TEMA 8 – MAGNETOSTÁTICA EN MEDIOS MATERIALES

Clase 8.1 Magnetización

El fenómeno de la magnetización.

Cuando se introduce un material en un campo magnético, habitualmente el material experimenta fuerzas pequeñas. Cuando las fuerzas son repulsivas, se dice que el material es diamagnético (ocurre con el agua, el cobre, la sal común o el nitrógeno líquido). En el caso de que sean atractivas, se dice que el material es paramagnético (sodio, aluminio, oxígeno líquido). En algunos materiales, este fenómeno aparece con especial intensidad: son los denominados materiales ferromagnéticos y son los que estudiaremos en detalle, por su interés tecnológico, principalmente para la fabricación de máquinas eléctricas (como transformadores, generadores y motores).

El fenómeno que hace que un material que no tiene propiedades magnéticas, las adquiera al recibir la influencia de un campo magnético, se denomina **magnetización**.

Vector magnetización y corrientes equivalentes.

Definición del vector magnetización

El fenómeno de la magnetización se describe mediante un vector denominado igualmente magnetización, que suele representarse con la letra M. El valor de M puede ser diferente en cada punto de un material dependiendo de su grado de magnetización. Dado que el comportamiento magnético de un material en un campo magnético, puede representarse considerando que ese material está formado por un conjunto de pequeños dipolos magnéticos, se define la magnetización como la densidad de momento magnético debido a dichos dipolos en cada punto del material.

$$\vec{M} \equiv magnetización = \frac{\sum momento\ magnético}{volumen}$$

Vector magnetización y corrientes equivalentes

Vamos a ver que podemos sustituir un trozo pequeño de material magnetizado por una corriente que circula por el material, de forma que el campo magnético que produce, y el efecto que recibe de los campos magnéticos externos es el mismo. De forma que para determinar los campos y sus efectos, estas corrientes serán equivalentes.

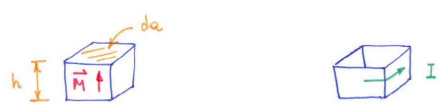


Imagen: JLRM

En la imagen, a la izquierda se representa un pequeño trozo de material con magnetización M, hacia arriba, y sus dimensiones. A la derecha se representa el mismo trozo de material, suponiendo que por su contorno circula una corriente I (dado su pequeño tamaño, lo consideraremos equivalente a una espira). Para que los momentos magnéticos de ambos trozos sean el mismo se debe cumplir que:

$$m = M.h.da = I.da$$

Concluimos que para que sea cierto que los trozos de material son equivalentes se debe cumplir que la intensidad tenga el valor $I = M.h$ Por comodidad, representaremos esta corriente como una corriente superficial, que tendrá un valor $k_b = \frac{I}{h} = M$ El subíndice *b* indica que es una corriente que no puede salir de las moléculas magnetizadas (*bounded*), ya que se origina a nivel microscópico.

Materia magnetizada.

Cuando se agregan distintos trozos de material magnetizado, el resultado es que a nivel macroscópico, se comporta como si estuviera recorrido por una corriente, que puede tener un valor de densidad distinto en cada punto, y además por corrientes superficiales, también con distinto valor en cada punto.

Se puede demostrar que estas corrientes (denominadas corrientes de magnetización) valen:

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} \qquad \vec{\boldsymbol{K}}_b = \vec{M} \times \vec{n}$$

Ejemplo

Supongamos un prisma de base irregular y de altura h que está magnetizado uniformemente con una magnetización M en la dirección de su eje (ver figura). Si troceamos esta figura en pequeños cuadrados, cada uno equivale a una espira por la que circula una intensidad M.h En el interior de la figura, las corrientes se anulan, puesto que en las zonas de contacto de las espiras tienen sentidos opuestos.

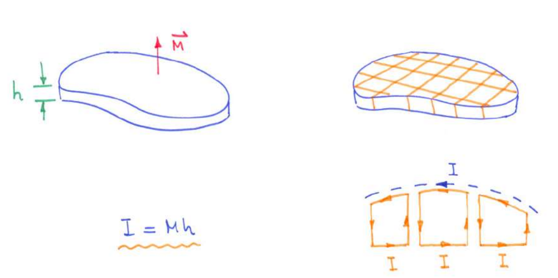


Imagen: JLRM

Por lo tanto, la figura produce un campo magnético equivalente al producido por la misma figura, recorrida en su superficie lateral por una corriente I de valor M.h (ver figura) y sin ninguna corriente en su interior.

