Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre:
Grupo:

Problema 2

Un fluido Newtoniano de viscosidad μ y densidad ρ, está contenido entre dos cilindros concéntricos infinitamente largos. El cilindro de fuera tiene un radio r_o y gira con velocidad angular ω. El interior tiene un radio r_i y está en reposo. Si el flujo es laminar, estacionario e incompresible, y supondremos que la componente radial de la velocidad del fluido es nula. Se pide:

a) Encontrar, por análisis dimensional, una relación entre el esfuerzo cortante que realiza el fluido sobre el cilindro interior y los demás parámetros relevantes del problema.

b) Utilizando las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes, escribir la ecuación diferencial ordinaria que satisface u_θ. Simplificar la relación adimensional anterior eliminando los grupos adimensionales que no sean relevantes para el problema a la luz de dicha ecuación.

c) Buscar soluciones de la ecuación diferencial del apartado b) de la forma:

$$u_\theta = \frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r},$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración. Calcular el campo de velocidades en el interior de los dos cilindros y la distribución de presiones.

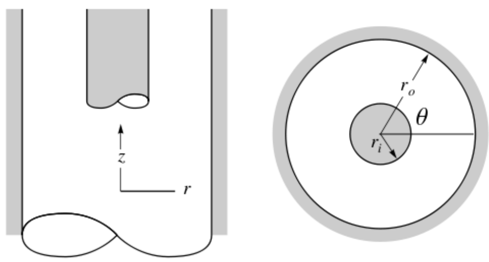
AYUDA: Asimismo, las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en cilíndricas son:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right] + \rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right] + \rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z$$



a) Hay que encontrar una relación funcional entre la variable dependiente τ y los demás parámetros, o variables independientes, del problema: ρ, r_o, r_i, ω.

$\tau = f(\mu, \rho, r_o, r_i, \omega)$

- $[\tau] = [ML^{-1}T^{-2}]$
- $[\mu] = [ML^{-1}T^{-1}]$
- $[\rho] = [ML^{-3}]$
- $[r_o] = [L]$
- $[r_i] = [L]$
- $[\omega] = [T^{-1}]$

El número de variables es n = 6 y el número de dimensiones 3, por lo que j = 3.

Se busca el grupo de j variables que formen un grupo dimensional.

1) Se escoge: $\mu\omega r_o$

$\mu^a\omega^b r_o^c = [ML^{-1}T^{-1}]^a[T^{-1}]^b[L]^c = M^0L^0T^0 \rightarrow a = b = c = 0$

Por tanto, los grupos adimensionales (k = n – j = 6 - 3 = 3) son:

$\mu^a\omega^b r_o^c\tau = [ML^{-1}T^{-1}]^a[T^{-1}]^b[L]^c[ML^{-1}T^{-2}] \rightarrow \dfrac{\tau}{\mu\omega}$

$\mu^a\omega^b r_o^c\rho = [ML^{-1}T^{-1}]^a[T^{-1}]^b[L]^c[ML^{-3}] \rightarrow \dfrac{\rho r_o^2\omega}{\mu}$

$\mu^a\omega^b r_o^c r_i = [ML^{-1}T^{-1}]^a[T^{-1}]^b[L]^c[L] \rightarrow \dfrac{r_i}{r_o}$

$$\frac{\tau}{\mu\omega} = f\left(\frac{\rho {r_o}^2\omega}{\mu}, \frac{r_i}{r_o}\right)$$

Otros grupos dimensionales serían:

2) $\mu\rho\omega$

$\mu^a\rho^b\omega^c = [ML^{-1}T^{-1}]^a[ML^{-3}]^b[T^{-1}]^c = M^0L^0T^0 \rightarrow a = b = c = 0$

Por tanto,

$\mu^a\rho^b\omega^c\tau = [ML^{-1}T^{-1}]^a[ML^{-3}]^b[T^{-1}]^c[ML^{-1}T^{-2}] \rightarrow \dfrac{\tau}{\mu\omega}$

