Mecánica de Fluidos

Septiembre 2010

Apellidos, Nombre:

Grupo:

Problema 1

El factor de fricción de Darcy es un parámetro adimensional (no constante) que se define por:

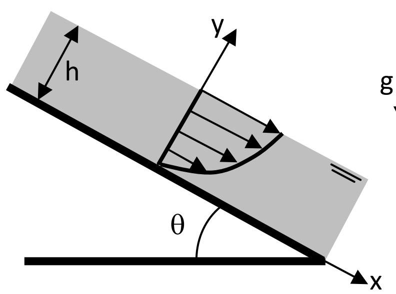
$$f = \frac{8\tau}{\rho \bar{V}^2}$$

donde τ es el esfuerzo cortante entre el sólido y el líquido, ρ es la densidad del líquido y $\bar{V}$ es su velocidad media. Para tuberías cilíndricas, este parámetro es exactamente:

$$f = \frac{64}{Re}$$

Considerando un fluido viscoso descendiendo en régimen laminar por un plano inclinado de longitud L y ángulo θ. La película de fluido tiene un espesor h, una viscosidad μ y una densidad ρ. Calcula el factor de fricción para esta geometría en función del número de Reynolds, definido para este problema como:

$$Re = \frac{\rho h \bar{V}}{\mu}$$



Para calcular el factor de fricción f, se necesita el esfuerzo cortante en la pared, τ_w, así como el valor medio de la velocidad V. Para ello se debe calcular el perfil de velocidad.

Con la ecuación de conservación de la masa:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow \vec{v} = u\,(y)\vec{\imath}$$

En el plano x-y, las ecuaciones de Navier-Stokes son:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w\right)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w\right)$$

En el eje y, al no existir la componente v, se llega a:

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \rightarrow \ -\rho g cos(\theta) - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$p(x, y) = -\rho g cos(\theta) y + f(x)$$

Como en $y = h$, la presión es la atmosférica para todo x, entonces $f(x)$ debe ser una constante y la presión no depende de x.

En el eje x:

$$\rho g_x - \underset{6}{\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}} + \mu\left(\underset{1}{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underset{2}{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}}\right) = \rho\left(\underset{3}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}} + \underset{1}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}u + \frac{\partial u}{\partial y}\underset{4}{\cancel{v}} + \frac{\partial u}{\partial z}\underset{5}{\cancel{w}}\right)$$

1. La componente $u(y)$, no depende de x.
2. La componente $u(y)$, no depende de z.
3. No depende del tiempo.
4. No hay v.
5. No hay w.
6. No hay gradiente de presiones en la dirección del eje x.

$$\rho g sen(\theta) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

Integrando dos veces en y:

$$u(y) = -\frac{\rho g sen(\theta)}{2\mu}y^2 + Ay + B$$

Con las condiciones de contorno:

$$u(y = 0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$u(y = h) = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow A = \frac{\rho g sen(\theta)}{\mu}h$$

Finalmente:

$$u(y) = -\frac{\rho g sen(\theta)}{2\mu}y^2 + \frac{\rho g sen(\theta)}{\mu}hy$$

El esfuerzo contante en la pared, es decir para x = 0 se calcula como:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{x=0} = \rho g sen(\theta) h$$

Y el valor medio de la velocidad:

$$V = \frac{1}{h}\int_0^h u\, dy = \frac{1}{h}\int_0^h \left(-\frac{\rho g sen(\theta)}{2\mu} y^2 + \frac{\rho g sen(\theta)}{\mu} hy\right) dy = \frac{\rho g h^2\, sen(\theta)}{3\mu}$$

El factor de fricción, operando:

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = \frac{8\, \rho g sen(\theta) h}{\rho V\, V \frac{h}{h}\, \frac{\mu}{\mu}} = \frac{8\, \rho g sen(\theta) h}{Re \frac{\mu}{h} V} = \frac{8\, \rho g sen(\theta) h}{Re \frac{\mu}{h}\, \frac{\rho g h^2\, sen(\theta)}{3\mu}} = \frac{24}{Re}$$