Campos Electromagnéticos

Marzo de 2023

Problema 1. (3,75 puntos) Una esfera de radio *R* de la que se sabe que tiene carga volumétrica dependiente de la distancia al centro *ρ(r)* no uniforme y positiva, está situada sobre el origen de coordenadas. La gráfica muestra el campo que crea solo la esfera en coordenadas esféricas que tiene la forma $\vec{E}(r) = E_{ESF}\hat{r}$ (No se conoce su expresión analítica, E_0 es un valor de campo positivo conocido).

Además, a una distancia 2*R* del centro de la esfera hay una lámina con densidad de carga uniforme $\sigma_{LAM} = 8\varepsilon_0 E_0$. (Ver figura).

Se pide, justificando adecuadamente las respuestas:

a) ¿Hay carga superficial en alguna zona de la esfera? En caso afirmativo determinar dónde y su valor.

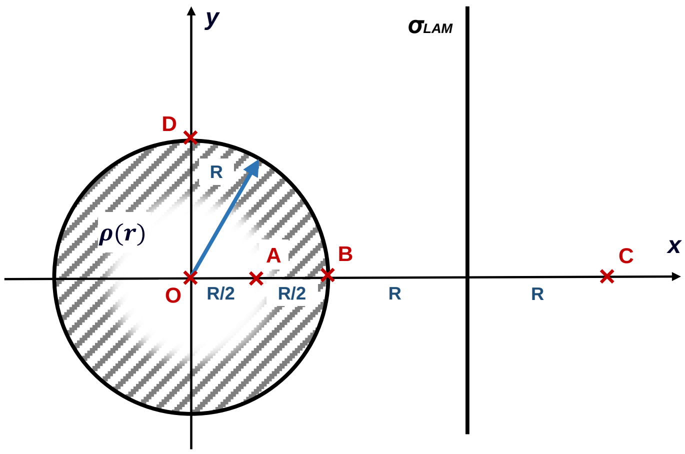
b) Valor de la carga total encerrada entre dos superficies esféricas de radio *R/2 y* R^- (*R* por la izquierda).

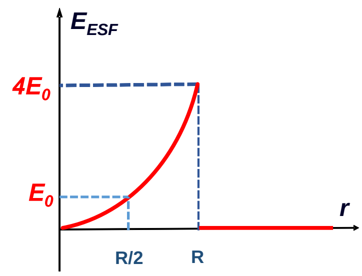
c) ¿Cuál de estas diferencias de potencial es mayor en valor absoluto $|\varphi_B - \varphi_A|$ ó $|\varphi_A - \varphi_O|$ (O es el origen de coordenadas).

d) Trabajo para llevar una carga -*q* desde el punto *C (3R, 0, 0)* hasta *D (0, R, 0)*. Justificar el signo.

e) Calcular la densidad de carga volumétrica en el punto A, sabiendo que:

$$\left.\frac{dE_{ESF}}{dr}\right|_{r=R/2} = \frac{E_o}{R}$$





SOLUCIÓN

a) **(1 pto.)** Si. En la esfera de radio $r = R$ tiene que haber una densidad superficial de carga que provoque la discontinuidad del campo mostrada en el gráfico de la derecha. Conforme a la ley de Gauss, su valor es:

$$\Delta E_n = 0 - 4E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \sigma = -4\varepsilon_0 E_0 \ \ {}^{C}\!/_{m^2}$$

b) **(2,5 ptos.)** Para responder a esta cuestión podemos considerar sólo el campo creado por la carga de la esfera (campo radial cuyo módulo depende sólo de la variable r). Así, podemos calcular la carga solicitada aplicando la ley de Gauss en dos superficies gaussianas esféricas de radios $r = R/2 \ \ y \ \ r = R^-$:

$$\oint_{r=R^-} \bar{E}.d\bar{a} = 4E_0.4\pi R^2 = 16E_0\pi R^2$$

$$\oint_{r=R^-} \bar{E}.d\bar{a} = \frac{Q_{int\,r=R^-}}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad Q_{int\,r=R^-} = 16\varepsilon_0 E_0 \pi R^2$$

