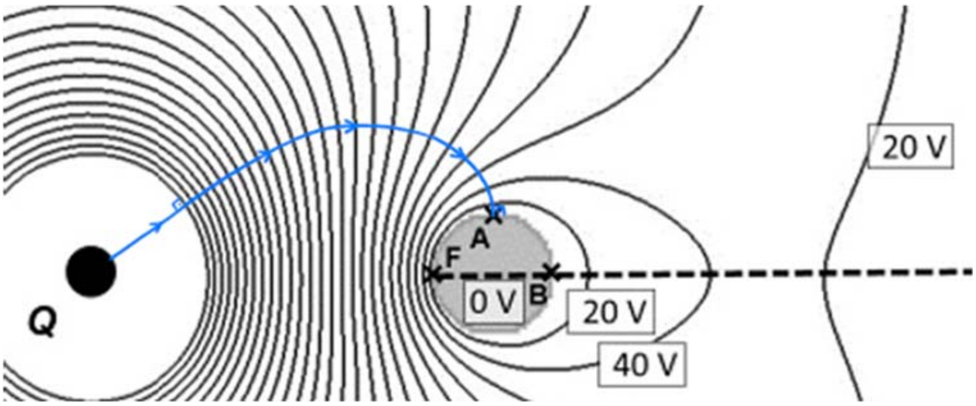
A la izquierda de la figura se muestra una carga puntual positiva Q, que está cerca de una esfera conductora (en gris, a la derecha). Para el campo electrostático que se produce en esta situación, se muestran algunas superficies equipotenciales con el valor de su potencial. Se sabe que la esfera está al mismo potencial que el infinito, que se ha establecido como potencial cero.

Se pide **justificando brevemente todas las respuestas**:

a) (2 p) Dibujar una línea de campo que pase por el punto A, extendiéndola todo lo posible en la imagen e indicando claramente su sentido. Explicar cómo son los cortes entre la línea de campo dibujada y las líneas representadas en la figura.
b) (1,5 p) ¿Qué signo tienen σ_B (densidad de carga en el punto B)?
c) (2,5 p) Si suponemos conocida σ_A (densidad de carga en el punto A), calcular cuánto vale aproximadamente σ_B (densidad de carga en el punto B).
d) (2 p) Trabajo que debe hacer un agente externo para mover una pequeña carga -q desde el centro de la esfera conductora hasta el punto C (suponiendo que esa pequeña carga -q no modifica el campo).
e) (2 p) Representa en una gráfica la componente sobre el eje x (con su signo) del campo electrostático en función de la distancia x medida desde el punto F, que se tomará como origen. (No se pide la gráfica a la izquierda del punto F. Indica en la gráfica claramente la posición de los puntos F, B y D).

Solución Problema 2

a) La linea de campo eléctrico corta perpendicularmente las lineas que representan las superficies equipotenciales, incluyendo la superficie del conductor, que es también equipotencial. La linea de campo se dirige a potenciales decrecientes.



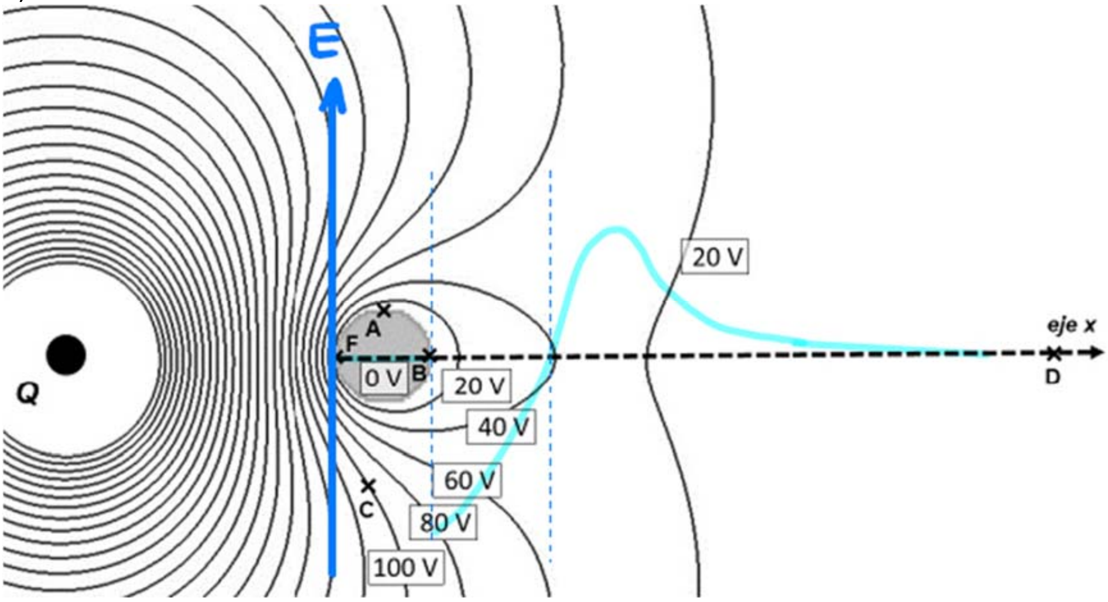
b) La densidad superficial de carga en el punto B es negativa, ya que ese punto es un sumidero de lineas de campo eléctrico.

c) El campo eléctrico es nulo en el interior del conductor. El campo en la superficie del conductor debe valer sigma/epsilon0. La equipotencial de 20V está 4 veces más cerca del punto A que del punto B.

$$20V = E_B \cdot d_B = E_B \cdot 4d_A = E_A \cdot d_A \Rightarrow E_A = 4E_B \Rightarrow \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0} = 4\frac{\sigma_B}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_B = \frac{\sigma_A}{4}$$

