TEMA 5 – CORRIENTES ELÉCTRICAS

Clase 5.1 Densidad de corriente y ecuación de continuidad

En este tema vamos a empezar a estudiar qué ocurre cuando las cargas eléctricas están en movimiento, lo que se llama corriente eléctrica. Lo primero que tenemos que entender son las magnitudes que usamos para definirla (densidad de corriente y corriente). Utilizaremos entre otras herramientas matemáticas el flujo a través de superficies abiertas y cerradas.

Densidad de corriente

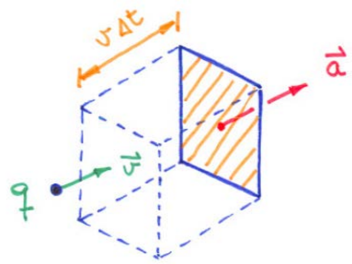

Imagen: JLRM

Vamos a definir un vector que nos diga en cada punto de un material hacia dónde es el movimiento de cargas y si las cargas que se mueven son muchas o pocas. Para eso empezamos estudiando el movimiento de cargas en un pequeño cubo como el de la figura. Si en ese punto las cargas *q* se mueven con una velocidad de módulo *v*, podemos calcular el número de partículas que atraviesan la superficie sombreada, de área *a* durante un pequeño intervalo de tiempo *Δt*. Como las cargas recorren en este intervalo una distancia *v.Δt*, todas las cargas contenidas en el cubo dibujado, de volumen a*.v.Δt* atraviesan la superficie sombreada. Si llamamos *n* al número de partículas que transportan carga (normalmente electrones) por unidad de volumen, ya podemos calcular cuántas hay en el cubo.

Número de partículas que atraviesan la superficie *a* en un intervalo de tiempo *Δt*:

$$N = n.\vec{v}.\vec{a}.\Delta t$$

En esta expresión el producto escalar de *v* y *a* permite tener en cuenta el caso más general en el que las cargas no atraviesan la superficie de forma perpendicular.

Con esto ya podemos definir la corriente que atraviesa la superficie rallada. La corriente es la carga por unidad de tiempo que atraviesa una superficie (se mide en Amperios, que son Culombios/segundo). En este caso, y sabiendo que la carga de cada partícula vale *q*:

Corriente a través de la superficie *a*:

$$I = \frac{Carga\ que\ atraviesa\ la\ superficie\ a}{\Delta t} = \frac{q.N}{\Delta t} = q.n.\vec{v}.\vec{a}$$

Si la velocidad de las cargas es perpendicular a las superficie rallada, entonces *v* y *a* son paralelos y nos queda:

$$I = q.n.v.a$$

Cuando hablamos de corriente, siempre nos referimos a la corriente que atraviesa una superficie concreta (que muchas veces es la sección trasversal de un cable). Si la corriente está repartida de forma uniforme (hay la misma corriente por dentro que por fuera del cable, por ejemplo), nos vale con saber la intensidad.

Pero a veces la corriente es más intensa en unos zonas del material que en otras, por eso hemos dicho que queremos definir un vector (una función con un valor distinto en cada punto) que nos informe sobre el movimiento de cargas en cada punto de un material (y no a través de una superficie). Ese vector va a ser la densidad de corriente.

Densidad de corriente (módulo):

$$J = \frac{I}{a} = q.n.v$$

Como se ve, la densidad de corriente en cada punto de un material depende del número de portadores de carga, de la carga de cada uno y de la velocidad con que se mueven.

Para definir el vector densidad de corriente, en cada punto le daremos la dirección en que se mueva las cargas, que es la misma que la del vector *v*.

Densidad de corriente:

$$\vec{J} = q.n.\vec{v}$$

Ejercicio

Parece que no tiene que ver con los que estamos viendo, pero sí tiene que ver. ¿Por qué carretera hay más tráfico, medido en coches por hora? ¿Por una en la que circulan coches a 120 km/h a una distancia de seguridad de 144 m o por otra en la que circulan a 50 km/h cada 25 m?