Igualmente,

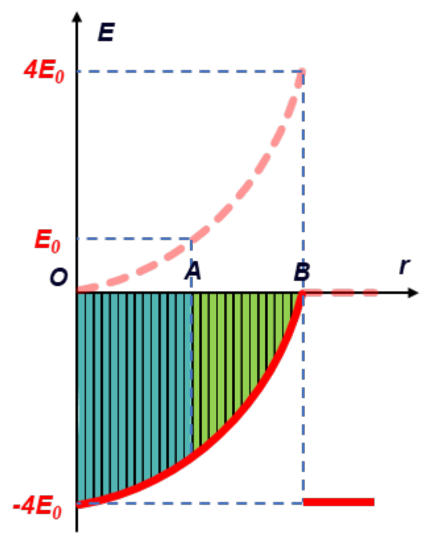
$$\oint_{r=\frac{R}{2}} \bar{E}.d\bar{a} = E_0.4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = E_0\pi R^2 \rightarrow \quad Q_{int\,r=R/2} = \varepsilon_0 E_0 \pi R^2$$

La carga solicitada es: $Q = (Q_{int\,r=R^-}) - Q_{int\,r=R/2} = 15\varepsilon_0 E_0 \pi R^2 \quad C$

c) **(2 ptos.)** Empecemos por calcular el campo creado por la lámina de carga y construyamos una gráfica del <u>valor del campo total</u> en los puntos de la recta que une el origen, A y B. El campo creado por la lámina de carga es uniforme en todo el semiespacio a la izquierda de la lámina, <u>en los puntos de la semirecta que pasa por O, A y B tendrá sentido contrario al campo creado por la esfera</u>:

$$\bar{E}_{lám.} = -\frac{8\varepsilon_0 E_0}{2\varepsilon_0}\hat{r} = -4E_0\hat{r}$$

Por lo que el campo total en los puntos de esa semirecta tendrá una gráfica similar a la de la esfera pero desplazada hacia abajo una cantidad igual a $4E_0$.



El valor absoluto de las diferencias de potencial solicitadas se puede conocer observando el área barrida por la gráfica del campo entre los puntos indicados.

Se observa con claridad que, en valor absoluto, el área barrida por la curva del campo entre O y A es mayor que entre A y B. Por tanto

$$|\varphi_A - \varphi_o| > |\varphi_B - \varphi_A|$$

También se podría justificar el resultado con un razonamiento equivalente al anterior:

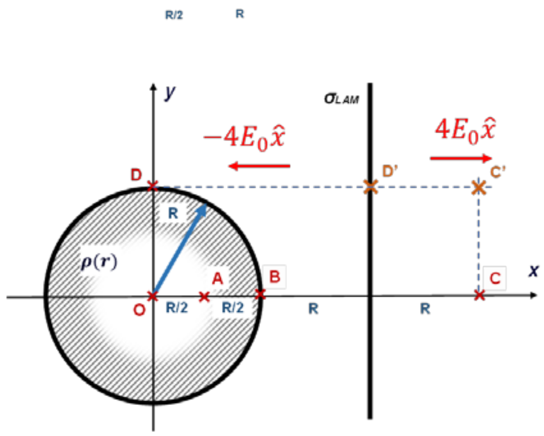
Atendiendo a que diferencia de potencial entre dos puntos, $V_{AB} = \int_A^B \bar{E}.d\bar{l}$, se puede calcular como el valor medio de la componente del campo tangente a la trayectoria multiplicado por la longitud del camino recorrido.

d) **(2,5 ptos.)** El trabajo realizado por un agente externo entre C y D será:

$$W_{ext} = -(-q).V_{CD}$$

Como el campo creado por la carga de la esfera es cero en todos los puntos exteriores a ella, V_{CD} será el debido al campo creado por la lámina (ver dibujo). Además:

$$V_{CD} = V_{CC'} + V_{C'D'} + V_{D'D} =$$
$$= 0 - 4E_0R + 4E_0 2R = 4E_0R$$
$$W_{ext} = 4qE_0R > 0 \quad J$$



El signo positivo del trabajo se justifica muy fácilmente: La carga -q se va a sentir siempre atraída por la lámina, que tiene carga positiva. Esta fuerza de atracción tiene el mismo módulo a ambos lados de la lámina y estamos moviendo la carga a un punto final que está más alejado de la lámina que el inicial.

