Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2023

PROBLEMA 1

Un cilindro de radio R_1 se desplaza axialmente a una velocidad U_1 respecto a un cojinete concéntrico de radio R_2 y longitud L cerrado por sus extremos, con $\mathrm{R_1 \sim R_2 \ll L}$. Entre el cilindro y el cojinete hay un líquido con viscosidad μ_1 y densidad ρ_1 que se mueve en régimen laminar. Soldado al cilindro hay un cono de radio R_c. Sobre el cono incide un chorro de un líquido con viscosidad μ_2 y densidad ρ_2 de radio R_3 y abandona el mismo con un radio R_4. Suponiendo que no existen fugas en el cojinete. Se pide:

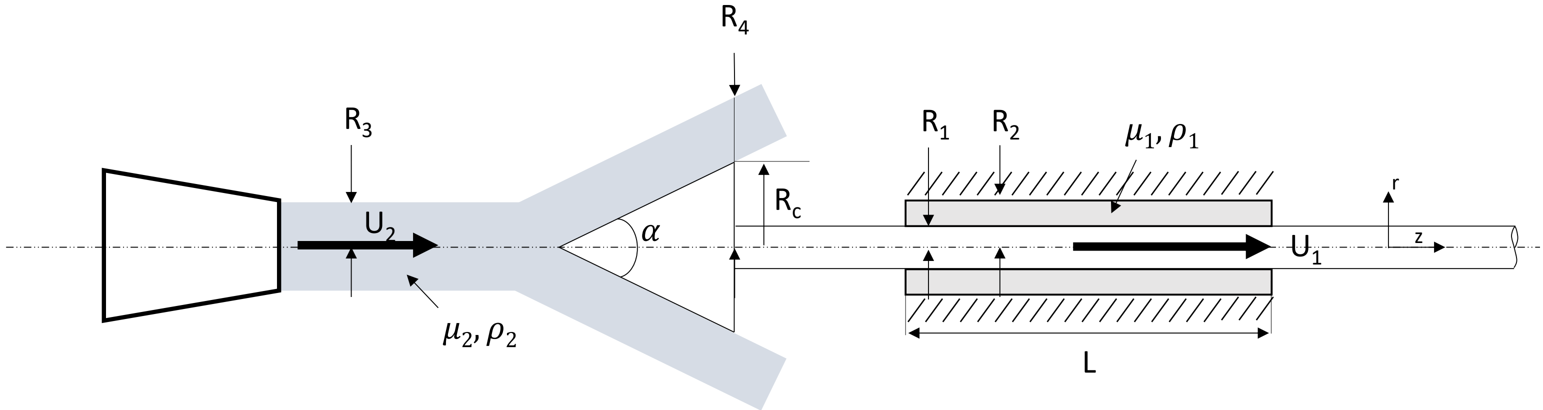
a) (3.5 puntos) Determinar el campo de velocidades en el interior del cojinete en función de la distribución de presiones y los datos del problema. Simplificar la expresión considerando $\gamma = R_2/R_1$.

b) (1.5 puntos) Determinar la fuerza axial que realiza el líquido en el interior del cojinete sobre el cilindro, en función de la distribución de presiones y los datos del problema.

c) (5 puntos) Considerando conocida la fuerza calculada en el apartado anterior (F_c) y que las velocidades del chorro son uniformes, determinar la velocidad del chorro U_2.

<u>Datos:</u> $U_1, \mu_1, \rho_1, \mu_2, \rho_2, R_1, R_2, R_3, R_4, R_c, L, \alpha, dp/dz$

<u>Nota:</u> Despreciar la gravedad en todo el problema y justificar todas las hipótesis realizadas.



$$\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}(\mathrm{r v_r}) + \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial \theta}(\mathrm{v_\theta}) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\mathrm{v_z}) = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{{v_\theta}^2}{r}\right) = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}v_r v_\theta\right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

$$\tau_{rr} = 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} \qquad \tau_{\theta\theta} = 2\mu\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) \qquad \tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \qquad \tau_{\theta z} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \qquad \tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2023

Resolución:

Apartado a)

En primer lugar, hay que analizar la ecuación de conservación de la masa. Por un lado, las componentes radial y azimutal de la velocidad son cero ($v_r = v_\theta = 0$). Por tanto, el fluido se mueve sólo en la dirección z:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \rightarrow v_z = f(r,\theta) \rightarrow v_z = f(r)$$

La componente en z sólo depende la coordenada radial debido a la simetría cilíndrica del problema.