Solución: Curiosamente el tráfico en la segunda carretera es más del doble que en la primera.

Ejercicio

La densidad de electrones de conducción en el cobre es 8.10^{28} electrones/m^3 , y la carga de cada electrón es $-1.6.10^{-19}$ Culombios. Por un cable de cobre de 2 mm^2 de sección están circulando 8 Amperios, y queremos calcular la velocidad de los electrones.

Solución: -0.31 mm/s Esta velocidad es una velocidad media también llamada “de arrastre”, cada electrón individualmente se mueve mucho más rápido y de forma caótica.

Ecuación de continuidad

Hemos visto que si en un material la densidad de corriente es uniforme, o sea vale lo mismo en todos los puntos, nos vale con conocer la intensidad a través de su sección para saber cómo se están moviendo las cargas. Vamos a ver qué ocurre si la densidad de corriente no es uniforme.

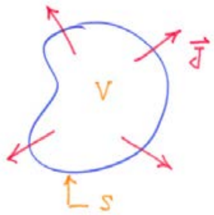

Imagen: JLRM

Supongamos que conocemos el valor del vector densidad de corriente en todos los puntos de un material y que queremos calcular la intensidad que sale de un volumen *V* como el de la figura. Para eso tendremos que calcular la corriente a través de la superficie *S*, que delimita el volumen. En este caso tenemos que calcular la intensidad a través de una superficie cerrada. En otras situaciones es posible también calcular la intensidad a través de una superficie abierta. En cualquier caso, para calcular la corriente a partir de la densidad de corriente hay que sumar los pequeños elementos de corriente en cada pequeño elemento *da* de la superficie, que pueden calcularse usando un producto escalar para cubrir el caso en que la densidad de corriente no es perpendicular al elemento de superficie.

Corriente a través de un elemento de superficie:

$$dI = \vec{J}.\overrightarrow{da}$$

Y la corriente total será la suma (la integral) de todos los elementos de la superficie a través de la que estamos calculando la corriente. En nuestro caso, la superficie *S* (que es cerrada). Esta operación es ni más ni menos que el flujo del vector *J* a través de la superficie *S*.

Corriente a través de una superficie (cerrada pero podría ser abierta):

$$I = \oint_S \vec{J}.\overrightarrow{da}$$

Ahora vamos a aplicar el teorema de Gauss, y con eso sabemos que esta integral se puede calcular como la integral de volumen de la divergencia de *J*.

$$I = \oint_S \vec{J}.\overrightarrow{da} = \int_V div\,\vec{J}$$

Por otro lado, como la carga se conserva, si sumamos toda la carga que hay dentro del volumen (con una integral) y vemos cuánto disminuye, el resultado tendrá que coincidir con la intensidad.

$$I = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho.dv$$

Y ahora igualamos las dos expresiones anteriores de la intensidad, y tenemos en cuenta que valen lo mismo para cualquier volumen. Llegamos a una expresión interesante que nos relaciona la densidad de corriente y la densidad de carga en cada punto de un material.

Ecuación de continuidad:

$$\vec{\nabla}.\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Corrientes estacionarias:

Llamamos corrientes estacionarias a aquellas que no hacen variar la densidad de carga y que por tanto pueden mantenerse durante un tiempo indefinido. En ese caso se cumple que la divergencia de la densidad de corriente es cero.

Ejercicio:

Tenemos una esfera conductora de radio *R* y con densidad de corriente hacia el centro de la esfera y mayor cuanto más nos alejamos del centro. $\vec{J} = -ar\hat{r}$ (*a* es una constante conocida). Se pide:

Calcular la intensidad que entra o sale de la de la esfera. (Entra $4\pi aR^3$ A)

Determinar dónde se acumula (o se pierde) la carga debida a esta intensidad. (Se acumula uniformemente en toda la esfera de forma que la densidad de carga en todos los puntos de la esfera varía con el tiempo, $\rho = \rho 0 + 3at$)

Ejercicio:

Tenemos un cubo con un vértice en el origen de coordenadas, de lado *L* y con los tres lados en la parte positiva de los ejes coordenados. El cubo está inicialmente descargado y circula un corriente con densidad $\vec{J} = az\hat{y}$, siendo a una constante conocida. ¿Cuánta carga se acumula por segundo en el cubo? ¿Cuánta se acumularía si la densidad de corriente fuera densidad $\vec{J} = az\hat{k}$?

