TEMA 3 – CAMPO ELÉCTRICO EN CONDUCTORES

Clase 3.1 Ideas básicas sobre campo eléctrico y conductores

En los capítulos previos se ha estudiado el campo electrostático en el vacío. En este capítulo se añade al estudio la presencia de conductores, que como se verá, modifican el campo electrostático.

Conductores

Definición de conductor

Un material es conductor cuando la carga eléctrica se mueve libremente en su interior. Esta es una propiedad que tienen por ejemplo los metales, como el cobre o el aluminio. Aunque sabemos que en la materia ordinaria los elementos que se mueven libremente son los electrones, que tienen carga negativa, consideraremos (ya que a efectos prácticos será equivalente), que en los materiales conductores hay cargas positivas y negativas, y ambas se mueven libremente. Además, supondremos que los valores de campo que manejamos no son suficientes para poder conseguir que las cargas abandonen los conductores.

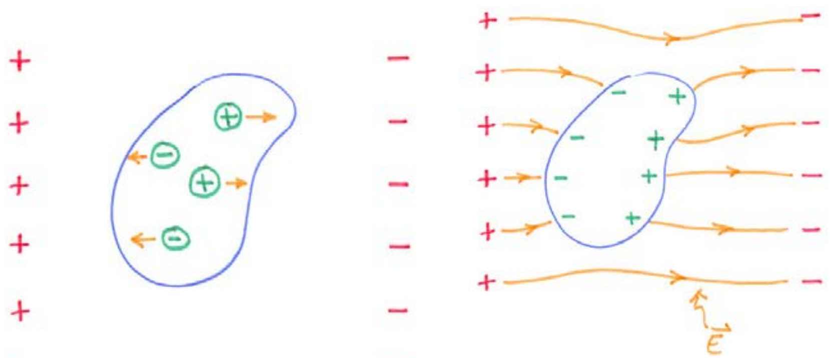


Imagen: JLRM

Campo eléctrico en presencia del conductor

En la figura se muestra un material conductor que no puede desplazarse y se supone que está en una zona en la que hay un campo electrostático creado por cargas positivas y negativas, que igualmente no pueden desplazarse (en color rojo). Estas cargas crean un campo de izquierda a derecha, que produce una fuerza sobre las cargas del conductor que será hacia la derecha sobre las cargas positivas (en el sentido del campo) y hacia la izquierda sobre las cargas negativas. Como las cargas pueden moverse libremente en el interior del conductor, se acumulan en las pareces del conductor, del que no pueden salir: las cargas negativas se acumulan en la zona de la izquierda y las positivas en la zona de la derecha. Se observa que se llega a una situación estática en la que las cargas no se mueven más. Además, se observa que el campo que crean las cargas del conductor que se han desplazado (en color verde) anula el campo creado por las cargas exteriores en la zona interior del conductor, de forma que dentro del conductor el campo es nulo. Además, ahora en la zona exterior del conductor tenemos el campo creado por la superposición de los campos creados por las cargas exteriores (rojas) y las cargas interiores del conductor (verdes) que es diferente del campo que teníamos originalmente. El sistema alcanza esta situación estática en un tiempo muy breve.

Campo dentro del conductor

Se cumplirá que cuando el sistema llega a una **situación electrostática, el campo en el interior del conductor es nulo**. Esto se debe a que, si no lo fuera, las cargas seguirían moviéndose en el interior del conductor, tratando de alcanzar esa situación estática. Si en el sistema (que en este caso es solamente el conductor y un campo electrostático externo) no hay elementos capaces de mover las cargas de forma permanente (una batería por ejemplo), se llegará a esta situación electrostática.

La superficie del conductor es equipotencial

A partir de lo anterior, y dado que el campo es cero en todo el conductor, se deduce que el trabajo para llevar una carga de un punto de la superficie del conductor hasta otro punto cualquiera de la superficie es nulo y por tanto ambos puntos están al mismo potencial. La superficie del conductor es una superficie equipotencial. De hecho, todo el conductor es una zona equipotencial.

Campo en las proximidades del conductor

Si la superficie del conductor es equipotencial, el campo será perpendicular a la misma, y por tanto el campo en las proximidades del conductor, será perpendicular a su superficie como muestra la figura.

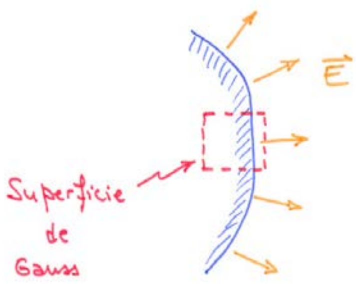


Imagen: JLRM

Además, si definimos una superficie cerrada en forma de cilindro con su eje situado en horizontal, como la del dibujo, con una superficie de sus bases S, y aplicamos el teorema de Gauss a la misma, teniendo en cuenta que dentro del conductor el campo es cero, obtenemos:

$$E.S = \frac{\sigma.S}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Es decir, que en las proximidades del conductor, en cada punto, el campo tiene un módulo proporcional a la densidad de carga σ en ese punto. Hay que tener en cuenta que en general, esa densidad de carga puede ser distinta en cada punto de la superficie del conductor.

Así que de esta clase nos quedamos con las siguiente ideas clave:

Conductores y campo eléctrico

El campo electrostático dentro de un conductor es nulo.

El campo electrostático fuera del conductor en sus proximidades, es perpendicular a la superficie del conductor. En cada punto es proporcional a la densidad de carga en la superficie del conductor junto a ese punto $E = \sigma/\varepsilon_0$

Conductores y carga

La carga en un conductor en situación electrostática se acumula en la superficie y no hay carga en su interior.

Conductores y potencial

La superficie de un conductor en situación electrostática es equipotencial

Ejercicio

Explicar y razonar qué diferencias hay entre el campo creado por una lámina esférica de radio *R* con densidad de carga Q uniformemente repartida y el campo creado por una esfera maciza conductora con carga Q y del mismo radio que la lámina esférica. Comprobar que se cumplen las propiedades del campo, potencial y carga en conductores para el caso de la esfera conductora.

Solución: No hay diferencias.

