Mecánica de Fluidos

Mayo 2016

Apellidos, Nombre:

Grupo:

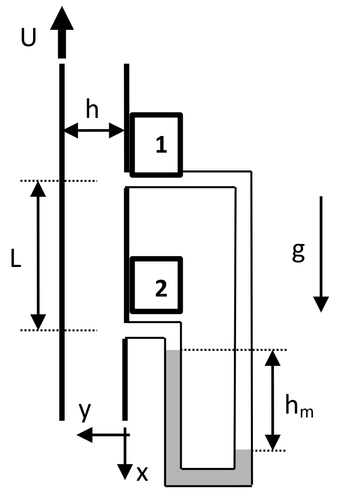
PROBLEMA 1

Un líquido, de densidad ρ y viscosidad μ, cae de forma laminar y estacionaria entre dos placas paralelas infinitamente largas y anchas, tal y como se aprecia en la figura. Una de las paredes asciende con una velocidad U constante y en la otra hay un manómetro con un líquido de densidad ρ_m. Determinar, justificando todas las hipótesis usadas:

a) (7 puntos) Velocidad máxima.
b) (3 puntos) Evaluar el número de Reynolds.

Datos:

ρ =	900	kg/m^3
μ =	0.3	kg/m·s
g =	10	m/s^2
ρ_m =	13600	kg/m^3
h_m =	4	cm
L =	6	cm
U =	0.8	m/s
h =	2.4	cm



Solución:

Para el cálculo de la velocidad del fluido entre las dos placas paralelas se deben evaluar las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento (ecuaciones de Navier-Stokes).

Aplicando la ecuación de conservación de la masa para un fluido de densidad constante, dado que el fluido es un líquido, y en condiciones estacionarias (como dice el enunciado):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \bar{v}) = 0 \;\rightarrow\; \nabla \cdot \bar{v} = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow u = u(y)$$

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ al tratarse de un fluido estacionario.
- $\nabla \cdot \bar{v} = 0$ al tratarse de un fluido incompresible.
- $v = w = 0$ dado que las placas son infinitamente largas y no existen efectos de borde.

Por tanto, la velocidad tan sólo depende de la coordenada y.

Por otro lado, dado que el fluido es newtoniano con densidad y viscosidad constantes, se puede aplicar directamente la ecuación de Navier-Stokes:

Mecánica de Fluidos

Mayo 2016

Apellidos, Nombre:

Grupo:

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \rho\overline{f_m} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v}$$

Que proyectada en la dirección del eje x:

$$\vec{i}: \quad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

- $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ dado que se trata de un problema estacionario
- $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ de acuerdo a la ecuación de la conservación de la masa
- $v = w = 0$ dado que las placas son infinitamente largas y no existen efectos de borde.

Simplificando nos queda:

$$0 = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

Por otro lado, evaluando la presión a partir del manómetro diferencial:

$$p_2 = p_1 + \rho g L + \rho g h_m - \rho_m g h_m$$

Por tanto, asumiendo una caída de presión lineal

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{L} = \rho g + \frac{g h_m(\rho - \rho_m)}{L} = -75666\ Pa/m \qquad (2)$$

Sustituyendo en (2) nos quedaría:

$$0 = \rho g_x - \rho g - \frac{g h_m(\rho - \rho_m)}{L} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (3)$$

Por tanto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{g h_m(\rho - \rho_m)}{\mu L} = -282.222'22$$

Integrando quedaría

$$u = -141.111'11\, y^2 + A\, y + B \qquad (4)$$

Aplicando condiciones de contorno:

- $y = 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow B = 0$
- $y = h \rightarrow u = -U \rightarrow -U = -141.111'11\, h^2 + A\, h \rightarrow A = 3353'33$

Así, el perfil de velocidad queda:

$$u = -141.111'11\, y^2 + 3353'33\, y \qquad (5)$$

El punto de velocidad máxima se evalúa a partir del máximo local $\left(\frac{\partial u}{\partial y} = 0\right)$, quedando:

Mecánica de Fluidos

Mayo 2016

Apellidos, Nombre:

Grupo:

$$0 = -282.222'22\,y + 3353'33 \;\rightarrow y = 0.0118\,m = 1.18\,cm \tag{6}$$

Y la velocidad máxima quedaría:

$$u(y = 0.0118\,m) = \;19.91\,m/s \tag{7}$$

Habría que evaluar el módulo de la velocidad en la pared de la placa (U=0.8 m/s), pero dado que es menor, el máximo local es el mismo que el máximo local.

Por otro lado el número de Reynolds se evalúa como:

$$Re_{D_h} = \frac{\rho V_{media} D_h}{\mu}$$

Donde el diámetro hidráulico y la velocidad media quedan como:

$$D_h = \frac{4\,x\,sección}{Perímetro\ mojado} = \frac{4(hb)}{2b + 2h}(b \rightarrow \infty) = 2h$$

$$V_{media} = \frac{\int_0^h u\,dy}{h} = -141.111'11\frac{h^2}{3} + 3353'33\frac{h}{2} = 13.14\,m/s \tag{8}$$

Por tanto, el número de Reynolds queda como:

$$Re_{D_h} = \frac{\rho V_{media} D_h}{\mu} = \frac{900 \cdot 13.14 \cdot 2 \cdot 2'4 \cdot 10^{-2}}{0.3} = 1893 \tag{9}$$

Puntuación:

- Correcta aplicación de la ecuación de Navier-Stokes (2) – 0.5 puntos
- Cálculo correcto de $\frac{\partial p}{\partial x}$ (4) – 1.5 punto.
- Perfil de velocidades (4) – 1 punto
- Aplicación de condiciones de contorno – 0.5 ptos
- **Valor numérico** del velocidades (5) – 1 punto
- Razonamiento del máximo local y global de la velocidad máxima – 0.5 puntos
- **Valor numérico** de la velocidad máxima (7) – 1.5 puntos
- **Valor numérico** de la velocidad media – 1'5 puntos
- **Valor numérico** del número de Reynolds – 2 puntos
- NOTA: En caso de no alcanzar el valor numérico adecuado, la máxima nota de cada valoración será del 50%, pudiendo ser inferior en caso de no explicar debidamente cualquier justificación.