TEMA 4 – CAMPO ELÉCTRICO EN LA MATERIA

Clase 4.1 Ideas básicas

Se ha estudiado en otro tema las fuerzas entre cargas en reposo cuando se encuentran en el vacío o cuando hay medios conductores, utilizando como herramienta la idea de campo electrostático. Se comprueba experimentalmente, que existen materiales no conductores (aislantes o dieléctricos), que sin embargo modifican el comportamiento del campo electrostático. Esos fenómenos se estudiarán en este tema.

Efecto de un dieléctrico en un condensador

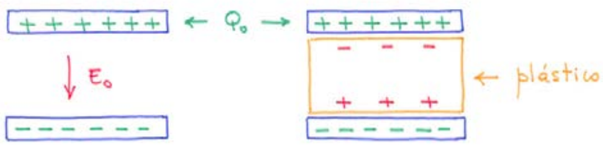


Imagen: JLRM

Vamos a comparar las propiedades que tiene un condensador plano, que supondremos muy grande, si entre sus dos placas hay vacío, con las propiedades que tiene si introducimos entre sus dos placas un material aislante (por ejemplo, un plástico). En ambos casos suponemos que la carga en las placas en la misma $+Q_0$ en una de ellas y $–Q_0$ en la otra.

Condensador sin dieléctrico

Como se sabe por resultados anteriores la capacidad de un condensador plano, depende de la superficie de las placas *A* y la distancia entre ellas *d*.

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

La diferencia de potencial entre las placas, C_0 puede determinarse a partir de la definición de capacidad.

$$V_0 = \frac{Q_0}{C_0}$$

Y el campo eléctrico, que es uniforme en todo el interior del condensador (despreciando el efecto “bordes”) se obtiene de forma inmediata:

$$E_0 = \frac{V_0}{d}$$

Condensador con dieléctrico. Constante dieléctrica.

Ahora introducimos un aislante (plástico) que llena todo el condensador. Realizando las correspondientes medidas se observa que:

- La carga en las placas sigue siendo la misma (las placas están aisladas, por lo tanto la carga en cada una se conserva)

- La capacidad se hace mayor. Denominaremos ε al valor (adimensional) por el que se multiplica la capacidad. $C = \varepsilon . C_0 > C_0$
- La diferencia de potencia se hace menor que antes $V = Q_0/C < V_0$
- El campo también se hace menor, en la misma proporción que la variación que la capacidad $E = E_0/\varepsilon$

A la constante ε, que depende de material, se la llama constante dieléctrica y es mayor que 1. Puede tener valores como 1,0006 para el aire o alrededor de 2,3 para el polietileno.

El fenómeno de la polarización

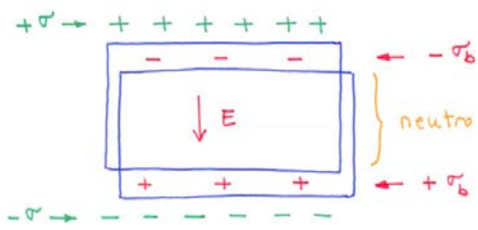


Imagen: JLRM

El cambio de valor del campo eléctrico, y por lo tanto del potencial y de la capacidad que hemos descrito en el apartado anterior puede explicarse si suponemos que ha habido un pequeño desplazamiento (menor que el tamaño de los átomos) de las cargas del plástico. Eso hace que la zona central del aislante siga siendo neutra, pero que, en las superficies superior e inferior, que están en contacto con las placas conductoras, aparezca una densidad de carga que denominamos carga ligada (*bonded*), porque no pueden moverse como en el caso de un conductor. La carga en el conductor se denomina carga libre (free). La carga ligada da lugar a una densidad de carga ligada σ_b, que en este caso es uniforme y la carga libre a una densidad de carga libre σ, también uniforme en este caso. En la parte de abajo los signos de las densidades de carga son los opuestos a los de la parte de arriba.

El campo eléctrico total es el creado por la carga libre más el creado por la carga ligada (principio de superposición). Uniendo esto a la relación del campo con el campo sin dieléctrico, se puede relacionar el valor de ambas densidades de carga con la constante dieléctrica.

$$E = \frac{\sigma - \sigma_b}{\varepsilon_0} = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon . \varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_b = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$$

Así que de esta clase nos quedamos con dos ideas clave:

Dieléctrico y campo eléctrico

En un dieléctrico (aislante) la carga se desplaza ligeramente al introducirla en un campo eléctrico (Polarización).