Ejercicio

Explicar y razonar qué diferencias hay entre el campo creado por un disco no conductor de radio *R* y espesor *e,* con densidad de carga Q uniformemente repartida en todo su volumen y el campo creado por un disco macizo conductor con carga Q y del mismo tamaño. Tener en cuenta que se cumplen las propiedades del campo, potencial y carga en conductores para el caso del disco conductor.

Dibujar aproximadamente las líneas de campo y las equipotenciales para ambos casos.

Solución: (i) En el disco no conductor la carga se reparte uniformemente en todo su volumen. En el disco conductor se reparte de forma no uniforme en toda su superficie. (ii) En el disco no conductor en el interior hay puntos en los que hay campo y su superficie no es equipotencial. En el disco conductor no hay campo en su interior y su superficie es equipotencial. (iii) El campo en las proximidades del disco no conductor, no es perpendicular, salvo en el eje del disco y en el plano de simetría paralelo a las caras circulares del disco. En el caso del disco conductor el campo en las proximidades del disco es perpendicular en todos los puntos. (iv) En las proximidades del disco conductor se cumple que $E = \sigma/\varepsilon_0$ (hay que tener en cuenta que σ es variable). Esta igualdad no se cumple en las proximidades del disco no conductor, en el que no hay carga superficial. Tampoco se cumple aunque se considere que el espesor es muy pequeño y que la carga está en la superficie del disco.

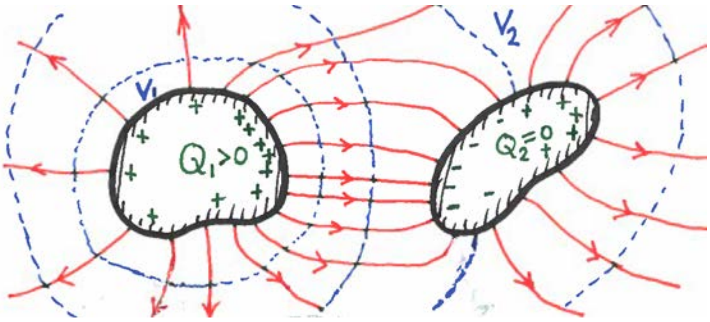
Clase 3.2 Inducción electrostática

Inducción electrostática

Si se considera un conjunto de conductores cada uno con una cantidad de carga neta y se acercan de forma que queden en posiciones fijas, las cargas de la superficie de cada uno se redistribuirán hasta que se cumpla que el campo en el interior de cada uno de los conductores es cero. Este fenómeno se conoce como inducción electrostática.

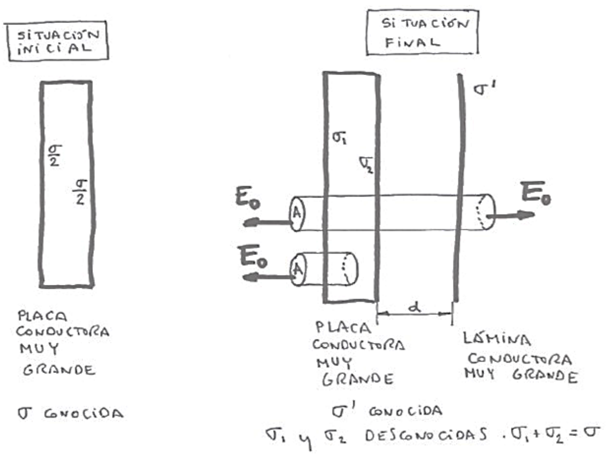
Las cargas en su nueva distribución crearán un campo y este campo estará asociado a un potencial. Así pues, cada conductor tendrá un potencial respecto de la referencia (que podemos considerar que es potencial cero en el infinito).

En la figura se muestra un ejemplo en el que se han aproximado dos conductores. El primero con carga neta positiva y el segundo con carga neta nula. Se observa cómo las cargas se redistribuyen en la superficie de los conductores, cómo el campo eléctrico (línea de campo en color rojo) es perpendicular a la superficie de los conductores y va de cargas positivas a cargas negativas. Además, se han representado las superficies equipotenciales (líneas discontinuas). El conductor 1 está a un potencial 1, y su superficie es equipotencial. El conductor 2 está a potencial 2 e igualmente su superficie es equipotencial.



Ejemplo

Se tiene una placa infinita conductora que inicialmente tiene una carga σ/2 a cada lado. Se coloca una lámina infinita por su derecha con carga σ'. Calcular la nueva distribución de cargas en la placa conductora. (Obsérvese que en este caso el resultado no depende ni del espesor de la placa ni de la distancia *d,* a que se coloque la lámina).



Solución

Al acercar la lámina cargada, se produce inducción electrostática y aparecen unas nuevas distribuciones de carga en la placa: σ_1 y σ_2. El campo a ambos lados del conjunto debe ser E_0 por simetría.

Aplicando la ley de Gauss al cilindro inferior representado en la figura se obtiene:

$$E_0 A = \frac{\sigma_1 A}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E_0 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

Por otro lado, aplicando la ley de Gauss al cilindro superior representado en la figura se obtiene:

$$2E_0 A = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma')A}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E_0 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma')}{2\varepsilon_0}$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para E_0 se obtiene que $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma$ Además sabemos que se debe cumplir que $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$. Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a que:

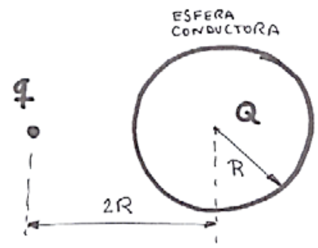
$$\sigma_1 = \frac{\sigma + \sigma'}{2} \ ; \ \sigma_2 = \frac{\sigma - \sigma'}{2}$$

Se puede comprobar que el campo producido en el interior del conductor por σ_1, σ_2 y σ' es nulo.

Ejemplo

Se tiene una esfera conductora cargada con una carga *Q* de radio *R*. A una distancia *2R* de su centro se fija una carga q. ¿Cuánto vale el campo que crean las cargas de la esfera en el centro de la esfera una vez que se ha alcanzado la situación electrostática?

Dibujar aproximadamente cómo se distribuyen las cargas, las líneas de campo y las superficies equipotenciales.



Solución: Dado que le campo en el centro de la esfera (como en todo su interior) es cero, aplicando el principio de superposición se llega a la conclusión de que el campo creado por las cargas de la esfera vale $E = q/(16\pi\varepsilon_0 R^2)$ hacia la carga, de forma que anula el campo creado por la carga.