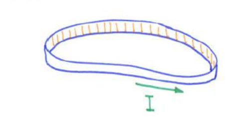


Imagen: JLRM

Se llega a este mismo resultado, si se aplica las ecuaciones de las corrientes de magnetización presentadas anteriormente. La corriente superficial tiene módulo M, y es perpendicular a la magnetización M y al vector normal en cada punto de la superficie lateral. En las caras superior e inferior del prisma, el producto vectorial de M y n es nulo al ser vectores paralelos. En cuanto a la densidad de carga de magnetización J_b, es cero dado que el rotacional de un vector uniforme es nulo.

Vector H.

El vector H, es un vector que se define por comodidad, y que resulta muy útil en los cálculos, como se verá más adelante, aunque no tiene una interpretación física inmediata. Sin embargo, tiene la propiedad notable de que su rotacional coincide con la densidad de corriente libre (que es la que podemos fijar en un laboratorio) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f$

Para llegar a su definición, partimos de que el rotacional del campo magnético depende de la densidad de corriente. La densidad de corriente podemos dividirla en la parte libre (las corrientes habituales en que las cargas pasan de unos átomos a otros, se usa el subíndice *f*, de *free*) y la parte ligada (de magnetización). Esta última se puede relacionar con el vector magnetización, según hemos visto en la sección anterior.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0.\vec{J} = \mu_0.\vec{J}_f + \mu_0.\vec{J}_b = \mu_0.\vec{J}_f + \mu_0.\vec{\nabla} \times \vec{M}$$

En la expresión anterior podemos despejar las corrientes libres.

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{J}_f$$

Así que si definimos el valor entre paréntesis como vector H, cumplirá que su rotacional son las corrientes libres: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

Aplicando el teorema de Stokes, también se cumplirá que la circulación de H es la corriente libre a través del circuito. Ambas expresiones serán útiles para calcular el campo magnético cuando hay materiales magnetizados, como se verá más adelante.

$$\oint \vec{H}.\vec{dl} = I_f$$

Vector Magnetización

Número de dipolos magnéticos por unidad de volumen.

Corrientes ligadas (de magnetización)

La magnetización equivale a corrientes superficiales y a corriente dentro del material.

Los dos tipos de corrientes se calculan a partir de la magnetización.

$$\vec{\boldsymbol{K}}_b = \vec{M} \times \vec{n} \qquad \vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Vector H

Es una combinación del campo y la magnetización.

Se relaciona con las corrientes libres igual que el campo con la corriente total.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0.\vec{J} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f$$

Clase 8.2 Ferromagnetismo

Materiales magnéticos lineales

Los materiales magnéticos lineales son aquellos que en cada punto se magnetizan proporcionalmente al campo magnético en el que están inmersos. Este campo magnético incluye también el campo creado por las corrientes de magnetización del próximo material.

Estos materiales cumplen por tanto que el vector magnetización M es proporcional al vector campo magnético total B. Como el vector H, es una combinación lineal de estos dos vectores, también se cumple que el vector magnetización es proporcional al vector H. Esta proporcionalidad se expresa definiendo la constante χ_m que depende de cada material:

$$\vec{M} = \chi_m.\vec{H}$$

Esta constante, denominada susceptibilidad magnética, es negativa en los materiales diamagnéticos, y positiva en los materiales paramagnéticos. En el caso de los materiales ferromagnéticos, es positiva y grande (puede valer desde uno hasta varios miles).

A partir de la definición de H, se puede relacionar B con H. Se define para ello la permeabilidad magnética de un material como $\mu \quad = 1 + \chi_m$ (es un valor sin dimensiones).

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H}$$

Ferromagnetismo

Algunos materiales como el Níquel, el Cobalto, el Hierro y aleaciones de los mismos, presentan magnetizaciones fuertes cuando se introducen en un campo magnético. Esto se debe a la presencia de zonas microscópicas en las que las moléculas crean dipolos magnéticos (no entramos a analizar las causas de esto), que se orientan todos de forma preferente en una dirección. Estas zonas, denominadas dominios magnéticos, tienen cada una orientaciones distintas. Sin embargo, cuando un campo externo las orienta, resulta más fácil que si tuvieran orientaciones aleatorias.

