Mecánica de Fluidos

Junio 2013

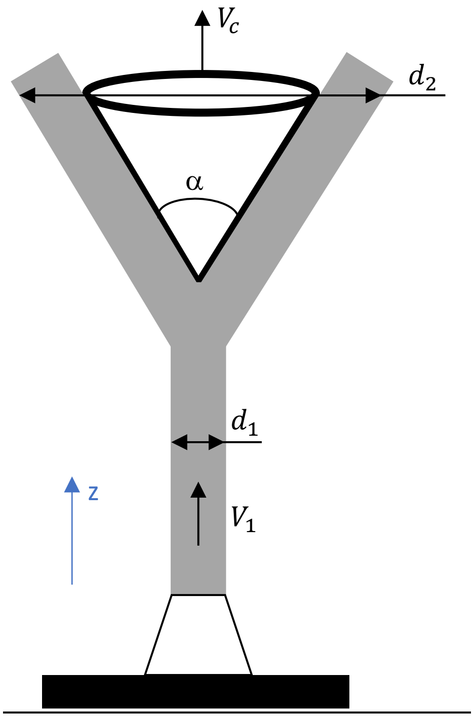
Problema 1

Se lanza un chorro de aire sobre un deflector en forma de cono, elevándolo con una determinada aceleración. El chorro sale con una velocidad V_1 y diámetro d_1 y abandona el cono con un diámetro d_2 tal y como se muestra en la figura. El peso del cono es P y el diámetro de la base del cono es d_c. Se pide:

a) Valor de la aceleración del cono en el instante en que la velocidad del mismo es V_c = 0,5 m/s.
b) Fuerza que habría que aplicar al cono para que no se moviera.

Datos:

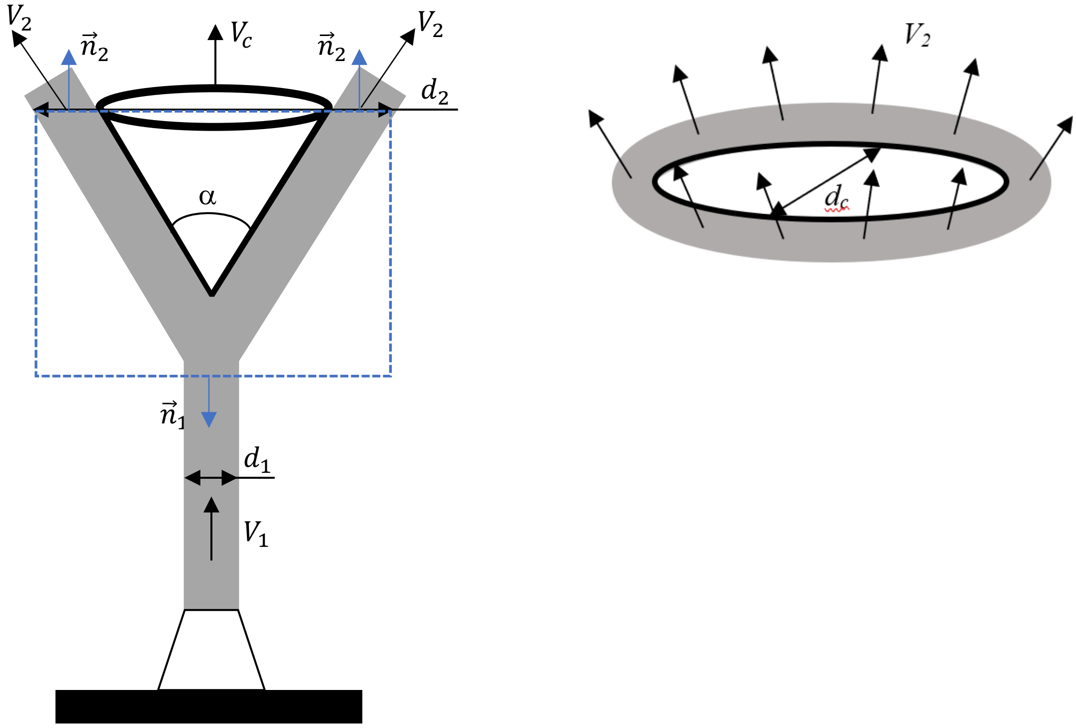
$\rho_{aire} = 1.2\ kg/m^3$	$\alpha = 60°$	$P = 6.5\ N$
$V_1 = 30\ m/s$	$d_c = 0.3\ m$	$g = 9.81\ m/s^2$
$d_1 = 0.1\ m$	$d_2 = 0.4\ m$	



