Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Marzo 2021

Problema

En la parte inferior de un depósito con forma cilíndrica de diámetro D_d hay situada una tapa semiesférica de radio R_1, de masa y espesor despreciable. Para que esa tapa quede en contacto con el depósito, un chorro de agua de diámetro D_e incide sobre la misma formando una capa de espesor uniforme, según se muestra en la figura. En el interior del depósito hay acumulada agua hasta una altura H. Además, en el lateral del mismo hay una tubería soldada de diámetro D_2, con una válvula V que permite su vaciado. Asumiendo la hipótesis de fluido ideal, se pide:

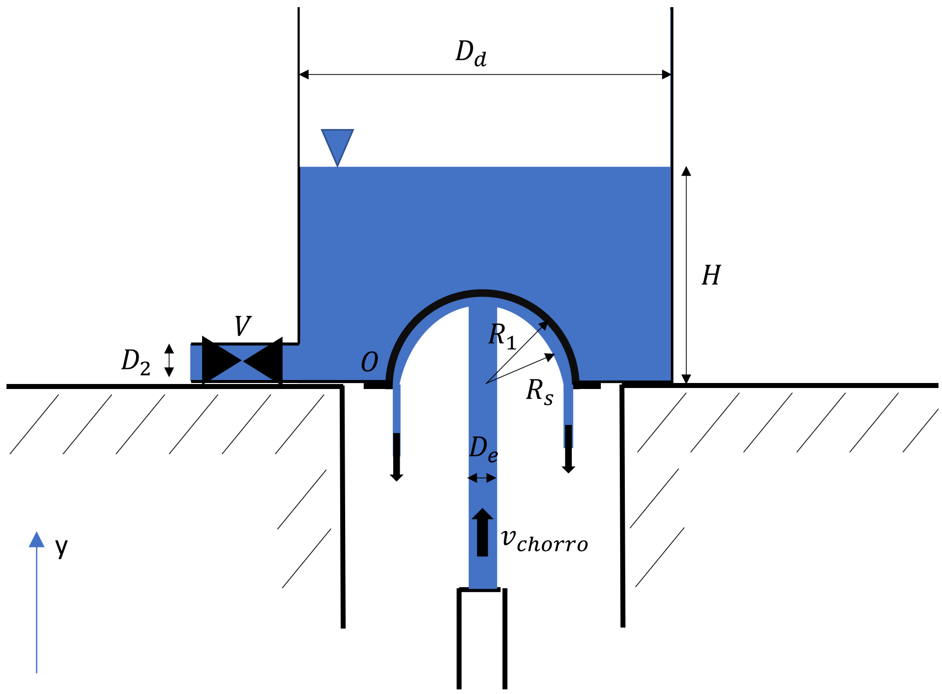
a) (5 puntos) Considerando que la válvula está completamente cerrada, calcular la velocidad mínima del chorro de agua que garantiza que el depósito no se vacíe por la tapa inferior.

b) (5 puntos) Considerando que la velocidad del chorro de agua es mayor que la calculada en el apartado anterior, se abre la válvula V completamente permitiendo el vaciado del depósito. Calcular la altura del depósito después de 20 s desde que se inicia la descarga.

Justificar todas las hipótesis realizadas.

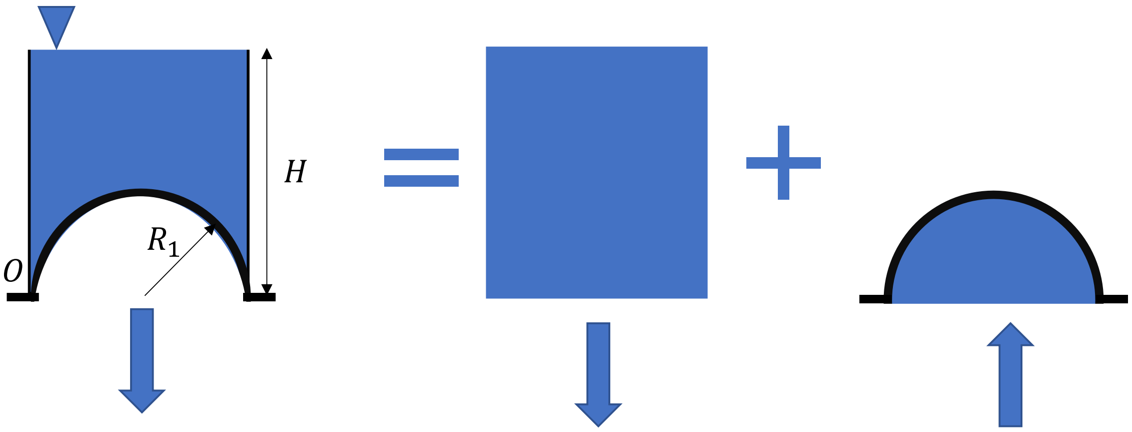
Datos: $D_d = 20\ cm, R_1 = 5\ cm,\ R_s = 4.8\ cm,\ D_e = 2.8\ cm,\ D_2 = 1\ cm$