Así que de esta clase nos quedamos con dos ideas clave:

Densidad de corriente

La densidad de corriente en un material conductor depende del número de portadores de carga, de la carga de cada uno y de la velocidad con que se mueven.

Ecuación de continuidad

La divergencia de la densidad de corriente es la variación de la densidad de carga cambiada de signo.

Clase 5.2 Ley de Ohm

Vamos a ver como si un campo eléctrico se mantiene en un conductor, se produce una densidad de corriente, y analizaremos la relación entre el campo y la corriente. Eso nos llevará a la conocida ley de Ohm.

Un campo eléctrico produce en cada punto de un conductor una densidad de corriente proporcional al campo. La constante de proporcionalidad depende del material y se llama conductividad σ (no confundir con la densidad de carga superficial, para la que se utiliza la misma letra).

Viene bien recordar, que para que la corriente se mantenga en el conductor debe haber algún agente externo que mantenga el campo, si no, se llegaría casi de forma inmediata a la situación electrostática en la que el campo dentro del conductor vale cero.

Relación entre campo eléctrico y densidad de corriente:

$$\vec{J} = \sigma.\vec{E}$$

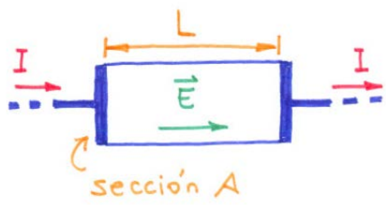

Imagen: JLRM

Vamos a imaginarnos ahora un conductor cilíndrico (un cable) como el de la figura, con sección trasversal *A*, longitud *L*, con un campo *E* uniforme en su interior. Debido al campo aparecerá una corriente eléctrica *I*, que tiene un valor que podemos calcular fácilmente, y relacionar con la diferencia de potencial *V* entre los extremos del conductor:

$$I = J.A = \sigma.E.A = \frac{\sigma.A}{L}.V$$

En esta expresión se ve que la diferencia de potencial en el conductor es proporcional a la intensidad. La constante de proporcionalidad es la resistencia *R*, y se suele escribir su valor en función de la resistividad ρ, que es la inversa de la conductividad (y que no hay que confundir con la densidad de carga, ojo, aunque se utilice la misma letra).

Ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R} \qquad R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{A} = \rho\,\frac{L}{A}$$

En esta expresión se ve que la resistencia depende del material y de su geometría (longitud y sección).

En materiales con conductividad alta, la resistencia suele ser pequeña y la caída de tensión, al ser proporcional a R también. Y por tanto el campo dentro de los conductores es pequeño.

Podemos calcular la potencia que se disipa en una resistencia, debida al choque de los electrones contra los núcleos de los átomos. (Si no se produjeran estos choques los electrones se acelerarían sin límite porque están sometidos a una fuerza constante producida por el campo.) La potencia es el trabajo por unidad de tiempo, y el trabajo es la carga por la diferencia de potencial, con lo que la potencia es la intensidad por la diferencia de potencial.

Ley de Joule:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Q.V}{t} = I.V = I^2.R$$

Podemos resumir esta clase en dos ideas clave:

Ley de Ohm

La diferencia de potencial entre los extremos de un conductor es proporcional a la intensidad que lo atraviesa.

Resistencia

Es la constante de proporcionalidad entre diferencia de potencial e intensidad en un conductor. En un cable es proporcional a la resistividad del material y a la longitud e inversamente proporcional a la sección.