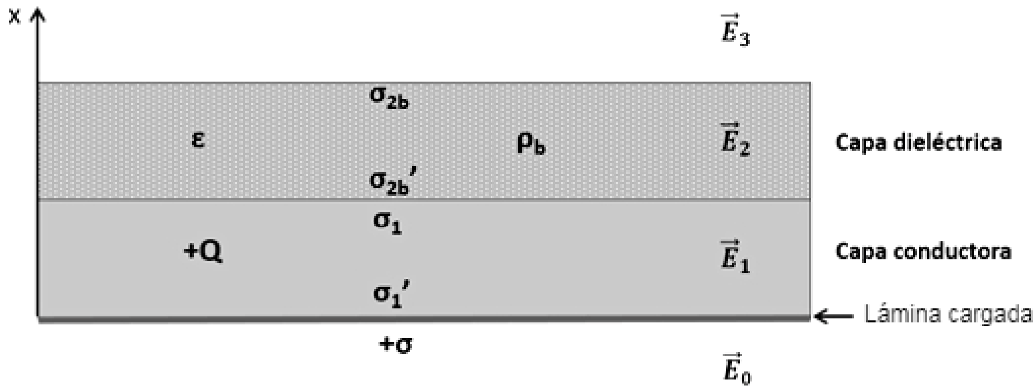
d) $W = q\Delta V = -q \cdot 100$

e)



Problema 3 (30%)

Sea el sistema de la figura, formado por láminas y capas de superficie *A* perpendiculares al plano del papel, con dimensión vertical mucho más pequeña que sus dimensiones horizontales. Se conoce la carga *+Q* del conductor, la densidad de carga de la lámina ($+\sigma$), que es uniforme y la constante dieléctrica (o permitividad relativa) ε del dieléctrico.



Se pide, justificando brevemente todas las respuestas:

a) (2 p) Valor del campo electrostático (vector) $\vec{E}_3$, por encima de la capa dieléctrica.
b) (3 p) Densidades de carga σ_1 y σ'_1 en las superficies del conductor.
c) (2 p) Campo electrostático (vector) $\vec{E}_2$ en el interior del dieléctrico.
d) (3 p) Polarización (vector) y densidades de carga ligada, ρ_b , σ_{2b} y σ'_{2b} en el dieléctrico.

Solución Problema 3

a) Aplicamos la ley de Gauss una gaussiana cilíndrica con una base de área S que atraviese desde E_3 hasta E_0, sabiendo que E_3 y E_0 son iguales en módulo pero tienen sentidos opuestos.

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E_0S + E_3S = 2E_3S = \frac{\frac{Q}{A}S + \sigma S}{\varepsilon_0}$$

Por lo que:

$$\vec{E}_3 = \frac{Q/A + \sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{\imath}$$

Por simetría, $\vec{E}_0 = -\ \frac{Q/A+\sigma}{2\varepsilon_0}\ \vec{\imath}$

b) Aplicamos el salto en la componente perpendicular del campo eléctrico y sabiendo que el campo E_1 en el interior del conductor es nulo:

$$\Delta E_\perp = \frac{\sigma'_1 + \sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta E_\perp = E_1 - (-E_0) = E_0 = \frac{\frac{Q}{A} + \sigma}{2\varepsilon_0}$$

Por lo que, igualando:

$$\sigma'_1 = \frac{\frac{Q}{A} + \sigma}{2} - \sigma = \frac{Q}{2A} - \frac{\sigma}{2}$$

Como $\sigma_1 + \sigma'_1 = \frac{Q}{A}$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2A} + \frac{\sigma}{2}$$

c) El campo eléctrico dentro del dieléctrico será el producido por todas las superficies con carga del problema, así:

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma + \sigma_1' + \sigma_1 + \sigma_{2b}' - \sigma_{2b}}{2\varepsilon_0}\vec{\imath} \qquad con \quad \sigma_1 + \sigma'_1 = \frac{Q}{A}$$

Además, en el dieléctrico se cumplirá:

$$\sigma_{2b}' = -\sigma_{2b}\ , \qquad \sigma_{2b} = P \qquad y \qquad P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_2$$

Con lo que:

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma + Q/A}{2\varepsilon_0 \varepsilon}\vec{\imath}$$

También podría resolverse aplicando la ley de Gauss para medios materiales:

Tomamos una gaussiana cilíndrica con una base de área S por encima del dieléctrico (en la zona del campo $\vec{E}_3$) y otra base dentro del dieléctrico.

Aplicamos que $\oiint_S \ \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{ds} = Q_{libre}$. En este caso no hay carga libre dentro de la gaussiana por lo que $E_3 S\varepsilon_0 - E_2 S\varepsilon_0\varepsilon = 0$.

Y de aquí $E_2 = \frac{E_3}{\varepsilon}$ $\rightarrow$ $\vec{E}_2 = \frac{\sigma + Q/A}{2\varepsilon_0 \varepsilon}\vec{\imath}$

d) Calculamos la polarización y a partir de ella, la densidad de carga ligada. Suponiendo que el dieléctrico es lineal:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{Q/A + \sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{\imath} = \frac{Q/A + \sigma}{2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\vec{\imath}$$

$$\sigma_{2b} = \vec{P}\cdot\hat{n} = \frac{\frac{Q}{A} + \sigma}{2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{Q/A + \sigma}{2\varepsilon}\,(\varepsilon - 1)$$

$$\sigma'_{2b} = -\frac{\frac{Q}{A} + \sigma}{2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{Q/A + \sigma}{2\varepsilon}\,(\varepsilon - 1)$$

Como el campo que polariza al dieléctrico es uniforme (no depende de la distancia), la polarización también será uniforme, por lo que $\rho_b = 0$. Se puede comprobar que no hay ρ_b viendo que $\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$.