Otra forma de argumentarlo sería: estamos trasladando una carga negativa en el mismo sentido de un campo de módulo constante por un tramo $(D'D)$ más largo que el que la trasladamos en sentido contrario al campo $(C'D')$.

e) **(2 ptos.)** Utilizando la divergencia del campo:

$$\rho_A = \varepsilon_0 . div\bar{E}|_{r=R/2}$$

Podemos aplicarla sólo al campo creado por la carga de la esfera ya que es cero la divergencia del campo producido por la lámina (campo uniforme en ese semiespacio). La divergencia en coordenadas esféricas es:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\, sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta\, sen\,\theta) + \frac{1}{r\, sen\,\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r)$$

$$\bar{\nabla}.\bar{E} = \frac{1}{r^2}\left(2rE_r + r^2\frac{\partial E_r}{\partial r}\right) \quad \rightarrow \quad \bar{\nabla}.\bar{E}|_{r=R/2} = \left[\frac{2E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r}\right]_{r=R/2} = \frac{2E_0}{R/2} + \frac{E_0}{R}$$

$$\rho_A = \frac{5\varepsilon_0 E_0}{R} \quad C/_{m^3}$$

Problema 2. (3,75 puntos) Se tienen dos placas planas cuadradas conductoras muy grandes de lado *L*, de espesor *e* y colocadas paralelamente a una distancia *d*. (*L*>>*d*).

Inicialmente (situación 0) **el conductor superior tiene una carga total $\boldsymbol{Q > 0}$** conocida y **el conductor inferior está descargado**, y ambos conductores están aislados. (En esta situación la batería no produce ningún efecto por estar abierto el interruptor *S*).

a) En la situación 0, determinar la densidad de carga en cada una de las superficies de las placas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y σ_4.

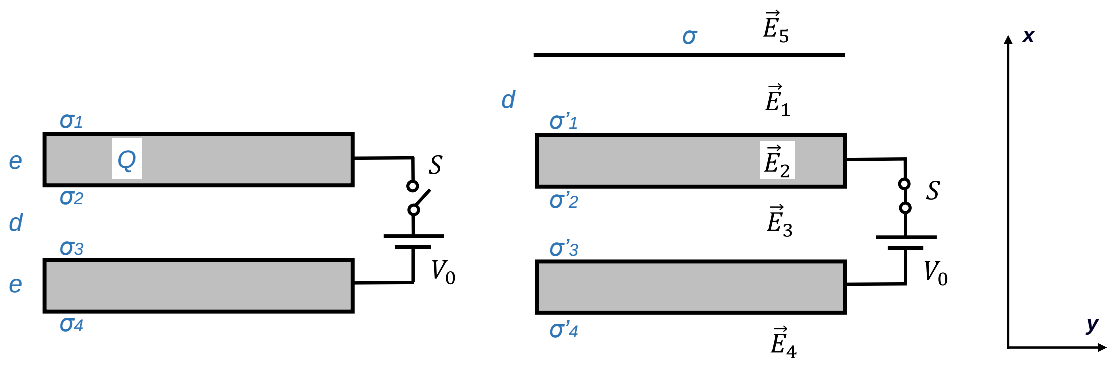
A continuación, partiendo de la situación 0, se cierra el interruptor *S*, de forma que se establece una diferencia de potencial *V₀* > *0* entre ambas placas, y además se acerca una lámina plana infinita no conductora con densidad de carga uniforme $\sigma > 0$, que se coloca paralela por encima del conductor superior a una distancia *d* (situación 1).

b) En la situación 1, determinar la nueva densidad de carga en cada una de las superficies de las placas $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ y σ_4'.

c) En la situación 1, calcular los campos (vector) $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$, $\vec{E}_4$ y $\vec{E}_5$ en las zonas indicadas en la figura.

d) En la situación 1, determinar el trabajo que tiene que hacer un agente externo para separar la lámina de carga *σ* hasta una distancia *2d* de la placa superior.