Fuerza entre un cuerpo cargado y un conductor

Estamos suponiendo que los conductores están fijos, pero es importante tener en cuenta que entre los conductores habrá fuerzas atractivas o repulsivas, que dependerán del signo y la distribución de las cargas en su superficie, así como del campo creado por el resto de conductores.

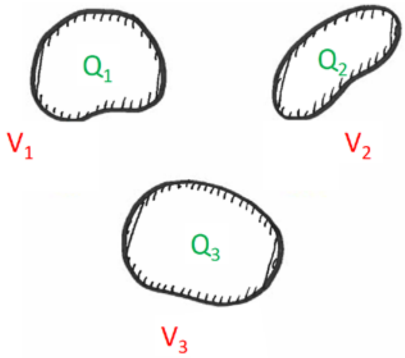
También es posible considerar situaciones en que hay cuerpos no conductores en los que conocemos cómo se distribuye la carga.

Las ideas clave de esta clase son las mismas que las de la clase anterior.

Clases 3.3 y 3.4 Inducción electrostática y apantallamiento.

Problema electrostático general

Si tenemos un conjunto de conductores, de los que conocemos o la carga o el potencial respecto de la referencia, el problema electrostático general consiste en determinar la carga y el potencial de todos los conductores, así como el potencial (y el campo) en todos los puntos del espacio.



Se trata, en definitiva, de resolver la ecuación de Laplace en todas las zonas en que no hay conductores, y por tanto la carga es nula,

$$\nabla^2 V = 0\,,$$

teniendo además en cuenta las condiciones de contorno (potencial en los conductores, carga total en los conductores, o una combinación de ambas). Una vez calculado el potencial en todos los puntos, es inmediato calcular el campo en todos los puntos utilizando el gradiente, y la carga en cada punto de los conductores, a partir del campo en su proximidad.

Una propiedad importante del problema electrostático general es que, para un determinado valor de las condiciones de contorno, **la solución es única**. Utilizaremos esta propiedad varias veces.

El campo en el interior de un conductor con un hueco es nulo. Jaula de Faraday.

A continuación, probaremos que el campo electrostático en el interior de un conductor hueco es nulo. Esta propiedad también se conoce como apantallamiento, ya que el conductor redistribuye sus cargas de forma que actúa como una pantalla que anula el campo que pudieran producir las cargas exteriores. Para que esto ocurra, el campo creado por las cargas del conductor debe ser igual y de signo contrario al campo creado por las cargas externas al conductor. Este fenómeno se conoce como jaula de Faraday. Una jaula de Faraday es un conductor hueco (por ejemplo, una caja metálica) que tendrá la propiedad de que en su interior no hay campo electrostático.

Vamos a ver cómo podemos probar esta propiedad.

Supongamos en primer lugar que tenemos un conductor macizo con forma de paralelepípedo. Además, tenemos cargas externas al conductor. Según lo que hemos visto, la superficie del conductor es equipotencial y como en su interior no hay carga, en el interior se cumple que $\nabla^2 V = 0$. Sabemos, al tratarse de un conductor, que el campo en el interior es nulo.

Consideremos en segundo lugar un conductor como el de la imagen, que es externamente igual al primer conductor considerado, pero en lugar de ser macizo es una caja metálica con un hueco en su interior. Las cargas externas al conductor están en la misma posición que en el caso anterior (no aparecen en la figura). Nuevamente, la superficie externa del conductor es equipotencial, y en el interior tanto del conductor como del hueco, al no haber carga, se cumple que $\nabla^2 V = 0$. Ahora es necesario justificar por qué no hay carga en la superficie interna del conductor. Si la hubiera, habría campo en el hueco, que iría de cargas positivas a negativas, lo que haría que pudiéramos integrar ese campo siguiendo una línea de campo, llegando a la conclusión de que la superficie interna del conductor no es equipotencial, lo que contradice las propiedades ya vistas de los conductores en situación electrostática.

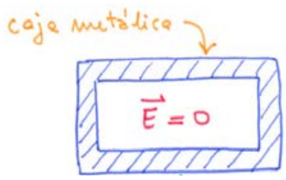


Imagen: JLRM

Así pues, la solución del problema electrostático general en el segundo caso, dado que es única para las mismas condiciones de contorno, debe ser la misma que para el primer caso. Y eso supone que, como queríamos probar, el campo en el interior del hueco es cero.

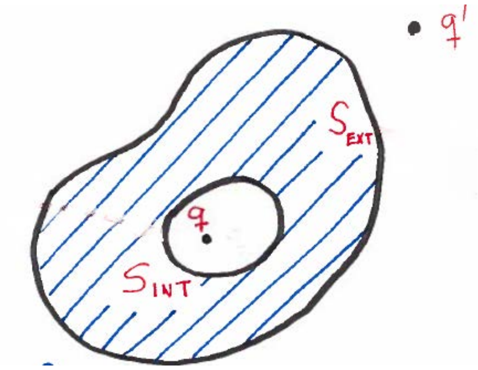
Apantallamiento

Vamos a extender la idea de apantallamiento presentada para el interior de un conductor en el apartado anterior, de forma que podamos aplicarla también al exterior del mismo.

Supongamos que tenemos un conductor con un hueco, pero ahora permitimos no solo que haya campo creado por cargas externas al conductor, sino también puede haber cargas dentro del hueco. La carga del conductor (que en total puede ser nula o no), se redistribuirá entre la superficie exterior y la interior. Llamaremos a estas cargas S_{EXT} y S_{INT} respectivamente.

Utilizando las propiedades de la ecuación de Laplace (linealidad y unicidad de la solución) se puede llegar a la conclusión de que las cargas del conductor se reparten de tal forma que:

- Las cargas externas al conductor (q' en la imagen) y las cargas de la superficie externa del conductor S_{EXT} en conjunto, producen un campo nulo en el interior del conductor, tanto en la parte maciza del conductor (rayada en la imagen) como en el hueco.
- Las carga que están en el hueco (q en la imagen) y las cargas de la superficie interna del conductor S_{INT} en conjunto, producen un campo nulo en toda la región externa a la superficie interior del conductor, que se divide en dos partes: la parte maciza del conductor (rayada en la imagen) y el exterior del conductor.