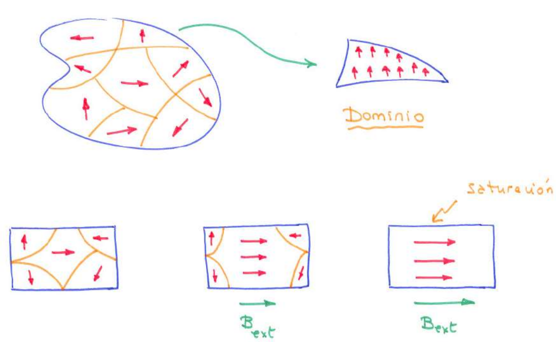


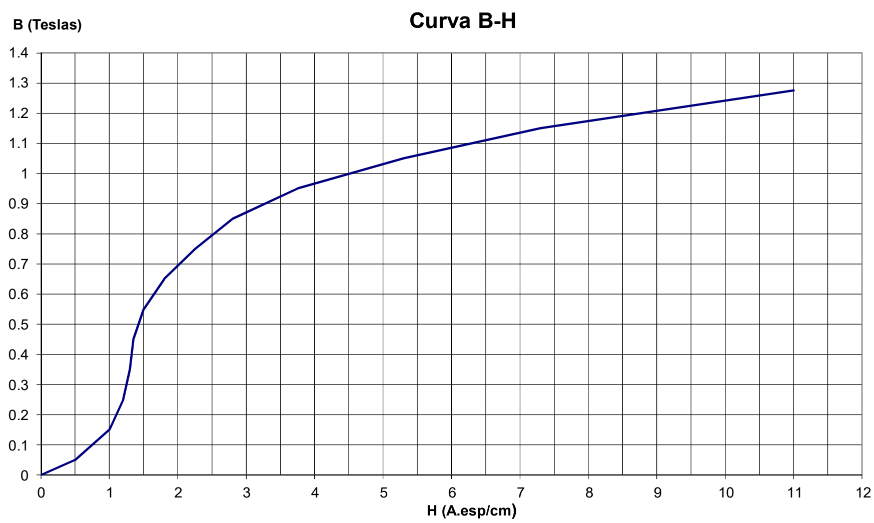
Imagen: JLRM

Conforme el campo externo aumenta, la orientación de los dominios se va dirigiendo cada vez de forma más clara hacia la dirección del campo, hasta que todos los dominios están en la misma dirección. Esto da origen al fenómeno de saturación, que se estudia en el siguiente apartado.

Los dominios magnéticos se deshacen con la temperatura, por eso a partir de cierto valor de la misma (temperatura de Curie), los materiales ferromagnéticos pierden sus propiedades y pasan a ser paramagnéticos. Para el hierro esta temperatura es de 770 ^oC.

Curvas B-H. Saturación.

Como ya se ha mencionado, en los materiales ferromagnéticos la magnetización no es lineal con el campo para cualquier valor del campo. Y por tanto ocurre lo mismo con la relación entre B y H. Llega un momento en que el material ya no se magnetiza más, o se magnetiza muy poco al subir el campo. En la imagen se ve un ejemplo de curva B-H en la que se aprecia este fenómeno. Si el material fuera lineal, esta función sería una recta que pasa por el origen.



Histéresis

Otro fenómeno que se observa en los materiales magnéticos es que si se hace subir la corriente que produce el campo que lleva a la magnetización (el vector H será proporcional a esta corriente libre), el campo alcanza determinado valor, que sin embargo no es el mismo cuando se disminuye esta intensidad.

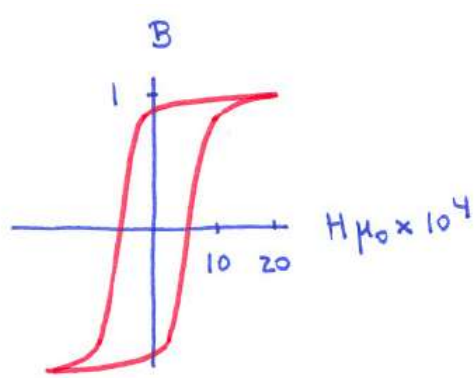


Imagen: JLRM

Es como si hubiera un cierto retraso en la respuesta del material. Histéresis viene de la palabra griega ὑστέρησις (ústérhsiz), que significa retraso.