En cada apartado se pide justificar adecuadamente las respuestas.



$Situación\ 0$ $Situación\ 1$

a) (2 puntos) Planteamiento, desarrollo, justificación… imprescindibles en todos los apartados. Otros métodos de solución son posibles.

Para resolver este problema es importante considerar y aplicar la ley de conservación de la carga eléctrica, ley de Gauss y que, en toda frontera, ΔE_n= σ/ε$_0$, siendo σ, una densidad superficial de carga, y recordar que el campo eléctrico dentro de un conductor en equilibrio electrostático es nulo. Además, el campo eléctrico creado por una placa conductora cargada (*L>>d),* es independiente de la distancia a dicha placa, ortogonal a dicha placa (con sentido determinado por el signo de la carga) y su módulo viene dado por:

$$E = \frac{Q}{2\epsilon_0 L^2}$$

Expresar el campo eléctrico en función de A, siendo A un área que no se determina en la solución, no es correcto. Tampoco es correcto considerar dicha área como A = L d, o L e.

Por tanto, el campo eléctrico creado por la placa con carga Q viene dado por la anterior expresión, y sabiendo que $\Delta\vec{E}_n$= σ/ε$_0$, se pueden obtener las densidades superficiales de carga en las superficies de las placas.

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2L^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q}{2L^2}$$

$$\sigma_3 = -\frac{Q}{2L^2}$$

$$\sigma_4 = +\frac{Q}{2L^2}$$

Como se puede verificar, la carga neta en la placa inferior sigue siendo nula.

Los resultados finales deben venir expresados en función de datos conocidos.

b y c) (3 + 3 puntos) Utilizando los mismos razonamientos que en el apartado anterior y teniendo en cuenta que cuando se conecta la batería, la carga también se conserva, pero se distribuye entre las dos placas de acuerdo a la diferencia de potencial aplicada, se pueden calcular los campos eléctricos y densidades superficiales de carga solicitadas. Además, se ha de tener en cuenta que el módulo del campo eléctrico creado por la placa no conductora viene dado por,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Y como ya hemos dicho, dicho módulo es independiente de la distancia a dicha placa.

Recordemos que, en el espacio entre ambas placas, el campo eléctrico se puede calcular de forma directa a partir de la diferencia de potencial aplicada, de modo que,

$$\vec{E}_3 = -\frac{V_0}{d}\vec{i}$$

Con sentido determinado por la conexión de los polos de la batería especificada en el enunciado.

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{2\epsilon_0 L^2}\vec{i} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_2 = 0$$

$$\vec{E}_4 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{i} - \frac{Q}{2\epsilon_0 L^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}_5 = \frac{Q}{2\epsilon_0 L^2}\vec{i} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{i}$$

Densidades superficiales de carga:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2L^2} - \frac{\sigma}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{V_0}{d}\epsilon_0$$

$$\sigma_3 = -\frac{V_0}{d}\epsilon_0$$

$$\sigma_4 = \frac{\sigma}{2} + \frac{Q}{2L^2}$$

Como puede comprobarse, la carga eléctrica total Q, se mantiene constante aun repartida entre ambas placas conductoras.

