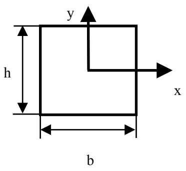
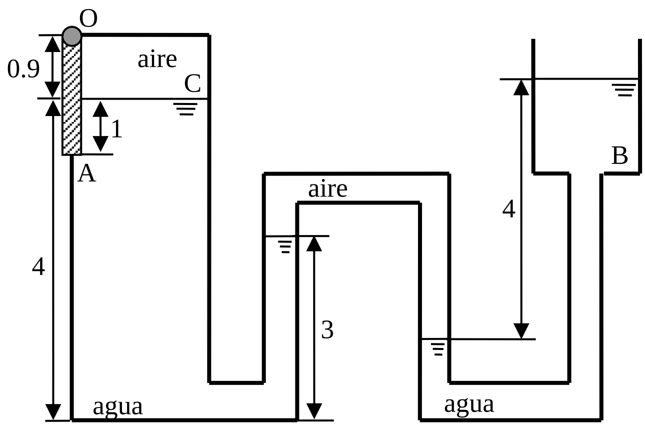
UPCo ICAI-ETSI
Mecánica de Fluidos-3ºIND. Noviembre 2007

Problema-1

En el sistema de la figura, despreciando el peso de la columna de gas, y teniendo en cuenta que el depósito B está abierto a la atmósfera, calcular:

Datos:
Todas las cotas están en metros.
Anchura, $B = 1$ m
$p_{atm} = 10^5\ Pa$
$\rho = 1000$ kg/m^3
$g = 10$ m/s^2
$I_{xx} = \dfrac{1}{12} bh^3$

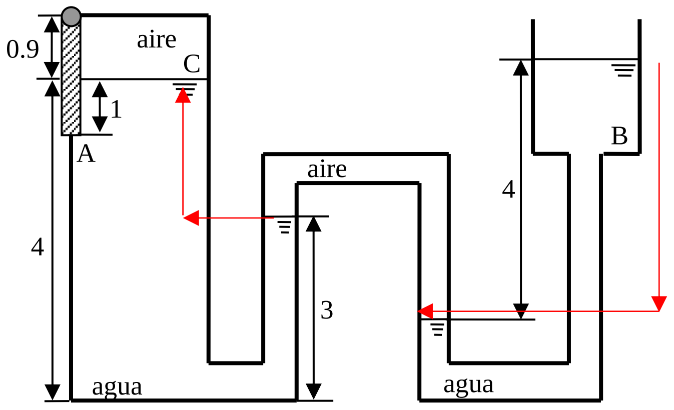




a) La presión relativa del aire en C.
b) La magnitud de la fuerza total que se ejerce sobre la compuerta OA indicada en la figura.
c) Fuerza horizontal externa a aplicar en A para que la compuerta esté en equilibrio.

Solución

a) La presión relativa en el aire del depósito C se calcula desde la superficie libre del depósito B como:



Partiendo de la superficie libre del depósito B, la presión en el aire del depósito C, en absolutas sería:

$$p_C = p_{atm} + \rho_w g \cdot 4 - \rho_w g \cdot (4 - 3)$$

por lo que en relativas, quedaría:

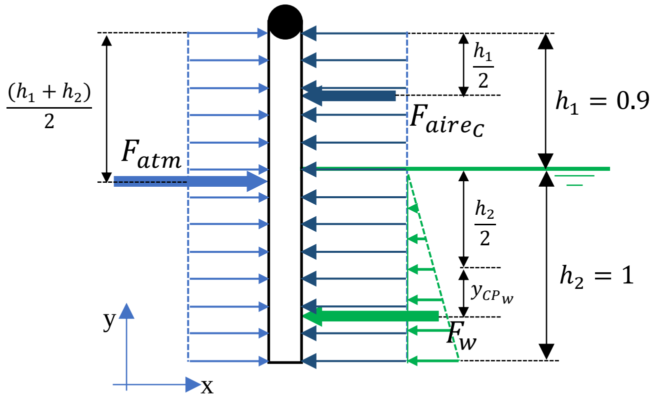
$$p_C^r = \cancel{p_{atm}} + \rho_w g \cdot 4 - \rho_w g \cdot (4 - 3) = \rho_w g \cdot 3$$