En cuanto a la distribución de las cargas se sabe:

- Si el conductor está aislado, cumple el principio de conservación de la carga y la carga neta en el conductor sigue siendo la misma que antes de redistribuirse su carga.
- Aplicando la ley de Gauss se puede concluir que $q + S_{INT} = 0$

El campo en el interior del conductor, por lo tanto se puede interpretar como la suma de dos campos nulos: el creado por *q´* y S_{INT} por un lado, y el creado por *q* y S_{EXT} por el otro.

Campo en un hueco vacío en un conductor (Jaula de Faraday)

Si un conductor tiene un hueco vacío, el campo en el hueco es nulo.

Se puede demostrar a partir de la unicidad de solución de la ecuación de Laplace.

Apantallamiento

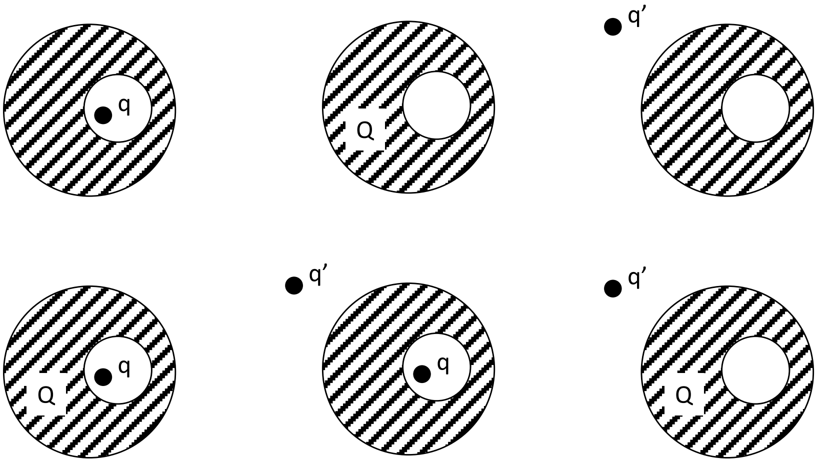
Los conductores apantallan los campos electrostáticos. Esto ocurre tanto de dentro a afuera como de afuera a adentro.

Ejercicio

En la figura se muestran seis situaciones distintas en las que hay un conductor esférico macizo con un hueco esférico no concéntrico en su interior. En algunas situaciones hay una carga *q* en el interior del hueco, y en otras no. En algunas de las situaciones, hay un carga *q´* en el exterior del conductor y en otras no. En algunas situaciones el conductor tiene una carga neta inicial *Q* y en las demás, en las que no se indica nada, la carga neta es cero.

Se pide, para cada una de las seis situaciones.

a) Valor de la carga en la superficie interior y en la superficie exterior de la esfera.
b) ¿En cuáles de las seis situaciones el campo es cero en el interior del conductor (zona rayada)?
c) Dibujar aproximadamente las líneas de campo en el hueco. ¿En qué situaciones es cero? ¿En qué situaciones el campo en el hueco tiene simetría radial?
d) Dibujar aproximadamente las líneas de campo en el exterior del conductor. ¿En qué situaciones es cero? ¿En qué situaciones el campo en el exterior tiene simetría radial?
e) En el caso central inferior, si la carga *q* estuviera en el centro del hueco, el campo dentro del hueco ¿tendría simetría radial?


q
Q
q′
Q
q
q′
q
q′
Q

Clase 3.5 Campo eléctrico en los conductores. Linealidad.

Linealidad del problema electrostático general

Como se ha visto, el problema electrostático general para un conjunto de conductores consiste en resolver la ecuación de Laplace en todas las zonas en que no hay conductores y en las que, por tanto, la carga es nula,

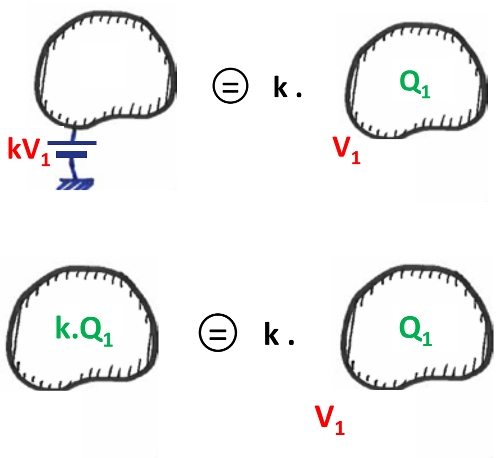
$$\nabla^2 V = 0\,,$$

teniendo además en cuenta las condiciones de contorno (potencial en los conductores, carga total en los conductores, o una combinación de ambas). Una vez calculado el potencial en todos los puntos, es inmediato calcular el campo en todos los puntos utilizando el gradiente y la carga en cada punto de los conductores, a partir del campo en su proximidad.

Dado que tanto la ecuación de Laplace, como el gradiente, como la expresión que relaciona campo cerca del conductor con carga en su superficie son lineales, entonces, si partimos de una determinada configuración de la que suponemos su solución, se cumplen las siguientes propiedades:

- Si se multiplica por un determinado factor (positivo o negativo) la carga neta en todos los conductores del problema, el campo y el potencial en todos los puntos quedan multiplicados por este factor.
- Si se fija mediante baterías el potencial de todos los conductores al valor del problema original multiplicado por un determinado factor, igualmente la carga en cada punto y el potencial quedan multiplicados por ese factor.

Otra forma de llegar a esta conclusión es aplicando el principio de superposición.



Metalizado

Supongamos ahora que tenemos un problema electrostático resuelto y “rellenamos” con metal parte del espacio. Queremos resolver el nuevo problema con la nueva zona de conductor, suponiendo que se mantiene la carga neta en los conductores. Si la nueva zona conductora está aislada, tendrá carga neta cero.

Si consideramos la zona en la que no hay conductor después de “rellenar” la solución de la ecuación de Laplace usando como condición de contorno en la equipotencial el potencial que tenía antes de rellenar, se cumple que en la zona que no hay conductor, las condiciones de contorno del problema siguen siendo las mismas y por tanto la solución para el potencial que teníamos antes sigue siendo válida en toda la zona sin conductor. Como la solución de la ecuación de Laplace es única, la solución que hemos encontrado es la solución del problema.