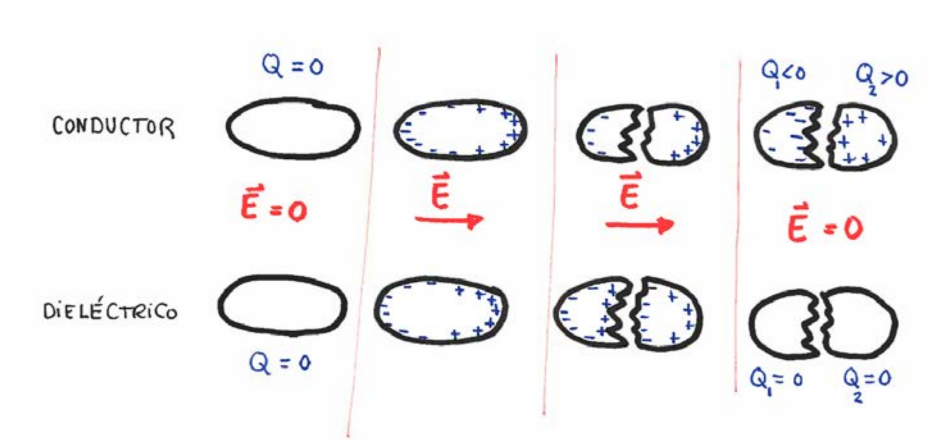
Dieléctrico y capacidad

Un dieléctrico modifica la capacidad de un condensador multiplicándola por una constante (denominada permitividad relativa o constante dieléctrica)

Ejercicio

Se introduce un conductor neutro en un campo eléctrico y luego se corta en dos partes en la dirección perpendicular al campo. Se hace el mismo experimento con un aislante. ¿Qué diferencias habrá en el resultado final?

Solución: Si se corta un dieléctrico polarizado (en el caso de la figura, en vertical) y a la vez desaparece el campo, las dos mitades quedan con carga neta cero. En el caso del conductor obtendríamos dos partes con cargas iguales y de signo contrario.



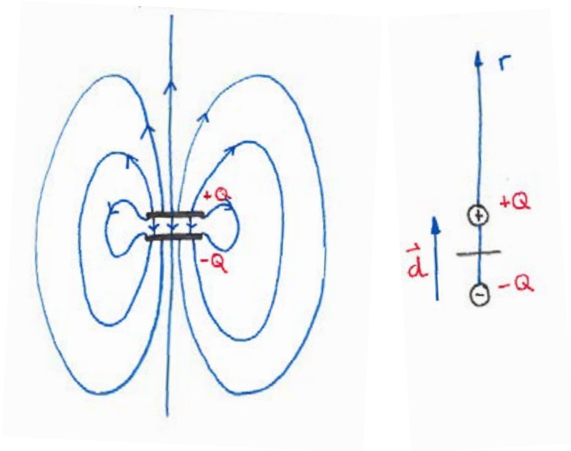
Ejercicio

Un condensador de placa paralelas de dimensiones conocidas está conectado a una batería que mantiene una diferencia de potencial constante entre ambas. Entre las placas hay vacío. A continuación, se introduce entre las placas un aislante de constante dieléctrica ε. La batería se mantiene conectada. Se pide determinar el nuevo valor de la capacidad, de la carga en las placas y de la diferencia de potencial respecto a los valores iniciales.

Clase 4.2 Introducción a los dipolos eléctricos

Antes de seguir profundizando en el concepto de polarización de los materiales aislantes vamos a introducir un nuevo concepto que nos servirá para entender la polarización. El concepto de dipolo eléctrico. En las clases sucesivas conectaremos ambas ideas.

Potencial y campo lejano de un condensador plano en su eje



La figura muestras las líneas de campo en un condensador plano sin despreciar el efecto de bordes. Hay un campo fuera del condensador bastante menos intenso que entre las placas, pero que no es cero. Empezaremos estudiando el valor de este campo en el eje del condensador en puntos lejanos. Para ese cálculo en puntos separados de las placas, podemos sustituir cada placa por una carga puntual. Calcularemos en primer lugar el potencial, siendo *d* la distancia entre las placas:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(r-d/2)} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(r+d/2)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{1-d/2r} - \frac{1}{1+d/2r}\right)$$

Para quedarnos con los términos de primer orden aproximamos $(1+\delta)^{-1} = 1-\delta$, queda:

$$V(r) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left(1+\frac{d}{2r} - 1 + \frac{d}{2r}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{r^2}$$

En el eje el potencial aproximadamente decrece con el cuadrado de la distancia. Podemos calcular el campo correspondiente a este potencial, sabiendo que es vertical.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla V} \quad \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2d}{r^3}\hat{r}$$