Solución

Este problema se puede resolver de diferentes formas, según la forma del volumen de control que se escoja, así como la posición del sistema de referencia.

<u>1ª FORMA</u>: Volumen de control cilíndrico, no deformable, que engloba al cono y al fluido, tal y como se muestra en la figura. Las superficies de control son horizontales tanto en la entrada como en la salida. El sistema de referencia, u observador, es solidario al cono.



a) Con la ley de conservación de la masa se obtiene la velocidad relativa en la salida (2):

$$0 = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho dV + \iint_{SC} \rho(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA$$

Como el volumen de control es no deformable y el fluido es incompresible, la variación de la masa dentro del volumen de control es nula. Por tanto:

$$0 = \iint_{SC} \rho(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA \rightarrow 0 = \iint_{SC} (\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA$$

Desarrollando esta ecuación para la entrada y la salida, se tiene:

$$0 = \iint_{A_1} (\vec{v_{r_1}} \cdot \vec{n}_1)dA + \iint_{A_2} (\vec{v_{r_2}} \cdot \vec{n}_2)dA$$

Sabiendo que en la entrada: $\vec{v_{r_1}} = (V_1 - V_c)\vec{k}$

$$0 = -(V_1 - V_c) \cdot A_1 + V_{r_2} \cdot A_2 \cos(\alpha/2)$$

Teniendo en cuenta que $V_{r_2} \cdot \cos(\alpha/2) = V_{r_{2\,z}}$, donde $V_{r_{2\,z}}$ es la componente vertical de la velocidad de salida, se puede reescribir esta expresión como:

$$0 = -(V_1 - V_c) \cdot A_1 + V_{r_{2\,z}} \cdot A_2$$

$$V_{r_{2\,z}} = (V_1 - V_c) \cdot A_1/A_2 \qquad (1)$$

$$V_{r_{2\,z}} = (V_1 - V_c) \cdot \frac{\frac{\pi d_1^2}{4}}{\frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_c^2)} \rightarrow V_{r_{2\,z}} = (V_1 - V_c)\frac{d_1^2}{d_2^2 - d_c^2}$$

$$V_{r_{2\,z}} = \frac{(30 - 0.5) \cdot 0.1^2}{0.4^2 - 0.3^2} = 4.21\, m/s$$

$$\vec{V}_{r_{2\,z}} = \frac{(30 - 0.5) \cdot 0.1^2}{0.4^2 - 0.3^2} = 4.21\vec{k}$$

Para calcular la aceleración del cono se aplica la ley de la conservación de la cantidad de movimiento lineal en el mismo volumen de control acelerado:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \iiint_{VC} \vec{a}_{arr} dm = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV + \iint_{SC} \rho\vec{v}(\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n})dA$$

El chorro se encuentra a presión atmosférica y los esfuerzos cortantes se desprecian tanto en la entrada como en la salida. Por tanto, el peso es la única fuerza externa que actúa sobre el volumen de control:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P}$$

Además, al ser el chorro de aire, se desprecia la masa del chorro frente a la del cono. El sistema de referencia se desplaza a V_c, que depende del tiempo, por lo que:

$$\iiint_{VC} \vec{a}_{arr} dm = \frac{P}{g}\frac{dV_c}{dt}$$

Teniendo en cuenta que la masa del cono tiene velocidad nula con respecto al sistema de referencia móvil solidario al cono y que la masa del aire es despreciable:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV = 0$$

