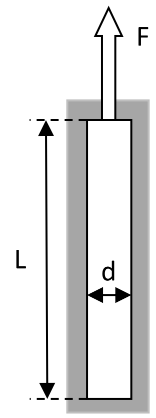
Problema 2

Se vierte un fluido newtoniano de densidad ρ y viscosidad μ que discurre formando una película delgada de forma cilíndrica y espesor desconocido, alrededor de un cable de diámetro d y de longitud L. Se tira del cable con una fuerza F para que éste ascienda con una velocidad constante V, siendo el módulo de la fuerza $|F| = \frac{3}{4}\rho g \pi d^2 L$. Para esta situación, y despreciando los efectos en los bordes del cable, determinar la velocidad máxima del fluido en función de los parámetros del problema.



Formulario:

Coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z) = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (ru_r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right] + \rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial (u_z)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z$$

Asumiendo que el flujo es laminar y estacionario, podemos hacer las siguientes aproximaciones (hipótesis):

1. Al ser estacionario, las derivadas temporales son nulas $(\partial/\partial t = 0)$.

2. Como tiene geometría cilíndrica y, tanto la gravedad como la fuerza son paralelas al eje, la velocidad del fluido no depende de la coordenada azimutal, θ (no tendría sentido que unos ángulos fuesen privilegiados frente a otros). Por tanto $(\partial/\partial\theta = 0)$.

3. Como el enunciado dice que despreciemos los efectos de borde, entonces no puede haber dependencia en cómo de alto o bajo estemos respecto al borde del hilo, es decir $(\partial/\partial z = 0)$.

De estas dos hipótesis, aplicando la ecuación de continuidad, se deduce que:

$$\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)} + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

$$v_z = v_z(r)$$

Con las hipótesis anteriores, hay que analizar la ecuación de Navier-Stokes para la componente z. Se tiene en cuenta que no hay variación de presión en esta dirección ya que toda la superficie del líquido está en contacto con la atmósfera y el líquido desciende verticalmente con un espesor constante (desconocido). Se toma un sistema de referencia donde $g_z = -g\vec{k})$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + \cancel{v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}} + \cancel{v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}}\right) = \rho g_z - \cancel{\frac{\partial p}{\partial z}} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right)$$

Por lo que:

$$\rho g = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right)$$

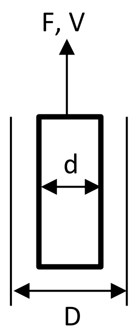
Integrando esta ecuación con respecto a r, se tiene:

$$v_z(r) = \frac{\rho g r^2}{4\mu} + A\, ln\, r + B$$

donde A y B son constantes de integración que se obtienen con dos condiciones de contorno:

1. Por la condición de no deslizamiento (no-slip), la velocidad del fluido en contacto con el cilindro es la misma. Por tanto:

$$v_z\left(r = \frac{d}{2}\right) = V$$



2. Se supone un diámetro D exterior para el líquido, tal y como se muestra en la figura. En esta posición, el líquido no experimentará ningún esfuerzo cortante en su interacción con el aire exterior atmosférico. Por tanto:

$$\left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=D/2} = 0$$

El perfil de velocidad queda como:

$$v_z(r) = \frac{\rho g r^2}{4\mu} - \frac{\rho g D^2}{8\mu}\ ln\, r + V - \frac{\rho g d^2}{16\mu} + \frac{\rho g D^2}{8\mu}\ln(d/2)$$

Esta solución sería correcta, pero es función de D, que no es un dato del problema. En el siguiente paso, se elimina esa dependencia de D.

Por último, como el cilindro se mueve con velocidad constante, la resultante de las fuerzas sobre el mismo es nula, por lo que la fuerza que realiza el esfuerzo cortante debe ser igual a F. Así, el esfuerzo cortante en la pared del cable es:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r}\bigg|_{r=d/2} = \frac{\rho g}{4}\left(\frac{d^2 - D^2}{d}\right)$$

Como $d < D$, $\tau_w < 0$. Así, igualando los módulos de las fuerzas:

$$|F| = |\tau_w \pi d L|$$

$$\frac{3}{4}\rho g \pi d^2 L = \frac{\rho g}{4}\left(\frac{D^2 - d^2}{d}\right)\pi d L$$

se deduce que $D = 2d$.

De esta forma, el perfil de velocidad en función de las variables del problema queda como:

$$v_z(r) = \frac{\rho g}{4\mu}\left(r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right) - \frac{\rho g d^2}{2\mu}\ln\left(\frac{2r}{d}\right) + V$$

Para determinar la velocidad máxima global del fluido (en módulo) hay que tener en cuenta que, en la superficie libre del líquido, ya existe un máximo local al haber impuesto la segunda condición de contorno. Esta es:

$$v_z\left(r = \frac{D}{2} = d\right) = \frac{3\rho g d^2}{16\mu} - \frac{\rho g d^2}{2\mu}\ln(2) + V = \frac{\rho g d^2}{2\mu}\left(\frac{3}{8} - \ln(2)\right) + V$$

Al analizar el resultado numérico, hay que tener en cuenta que:

$$\frac{\rho g d^2}{2\mu}\left(\frac{3}{8} - \ln(2)\right) < 0$$

Por tanto, si

$$\left|\frac{\rho g d^2}{2\mu}\left(\frac{3}{8} - \ln(2)\right)\right| \leq 2V$$

El máximo global estará en la pared y será V.

Y estará en la superficie libre, si

$$\left|\frac{\rho g d^2}{2\mu}\left(\frac{3}{8}-\ln(2)\right)\right| > 2V$$

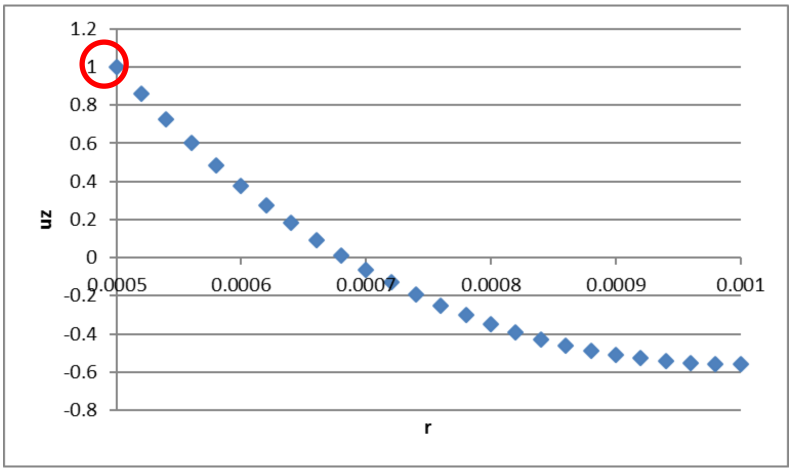
Con el objetivo de aclarar la posición de los máximos, se particulariza el problema para un caso concreto, con los siguientes valores:

$\rho =$	1000	kg/m^3
g =	9.81	m^2/s
$\mu =$	0.001	kg/m·s
d =	0.001	m

De las inecuaciones anteriores, con estos datos, se puede obtener un valor crítico de la velocidad por debajo del cual se estaría en el primer caso y por encima del mismo en el segundo.

$$V_{critica} = 0.78\frac{m}{s}$$

Así, para V = 1 m/s, el máximo global (en módulo) estaría en la pared del cable:



Y para V = 0.5 m/s, el máximo (en módulo) estaría en la superficie libre del líquido: