Mecánica de Fluidos

Marzo 2015

Apellidos, Nombre:

Grupo:

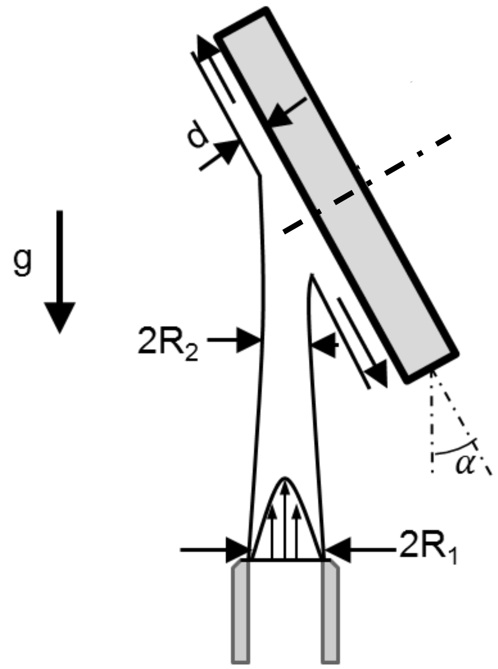
Problema 2

El sistema de la figura muestra un conducto de radio R_1 por el que sale un chorro vertical de agua con perfil no parabólico, $v(r)=V_m(1-\frac{r^3}{R_1^3})$. Después de fluir por el aire el chorro cilíndrico de radio R_2 tiene un perfil de velocidades plano e incide sobre una plataforma de peso P e inclinada respecto al chorro como muestra la figura. Sobre dicha placa se ejerce una fuerza F que evita que la plataforma se desplace de su posición

Se pide:

a) Velocidad media en la sección de radio R_2
b) Determinar la fuerza F, módulo, dirección y sentido, que hay que hacer para que la plataforma no se desplace en función de los parámetros del problema.

NOTA: El chorro choca con la plataforma y se esparce formando un cilindro de espesor d (es decir no sale en dos direcciones como parece en el dibujo sino en todas las direcciones paralelas a la plataforma).



Solución

Velocidad Media:
Fuerza:

Problema 2:

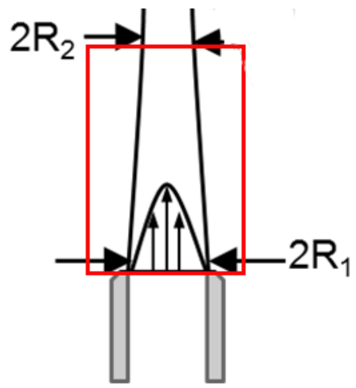
El sistema de la figura muestra un conducto de radio R_1 por el que sale un chorro vertical de agua con perfil no parabólico, $v(r) = V_m \left(1 - \frac{r^3}{R_1^3}\right)$. Después de fluir por el aire el chorro cilíndrico de radio R_2 tiene un perfil de velocidades plano e incide sobre una plataforma de peso P e inclinada respecto al chorro como muestra la figura. Sobre dicha placa se ejerce una fuerza F que evita que la plataforma se desplace de su posición

Se pide:

a) Velocidad media en la sección de radio R_2

b) Determinar la fuerza F, módulo, dirección y sentido, que hay que hacer para que la plataforma no se desplace en función de los parámetros del problema.

NOTA: El chorro choca con la plataforma y se esparce formando un cilindro de espesor d (es decir no sale en dos direcciones como parece en el dibujo sino en todas las direcciones paralelas a la plataforma).



Solución:

a) En la figura de la izquierda se muestra el Volumen de Control (en rojo) usado en el primer apartado. Aplicamos conservación de masa en dicho VC llamando (1) a la salida del chorro (entrada en el volumen de control) de radio R_1 y (2) a la salida del volumen de control de radio R_2.