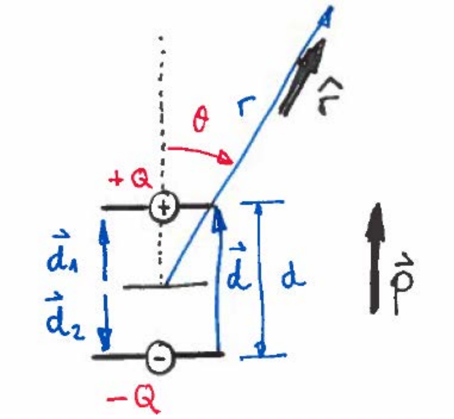
A diferencia del campo creado por una carga, que decrece con el cuadrado de la distancia, el campo lejano del condensador, decrece con el cubo, es decir mucho más rápidamente.

Expresión general del potencial y campo lejano de un condensador plano

Momento dipolar eléctrico de un conjunto de cargas.

Para simplificar las expresiones, introducimos ahora este concepto, sobre el que se profundizará más adelante. Se define a partir de las cargas y de los vectores $\vec{d}_i$ que determinan su posición respecto del origen de coordenadas, aunque no depende de este último si la carga total del sistema es nula.

$$\vec{p} = \sum_i q_i \, \vec{d}_i$$



Para este sistema de dos cargas, resulta:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \, \vec{d}_i = q_1 \vec{d}_1 + q_2 \vec{d}_2 = Q\vec{d}_1 - Q\vec{d}_2 = 2Q\vec{d}_1 = Q\vec{d}$$

Nota: Se mostrará más adelante que el potencial lejano creado por un sistema de cargas con momento dipolar $\vec{p}$, si su carga neta es cero, como es el caso, se puede aproximar como:

$$V(r) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2}$$

Y utilizando la expresión del gradiente en esféricas se llega a:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla V} \quad \Rightarrow \vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Qd.\cos\theta}{r^3} \hat{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qd.\operatorname{sen}\theta}{r^3} \hat{\theta}$$

En resumen:

Campo dipolar

Cuando la suma de cargas de una distribución es cero, al alejarnos, el potencial disminuye con el cuadrado de la distancia y el campo con el cubo.

Momento dipolar

Sirve para calcular el potencial y el campo de una distribución de carga neta nula.

Es una medida de su asimetría.

Clase 4.3 Dipolos eléctricos. Momento dipolar.

Seguimos avanzando en el concepto de dipolo eléctrico. Es un concepto que nos ayudará a entender el fenómeno de la polarización.

Potencial y campo lejano de una distribución arbitraria de carga

Vamos a calcular una aproximación del potencial y el campo lejano de un conjunto de cargas, que será especialmente útil cuando la carga neta del conjunto de carga sea cero.

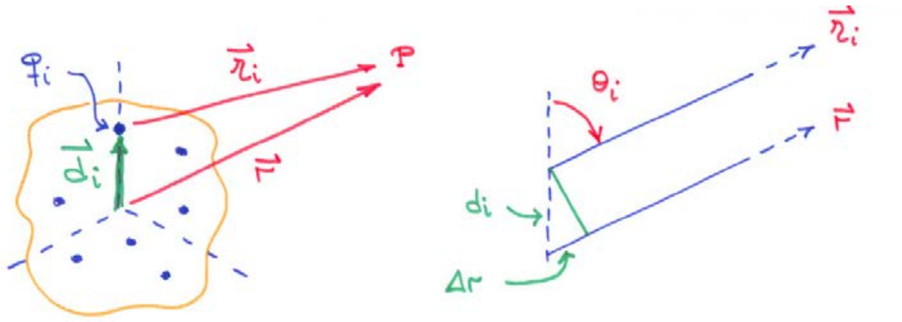


Imagen: JLRM

La imagen de la izquierda muestra un sistema de cargas. Cada carga queda definida por su valor q_i y su posición $\vec{d}_i$ respecto del origen de coordenadas. Utilizando la aproximación que queda aclarada en la imagen de la derecha $r_i \approx r - \Delta r = r - d_i cos\theta_i$, el potencial debido a esta carga se puede expresar [usando también que $(1+\delta)^{-1} = 1 - \delta$]:

$$V_i \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r(1 - d_i cos\theta_i/r)} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}\cdot d_i}{r^2}$$

Esta expresión incluye un término que decrece no la distancia y otro que decrece más rápido, con la distancia al cuadrado.