Podemos hacer la misma operación rellenando toda la zona exterior de una superficie equipotencial.

Ejemplo

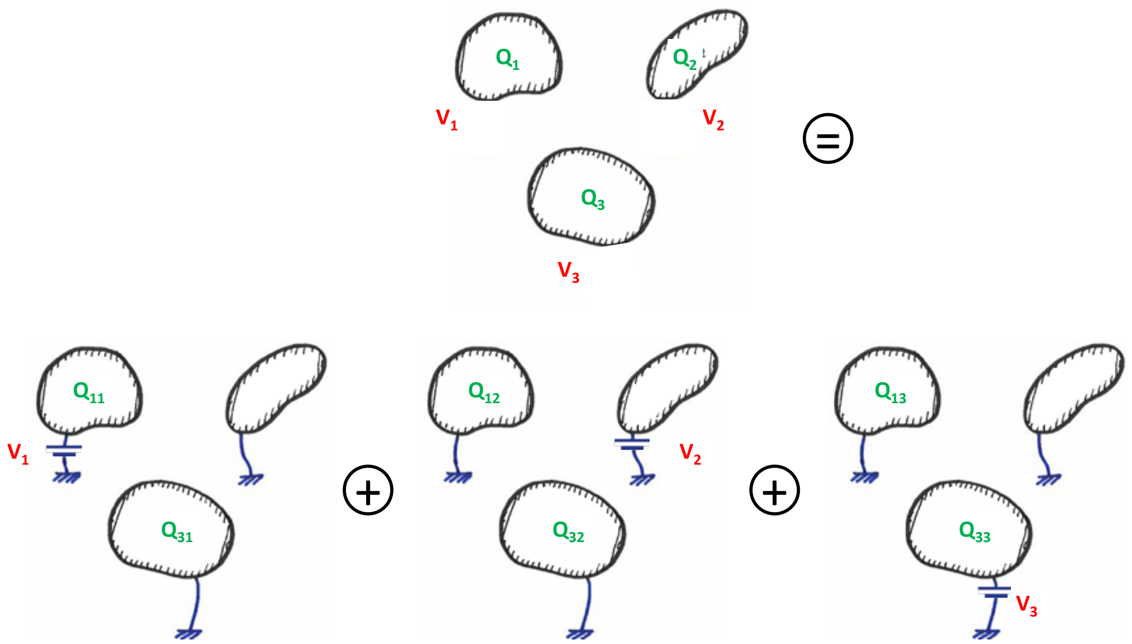
Se tiene una esfera metálica de radio *R* cargada con una carga *Q* conocida. Supongamos que se rellena con metal la corteza esférica entre las distancias R_1 y R_2, ambas mayores que *R*. Cuál es el nuevo campo en las distintas zonas del espacio.

Solución

Aplicando las ideas expuestas sobre metalizado, se llega a la conclusión de que el campo solo cambia en la zona en la que se ha rellenado con metal, en la que pasa a ser cero. En el resto de puntos, el campo no cambia. Se puede llegar a la misma conclusión, pero con algún cálculo más, considerando que en la cara interna de la corteza esférica metálica se induce una carga –*Q* y en la cara externa una carga *Q*.

Superposición en el problema electrostático general

Supongamos que tenemos un conjunto de conductores para los que se ha solucionado el problema electrostático general, y para los que se conoce por lo tanto el potencial y las cargas. El valor de las cargas se puede obtener superponiendo tantos problemas como conductores de forma que en cada problema se pone cada conductor a su potencial y el resto a potencial cero.



No presentaremos una demostración detallada, pero se puede ver que la suma de los tres problemas, cumple las condiciones de contorno de potencial en cada conductor y que la suma de cargas debe corresponder por tanto con el problema conjunto:

$$Q_i = \sum_j Q_{ij}$$

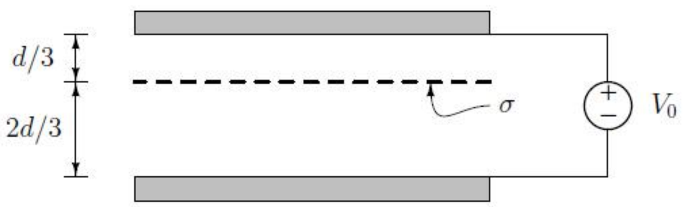
Esto es cierto no solo para la carga total en cada conductor sino para la densidad de carga en cada punto de la superficie del conductor: puede obtenerse como la suma de las densidades de carga en cada uno de los subproblemas en que se ha descompuesto el problema.

Esta idea puede facilitar la resolución del problema en el caso en que se fija el potencial de todos los conductores.

Si además de los conductores fijados a determinados potenciales, hubiera cargas exteriores a los conductores en posiciones fijas el problema se podría resolver superponiendo a la solución sin cargas exteriores, el subproblema con las cargas exteriores en sus posiciones fijas, con los conductores a potencial cero. Se puede razonar que esta solución es válida de forma similar a como se ha hecho antes.

Ejercicio

Las placas conductoras del dibujo de la figura son muy grandes, y la separación entre ellas es mucho menor que las dimensiones laterales de las placas. Están conectadas entre sí por una batería que mantiene una diferencia de potencial constante V_0 entre ellas. Una superficie plana con densidad de carga uniforme σ se encuentra entre las placas, tal como indica la figura. Se pide calcular la densidad de carga en cada placa utilizando superposición.



Linealidad

Si multiplicamos la carga de un problema por una constante, el campo varía proporcionalmente y también el potencial.

Metalizado

Si en dos problemas, hay una zona en que coinciden la carga y las condiciones de contorno, la solución es la misma.

Superposición

Un problema electrostático con conductores con potenciales fijos puede resolverse superponiendo subproblemas de forma que en cada subproblema se fija el potencial de un solo conductor.

Clase 3.6 Campo eléctrico en los conductores. Método de imágenes.

Método de las imágenes

Este método aprovecha la propiedad de unicidad del problema electrostático general: si en una zona del espacio tenemos para dos problemas la misma distribución de carga y las mismas condiciones de contorno, la solución es la misma. Podemos, por lo tanto, sustituir un problema por otro más sencillo, de forma que en una zona del espacio la solución sea la misma.

