Problema 1

Una lámina de líquido de densidad ρ, viscosidad μ y espesor h se bombea ayudado de una cinta transportadora inclinada un ángulo θ a través de dos placas infinitamente anchas (Figura a). La velocidad de la cinta es U. Calcular, en función de los parámetros del problema:

a) El caudal Q. (3 puntos)

Se plantea mejorar el coste de la instalación reduciendo a la mitad la caída de presión a lo largo del conducto, manteniendo el mismo caudal. Para ello, el fluido también se arrastraría por su parte superior con velocidad U_1, tal y como se muestra en la figura b. Determinar:

b) Velocidad de la cinta U_1. Comentar el resultado. (4 puntos)

Para una velocidad genérica U_1:

c) ¿Cómo varía el esfuerzo cortante en el fluido? (1 punto)
d) Establecer y describir las condiciones en las que el módulo del esfuerzo cortante en la pared superior sea mayor que en la inferior. (2 puntos)

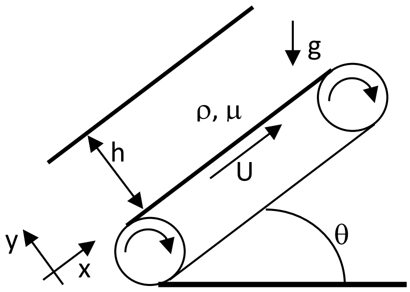

Figura a

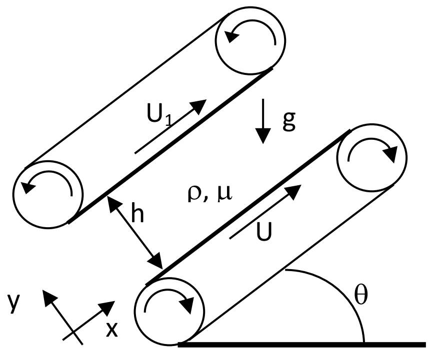

Figura b

a) Problema en 2D:

- Conservación de la masa (fluido incompresible):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Al despreciar v, se concluye que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, y por tanto $u = u(y)$. (0.5)

Según las condiciones de contorno:

$u = U$ para y$= 0$ (0.25)

$u = 0$ para y$= h$ (0.25)

Llegaríamos a:

$u(y) = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = U$ para y= 0

Eje x:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g sin\theta + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$→Estacionario

$u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$→ Por conservación de la masa

$v\frac{\partial u}{\partial y} = 0$→ Por despreciar v

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$→ Porque $u = u(y)$

Por tanto (0.5):

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g sin\theta = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

-0.25 si falta algún término

Eje y:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g cos\theta + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Al despreciar v, quedaría únicamente (0.5):

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g cos\theta = 0$$

-0.25 si falta algún término

- Integración

Teniendo en cuenta que en el eje y, se obtiene:

$$p(x, y) = -\rho g cos\theta y + f(x)$$

Para satisfacer la ecuación diferencial en el eje x, se debe cumplir por tanto que $\frac{\partial p}{\partial x}$ no dependa de x, por lo que al ser constante, su integración con las siguientes condiciones de contorno:

$u = U$ para y= 0

$u = 0$ para y= h

resulta en (0.5):

$$u(y) = \frac{A}{2\mu}y^2 - \left(\frac{U}{h} + \frac{A}{2\mu}h\right)y + U = 0$$

donde

$$A = \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g sin\theta$$

Para obtener el caudal (por unidad de profundidad) (0.5):

$$\boxed{Q = \int_0^h u\,dy = -\frac{Ah^3}{12\mu} + \frac{Uh}{2}}$$

Casos adicionales

-No han considerado $\frac{\partial p}{\partial x}$: Máximo de 1.5 puntos.

-No han considerado correctamente las CC: Máximo de 1.75 puntos.

-No han considerado ninguno de lo anterior: Máximo de 1.25 puntos.

a)

El procedimiento sería el mismo:

- Conservación de la masa (fluido incompresible):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Al despreciar v, se concluye que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, y por tanto $u = u(y)$. (0.5)

Con un cambio en las condiciones de contorno, que serían:

$u = U$ para y= 0 (0.25)

$u = U_1$ para y= h (0.25)

La nueva solución del perfil de velocidad sería (0.5):

$$u_1(y) = \frac{A_1}{2\mu}y^2 + \left(\frac{U_1 - U}{h} - \frac{A_1}{2\mu}h\right)y + U = 0$$

El nuevo caudal sería (0.5):

$$Q_1 = \int_0^h u_1\,dy = -\frac{A_1h^3}{12\mu} + \frac{U_1h}{2} + \frac{Uh}{2}$$

Por tanto, igualando los caudales se obtiene (1.5):

$$U_1 = \frac{\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x}\right) h^2}{6\mu} = \frac{-\frac{\partial p}{\partial x} h^2}{12\mu}$$

Necesariamente para que la velocidad sea tal y como muestra el enunciado, la variación de presión a lo largo el eje x debe ser negativa (0.5).

Casos adicionales

-No han considerado $\frac{\partial p}{\partial x}$: Máximo de 1.5 puntos.

-No han considerado correctamente las CC: Máximo de 1.75 puntos.

-No han considerado ninguno de lo anterior: Máximo de 1.25 puntos.

-Apartado a mal, b bien. Máximo de 2.5 puntos.

b) Varía linealmente (0.5).

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = A_1 y + \mu \left(\frac{U_1 - U}{h} - \frac{A_1}{2\mu} h\right)$$

Expresión matemática: (0.5).

Casos adicionales

-Si todo lo anterior mal. Máximo de 0.5 puntos por ley de Newton.

c) Particularizando el esfuerzo cortante en ambas paredes, se obtiene(2x0.5). :

$$\tau_0 = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu \left(\frac{U_1 - U}{h} - \frac{A_1}{2\mu} h\right)$$

$$\tau_h = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} = \mu \left(\frac{U_1 - U}{h} + \frac{A_1}{2\mu} h\right)$$

Si $A_1 > 0$ → $\frac{\partial p_1}{\partial x_1} > -\rho g sin\theta$ → $U_1 > U$ (0.5)

Si $A_1 < 0$ → $\frac{\partial p_1}{\partial x_1} < -\rho g sin\theta$ → $U_1 < U$ (0.5)

Casos adicionales

-Si todo lo anterior mal. Máximo de 0.5 puntos por uso de ley de Newton y saber particularizar.