Sumando el potencial de todas las cargas del sistema expresadas de esta forma se llega a:

$$V = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_i q_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\sum_i q_i\,\vec{d}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\,Q_{TOT} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\vec{p}$$

El potencial lejano del sistema de cargas queda definido por su carga total Q_{TOT} y su momento dipolar $\vec{p}$.

Cuando la carga total no es nula, en la expresión anterior, para el potencial lejano tiene más peso el primer término, ya que disminuye con la distancia, no con la distancia al cuadrado, como el segundo término.

Sistemas con carga neta nula. Dipolo eléctrico.

En sistemas con carga nula, el primer término desaparece y el término de mayor peso es el segundo. Tendremos un potencial lejano que disminuye con la distancia al cuadrado. A estas distribuciones que pueden caracterizarse únicamente usando su momento dipolar, suele denominársele dipolos porque equivalen a un conjunto de dos cargas iguales con signo opuesto.

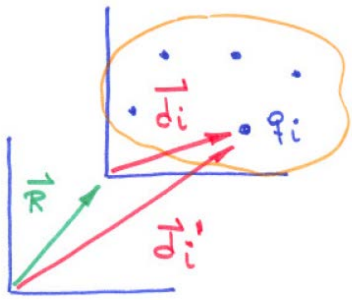


Imagen: JLRM

Veremos que para los sistemas de cargas que la carga total es cero, el momento dipolar eléctrico no depende del origen de coordenadas y por tanto nos sirve para caracterizar el campo lejano del sistema de forma cómoda.

En el sistema de referencia superior (que representa un sistema cualquiera), el momento dipolar eléctrico será:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \, \vec{d}_i$$

Y en el sistema de referencia inferior (que representa otro sistema de referencia cualquiera) podemos expresarlo en función de $\vec{R}$, el vector de posición del primer sistema expresado en el segundo.

$$\vec{p}' = \sum_i q_i \, \vec{d}'_i = \sum_i q_i \, (\vec{R} + \vec{d}_i) = \sum_i q_i \, \vec{d}_i + \vec{R} \sum_i q_i$$

Si la carga total es cero, se cumple que $\vec{p}' = \vec{p}$ y queda demostrado que el momento dipolar no depende del sistema de referencia.

Campo de un dipolo eléctrico

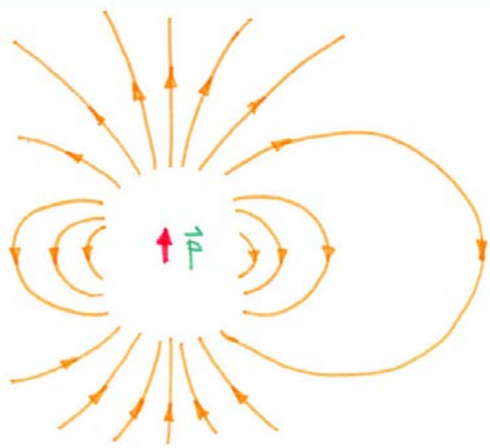


Imagen: JLRM

A partir de la expresión del potencial lejano creado por un dipolo (equivalente a un sistema de cargas con carga neta cero y momento dipolar $\vec{p}$), se puede obtener el campo creado por un dipolo eléctrico utilizando la expresión del gradiente en esféricas:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}\cdot\vec{p}}{r^2} \quad , \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\nabla V} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Qd.\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qd.\operatorname{sen}\theta}{r^3}\hat{\theta}$$

Cálculo del momento dipolar eléctrico utilizando el concepto de centro de cargas

Esta sección propone una forma práctica para calcular de forma rápida el momento dipolar de un sistema formado por un conjunto de cargas positivas de valor total Q_+ y un conjunto de cargas negativas de valor total $Q_- = -Q_+$.

Definimos el **centro de cargas** de una distribución de cargas por analogía con el centro de masas como:

$$\vec{r}_Q = \frac{\sum_i q_i \vec{d}_i}{\sum_i q_i} = \frac{\vec{p}}{Q_{TOT}}$$

Resulta que el centro de cargas se puede calcular como el cociente entre el momento dipolar eléctrico y la carga total.