Supongamos que queremos resolver el problema representado en la parte izquierda de la imagen, el campo que se crea al acercar una carga *Q* a un conductor plano muy grande, que aproximaremos como infinito. Al acercar la carga *Q*, se induce carga negativa en el conductor. Queremos calcular el valor de esa carga inducida y del campo que se crea en el exterior del conductor. (En el interior ya sabemos que es cero).

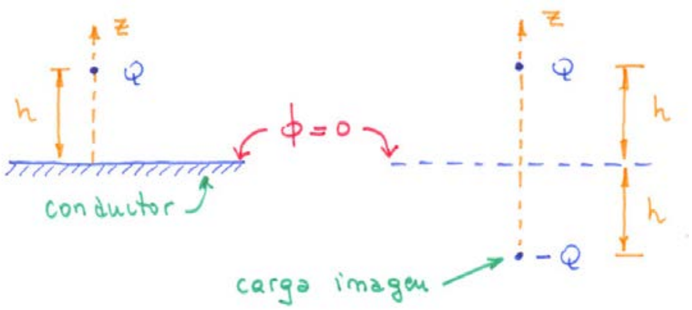


Imagen: JLRM

Vamos a comparar este problema con el representado a la derecha, en el que no hay conductor, y en cambio hay una carga negativa colocada de forma simétrica respecto al plano que antes delimitaba el conductor. En estos dos problemas:

- La distribución de carga en la zona superior (z ≥ 0) es la misma. Carga cero en todo el semiespacio excepto en el punto que está la carga *Q* que tiene el mismo valor en los dos problemas.
- En ambos problemas el plano horizontal central es una superficie equipotencial. En el de la izquierda por tratarse de un conductor, en el de la derecha porque en cualquier punto de ese plano, el campo es la suma del campo creado por ambas cargas, que resulta ser siempre vertical, y por tanto perpendicular al plano, que es entonces equipotencial.

Así pues, en la zona superior, el campo en el problema de la izquierda coincide con el campo en el problema de la derecha, que se calcula de forma sencilla sumando el campo de ambas cargas.

Además, calculando el campo que crean ambas cargas justo en la superficie del conductor, se puede deducir la carga σ inducida en el conductor ya que en las proximidades del conductor se cumple $\sigma = \varepsilon_0 . E$. Es fácil ver que el campo es hacia abajo, por tanto entrante al conductor, lo que supone que la densidad de carga es negativa.

Ejercicio

Usando el método de las imágenes, calcular la fuerza por unidad de longitud con que atrae el suelo a un cable horizontal de longitud indefinida, paralelo al suelo a una distancia *d* del mismo y cargado uniformemente con una densidad de carga de $\lambda\ C/m$.

Solución: F / l = $\lambda^2/(4\pi\varepsilon_0 d)$

Método de las imágenes y energía

El método de las imágenes puede usarse también para determinar la energía almacenada en una determinada configuración de carga. Volvamos al ejemplo de una carga frente a un conductor plano indefinido. A partir de la expresión $E_P = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dv$, y teniendo en cuenta que el módulo de campo es simétrico respecto al plano del conductor, se llega a la conclusión de que el valor de esta integral de volumen vale el doble en la situación de la derecha que en la de la izquierda, ya que en la izquierda se hacen dos integrales con igual resultado, una a cada lado del plano, mientras que a la izquierda, la integral por debajo del plano es nula al ser nulo el campo.

Así pues, la energía acumulada en la configuración de la izquierda es:

$$E_P = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2d}$$

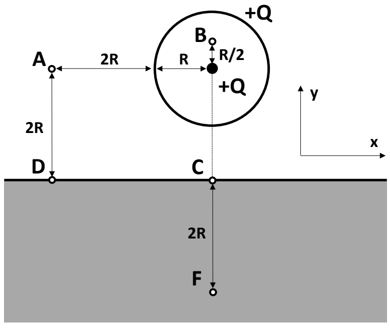
Método de las imágenes

Si en dos problemas, hay una zona en que coinciden la carga y las condiciones de contorno, la solución es la misma.

Se puede conseguir mediante cargas imagen.

Ejercicio

La imagen muestra una superficie esférica no conductora con carga total +Q uniformemente distribuida. En su centro hay una carga puntual de valor +Q. La superficie esférica está por encima de un suelo conductor de tamaño indefinido, de forma que su centro está a una distancia 2R del suelo.



Se pide:

a) Dibujar de forma aproximada sobre la imagen la distribución de carga en el conductor, dejando claro dónde está la carga, su signo y si se distribuye uniformemente.
b) Determinar el campo eléctrico total (vector) en el punto A.
c) Determinar el campo eléctrico total (vector) en el punto B.
d) Calcular la densidad de carga superficial en el punto C, indicar el signo.
e) ¿Cuál es el signo del trabajo que debe hacer un agente externo para mover una carga negativa –q desde el punto C hasta el punto D? Justificar.
f) Determinar el campo eléctrico total (vector) en el punto F.
g) Determinar el campo eléctrico (vector) en el punto F creado únicamente por las cargas que están en el suelo conductor.

Solución

a) En la superficie del conductor aparece carga negativa distribuida de forma no uniforme. Justo debajo de la esfera (punto C) la densidad es máxima, y va disminuyendo conforme nos vamos alejando en horizontal. En el interior del conductor no aparece ninguna carga.

b) Utilizando el método de imágenes, se puede calcular el campo en este punto si se coloca una carga puntual -2Q en el punto F. El campo en A resulta:

$$\vec{E}_A = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{1}{9R^2} + \frac{3}{125R^2}\right)\vec{\imath} - \frac{4}{125R^2}\vec{\jmath}\right] \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

c) $\vec{E}_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R^2/4} - \frac{2.4}{81R^2}\right)\vec{\jmath} \quad \left(\frac{V}{m}\right)$

d) $\sigma_C = -\varepsilon_0 \cdot E_C = -2\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2Q}{4R^2} \quad \left(\frac{C}{m^2}\right)$

e) El trabajo es cero porque es una línea equipotencial, es la superficie del conductor.

f) Es un punto del interior del conductor y por tanto el campo es nulo. $\vec{E}_F = \vec{0} \quad \left(\frac{V}{m}\right)$

g) Es un campo que anula el creado por el que crean conjuntamente la carga puntual y la superficie esférica y por tanto vale.

$$\left(\vec{E}_F\right)_{conductor} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q}{16R^2}\right)\vec{\jmath} \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

Clase 3.7 Campo eléctrico en los conductores. Capacidad.