No es correcto expresar las densidades superficiales de carga como σ = Q, Q/2, etc… porque Q no es densidad superficial de carga, sino carga eléctrica. Esto es un error conceptual y dimensional grave.

d) (2 puntos) El trabajo se calcula a partir del campo eléctrico en la zona en la que se encuentra la lámina de carga y la fórmula para el cálculo del trabajo, con un recorrido en este caso de *2d – d = d*. En dicho campo eléctrico no se incluye la contribución al campo eléctrico de la propia lámina conductora. Por tanto,

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\epsilon_0 L^2}\vec{i}$$

$$W = -\frac{\sigma S Q d}{2\epsilon_0 L^2} = -\frac{Q\sigma d}{2\epsilon_0}$$

El trabajo realizado por un agente externo es negativo en este caso porque el propio campo eléctrico tiende a alejar dicha lámina. Si el signo del trabajo no es correcto, el resultado no es correcto.

Campos Electromagnéticos

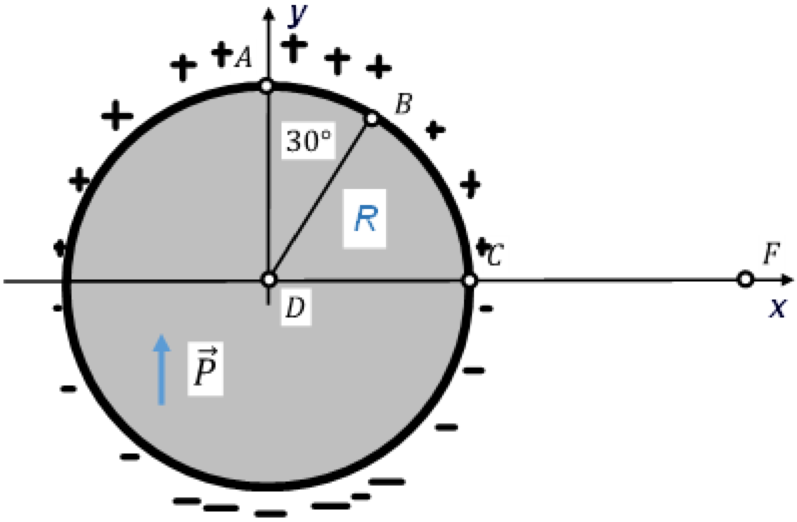
Marzo de 2023

Problema 3. (2,5 puntos) El disco de la figura es no conductor, tiene radio *R*, espesor *e* y está polarizado uniformemente en una dirección *y,* que es perpendicular a su eje, de forma que tal como muestra la figura $\vec{P} = P\hat{\jmath}$, (*P>0*). No se estudiará en el problema el campo al que se debe esta polarización. Se pide, justificando adecuadamente las respuestas:

a) (0,5 ptos.en total) Dibujar con signos + y – dónde aparece carga polarizada (0,2 ptos) en el disco y razonar si las densidades de carga polarizada superficial (0,15ptos) y volumétrica (0,15ptos) son o no uniformes.

La densidad volumétrica es nula porque la divergencia de **P** es nula ($\nabla\boldsymbol{P}= 0$), esto es, al no haber cambios en el vector polarización en todo el disco, todos los momentos dipolares, orientados sentido +j, consiguen cancelar sus cargas interiormente salvo las que van a sobresalir del disco tanto por arriba como por abajo.

La densidad superficial dependerá sin embargo del ángulo theta que forme el raidovector que señale al punto de interés (vector normal a la superficie) con el eje y; (este ángulo viene de la definición del ángulo polar de las coordenadas esféricas). En este caso, debemos proyectar el vector polarización con dirección +j sobre dicho vector mediante su producto escalar, i.e, $\sigma_b = P \cdot cos\theta$



b) (0,5 ptos.) Determinar la densidad de carga polarizada en los puntos A, B y C de la superficie del disco.