En segundo lugar, se resolverán las ecuaciones de Navier-Stokes. De las componente radial y azimutal se obtiene:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0;\ \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

de donde se deduce que la presión sólo puede depender de la componente axial $p(z)$.

Del análisis de la componente radial se tiene:

$$\rho\left(\underset{1}{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}} + \underset{2}{\cancel{v_r}}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\underset{3,4}{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}}} + v_z\underset{1}{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}}\right) = \rho \underset{5}{\cancel{g_z}} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\underset{4}{\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}}} + \underset{1}{\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}}\right)$$

1. La componente v_z no depende del tiempo (U_1 es constante) y sólo depende de r.
2. No existe v_r.
3. No existe v_θ.
4. Hay simetría en θ.
5. Se desprecia la gravedad.

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right) = 0$$

Se puede observar que por un lado la componente axial de la velocidad v_z depende únicamente de la posición radial, y que la presión sólo puede depender de la coordenada axial z. Por tanto, para que dicha ecuación tenga solución en todo el campo fluido, el término $\frac{\partial p}{\partial z}$ debe ser constante.

Resolviendo e integrando:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{\partial p}{\partial z}\frac{r}{\mu} \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial z}\frac{r}{2\mu} + C_1\frac{1}{r}$$

$$v_z(r) = \frac{\partial p}{\partial z}\frac{r^2}{4\mu} + C_1 ln(r) + C_2$$

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2023

Para calcular las constantes es necesario aplicar las condiciones del contorno:

$$r = R_1 \rightarrow v_z(R_1) = U_1$$

$$r = R_2 \rightarrow v_z(R_2) = 0$$

Sustituyendo queda:

$$C_1 = \frac{-U_1 + (1-\gamma^2)\frac{R_1^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}}{\ln\gamma}$$

$$C_2 = \frac{U_1 + (\gamma^2-1)\frac{R_1^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}}{\ln\gamma}\ln R_2 - \frac{R_2^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}$$

La expresión del perfil de velocidad queda como:

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\left[r^2 - R_2^2 + \frac{(1-\gamma^2)}{\ln\gamma}R_1^2\ln\frac{r}{R_2}\right] - \frac{U_1}{\ln\gamma}\ln\frac{r}{R_2}$$

También se podría expresar como:

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}R_1^2\left[\left(\frac{r}{R_1^2}\right)^2 - 1 + \frac{(1-\gamma^2)}{\ln\gamma}\ln\frac{r}{R_2}\right] - U_1\left(\frac{\ln\frac{r}{R_1}}{\ln\gamma} - 1\right)$$

Apartado b)

La fuerza se obtiene a partir del esfuerzo cortante en la pared (τ_{rz}). Se obtiene a partir de la expresión:

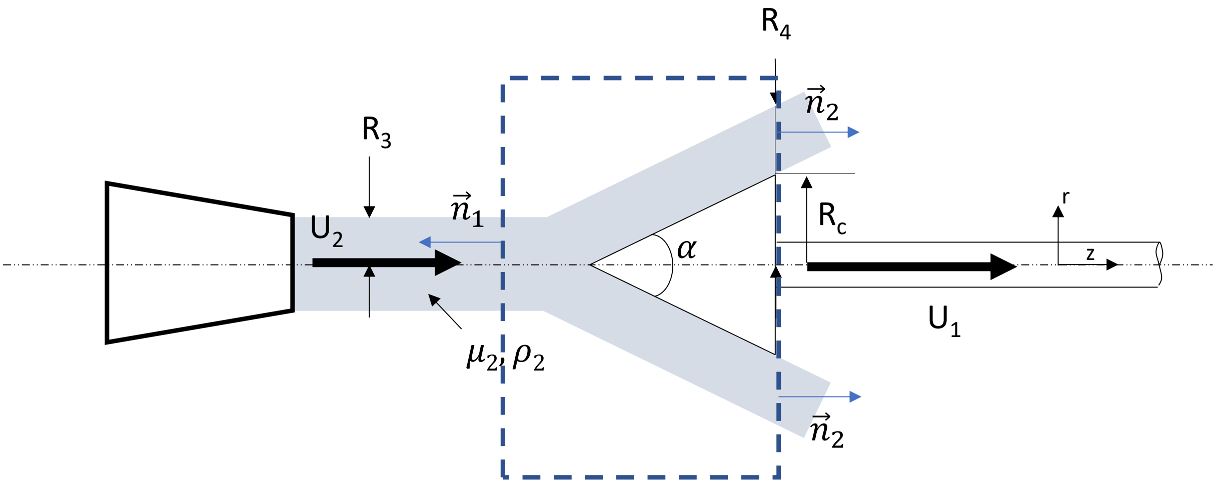
$$\tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\Big|_{r=R_1} = \mu\frac{\partial v_z}{\partial r}\Big|_{r=R_1} = \frac{1}{4}\frac{dp}{dz}R_1\left(2 + \frac{(1-\gamma^2)}{ln\,\gamma}\right) - \frac{\mu}{R_1}\frac{U_1}{ln\,\gamma}$$