Concepto de capacidad y de condensador

Para un conductor aislado. Si suponemos que tenemos un conductor aislado, denominaremos capacidad del conductor al cociente entre la carga en el conductor y su diferencia de potencial con el infinito. Es una constante positiva que depende de las características geométricas del conductor, pero no de su carga.

$$C = \frac{Q}{V}$$

Para un condensador. Un condensador es un conjunto de dos conductores, aislados entre sí, uno de ellos con una carga +Q y el otro con una carga igual y de signo contrario –Q. La capacidad del condensador es el cociente entre la carga del conductor con carga positiva y la diferencia de potencial entre éste y el de carga positiva. La capacidad es una constante positiva que depende de las características geométricas de los conductores que lo forman, pero no de la carga (igual y de signos opuestos) que acumulan.

$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-}$$

La capacidad se mide en una unidad denominada Faradio en el Sistema Internacional de unidades. Equivale a un Culombio entre un Voltio.

El hecho de que acumulan carga en un campo eléctrico y por lo tanto de acumular energía, hace a los condensadores útiles en distintas aplicaciones tecnológicas. Se emplean para producir descargas cortas (flash fotográfico), para acumular energía en redes eléctricas (supercondensadores), para modificar la forma de las señales eléctricas (filtros) o para mejorar la eficiencia del transporte de energía eléctrica (compensación de energía reactiva). En general se utilizan para modelar cualquier fenómeno en que aparezca un elemento que acumula carga proporcional al potencial que se le aplica.

Determinación de la capacidad

Tanto para determinar la capacidad de un conductor, como de un condensador, se parte de suponer una carga genérica en el conductor Q (y –Q en el caso del condensador en el segundo conductor). A partir de esa carga se calcula el campo que se produce en todo el espacio (por el método más conveniente según la forma del conductor o de los conductores). A partir del campo se calcula el potencial o potenciales y a partir del mismo se calcula la capacidad. Al depender los potenciales linealmente de la carga, al calcular la capacidad esta resultará ser independiente de la carga.

Ejemplo

Determinar la capacidad de una esfera conductora de radio *R*.

Solución: Suponemos la esfera cargada con una carga *Q*, que se repartirá uniformemente por su superficie, dado que el problema es completamente simétrico. El campo que crea la carga sobre la esfera puede determinarse usando la ley de Gauss, y resulta ser el mismo que si toda la carga estuviera en el centro de la esfera. Lo mismo pasa con el potencial que crea la esfera, $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ En la superficie de la esfera el potencial es $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ y finalmente la capacidad resulta ser proporcional al radio de la esfera.

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Ejemplo

Determinar la capacidad de un condensador formado por dos placas planas cuadradas paralelas de área *A* situadas a una distancia pequeña *d*.

Solución: Suponemos una de las placas con carga +Q y la otras con carga –Q. Despreciando el efecto de bordes dado que el lado de las placas es mucho mayor que la distancia entre ellas, que se considera pequeña, podemos usar la ley de Gauss para determinar el campo entre las placas, que resulta ser constante y de valor $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$ Por tanto, la diferencia de potencial entre las placas es $V_+ - V_+ = \frac{Q}{A\varepsilon_0}d$. Finalmente, la capacidad resulta depender solo de las características geométricas del condensador. Proporcional a la superficie de las placas e inversamente proporcional a la separación entre las mismas.

$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Energía de un condensador

En primer lugar, vamos a calcular la energía contenida en un condensador plano de placas paralelas de área *A* situadas a una distancia pequeña *d*. Podemos usar la ley de Gauss para determinar el campo entre las placas, que resulta ser constante y de valor $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\mathrm{A}\varepsilon_0}$. A partir de esta expresión podemos calcular la energía contenida en el campo del condensador usando la correspondiente expresión.

$$E_P = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\mathrm{Ad} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{\mathrm{A}\varepsilon_0}\right)^2 A^2 d = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\mathrm{A}\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\mathrm{C}}$$

En esta expresión C es la capacidad del condensador plano. C= $\varepsilon_0 \frac{\mathrm{A}}{d}$

Se puede demostrar que la expresión de la energía obtenida para el condensador plano, es válida para cualquier condensador, basta con utilizar el valor de su capacidad. Utilizando la definición de capacidad, se pueden además obtener otras expresiones también útiles.

$$E_P = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}C(V_+ - V_-)^2 = \frac{1}{2}Q(V_+ - V_-)$$

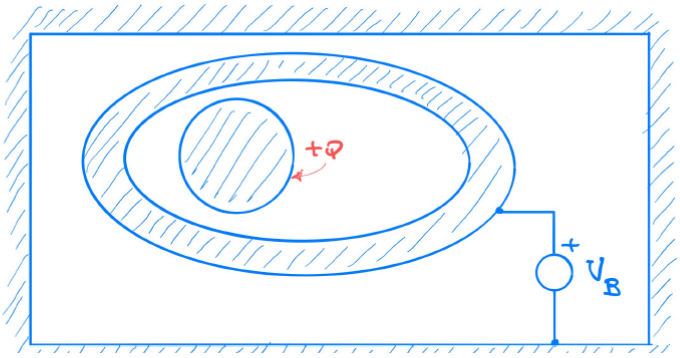
Ejercicio

La figura muestra una caja metálica cerrada en cuyo interior hay un conductor hueco. En el interior del conductor hueco hay una esfera conductora de radio a.

La carga neta de la esfera conductora es $+Q$. Una batería mantiene una diferencia de potencial V_B entre el conductor hueco y la caja metálica. La capacidad del conjunto *conductor hueco–caja metálica* es C. El potencial de la caja metálica es nulo.

Si $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$, ¿qué afirmaciones son correctas?

1. El potencial de la esfera interior es $\dfrac{kQ}{a}$.
2. El potencial de la esfera interior es $\dfrac{kQ}{a} + V_B$.
3. La carga **neta** del conductor hueco es $-Q$.
4. La carga **neta** del conductor hueco es $C\,V_B$.
5. La carga **neta** del conductor hueco es $-Q + C\,V_B$.