En la figura se puede observar que aparecen situaciones en las que el material está magnetizado con valores de H (y por tanto de I libre) nulos. También hay situaciones para las que para mantener un campo magnético nulo en el material, es necesario hacer circular determinada intensidad libre para crear un cierto campo H.

Materiales magnéticos lineales

Aquellos en que la magnetización es proporcional al campo total que experimentan (incluido el que crean ellos mismos). En estos materiales los vectores B, M y H son proporcionales.

Ferromagnetismo

Algunos materiales se magnetizan fuertemente cuando se someten a un campo magnético, debido a la orientación de dominios en los que ya hay una orientación de los dipolos.

Saturación

En los materiales ferromagnéticos la magnetización no es lineal con el campo. Llega un momento que crece más despacio.

Histéresis

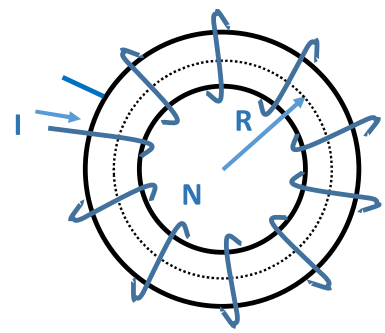
En los materiales ferromagnéticos aparece un magnetismo remanente cuando se retira el campo que produce la magnetización.

Clase 8.3 Circuitos magnéticos.

Teoría de circuitos magnéticos

La teoría de circuitos magnéticos es una forma de calcular el campo B en algunas configuraciones magnéticas con materiales ferromagnéticos, de interés práctico, de forma simplificada. Se basa en las siguientes hipótesis:

- Se supone que el flujo magnético, está confinado en el material magnético. Puede salir del mismo cuando hay discontinuidades en el mismo, que se denominan entrehierros. En el entrehierro puede hacer dispersión del campo (el campo se “abre”), pero no hay fugas de flujo. Esta hipótesis se parece más a la realidad cuanto mayor es la permeabilidad relativa del material.
- Se supone que el campo B es uniforme en cada tramo de material ferromagnético.
- Cada tramo está caracterizado por su longitud media, su superficie y por su permeabilidad magnética.



Supongamos la configuración de la figura en la que el toro de material ferromagnético lineal representado tiene permeabilidad magnética relativa µ. Dada la simetría de la configuración, podemos calcular la circulación del vector H a lo largo de la línea de puntos, aceptando que tendrá el mismo módulo en todos los puntos de la misma y que será tangente a esa línea en todos los puntos.

$$\oint \vec{H}.\overrightarrow{dl} = I_f \ \Rightarrow H.2\pi R = N.I$$

Sustituyendo H por su valor en función de B y operando (llamamos S a la superficie trasversal del toro y Φ al flujo a través de esta superficie, el flujo tiene el mismo valor a lo largo de todo el toro):

$$\frac{B}{\mu\mu_0}.2\pi R = \frac{\Phi}{\mu\mu_0 S}.2\pi R = N.I$$

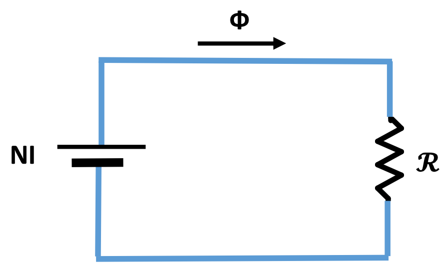
Esta expresión puede agruparse como NI= $\Phi\mathcal{R}$ donde los términos se denominan:

NI : fuerza magnetomotriz

Φ : flujo magnético

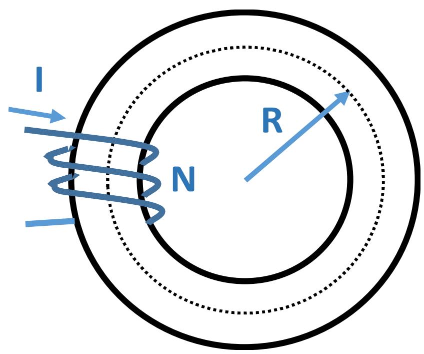
$\mathcal{R}$: reluctancia magnética del circuito