Finalmente, según el eje z, queda:

$$-P-\frac{P}{g}\frac{dV_c}{dt}=\rho(V_1-V_c)[-(V_1-V_c)]A_1+\rho V_{r_{2\,z}}^2A_2$$

Despejando, y usando la ecuación (1):

$$\frac{dV_c}{dt}=\frac{\rho g}{P}\left((V_1-V_c)^2A_1-\frac{(V_1-V_c)^2A_1^2}{A_2}\right)-g$$

$$\frac{dV_c}{dt}=\frac{\rho g}{P}(V_1-V_c)^2\frac{\pi d_1^2}{4}\left(1-\frac{d_1^2}{(d_2^2-d_c^2)}\right)-g=0.8\,m/s^2$$

<u>2ª FORMA</u>: Volumen de control cilíndrico, no deformable, que engloba al cono y al fluido, tal y como se muestra en la figura anterior, igual que en la primera forma. Las superficies de control son horizontales tanto en la entrada como en la salida. El cambio con respecto a la primera forma es que ahora el sistema de referencia, u observador, es fijo.

a) La conservación de la masa no cambia, porque es independiente del observador, por lo que se obtiene el valor de la velocidad relativa a la salida de la misma foma.

En la conservación de la cantidad de movimiento se tiene:

$$\sum\vec{F}_{ext}=\frac{d}{dt}\iiint_{VC}\rho\vec{v}dV+\iint_{SC}\rho\vec{v}(\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n})dA$$

$$\sum\vec{F}_{ext}=\vec{P}$$

Teniendo en cuenta que dentro del volumen de control, la velocidad del cono depende del tiempo y que la masa del aire es despreciable, el primer término de la ecuación del transporte de Reynolds quedaría como:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{VC}\rho\vec{v}dV=\frac{P}{g}\frac{dV_c}{dt}$$

Para evaluar el segundo término de la ecuación del transporte de Reynolds, se necesitan las velocidades absolutas. Por tanto, en la entrada:

$$\vec{V}_{abs_1}=V_1\vec{k}$$

Y en la salida, conocido el valor de la velocidad relativa a partir de la ley de la conservación de la masa, se obtiene la absoluta.

$$\vec{V}_{abs}=\vec{V}_r+\vec{V}_{arr}$$

Según el eje z, y con la ecuación (1) se tiene:

$$\vec{V}_{abs\,2z}=(V_1-V_c)\cdot\frac{A_1}{A_2}\vec{k}+V_c\,\vec{k}$$

Finalmente, según el eje z:

$$-P = \frac{P}{g}\frac{dV_c}{dt} + \rho(-V_1)(V_1 - V_c)A_1 + \rho\left[(V_1 - V_c)\cdot\frac{A_1}{A_2} + V_c\right]\left[(V_1 - V_c)\frac{A_1}{A_2}\right] A_2$$

$$-P = \frac{P}{g}\frac{dV_c}{dt} + \rho(-V_1)(V_1 - V_c)A_1 + \rho\left[(V_1 - V_c)^2\cdot\frac{A_1^2}{A_2} + V_c(V_1 - V_c)A_1\right]$$

