Campos Electromagnéticos

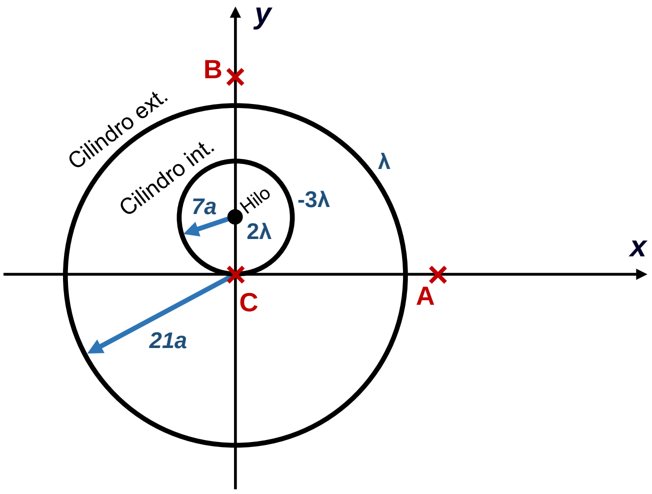
Febrero de 2024

(Mod A. Solución)

Duración: 30 min

Nombre: **Grupo:**

El examen tiene una duración de **30 minutos**.
No se permite el uso de **calculadora ni de ningún tipo de libros o apuntes**. El enunciado del examen incluye un formulario.
Para obtener la calificación máxima en cada apartado, debe **justificarse adecuadamente** y de forma concisa cada respuesta.



La figura superior muestra en sección un conjunto formado 3 elementos cargados: un hilo infinito paralelo el eje *z* que pasa por el punto *(0, 7a, 0)* y dos cilindros infinitos paralelos al eje *z* pero no coaxiales según la figura. (*"a"* es una distancia conocida).

El hilo tiene una densidad de carga lineal uniforme $+2\lambda$ [C/m] y cada cilindro tiene carga distribuida uniformemente sobre su superficie. Para facilitar los cálculos, se da cuánta carga por metro tiene cada cilindro en la dirección del eje *z* [C/m]: los valores son -3λ para el cilindro interior y $+\lambda$ para el exterior.

Se pide **justificando brevemente todas las respuestas**:

a) (2 p) Valor del campo electrostático (vector) en el punto *A(24a, 0, 0)*

El campo que crea un hilo o uno de los cilindros en su exterior (para una densidad genérica de carga lineal $\lambda *$) se puede deducir usando la ley de Gauss y es radial en cilíndricas centradas en cada elemento y vale $\vec{E} = \frac{\lambda *}{2\pi r \varepsilon_0}\hat{r}$

Aplicando el principio de superposición sumamos el campo creado por los tres elementos en el punto A (el cilindro interior y el hilo equivalen para este punto a un hilo con carga $-\lambda$ en la posición del hilo:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot 24a\varepsilon_0}\hat{\imath} - \frac{\lambda}{2\pi \cdot 25a\varepsilon_0}\frac{24}{25}\hat{\imath} + \frac{\lambda}{2\pi \cdot 25a\varepsilon_0}\frac{7}{25}\hat{\jmath}$$

b) (1,5 p) Flujo del campo electrostático a través de una esfera de radio *6a* centrada en el punto *(0, 7a, 0).*

Aplicando la ley de Gauss, se puede calcular a partir de la carga encerrada por la esfera:

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{12a \cdot 2\lambda}{\varepsilon_0} = \frac{24a\lambda}{\varepsilon_0}$$

c) (1,5 p) Calcular la divergencia del campo electrostático en el punto A(24a, 0, 0).

Aplicando la ley de Gauss en versión diferencial, teniendo en cuenta que en ese punto no hay carga: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

d) (2 p) Trabajo que tiene que hacer un agente externo para mover una carga q desde el punto *A(24a, 0, 0)* hasta el punto *B(0, 24a, 24a).* Explica el signo.

Calcularemos el trabajo hasta el punto F(0, 24a, 0) ya que los desplazamientos en la dirección del eje z no producen trabajo, al ser todos los campos radiales en cilíndricas.

Aplicando superposición, podemos descartar el trabajo de la fuerza necesaria para oponerse al campo que crea el cilindro exterior ya que si nos desplazamos desde A hasta F por una circunferencia de radio 24a con centro en el origen nos estaríamos moviendo perpendicularmente a este campo. En cuanto al campo del cilindro interior y el hilo, podemos movernos sin necesidad de realizar trabajo con un agente externo por el mismo motivo primero por una circunferencia de radio 25a centrada en el hilo hasta un punto D (0, 32a, 0). Y finalmente llegamos al punto B desde el punto D moviéndonos por el eje *y*.

La fuerza que ejerce el campo restante (creado por el cilindro interior y el hilo) es atractiva, por lo tanto hacia abajo, así que la fuerza del agente externo, que se opone a ella, es hacia arriba. Como el desplazamiento de D a B es hacia abajo, se opone a la fuerza y es negativo. El valor del trabajo es:

$$W_{A\to B} = W_{A\to F} = \underbrace{\int_A^F -q\vec{E}_{ext} \cdot \overrightarrow{dr}}_{=0} + \underbrace{\int_A^D -q\vec{E}_{int+hil} \cdot \overrightarrow{dr}}_{=0} + \int_D^F -q\vec{E}_{int+hil} \cdot \overrightarrow{dr}$$
$$= \int_{32a}^{24a} -q \frac{-\lambda}{2\pi(y-7)\varepsilon_0}\hat{\jmath} \cdot dy\,\hat{\jmath} = \frac{-q\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{25}{17}\right)$$

e) (1,5 p) ¿Cuál punto está a mayor potencial *B(0, 24a, 24a)* o *C(0, 0, 0)*? ¿Por qué?

Para llevar una carga de B a C en línea recta (con un pequeño rodeo en las proximidades del hilo para evitar atravesarlo) nos encontramos con un campo que es (i) atractivo (hacia abajo) entre B y el cilindro exterior (el campo del cilindro exterior es repulsivo pero menor que el de los otros dos elementos), (ii) hacia abajo entre el cilindro exterior y el cilindro interior, ya que es solo el campo de cilindro interior e hilo, (iii) nulo dentro del cilindro interior y (iv) perpendicular al desplazamiento en el pequeño rodeo concéntrico con el hilo. Así pues, la fuerza que hace una agente externo para anular la fuerza del campo es hacia arriba o nula en todos los tramos, el desplazamiento es hacia abajo, el trabajo es negativo y por tanto C está a menor potencial que B.

f) (1,5 p) ¿Es cierto que si nos alejamos una distancia grande a lo largo del eje *x* el campo tiende asintóticamente a $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda b}{x^2}$? ¿Por qué? . En caso afirmativo, calcular el valor de *b*. (La constante *b* tiene unidades de longitud).

No es cierto. Al tratarte de una distribución de carga no limitada, al alejarnos el módulo del campo no decrece con el cuadrado de la distancia. No se puede aplicar análisis asintótico.