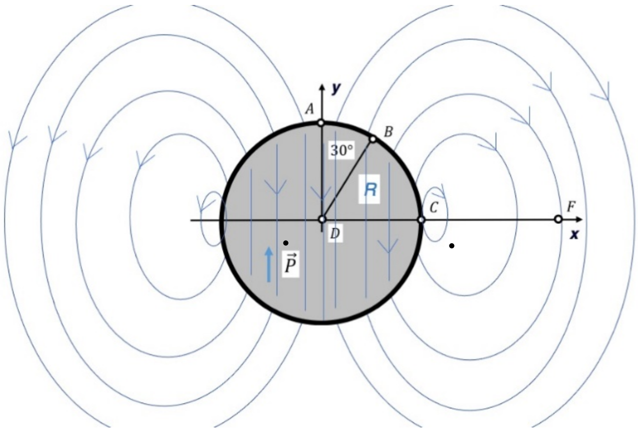
$$Para\ el\ punto\ A: \sigma_b = P \cdot \cos 0° = P \text{ C·m}^{-2}$$

$$Para\ el\ punto\ B: \sigma_b = P \cdot \cos 30° = P\sqrt{3}/2 \text{ C·m}^{-2}$$

$$Para\ el\ punto\ C: \sigma_b = P \cdot \cos 90° = 0 \text{ C·m}^{-2}$$

Estos resultados nos permiten representar gráficamente las cargas debidas a P: la parte superior del disco estará cargada positivamente con mayor intensidad en su zénit, disminuyendo a medida que gira en sentido horario hasta el ecuador, a medida que crece el ángulo θ. A partir de ahí, sigue girando según las agujas del reloj aumentando la carga negativa de manos a más hasta un máximo negativo en el eje -j; el recorrido se cierra de forma simétrica par hasta el eje -i. De esta forma, tendríamos una suerte de óvalo alargado según el eje.

c) (0,5 ptos.) Dibujar el vector campo con su sentido en los puntos D y F, que están sobre el eje *x*. Por fuera del disco, las líneas de campo **E** saldrán de las cargas positivas del cono norte para llegar a las positivas del cono sur como si de un dipolo se tratara. Viajarán perpendiculares a las equipotenciales, así que, atravesarán el punto F de forma perpendicular en dirección -j. Dentro del disco, en D el campo tendrá dirección -j por ser el campo resultante de la polarización del dieléctrico.



d) (1 pto.en total) Trabajo (debido únicamente al campo que crea la carga polarizada) (0,25 ptos.) que hace un agente externo para llevar una carga *q* desde un punto lejano *(0,d,0) d>>R* por encima del disco hasta un punto lejano *(d,0,0)* en el plano horizontal a la misma distancia. Utilizar las aproximaciones que se consideren adecuadas (0,75 ptos).

e) Si llamamos a los puntos de interés, G(0,d,0), en el eje y, y H(d,0,0) en el eje x, el trabajo pedido será la diferencia de potencial entre ellos multiplicada por la carga que se desplaza en el campo: +q: W=q(V_H-V_G).

Al estar muy alejados G y H, podemos utilizar la aproximación dipolar. El potencial será entonces el debido a los centros de carga alrededor del origen del disco separados una distancia d, que resultará de la acción de la polarización, y pueden calcularse como V_i= k **r** **p** / $\mathbf{r}_i^2$ = k r p cosθ/r_i^2 ; donde: "k" es $(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$; "**r**" es el vector unitario que señala el punto de interés; **p** el momento dipolar (que será: p = P · V = P · πR^{2}e); "θ" el ángulo formado por **r** y **P;** y "r_i" la distancia al punto de interés (en este caso, "d").

V_H: El punto final, situado en el eje x (punto H), forma un ángulo θ=90° con el vector polarización. El coseno del ángulo será nulo y anulará el producto del numerador, dando un potencial nulo (resultado coherente con el del apartado anterior). V_G: El punto inicial, situado en el eje y (punto G), forma un ángulo de 0° con el vector polarización, así que, el coseno del ángulo será máximo y dará su máximo valor al producto del numerador del potencial:

$$V_G = \frac{\mathrm{P}\,\pi \mathrm{R}^2 \mathrm{e}}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\; V$$

La circulación del campo en dicha trayectoria es positiva y, por tanto, el trabajo será negativo con valor: W=-qV_G,

$$W = -qV_G = -q\frac{\mathrm{P}\,\mathrm{R}^2 \mathrm{e}}{4\varepsilon_0 d^2}\; J$$