Por tanto, la fuerza sobre el cilindro queda:

$$\vec{F} = \tau_{rz}2\pi R_1 L\,\vec{k} = \frac{\pi L}{2}\frac{dp}{dz}R_1^2\left(2 + \frac{(1-\gamma^2)}{ln\,\gamma}\right) - 2\mu\pi L\frac{U_1}{ln\,\gamma}\;\vec{k}$$

Apellidos, Nombre: Mayo 2023

Apartado c)



Para el cálculo de la fuerza sobre el cono, se escoge un volumen de control cilíndrico, móvil y solidario al cono, no deformable, que encierra al cono y al chorro de agua, tal y como muestra la figura anterior. Las superficies de control son verticales, tanto en la entrada (e), como en la salida (s). El sistema de referencia es solidario al cono.

A partir de la ley de la conservación de la masa se tiene la velocidad relativa a la salida (s):

$$0 = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho dV + \iint_{SC} \rho(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA \rightarrow 0 = \iint_{A_e} (\vec{v}_{r_e} \cdot \vec{n}_e)dA + \iint_{A_s} (\vec{v}_{r_x} \cdot \vec{n}_s)dA$$

Sabiendo que en la entrada $\vec{v}_{r_e} = (U_2 - U_1)\,\vec{k}$, se calcula la velocidad en la sección de salida:

$$0 = -(U_2 - U_1)\,A_e + V_s^r A_s \cos(\alpha/2) \rightarrow V_{s_z}^r = (U_2 - U_1)\frac{R_3^2}{R_4^2 - R_c^2}$$

Para calcular la fuerza que hace el chorro sobre el cono se aplica la ley de la conservación de la cantidad de movimiento lineal en el mismo volumen de control:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV + \iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA$$

El chorro se encuentra a presión atmosférica y los esfuerzos cortantes se desprecian tanto en la entrada como en la salida. Por tanto, el corte del cilindro es la única fuerza externa que actúa sobre el volumen de control:

$$(\rightarrow)\, F_{cilindro\rightarrow cono} = -F_c = -\rho_2(U_2 - U_1)^2\pi R_3^2 + \rho_2(U_2 - U_1)^2\left(\frac{R_3^2}{R_4^2 - R_c^2}\right)^2(\pi R_4^2 - \pi R_c^2)$$

Por tanto, la fuerza que hace el chorro sobre el cilindro será:

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2023

$$(\rightarrow)\ \vec{F}_{chorro\rightarrow cilindro} = -\vec{F}_{cilindro\rightarrow cono} = \rho_2 (U_2 - U_1)^2 \pi R_3^2 \left(1 - \frac{R_3^2}{R_4^2 - R_c^2}\right)\vec{k}$$

Por tanto:

$$F_c = \rho_2 (U_2 - U_1)^2 \pi R_3^2 \left(1 - \frac{R_3^2}{R_4^2 - R_c^2}\right) \rightarrow U_2 = U_1 + \sqrt{\frac{F_c}{\rho_2 \pi R_3^2 \left(1 - \frac{R_3^2}{R_4^2 - R_c^2}\right)}}$$