$\mu^a\rho^b\omega^c r_o = [ML^{-1}T^{-1}]^a[ML^{-3}]^b[T^{-1}]^c[L] \rightarrow \dfrac{r_o^2\rho\omega}{\mu}$

$$\frac{\tau}{\mu\omega} = f\left(\frac{{r_o}^2\rho\omega}{\mu}, \frac{{r_i}^2\rho\omega}{\mu}\right)$$

3) $\mu\rho r_o$

$\mu^a \rho^b r_o^c = [ML^{-1}T^{-1}]^a [ML^{-3}]^b [L]^c = M^0 L^0 T^0 \rightarrow a = b = c = 0$

Por tanto,

$\mu^a \rho^b r_o^c \tau = [ML^{-1}T^{-1}]^a [ML^{-3}]^b [L]^c [ML^{-1}T^{-2}] \rightarrow \dfrac{\tau r_o^2 \rho}{\mu^2}$

$\mu^a \rho^b r_o^c \omega = [ML^{-1}T^{-1}]^a [ML^{-3}]^b [L]^c [T^{-1}] \rightarrow \dfrac{\omega r_o^2 \rho}{\mu}$

$\mu^a \rho^b r_o^c r_i = [ML^{-1}T^{-1}]^a [ML^{-3}]^b [L]^c [L] \rightarrow \dfrac{r_i}{r_o}$

$$\frac{\tau {r_o}^2 \rho}{\mu^2} = f\left(\frac{\omega {r_o}^2 \rho}{\mu}, \frac{r_i}{r_o}\right)$$

4) $\rho \omega r_o$

$\rho^a \omega^b r_o^c = [ML^{-3}]^a [T^{-1}]^b [L]^c = M^0 L^0 T^0 \rightarrow a = b = c = 0$

Por tanto,

$\rho^a \omega^b r_o^c \tau = [ML^{-3}]^a [T^{-1}]^b [L]^c [ML^{-1}T^{-2}] \rightarrow \dfrac{\tau}{\rho \omega^2 r_o^2}$

$\rho^a \omega^b r_o^c \mu = [ML^{-3}]^a [T^{-1}]^b [L]^c [ML^{-1}T^{-1}] \rightarrow \dfrac{\mu}{\rho \omega r_o^2}$

$\rho^a \omega^b r_o^c r_i = [ML^{-3}]^a [T^{-1}]^b [L]^c [L] \rightarrow \dfrac{r_i}{r_o}$

$$\frac{\tau}{\rho \omega^2 {r_o}^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho \omega {r_o}^2}, \frac{r_i}{r_o}\right)$$

b) Según el enunciado, el fluido es Newtoniano, tiene propiedades constantes, el flujo es laminar y estacionario ($\partial/\partial t = 0$). Además, se pueden realizar las siguientes hipótesis:

- Debido a la simetría cilíndrica, las derivadas con respecto a la componente azimutal son nulas: $\dfrac{\partial}{\partial \theta} = 0$
- Según el enunciado la componente radial de la velocidad es nula: $u_r = 0$
- La componente de la velocidad en la dirección vertical es nula: $u_z = 0$
- La no existencia de efectos de borde hace que la variación de la velocidad con respecto a la dirección vertical sea nula: $\dfrac{\partial u_i}{\partial z} = 0$

Aplicando la ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r}\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \cancelto{0}{\frac{\partial u_z}{\partial z}} = 0.$$

$$\frac{\partial(u_\theta)}{\partial\theta} = 0 \rightarrow u_\theta = u_\theta(r)$$

Aplicando la ecuación de Navier-Stokes en las diferentes direcciones se tiene:

Componente radial

$$\rho\left(\cancelto{0}{\frac{\partial u_r}{\partial t}} + \cancelto{0}{u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}} + \frac{u_\theta}{r}\cancelto{0}{\frac{\partial u_r}{\partial \theta}} + \cancelto{0}{u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}} - \frac{u_\theta^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancelto{0}{r\frac{\partial u_r}{\partial r}}\right) + \frac{1}{r^2}\cancelto{0}{\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}} - \cancelto{0}{\frac{u_r}{r^2}} - \frac{2}{r^2}\cancelto{0}{\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}}\right] + \rho g_r$$

$$-\rho\frac{{u_\theta}^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

Componente azimutal:

$$\rho\left(\cancelto{0}{\frac{\partial u_\theta}{\partial t}} + \cancelto{0}{u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}} + \frac{u_\theta}{r}\cancelto{0}{\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}} + \cancelto{0}{u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}} + \cancelto{0}{\frac{u_r u_\theta}{r}}\right) = -\frac{1}{r}\cancelto{0}{\frac{\partial p}{\partial \theta}} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cancelto{0}{\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}} + \frac{2}{r^2}\cancelto{0}{\frac{\partial u_r}{\partial \theta}} - \frac{u_\theta}{r^2}\right] + \cancelto{0}{\rho g_\theta}$$

$$0 = \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial(u_\theta)}{\partial r}\right) - \frac{u_\theta}{r^2}\right] \rightarrow \frac{u_\theta}{r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial(u_\theta)}{\partial r}\right)$$

Componente vertical:

$$\rho\left(\cancelto{0}{\frac{\partial u_z}{\partial t}} + u_r\cancelto{0}{\frac{\partial u_z}{\partial r}} + \frac{u_\theta}{r}\cancelto{0}{\frac{\partial u_z}{\partial \theta}} + u_z\cancelto{0}{\frac{\partial u_z}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancelto{0}{r\frac{\partial u_z}{\partial r}}\right) + \frac{1}{r^2}\cancelto{0}{\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}\right] + \rho g_z$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z$$

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{u_\theta}{r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial(u_\theta)}{\partial r}\right)$$

Según la primera relación adimensional:

$$\frac{\tau}{\mu\omega} = f\left(\frac{\rho {r_o}^2\omega}{\mu}, \frac{r_i}{r_o}\right)$$

Dado que el perfil de velocidad no depende de ρ, se podría cancelar el grupo: $\frac{\rho {r_o}^2\omega}{\mu}$

c) Partiendo de la solución de la ecuación diferencial, el campo de velocidades es:

$$u_\theta = \frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r}$$

Aplicando las condiciones de contorno:

$$u_\theta(r_i) = 0 \rightarrow 0 = \frac{c_1 r_i}{2} + \frac{c_2}{r_i}$$

$$u_\theta(r_o) = \omega r_o \rightarrow \ \omega r_o = \frac{c_1 r_o}{2} + \frac{c_2}{r_o}$$

Resolviendo:

$$c_1 = \frac{2\omega {r_o}^2}{{r_o}^2 - {r_i}^2}$$

$$c_2 = -\frac{\omega {r_o}^2 {r_i}^2}{{r_o}^2 - {r_i}^2}$$

$$u_\theta = \frac{\omega {r_o}^2}{{r_o}^2 - {r_i}^2} r - \frac{\omega {r_o}^2 {r_i}^2}{({r_o}^2 - {r_i}^2) r} = \frac{\omega {r_o}^2}{{r_o}^2 - {r_i}^2}\left(r - \frac{{r_i}^2}{r}\right)$$

La distribución de presiones se obtiene a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes en las componentes radial y vertical:

Componente radial:

$$-\rho \frac{{u_\theta}^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$dp = \int \rho \frac{{u_\theta}^2}{r} dr = \int dp \rightarrow \int \rho \frac{\omega^2 r_0^4}{({r_o}^2 - {r_i}^2)^2} \left(r \ - \frac{2r_i^2}{r} + \frac{r_i^4}{r^3}\right) dr \rightarrow$$

$$p = \rho \frac{\omega^2 r_0^4}{({r_o}^2 - {r_i}^2)^2}\left(\frac{r^2}{2} - 2r_i^2 \ln(r) - \frac{r_i^4}{2r^2}\right) + g(z)$$

Derivando la expresión anterior respecto a la componente vertical *z*, y teniendo en cuenta la proyección en dicha dirección de la ecuación de Navier-Stokes*:*

$$\frac{dp}{dz} = g'(z) = -\rho g \rightarrow g(z) = -\rho g z + A$$

Por tanto, quedaría la expresión:

$$p = \rho \frac{\omega^2 r_0^4}{({r_o}^2 - {r_i}^2)^2}\left(\frac{r^2}{2} - 2r_i^2 \ln(r) - \frac{r_i^4}{2r^2}\right) - \rho g \ z + A$$