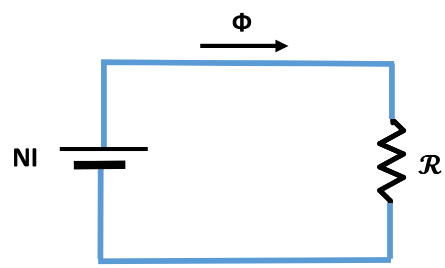
Estos tres elementos son análogos a los tres elementos que definen un circuito eléctrico, por ese motivo se habla de circuito magnético. NI cumpliría un papel análogo a la fuerza electromotriz, por ejemplo, de una batería, Φ cumpliría un papel equivalente a la intensidad del circuito, y $\mathcal{R}$ cumpliría un papel semejante a la resistencia, calculándose de forma análoga, una constante dependiente del material multiplicada por la longitud (l=$2\pi R$ en este caso) y dividida por la sección $\mathcal{R} = \frac{1}{\mu\mu_0} . \frac{l}{S}$



Ejemplos

Toro de material ferromagnético con arrollamiento



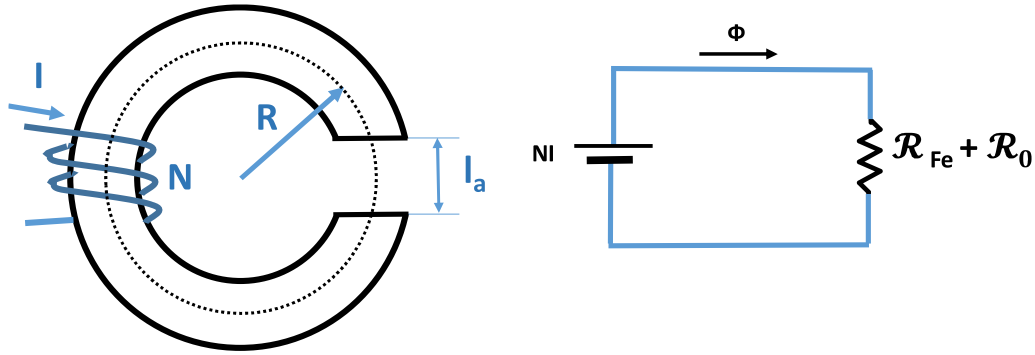


Este caso sólo se distingue del anterior en que el arrollamiento en lugar de estar repartido en todo el toro está sólo en la zona de la izquierda. Como se supone que el campo creado por la magnetización del material es mucho mayor que el creado por el arrollamiento, el circuito se considera que es el mismo que para el caso anterior con $\mathcal{R} = \frac{1}{\mu\mu_0} . \frac{l}{S}$

Toro de material ferromagnético con entrehierro y arrollamiento

Calcularemos como en el ejemplo del toro sin entrehierro, la circulación de H (que tiene distinto valor en el material ferromagnético y en el entrehierro) y sustituyendo por su relación con B ($B = \mu_0 \mathrm{H}_a = \mu_0 \mu \mathrm{H}_{Fe}$, donde B vale lo mismo en ambos medios si se supone que no hay dispersión en el entrehierro, y las líneas de campo siguen siendo circunferencias concéntricas). Se puede comprobar que ahora la reluctancia del circuito, está formada por dos reluctancias en serie (por analogía por las resistencias en serie de los circuitos convencionales, que suman su valor) y vale: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_0 = \frac{1}{\mu\mu_0} . \frac{(2\pi R - l_a)}{S} + \frac{1}{\mu_0} . \frac{l_a}{S}$.

A partir de este circuito puede determinarse el flujo en el circuito, que será distinto al del circuito anterior. De hecho, será menor debido a la alta reluctancia del entrehierro en comparación con la del material magnético. En algunas situaciones, cuando el valor de la permeabilidad magnética es alta, esta diferencia es grande, y se puede aproximar la reluctancia total, considerando solo la del entrehierro.