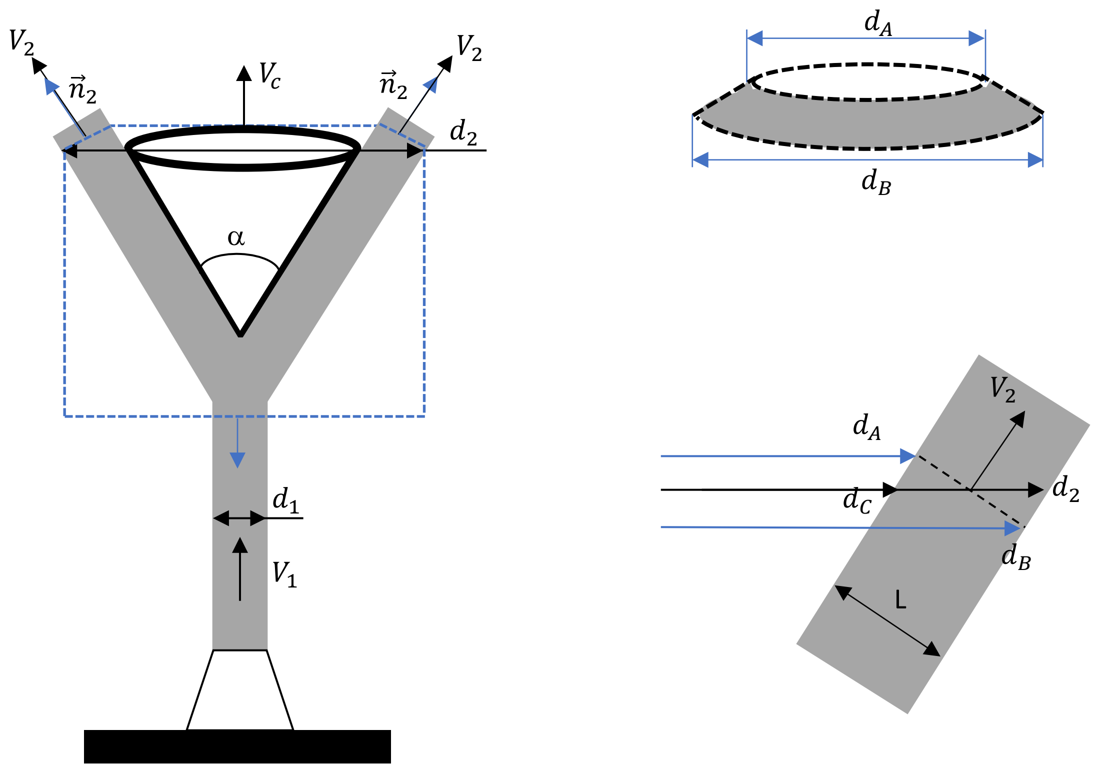
$$-P = \frac{P}{g}\frac{dV_c}{dt} - \rho(V_1 - V_c)^2 A_1 + \rho\left((V_1 - V_c)^2\cdot\frac{A_1^2}{A_2}\right)$$

$$-P = \frac{P}{g}\frac{dV_c}{dt} - \rho(V_1 - V_c)^2 A_1\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)$$

Que al igual que en la forma anterior, se obtiene:

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{\rho g}{P}(V_1 - V_c)^2\frac{\pi d_1^2}{4}\left(1 - \frac{d_1^2}{(d_2^2 - d_c^2)}\right) - g = 0.8\, m/s^2$$

<u>3ª FORMA</u>: Volumen de control no deformable, que engloba al cono y al fluido, tal y como se muestra en la figura. La superficie de control en la entrada es horizontal, pero a diferencia de los casos anteriores, en la salida es perpendicular al vector velocidad. El sistema de referencia podrá ser solidario al cono o fijo.



La superficie de control en la salida es el área lateral de un tronco de cono. Esta área lateral se calcula como:

$$A_{2L} = \frac{\pi(d_A + d_B)}{2} L$$

Donde, por trigonometría:

$$d_A = d_C + 2\frac{d_2 - d_C}{4}\ sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$d_B = d_2 - 2\frac{d_2 - d_C}{4}\ sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$L = \frac{d_2 - d_C}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Operando,

$$A_{2L} = \frac{\pi(d_A + d_B)}{2} L = \frac{\pi(d_2^2 - d_C^2)}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

De forma análoga, al aplicar la ley de conservación de la masa para obtener la velocidad relativa en la salida (2):

$$0 = \frac{d}{dt}\iiint_{VC}\rho dV + \iint_{SC}\rho(\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n})dA$$

Como el volumen de control es no deformable y el fluido es incompresible, el primer término se anula. Por tanto:

$$0 = \iint_{SC}\rho(\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n})dA \rightarrow 0 = \iint_{SC}(\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n})dA$$