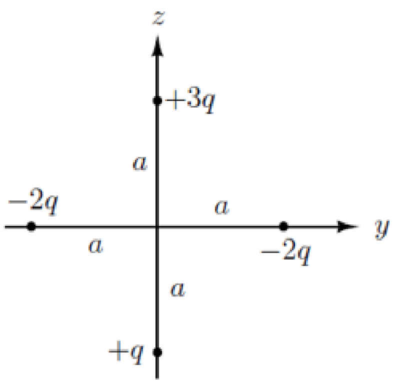
Por otro lado, podemos separar en el cálculo del momento dipolar eléctrico las cargas positivas de las negativas y aplicar a cada sumando que según la expresión anterior $\vec{p} = Q_{TOT}.\vec{r}_Q$:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{d}_i = \sum_{q_i>0} q_i \vec{d}_i + \sum_{q_i<0} q_i \vec{d}_i = Q_+\vec{r}_+ + Q_-\vec{r}_- = Q_+(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

En esta expresión Q_+es la carga positiva total y $\left(\vec{R}_{Q+} - \vec{R}_{Q-}\right)$ es el vector que va del centro de cargas negativo al centro de cargas positivo. Así que, si se conocen estos dos centros de cargas y la carga positiva del sistema de cargas, el cálculo del momento dipolar eléctrico es inmediato.

Ejemplo

Calcular el momento dipolar eléctrico del sistema representado en la figura usando dos métodos distintos (definición y centros de cargas).

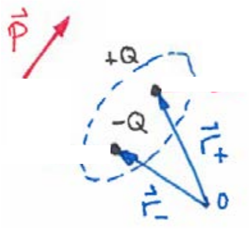


Solución: El centro de cargas positivo está en $(a/2)\hat{k}$ y el centro de cargas negativo está en el origen de coordenadas. Por lo tanto, el momento dipolar vale $Q_+\,(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = 2a\hat{k}$ C.m [culombios.metro]

Dipolos y campo eléctrico

Definición de dipolo

Un dipolo eléctrico es una distribución de carga formada por dos cargas de igual valor absoluto pero de signo contrario.



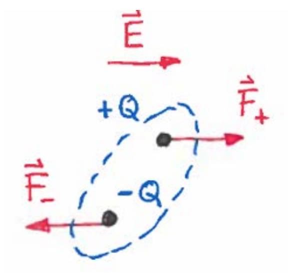
La carga neta es cero y su momento dipolar vale:

$$\vec{p} = Q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = Q\vec{d}$$

Como la carga neta es cero, el potencial y campo lejano se puede calcular con las expresiones vistas anteriormente. Las distribuciones de carga con carga total cero, pueden aproximarse por un dipolo a efectos de campo lejano.

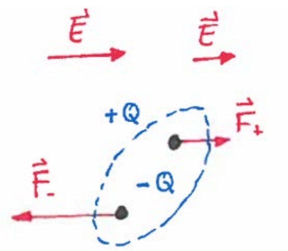
Se incluyen a continuación algunos resultados interesantes sobre cómo interacciona el campo eléctrico con los dipolos eléctricos.

La fuerza neta que le hace un campo uniforme a un dipolo es nula.



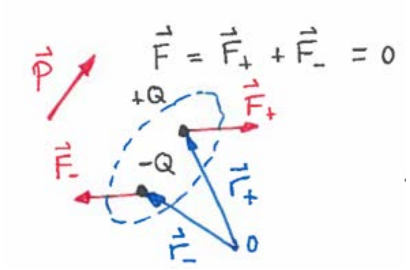
Es inmediato que $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = Q\vec{E} - Q\vec{E} = 0$

La fuerza neta que le hace un campo no uniforme a un dipolo es hacia la región de más campo.



Es este caso $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_-$ es hacia la izquierda, que es la zona de mayor campo porque el módulo de $\vec{F}_-$ es mayor que el de $\vec{F}_+$ tal y como se ve en la imagen.

Un campo eléctrico ejerce un par sobre un dipolo.



El par se puede calcular como $\vec{N} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F}_+ = \frac{\vec{p}}{Q} \times Q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$

Es necesario un trabajo para hacer girar un dipolo en un campo eléctrico.

Si se hace girar un dipolo lentamente en un campo eléctrico mediante una acción externa, es necesario anular el para que produce el campo y se realiza un trabajo que se puede calcular como:

$$W_{\theta_1}^{\theta_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dW = \int_{\theta_1}^{\theta_2} |\vec{N}|.d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p.E.sen\theta.d\theta = p.E.(cos\theta_1 - cos\theta_2)$$

Campo dipolar

Cuando la suma de cargas de una distribución es cero, al alejarnos, el potencial disminuye con el cuadrado de la distancia y el campo con el cubo.

Momento dipolar

Sirve para calcular el potencial y el campo de una distribución de carga neta nula. Es una medida de su asimetría.

Dipolos y campo eléctrico

En un campo eléctrico constante un dipolo experimenta un par. Si el campo no es constante, además de un par, se ve atraído hacia la región de más campo.

