Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2021

PROBLEMA 2

Se descarga agua desde un depósito, de grandes dimensiones, tal y como se muestra en figura. El chorro de salida impacta sobre un álabe que se desplaza horizontalmente hacia él a una velocidad constante V y sobre el que se aplica una fuerza cuya componente horizontal es F_H. Todos los datos y características se muestran en la tabla. Se desprecian todas las perdidas secundarias. Se pide:

a) (6 puntos) Caudal que circula por las tuberías 1 y 2.

b) (4 puntos) Si de la tubería 3 sale el chorro con una velocidad V_j, obtener la expresión analítica de la fuerza horizontal F_H. La sección del chorro permanece constante.

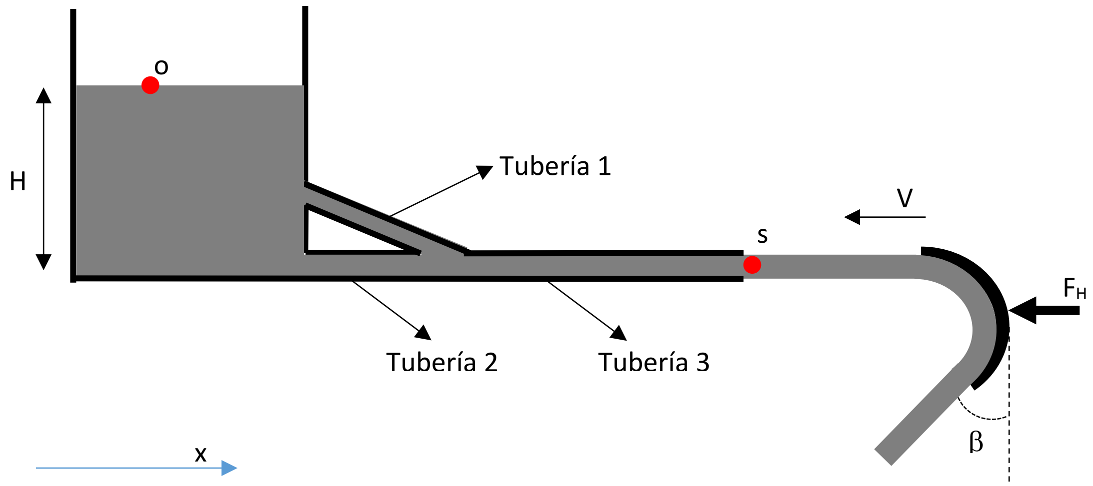
Justificar todas las hipótesis realizadas. En caso necesario, ajustar el factor de fricción con un error menor al 4%.

Datos	
ρ [kg/m³]	1000
μ [kg/m·s]	0.001
H [m]	6.7
g [m/s²]	10

Datos	Tubería 1	Tubería 2	Tubería 3
L [m]	1.8	0.898	6
d [cm]	5	5	5
ε [mm]	0.046	0.046	0.046
Q [m³/s]			0.012

Ec. Haaland: $\frac{1}{f^{1/2}} \cong -1.8 \cdot log\left(\left(\frac{\varepsilon/d}{3.7}\right)^{1.1} + \frac{6.9}{Re_d}\right)$;

Ec. Colebrook: $\frac{1}{f^{1/2}} \cong -2.0 \cdot log\left(\frac{\varepsilon/d}{3.7} + \frac{2.51}{Re_d f^{1/2}}\right)$



a) Caudal que circula por las tuberías 1 y 2.

Se aplica la ecuación de Bernoulli desde la superficie libre del depósito hasta la salida de la tubería 3, a través de la tubería 1:

$$\frac{p_o}{\rho g}+\frac{\alpha V_o^2}{2g}+z_o=\frac{p_s}{\rho g}+\frac{\alpha V_3^2}{2g}+z_s+h_{f1}+h_{f3}\rightarrow H=\frac{\alpha V_3^2}{2g}+h_{f1}+h_{f3}\quad (1)$$

y también a través de la tubería 2:

$$\frac{p_o}{\rho g}+\frac{\alpha V_o^2}{2g}+z_o=\frac{p_s}{\rho g}+\frac{\alpha V_3^2}{2g}+z_s+h_{f2}+h_{f3}\rightarrow H=\frac{\alpha V_3^2}{2g}+h_{f2}+h_{f3}\quad (2)$$

Como Q_3 es conocido, se puede evaluar h_{f3}

$$V_3=\frac{Q_3}{A_3}=6.1\ m/s\rightarrow Re_3=\frac{\rho V_3 d_3}{\mu}=305577>2300\rightarrow \text{Turbulento}$$

Al ser turbulento, $\alpha=1$, y según la Ecuación de Haaland:

$$\frac{1}{f^{\frac{1}{2}}}\cong -1.8\cdot log\left(\left(\frac{\varepsilon/d}{3.7}\right)^{1.1}+\frac{6.9}{Re_d}\right)\quad (3)$$