Hay que tener en cuenta que, en el tramo interior de aire, la presión es uniforme.

$$p_C^r = 1000 \cdot 10 \cdot 3 = 30000\ Pa$$

b) <u>Utilizando presiones absolutas:</u>

Llamando a las cotas h_1 = 0.9 m, h_2 = 1 m, la fuerza que ejerce del aire presurizado dentro del depósito C:



La contribución del aire exterior a la compuerta, a presión atmosférica se calcula como:

$$\vec{F}_{atm} = p_{atm} \cdot A_3 \vec{\imath} = p_{atm} \cdot (h_1 + h_2) \cdot B \vec{\imath} = 100000 \cdot (1 + 0.9) \cdot 1 \vec{\imath}$$

$$\vec{F}_{atm} = 190000 \vec{\imath}\, N$$

A partir de la presión absoluta del aire en C:

$$p_C = p_{atm} + p_C^r = 100000 + 30000 = 130000\, Pa$$

se calcula la fuerza que realiza el aire sobre el tramo de la compuerta donde actúa:

$$\vec{F}_{aire_C} = p_C \cdot A_1(-\vec{\imath}) = p_C \cdot h_1 \cdot B(-\vec{\imath}) = 117000\, (-\vec{\imath}) N$$

El módulo de la fuerza que ejerce el agua se calcula a partir de la presión en el centro de área del tramo donde actúa:

$$p_{CAw} = p_C + \rho_w g \frac{h_2}{2} = 130000 + 1000 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 135000\, Pa$$

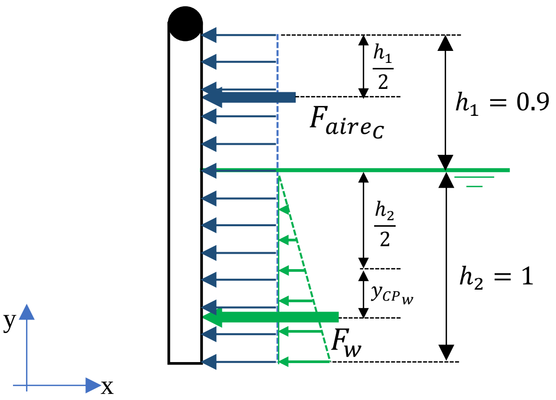
$$\vec{F}_w = p_{CAw} \cdot A_2(-\vec{\imath}) = p_{CAw} \cdot h_2 \cdot B(-\vec{\imath}) = 135000 \cdot 1 \cdot 1(-\vec{\imath}) = 135000\, (-\vec{\imath}) N$$

Finalmente, la fuerza resultante será:

$$\vec{F} = \vec{F}_{atm} + \vec{F}_{aire_C} + \vec{F}_w = 190000 \vec{\imath} + 117000(-\vec{\imath}) + 135000(-\vec{\imath}) += $$

$$\vec{F} = 62000\, (-\vec{\imath}) N$$

<u>Utilizando presiones relativas:</u>



En relativas, el aire exterior no ejercerá ninguna fuerza sobre la compuerta:

$$\vec{F}_{atm} = 0$$

En el aire interior, la presión relativa es:

$$p_c^r = 30000\, Pa$$

por lo que la fuerza que realiza sobre el tramo donde actúa es:

$$\vec{F}_{aire_C} = p_C^r \cdot A_1(-\vec{\imath}) = p_{r_C} \cdot h_1 \cdot B(-\vec{\imath}) = 27000\ (-\vec{\imath})N$$

Y el módulo de la fuerza que realiza el agua, depende de la presión en el centro del área del tramo donde actúa:

$$p_{CA_w}^r = p_C^r + \rho_w g \frac{h_2}{2} = 30000 + 1000 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 35000\ Pa$$

$$\vec{F}_w = p_{CA_w}^r \cdot A_2(-\vec{\imath}) = p_{CA_w}^r \cdot h_2 \cdot B(-\vec{\imath}) = 35000 \cdot 1 \cdot 1(-\vec{\imath}) = 35000\ (-\vec{\imath})N$$

Finalmente, la resultante queda como:

$$\vec{F} = \vec{F}_{aire_C} + \vec{F}_w = 27000(-\vec{\imath}) + 35000(-\vec{\imath}) = 62000\ (-\vec{\imath})N$$

c) Para evaluar la fuerza horizontal a aplicar en A, y que la compuerta esté en equilibrio, el par total sobre O debe ser nulo. Para ello, se evalúan los momentos que realiza cada una de las fuerzas.