Clase 4.4 Vector polarización.

En esta clase vamos a conectar la descripción microscópica de la polarización (mediante dipolos eléctricos que se forman a nivel molecular) con la descripción macroscópica a través de las distribuciones de carga polarizada.

Vector polarización

Cuando un material se polariza, en cada átomo o molécula, se produce un leve desplazamiento de las cargas positivas en el sentido del campo y de las negativas en el sentido contrario. Es decir, aparecen dipolos. Para representar en qué medida el material está polarizado en cada punto, se define el vector polarización. Se trata de una función vectorial que representa en cada punto la densidad de dipolos, expresada como momento dipolar dividido por volumen.

$$\vec{P} = \frac{momento\ dipolar}{volumen}$$

Las unidades de este vector es culombios.metro/metro cúbico, por lo que tiene unidades de culombios/metro cuadrado, las mismas unidades que la densidad de carga. (Es importante no confundir la polarización $\vec{P}$, mayúscula, con el momento dipolar $\vec{p}$, minúscula).

En la imagen se muestra un pequeño cilindro polarizado. A la izquierda representado mediante su vector polarización (constante en el cilindro por ser pequeño) y a la derecha representado mediante las cargas polarizadas que aparecen en las bases superior e inferior del cilindro.

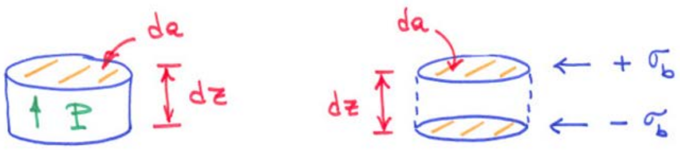


Imagen: JLRM

Para la representación de la izquierda el momento dipolar es vertical y tiene un módulo que vale $p = P.da.dz$ y para la de la derecha, dado su pequeño tamaño también se puede escribir como $p = dq.dz = \sigma_b.da.dz$. Las dos representaciones serán equivalentes si se cumple que $P = \sigma_b$. Hay una relación estrecha entre el vector polarización y la densidad superficial de carga polarizada. En el ejemplo anterior, el campo que crean los dipolos contenidos en el cilindro, es el mismo campo eléctrico que el que crean los dos pequeños discos con densidad de carga σ_b separados una distancia *dz*.

Densidades de carga polarizadas (carga ligada)

Se puede demostrar que hay una relación entre las densidades de carga polarizada y el vector polarización que se concreta en estas dos ecuaciones:

$$\sigma_b = \vec{P}.\hat{n} \qquad \rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

La primera ecuación quiere decir, que la densidad de carga polarizada sobre la superficie del material polarizado es la proyección sobre cada punto de la superficie del material polarizado del vector polarización.

La segunda muestra que la densidad de carga volumétrica en el interior del material es la divergencia del vector polarización cambiada de signo. Un caso particular frecuente es aquel en que la polarización es uniforme. En este caso no hay carga volumétrica polarizada.

Carga ligada

El efecto de la polarización sobre el campo se puede calcular calculando la carga polarizada (ligada) superficial y volumétrica.

Carga ligada y polarización

La carga ligada superficial es la componente normal del vector polarización.

La carga ligada volumétrica es la divergencia del vector polarización cambiada de signo.

Ejercicio. Cilindro polarizado.

Un cilindro de altura h y superficie de la base A, está situado sobre el eje z entre (0, 0, 0) y (0, 0, h).

Tiene una polarización permanente definida por un vector polarización no uniforme $\vec{P} = bz\vec{k}\ (C/m^2)$

a) Calcula la densidad de carga superficial en las dos bases del cilindro.
b) Calcula la carga total en el interior del cilindro.
c) Calcula la densidad de carga volumétrica en el punto (0, 0, h/4)

Solución: (a) 0 en la inferior, *bh* (C/m^2) en la superior. (b) –*bhA* (debe salir este valor porque el cilindro es eléctricamente neutro) (c) -*b* (C/m^3) (tiene el mismo valor en todo el interior del cilindro).

Clase 4.5 Dieléctricos (I)

En esta clase conectaremos las ideas que hemos introducido sobre el comportamiento de condensadores en los que se introduce un material aislante con la descripción que hemos hecho del fenómeno de polarización mediante el vector $\vec{P}$.

Dieléctricos

En esta clase introduciremos un tipo particular de materiales aislantes, aquellos cuya polarización es proporcional al campo eléctrico en cada punto y que se denominan dieléctricos.