$$\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}, \qquad g = 10 \frac{m}{s^2}, H = 0.3\ m$$



Solución:

a) Al permanecer cerrada la válvula del depósito, el nivel de agua no varía, por lo que la fuerza sobre la tapa puede calcularse como la fuerza hidrostática sobre una placa curva, en este caso, solo con componente vertical:



$$\vec{F}_1 = -\rho g \pi R_1^2 H \,\vec{j}$$

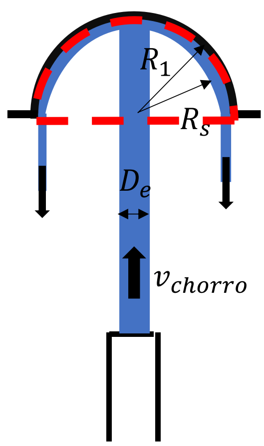
$$\vec{F}_2 = \rho g \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R_1^3 \,\vec{j}$$

$$\vec{F}_{tapa} = \left(-\rho g \pi R_1^2 H + \rho g \frac{4}{6}\pi R_1^3\right)\vec{j} = -20.9\,\vec{j}\,N$$

Por otro lado, la fuerza que realiza el chorro sobre la placa puede calcularse por medio del análisis integral a un Volumen de Control fijo y no deformable, que contiene solo al fluido, como el que aparece en la figura marcado en rojo en línea discontinua.

Aplicando la conservación de la masa, se obtiene la velocidad de salida v_s en función de v_{chorro}:

- Como se trata de un volumen de control no deformable y el fluido es incompresible, $\frac{d}{dt}\iiint_{VC}\rho dV = 0$
- Al tratarse de un volumen de control fijo, $\iint_{SC}\rho(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA = \iint_{SC}\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})dA$



$$0 = \frac{d}{dt}\iiint_{VC}\rho dV + \iint_{SC}\rho(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA \rightarrow \iint_{SC}\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})dA = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -v_{chorro}\frac{\pi D_e^2}{4} + v_s\pi(R_1^2 - R_s^2) = 0 \rightarrow v_{chorro} = v_s\frac{\pi(R_1^2 - R_s^2)}{\frac{\pi D_e^2}{4}}$$

Sustituyendo los valores numéricos, $v_s = v_{chorro}$.

Por otro lado, aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento:

- Como se trata de un volumen de control no deformable, el fluido es incompresible, y la velocidad del chorro es constante $\frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV = 0$
- Se desprecia el peso del chorro de fluido dentro del volumen de control.
- Se trata de un fluido ideal por lo que los efectos viscosos son nulos.
- Al tratarse de un volumen de control fijo, $\iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA = \iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dA$

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV + \iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA$$

Según el eje y:

$$\boldsymbol{y}: F_{compuerta\ sobre\ fluido} = -\rho v_{chorro}^2 \frac{\pi D_e^2}{4} - \rho v_s^2 \pi (R_1^2 - R_s^2)$$

De esta forma, y aplicando la Tercera Ley de Newton:

$$\vec{F}_{fluido\ sobre\ compuerta} = -\vec{F}_{compuerta\ sobre\ fluido}$$

Por tanto:

$$\vec{F}_{fluido\ sobre\ compuerta} + \vec{F}_{tapa} = 0$$

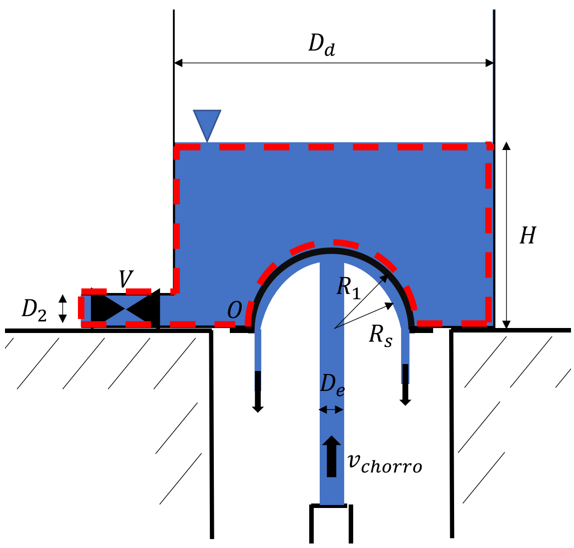
$$\rho g \pi R_1^2 H - \rho g \frac{4}{6}\pi R_1^3 = \rho v_{chorro}^2 \frac{\pi D_e^2}{4} + \rho v_{chorro}^2 \pi (R_1^2 - R_s^2)$$

$$v_{chorro} = 4.12\ m/s$$

b) Dado que la velocidad del chorro es mayor que la del apartado anterior, se supone que la tapa permanece en contacto con el depósito y, por tanto, al abrir la válvula el depósito se descarga únicamente por la tubería lateral. Por otro lado, al tratarse de un fluido ideal no existen pérdidas en la descarga.

Para evaluar la velocidad de descarga, se calcula en primer lugar la velocidad del fluido en la descarga a partir de la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre del depósito (0) y la descarga del mismo (2):

$$\frac{p_O}{\rho g} + \frac{\alpha v_O^2}{2g} + z_O - \mathrm{h}_{turbinas} + \mathrm{h}_{bombas} - \mathrm{h}_{pérdidas} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + z_2$$



Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Marzo 2021

Para evaluar la velocidad de descarga, se pueden realizar las siguiente hipótesis:

- La velocidad de la superficie libre es muy pequeña con respecto a la de salida, ya que $A_2 \ll A_d$, por tanto, $v_O \ll v_2$.
- La presión en la superficie libre y en la descarga es la atmosférica; $p_O = p_2$
- Se desprecia el radio de la tubería de descarga frente a la altura del nivel del agua $R_2 \ll H$; siendo por tanto las cotas $z_O = H$ y $z_2 = 0$.
- Al tratarse de un fluido ideal y no haber bombas ni turbinas, se tiene, $\mathrm{h}_{turbinas} = \mathrm{h}_{bombas} = \mathrm{h}_{pérdidas} = 0$.
- Por ser fluido ideal, $\alpha = 1$.

De esta forma, la ecuación de Bernoulli queda:

$$H(t) = \frac{v_2^2}{2g} \rightarrow v_2 = \sqrt{2gH(t)}$$

A partir de la aplicación de la conservación de la masa al volumen de control deformable de la figura se tiene:

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho dV + \iint_{SC} \rho(\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n})dA$$

$$\rho\frac{d}{dt}\iiint_{VC} dV + \iint_{SC} \rho(\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n})dA \rightarrow \rho\frac{dV}{dt} + \iint_{SC} \rho(\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n})dA$$

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\mathrm{A_d}H - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R_1^3\right) + \rho v_2 A_2 \rightarrow 0 = \rho\frac{\pi \mathrm{D_d^2}}{4}\frac{dH}{dt} + \rho\sqrt{2gH}\frac{\pi D_2^2}{4} \rightarrow \frac{\pi \mathrm{D_d^2}}{4}\frac{dH}{dt} = -\sqrt{2gH}\frac{\pi D_2^2}{4}$$

$$\rightarrow \int_{H_0}^{H}\frac{dH}{\sqrt{H}} = -\int_0^t \sqrt{2g}\frac{D_2^2}{\mathrm{D_d^2}}dt \rightarrow 2\left(\sqrt{H} - \sqrt{H_0}\right) = -\sqrt{2g}\frac{D_2^2}{\mathrm{D_d^2}}t \rightarrow H = \left(\sqrt{H_0} - \frac{\sqrt{2g}}{2}\frac{D_2^2}{\mathrm{D_d^2}}t\right)^2$$

Por tanto, la altura al cabo de 20 s será:

$$H = \left(\sqrt{0.3} - \frac{\sqrt{20}}{2}\frac{0.01^2}{0.2^2}t\right)^2 = 0.19\ m$$