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho dV + \oint_{SC} \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA$$

Por tratarse de un flujo estacionario e incompresible, la ecuación se reduce a $Q_1 = Q_2$, donde **(1,5 puntos)**:

$$Q_1 = \int_{(1)} v_n dA = \int_0^{R_1} V_m \left(1 - \frac{r^3}{R_1^3}\right) 2\pi r dr = \frac{3}{5}\pi V_m R_1^2,$$

y como (por ser un perfil plano)

$$Q_2 = V_2 \pi R_2^2,$$

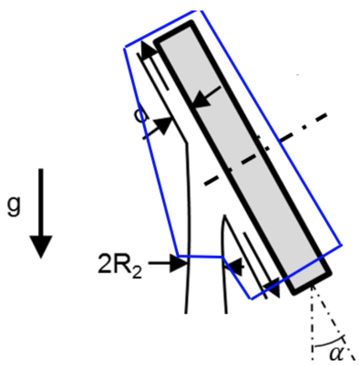
igualando, tendremos **(1 punto)**:

$$V_2 = \frac{3R_1^2}{5R_2^2} V_m$$

b) Para este segundo apartado, usamos la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento aplicada sobre el VC azul de la figura de la derecha.

$$\vec{F} - \oint_{SC} p' \hat{n} dA + \oint_{SC} \tau \cdot \hat{n} dA + \int_{VC} \rho \vec{g} dV - \int dm \vec{a}_{arr} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \vec{v} dV + \oint_{SC} \rho \vec{v}(\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \hat{n} dA \qquad (1)$$

Aplicando esto a nuestro problema $(0,25 \times 4 =$**1 punto SÓLO SI SE JUSTIFICA ADECUADAMENTE CADA TÉRMINO**$)$:



- Como todo el líquido está en contato con la atmósfera la presión relativa se anula, así que:
$$\oint_{SC} p' \hat{n} dA = 0$$
- La viscosidad es despreciable en entradas y salidas y nula en el contacto aire-agua, por tanto:
$$\oint_{SC} \tau \cdot \hat{n} dA = 0$$
- El volumen de control es fijo y no deformable, por tanto $\int dm \vec{a}_{arr} = 0$
- El problema es estacionario y el volumen de control no deformable, por tanto $\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \vec{v} dV = 0$.

Por tanto, la ecuación (1) se reduce a (asumiendo que, además, $\vec{v}_s = 0$ puesto que el VC no es móvil):

$$\vec{F} = P\vec{j} + \oint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v}) \cdot \hat{n} dA$$

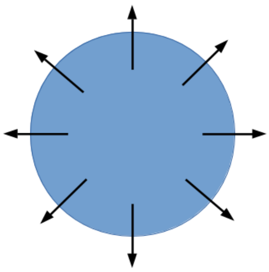
El término integral de la derecha se puede separar en salidas y entrada. Para la entrada, que como es unidimensional, tendrá la forma **(1 punto)**

$$-\rho Q_2 \vec{V}_2 = -\frac{9R_1^4}{25R_2^2}\rho\pi V_m^2 \vec{j},$$

donde el signo $-$ se debe a que es una entrada y el miembro de la derecha se deduce del apartado a).

Para las salidas, si miramos la placa perpendicularmente, el *splash* producido por el chorro se ve como un círculo (un cilindro en 2D, donde la altura del cilindro es d). Como se puede ver, por cada sub-chorro saliendo en una dirección hay otro saliendo en dirección igual pero sentido opuesto. Teniendo en cuenta que **el espesor es constante e igual a** d en todo el *splash*, al integrar tendremos **(3,5 puntos)**

$$\int_{\text{salidas}} \rho\vec{v}(\vec{v}) \cdot \hat{n} dA = 0$$



Se considerará que está mal si sólo se asume que hay un chorro de salida ascendente y otro descendente.

Resolviendo el problema, llegamos a la solución final **(2 puntos) por tener todo completamente resuelto y justificado**:

$$\vec{F} = \left(P - \frac{9R_1^4}{25R_2^2}\rho\pi V_m^2\right)\vec{j} \text{ (es decir, es vertical)}$$