Usando presiones absolutas:

La fuerza resultante que realiza la presión atmosférica se sitúa en el centro de área de la placa. Por tanto, el par que realiza con respecto a O es:

$$\vec{M}_{atm} = F_{atm} \frac{h_1 + h_2}{2} \vec{k} = 190000 \cdot \frac{0{,}9 + 1}{2} \vec{k} = 180500\ \vec{k}\ N \cdot m$$

De igual forma, el aire en C tiene una presión uniforme, situándose su resultante en el centro de área del tramo donde actúa esta presión. Entonces

$$\vec{M}_{aire} = F_{aire} \frac{h_1}{2} \left(-\vec{k}\right) = 117000 \cdot \frac{0.9}{2} \left(-\vec{k}\right) = 52650\ \left(-\vec{k}\right)\ N \cdot m$$

Por último, para situar la resultante de la fuerza del agua, se calcula el centro de presiones:

$$y_{CP_w} = \rho_w g \sin 90 \frac{I_{xx}}{F_w} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 1^3}{135000} = 0.00617284\ m$$

El momento con respecto a O se calcula como:

$$\vec{M}_w = F_w \left(h_1 + \frac{h_2}{2} + y_{CP_w}\right) \left(-\vec{k}\right) = 135000 \cdot \left(0.9 + \frac{1}{2} + 0.00617284\right) \left(-\vec{k}\right)$$

$$\vec{M}_w = 189833{,}3\ \left(-\vec{k}\right)\ N \cdot m$$

Finalmente, del equilibrio de momentos con respecto a O, se obtendría el par que debería realizar la fuerza horizontal externa F_{ext}:

$$\sum \vec{M}_o = 0$$

$$F_{ext} \cdot (h_1 + h_2)\vec{k} + \vec{M}_{atm} + \vec{M}_{aire} + \vec{M}_w = 0$$

$$F_{ext} \cdot (h_1 + h_2)\vec{k} + 180500\vec{k} + 52650\left(-\vec{k}\right) + 189833{,}3\left(-\vec{k}\right) = 0$$

$$F_{ext} = 32622.\ 8(\vec{\imath})\ N$$

<u>Usando presiones relativas:</u>

El aire en C tiene una presión uniforme, situándose su resultante en el centro de área del tramo donde actúa esta presión. Entonces

$$\vec{M}_{aire} = F_{aire}\frac{h_1}{2}\left(-\vec{k}\right) = 27000 \cdot \frac{0.9}{2}\left(-\vec{k}\right) = 12150\ \left(-\vec{k}\right) N \cdot m$$

Para situar la resultante de la fuerza del agua, se calcula el centro de presiones:

$$y_{CP_w} = \rho_w g \sin 90 \frac{I_{xx}}{F_w} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 1^3}{35000} = 0.02381\ m$$

y el momento con respecto a O es:

$$\vec{M}_w = F_w\left(h_1 + \frac{h_2}{2} + y_{CP_w}\right)\left(-\vec{k}\right) = 35000 \cdot \left(0.9 + \frac{1}{2} + 0.02381\right)\left(-\vec{k}\right)$$

$$\vec{M}_w = 49833{,}3\ \left(-\vec{k}\right) N \cdot m$$

Por tanto, el equilibrio con respecto a O, tiendo en cuenta el par de la fuerza horizontal externa F_{ext} aplicada en A:

$$\sum \vec{M}_o = 0$$

$$F_{ext} \cdot (h_1 + h_2)\vec{k} + \vec{M}_{aire} + \vec{M}_w = 0$$

$$F_{ext} \cdot (h_1 + h_2)\vec{k} + 12150\left(-\vec{k}\right) + 49833{,}3\left(-\vec{k}\right) = 0$$

$$F_{ext} = 32622.\ 8(\vec{\imath})\ N$$