Solución. Únicamente es correcta la afirmación 5.

Capacidad

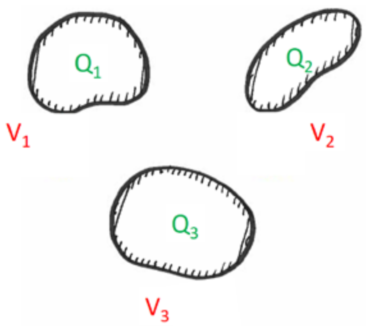
Para un sistema de dos conductores con cargas +Q y –Q, la relación entre Q y su diferencia de potencial es una constante.

Energía de un condensador

Es la energía que cuesta colocar las cargas en los conductores. Vale (1/2).C.V^2

Anexo: problema electrostático general y condiciones de potencial y carga

Retomemos el problema electrostático general. Si tenemos un conjunto de *N* conductores, de los que conocemos o la carga o el potencial respecto de la referencia, el problema electrostático general consiste en determinar la carga y el potencial de todos los conductores, así como el potencial (y el campo) en todos los puntos del espacio.



En definitiva, consiste en resolver la ecuación de Laplace en todas las zonas en que no hay conductores y por tanto la carga es nula,

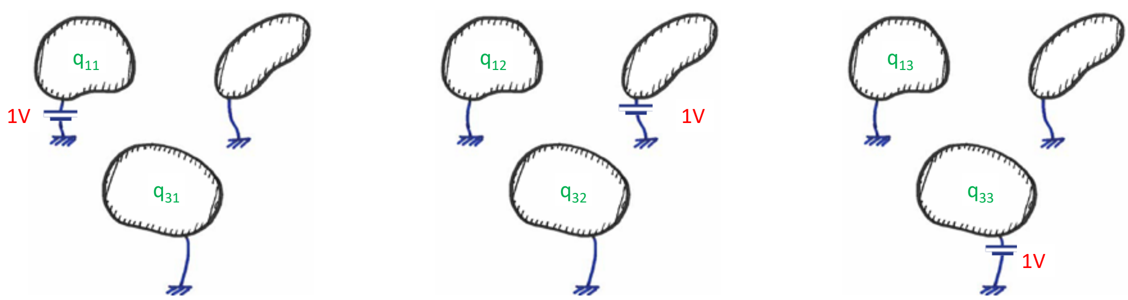
$$\nabla^2 V = 0\,,$$

teniendo además en cuenta las condiciones de contorno (potencial en los conductores, carga total en los conductores, o una combinación de ambas). Una vez calculado el potencial en todos los puntos, es inmediato calcular el campo en todos los puntos utilizando el gradiente y la carga en cada punto de los conductores, a partir del campo en su proximidad.

Coeficientes de capacidad y coeficientes de inducción

Esta definición previa nos ayudará a determinar cargas y potenciales en los conductores. Supongamos que ponemos uno de los conductores el conductor j a un potencial de 1V. Llamaremos c_{jj}, **coeficiente de capacidad** a la carga que adquiere el mismo conductor j, y c_{ij}, **coeficientes de inducción**, a la carga que adquiere cualquier otro conductor. Al ser el problema lineal, estos coeficientes representan la carga por unidad de potencial que adquieren los conductores y sus unidades serán culombios entre voltio, o sea faradios.

$$c_{ij} = q_{ij} \;\; [F = C/V]$$



Aplicando la linealidad del problema, si la carga en lugar de 1V fuera otro valor, los coeficientes podrían definirse a partir de la expresión.

$$c_{ij} = \frac{Q_{ij}}{V_j}$$

Siendo V_j el potencial al que se pone en cada caso el conductor *j.* Es importante tener en cuenta que la carga de un conductor a potencial cero puede ser distinta de cero.

Caso particular. Se conocen los potenciales en los conductores

Supongamos que conocemos el potencial V_j en todos los conductores, pero desconocemos el valor de las cargas en los mismos. En ese caso, teniendo en cuenta la linealidad de la ecuación de Laplace se puede calcular directamente la carga en cada conductor:

$$Q_i = \sum_j Q_{ij} = \sum_j c_{ij} V_j$$

Caso general. Se conoce o bien el potencial o bien la carga en cada conductor conductores

Es posible que en la expresión del apartado anterior

$$Q_i = \sum_j c_{ij} V_j$$

conozcamos para algunos conductores la carga y para otros el potencial. Teniendo en cuenta que los subíndices *i* y *j*, van los dos desde 1 hasta *N* (número de conductores), tendremos un sistema de N ecuaciones con N incógnitas y podremos obtener los valores deseados.

Este caso incluye al caso en que se conocen las cargas en todos los conductores y ningún potencial.

Calculo del potencial en todos los puntos.

Una vez resuelto cualquiera de los dos casos anteriores, si además conocemos v_j el valor del potencial en todos los puntos del espacio para la situación en que el conductor *j* está a potencial 1, entonces podemos calcular el potencial en todos los puntos del espacio aplicando nuevamente superposición. (El denominador de 1V se añade para hacer coherentes las unidades).

$$V(x, y, z) = \sum_j \frac{V_j}{[1V]} v_j$$

Ejemplo

Se tiene un sistema de tres conductores para los que se conocen los coeficientes de capacidad e inducción. En una determinada situación, se conoce el potencial del conductor 1 y la carga en los conductores 2 y 3. Determinar el resto de potenciales y cargas.

Ejemplo

Conforme a lo explicado, para el caso de tres conductores se cumple $Q_i = \sum_j c_{ij} V_j$, es decir:

$$\boldsymbol{Q_1} = c_{11} V_1 + c_{12} \boldsymbol{V_2} + c_{13} \boldsymbol{V_3}$$

$$Q_2 = c_{21} V_1 + c_{22} \boldsymbol{V_2} + c_{23} \boldsymbol{V_3}$$

$$Q_3 = c_{31} V_1 + c_{32} \boldsymbol{V_2} + c_{33} \boldsymbol{V_3}$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones en que las incógnitas son los valores que queremos calcular: V_2, V_3 y Q_1.