Desarrollando esta ecuación para la entrada y la salida, se tiene:

$$0 = \iint_{A_1}\left(\overrightarrow{v_{r_1}}\cdot\vec{n}_1\right)dA + \iint_{A_2}\left(\overrightarrow{v_{r_2}}\cdot\vec{n}_2\right)dA$$

$$0 = -(V_1 - V_c)\cdot A_1 + V_{r_2}\cdot A_{2L} \rightarrow V_{r_2} = (V_1 - V_c)\cdot\frac{A_1}{A_{2L}}$$

Como se va a aplicar la conservación de la cantidad de movimiento en el eje z, esta velocidad de salida habrá que proyectarla en el eje z, por lo que:

$$V_{r_{2z}} = V_{r_2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = (V_1 - V_c)\cdot\frac{A_1}{A_{2L}}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Quedando el mismo valor que anteriormente

$$\vec{V}_{r_{2z}} = (V_1 - V_c)\frac{d_1^2}{d_2^2 - d_c^2} = 4.21\,\vec{k}$$

Por lo que el resto del problema se podría hacer tanto con sistema de referencia móvil o fijo.

b) Se resuelve este apartado únicamente siguiendo la 1ª forma, teniendo en cuenta que el volumen de control es fijo.

Con la ley de conservación de la masa se obtiene la velocidad relativa en la salida (2):

$$0 = \frac{d}{dt}\iiint_{VC}\rho dV + \iint_{SC}\rho(\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n})dA$$

Como el volumen de control es no deformable y el fluido es incompresible, la variación de la masa dentro del volumen de control es nula. Por tanto:

$$0 = \iint_{SC}\rho(\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n})dA \rightarrow 0 = \iint_{SC}(\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n})dA$$

Desarrollando esta ecuación para la entrada y la salida, se tiene:

$$0 = \iint_{A_1}\left(\overrightarrow{v_{r_1}}\cdot\vec{n}_1\right)dA + \iint_{A_2}\left(\overrightarrow{v_{r_2}}\cdot\vec{n}_2\right)dA$$

Sabiendo que en la entrada: $\overrightarrow{v_{r_1}} = V_1\vec{k}$

$$0 = -V_1\cdot A_1 + V_2\cdot A_2\cos(\alpha/2)$$

Teniendo en cuenta que $V_2\cdot\cos(\alpha/2) = V_{2_z}$, donde V_{2_z} es la componente vertical de la velocidad de salida, se puede reescribir esta expresión como:

$$0 = -V_1\cdot A_1 + V_{2_z}\cdot A_2$$

$$V_{2_z} = V_1\cdot A_1/A_2 \qquad (1)$$

$$V_{2_z} = V_1\cdot\frac{\frac{\pi d_1^2}{4}}{\frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_c^2)} \rightarrow V_{2_z} = V_1\frac{d_1^2}{d_2^2 - d_c^2}$$

$$V_{2_z} = 30\frac{0.1^2}{0.4^2 - 0.3^2} = 4.29\, m/s \rightarrow \vec{V}_{2_z} = 4.29\,\vec{k}$$

Para calcular la fuerza que habría que realizar sobre el cono para que no se moviera, se aplica la ley de la conservación de la cantidad de movimiento lineal en el mismo volumen de control:

$$\sum\vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt}\iiint_{VC}\rho\vec{v}dV + \iint_{SC}\rho\vec{v}(\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n})dA$$

El chorro se encuentra a presión atmosférica y los esfuerzos cortantes se desprecian tanto en la entrada como en la salida. Por tanto, la acción externa para sujetar el cono $F_{ext\to cono}$ y el peso son las únicas fuerzas externas que actúan sobre el volumen de control:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{F}_{ext\to cono}$$

Teniendo en cuenta que la masa del cono tiene velocidad nula y que la velocidad del chorro no depende del tiempo con respecto al sistema de referencia solidario fijo al cono:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho \vec{v} dV = 0$$

Finalmente, según el eje z, queda:

$$F_{ext\to cono} - P = \rho V_1(-V_1)A_1 + \rho V_{2_z}^2 A_2$$

Despejando, y usando la ecuación (1):

$$F_{ext\to cono} = -0.77 \to \vec{F}_{ext\to cono} = -0.77\vec{k}$$