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

Llamaremos χ_e a la constante de proporcionalidad, a la que llamaremos susceptibilidad eléctrica.

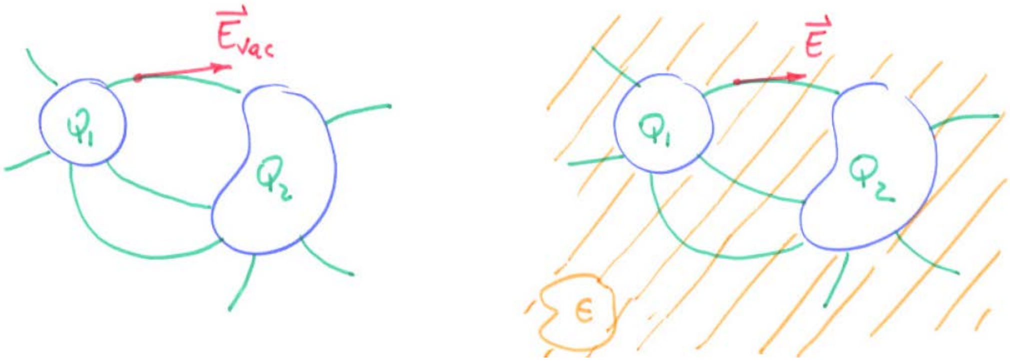


Imagen: JLRM

Como ya se ha comentado anteriormente, se comprueba empíricamente que si llenamos todo el espacio donde hay campo con un dieléctrico de constante ε, se cumple que el campo en todos los puntos queda dividido por esta constante en comparación con el campo que había en el vacío.

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_{vac}}{\varepsilon}$$

Carga ligada en dieléctricos

A partir de la expresión anterior podemos calcular cuánto vale la carga ligada volumétrica ρ_b en un dieléctrico, descomponiendo la carga total ρ en la libre ρ_f y la ligada ρ_b.

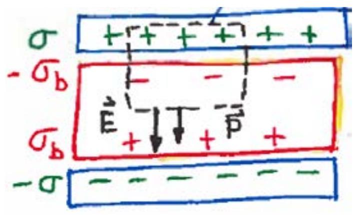
$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\varepsilon_0 \chi_e \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\chi_e \rho = -\chi_e (\rho_f + \rho_b)$$

Y en esta expresión se puede despejar la carga ligada en función de la carga libre:

$$\rho_b = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \rho_f$$

Esta expresión indica que, si la carga libre en el interior de un dieléctrico es nula, entonces también lo es la carga ligada y toda la carga ligada será carga superficial. Aunque puede existir carga ligada en el interior de un dieléctrico, el caso más habitual en la práctica es que sea cero.

Carga en un medio dieléctrico y ley de Gauss



Supongamos un condensador plano con un dieléctrico como el de la figura. Hay carga libre en la superficie del conductor. Por efecto de la polarización aparecen cargas ligadas, que se han representado en la figura.

Relación entre constante dieléctrica y susceptibilidad dieléctrica.

Calculemos la divergencia del término entre paréntesis $\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ (que hemos elegido por conveniencia como se verá más adelante) utilizando la forma diferencial de la ley de Gauss. El resultado es la densidad de carga libre.

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)=\left(\rho_f+\rho_b\right)-\rho_b=\rho_f$$

Aplicando el teorema de Gauss a esta expresión en una superficie cerrada (cilindro de base *S* con la base superior en el conductor superior y con la base inferior en el dieléctrico, tal como la representada en negro en la figura) llegamos a:

$$\oiint_{cilindro}\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right).d\vec{s}=Q_f$$

La integral de superficie del término entre paréntesis a través de una superficie cerrada es la carga libre contenida en esa superficie.

Como sabemos que en este caso el vector campo, producido por láminas de carga paralelas, es uniforme y también lo es el vector polarización ya que en un dieléctrico es proporcional a la polarización, la anterior expresión para este caso se puede calcular fácilmente para ambos términos obteniendo:

$$(\varepsilon_0E+\varepsilon_0\chi_eE).S=\sigma.S$$

De aquí se obtiene el campo:

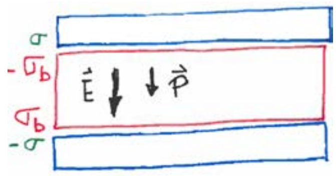
$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0(1+\chi_e)}$$

El campo en el condensador sin dieléctrico vale σ/ε_0 y por tanto el cociente entre el campo sin y con dieléctrico vale $1+\chi_e$, este valor debe coincidir con la constante dieléctrica ε.

$$\varepsilon=1+\chi_e$$

Así pues, hay una relación entre la susceptibilidad dieléctrica y la constante dieléctrica, y de esta forma conectamos la interpretación del fenómeno de la polarización desde un punto de vista empírico con su análisis teórico desde el punto de vista del concepto de polarización.