Toro de material ferromagnético con imán permanente

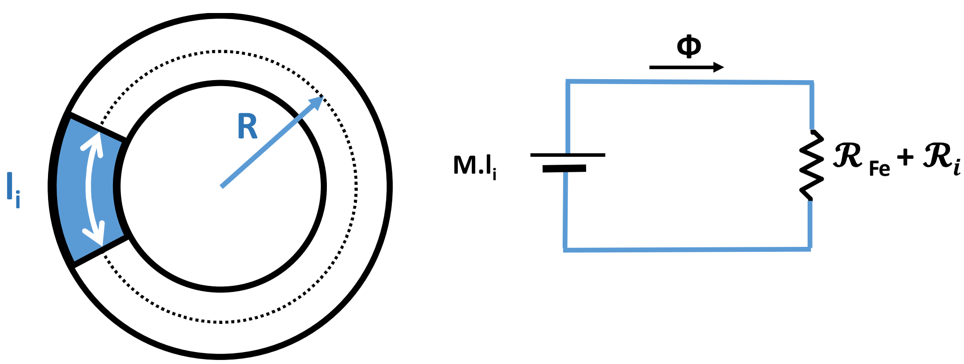
En este caso, al calcular la circulación de H, resulta ser 0, porque no hay corrientes libres (solo hay corrientes magnetizantes, en el imán y en el material magnético).

$$\oint \vec{H}.\vec{dl} = I_f \;\Rightarrow\; H_{Fe}.(2\pi R - l_i) + H_i.l_i = 0$$

Introduciendo el valor de B (igual en material magnético e imán) a partir de la definición de H para el caso del imán, se llega a:

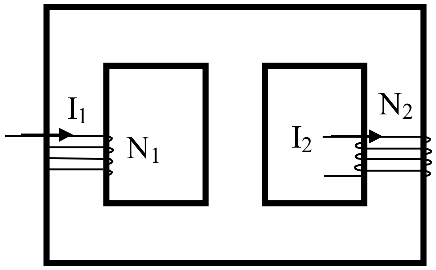
$$\frac{B}{\mu\mu_0}.(2\pi R - l_i) + \left(\frac{B}{\mu_0} - M\right).l_i = 0 \;\Rightarrow M.l_i = \;\Phi.\left(\frac{1}{\mu\mu_0}.\frac{l_{Fe}}{S} + \frac{1}{\mu_0}.\frac{l_i}{S}\right)$$

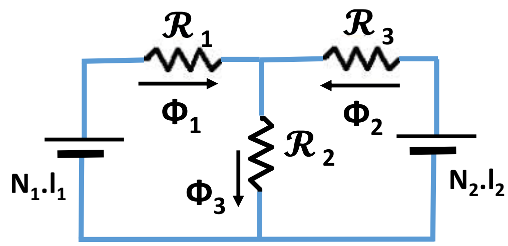
Esta expresión corresponde a un circuito magnético con fuerza magnetomotriz $M.l_i$ y dos reluctancias magnéticas en serie, la del material, y la de un entrehierro de la misma longitud que el imán.



Circuito magnético con dos mallas

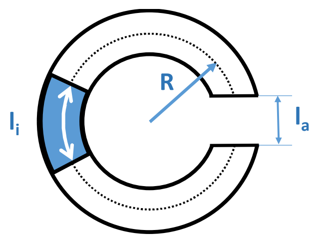
No se desarrollarán aquí las ecuaciones, pero en el caso de que el circuito magnético tenga dos o más mallas, el circuito equivalente incluye las fuerzas magnetromotrices en cada rama y la reluctancia de cada rama (que incluye la longitud de la rama y la sección).





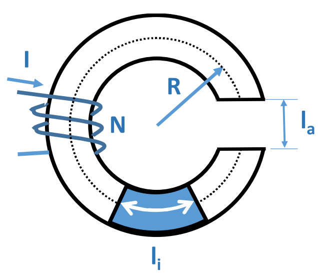
Ejercicio. Toro de material ferromagnético con imán permanente y entrehierro

Determinar el flujo magnético y el campo en un toro de material magnético con permeabilidad relativa μ, con un entrehierro y con un imán con magnetización *M*. Se conocen todas las medidas.



Ejercicio. Toro de material ferromagnético con imán permanente, entrehierro y arrollamiento

Determinar el flujo magnético y el campo en un toro de material magnético con permeabilidad relativa μ, con un entrehierro y con un imán con magnetización *M*. Se conocen todas las medidas. El toro tiene un arrollamiento con N espiras por el que circula una corriente *I*.



Circuitos magnéticos

Algunas configuraciones en forma de circuito se pueden analizar calculando la circulación del vector H.

La fuerza magnetomotriz (NI) es igual al flujo por la reluctancia magnética.

$$\oint \vec{H}.\vec{dl} = N.I = \phi.\mathcal{R} \qquad \mathcal{R} = \frac{1}{\mu\mu_0}\frac{l}{S}$$