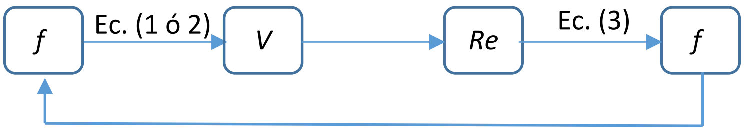
$f_3=0.0205$. Por tanto,

$$h_{f3}=f_3\frac{L_3}{d_3}\frac{V_3^2}{2g}=4.59\ m$$

Con el valor de las pérdidas en el tramo 3, se pueden resolver tanto la ecuación (1) como la ecuación (2), junto con la ecuación de Haaland, de forma iterativa. Posteriormente, solo habría que usar la ecuación de la conservación de la masa para determinar el caudal restante:

Sistema de ecuaciones	Incógnitas
1, 3	V_1 y f_1
$Q_2=Q_3-V_1A_1$	

Sistema de ecuaciones	Incógnitas
2, 3	V_2 y f_2
$Q_1=Q_3-V_2A_2$	



Las soluciones finales que se obtienen son:

Haaland	$f_3=0.0205$	$V_1=2.51\ m/s$	$f_1=0.0215$	$Q_1=0.0049\ m^3/s$
		$V_2=3.60\ m/s$	$f_2=0.0210$	$Q_2=0.0071\ m^3/s$

El caudal Q_3 está calculado para el circuito usando la expresión de Haaland. Por esta razón, al resolverlo con Colebrook, se obtienen resultados diferentes según se resuelva usando el primer sistema de ecuaciones o el segundo. Sus soluciones son:

Mecánica de Fluidos

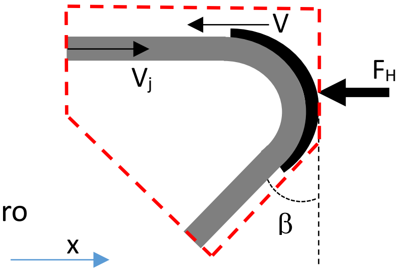
Apellidos, Nombre: Mayo 2021

1, 3	$f_3 = 0.0202$	$V_1 = 2.77\, m/s$	$f_1 = 0.0213$	$Q_1 = 0.0054\, m^3/s$
		$V_2 = 3.34\, m/s$	$f_2 = 0.0210$	$Q_2 = 0.0066\, m^3/s$

2, 3	$f_3 = 0.0202$	$V_1 = 2.13\, m/s$	$f_1 = 0.0218$	$Q_1 = 0.0042\, m^3/s$
		$V_2 = 3.98\, m/s$	$f_2 = 0.0207$	$Q_2 = 0.0078\, m^3/s$

b) Si de la tubería 3 sale el chorro con una velocidad V_j, obtener la expresión analítica de la fuerza horizontal F_H. La sección del chorro permanece constante.

De forma inicial, con la conservación de la masa, se determina la velocidad de salida del chorro del álabe. Para ello, se escoge un volumen de control móvil, no deformable, tal y como se aprecia en la figura, que se desplaza a la misma velocidad que el álabe y solidario a él. Al ser un problema estacionario y tener un volumen de control no deformable, el primer término del teorema general del transporte de Reynolds, para la conservación de la masa, se anula. La sección 1 es la entrada del chorro al volumen de control y la 2, su salida.



$$0 = \cancel{\frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho dV} + \iint_{SC} \rho(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA$$

En la entrada, se puede calcular la velocidad relativa con la que el chorro atraviesa la superficie de control:

$$V_{r_1} = (V_j + V)$$

$$0 = \rho(-V_{r_1})A_j + \rho V_{r_2} A_j \rightarrow V_{r_2} = V_{r_1} = (V_j + V)$$

Para la conservación de la cantidad de movimiento, escogiendo un sistema de referencia móvil solidario al álabe:

$$\sum \vec{F} = \cancel{\frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV} + \iint_{SC} \rho\vec{v}_r(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA$$

Se puede asumir que el chorro se encuentra a presión atmosférica. Por tanto, la única fuerza externa que actúa sobre el volumen de control es F_H. Según el eje x de la figura:

<u>Eje x</u>:

$$-F_H = \rho(V_{r_{1x}})(-V_{r_1})A_j + \rho(V_{r_{2x}})(V_{r_2})A_j$$

$$-F_H = \rho(V_j + V)[-(V_j + V)]A_j + \rho[-(V_j + V)\,\text{seno}\,\beta](V_j + V)A_j$$

$$F_H = \rho(V_j + V)^2(1 + \text{seno}\,\beta)\,A_j$$