Relación entre flujo y carga libre.



Consideremos nuevamente el condensador plano con dieléctrico del apartado anterior. Usando el resultado anterior, podemos operar el término $\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, que como se ha comentado antes hemos elegido porque su divergencia es la densidad de carga libre.

$$\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi_e\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$$

Y calculando la divergencia de este término se llega a:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}\right) = \rho_f$$

Esta expresión tiene la propiedad de que es cierta, aunque el dieléctrico no llene todo el espacio con campo, teniendo en cuenta que la constante dieléctrica ε puede tener distintos valores en distintos puntos del espacio (en concreto valdrá 1 en los puntos en que no hay dieléctrico).

La versión integral a través de una superficie cerrada de esta expresión es muy útil para resolver problemas, ya que no incluye la carga polarizada, que en algunos casos es desconocida, incluye solo la carga libre Q_f, en el interior de la superficie cerrada:

$$\oiint \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}\,.\,d\vec{a} = Q_f$$

No debe confundirse esta expresión con la ley de Gauss (que también puede utilizarse en los problemas, aunque como incluye la carga ligada (o polarizada) Q_b, puede introducir más incógnitas).

$$\oiint \varepsilon_0\vec{E}\,.\,d\vec{a} = Q_f + Q_b$$

Vector D (desplazamiento eléctrico).

El término $\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ se conoce como desplazamiento eléctrico:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

Tiene la propiedad interesante de que su divergencia es la carga libre:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f$$

Pero a diferencia del vector campo eléctrico, el rotacional del vector $\vec{D}$ no necesariamente es cero, y por lo tanto su integral de línea puede depender del camino elegido.

Dieléctricos

Materiales cuya polarización es proporcional al campo eléctrico en cada punto.

La constante de proporcionalidad se llama susceptibilidad eléctrica.

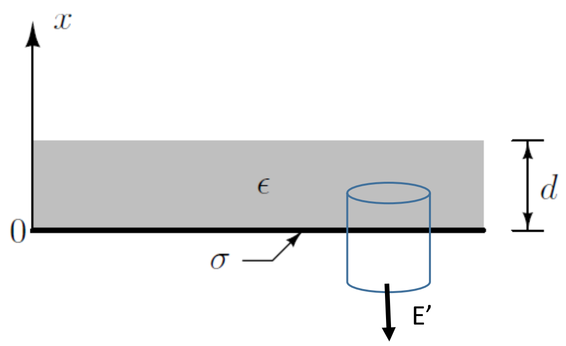
Carga libre y carga polarizada

En el interior de un dieléctrico la densidad de carga volumétrica polarizada (ligada) es lineal con la carga libre.

Flujo y carga libre

El flujo del campo multiplicado por ε_0 y por la constante dieléctrica del material es igual a la carga libre

Ejercicio.

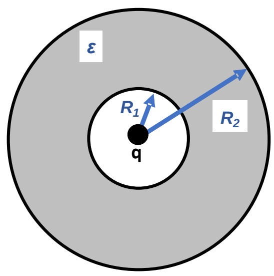


Tenemos una lámina con carga σ y un dieléctrico en forma de placa infinita colocado sobre la lámina. Aplicando Gauss se sabe que el campo E’ vale $\sigma/2\varepsilon_0$.

Calcular el campo dentro del dieléctrico aplicando que el flujo de $\varepsilon.\varepsilon 0.\vec{\boldsymbol{E}}$ es la carga libre, para la gausiana dibujada.

Ejercicio guiado. Cascarón dieléctrico polarizado.

Tenemos un cascarón esférico dieléctrico de constante dieléctrica ε con una carga q en su centro. Vamos a calcular el campo eléctrico en todos los puntos y las cargas libres y polarizadas en todos los puntos. El radio interno del cascarón es R_1 y el radio externo es R_2.



a) Calcular el campo para $r< R_1$ utilizando la ley de Gauss y aprovechando la simetría esférica.
b) Calcular el campo para $R_1<r< R_2$, utilizando la simetría esférica, teniendo en cuenta que la única carga libre es q y aplicando que

$$\oiint \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \,.\, d\vec{a} = Q_f$$

c) Calcular el campo para *r> R₂,* utilizando la ley de Gauss y aprovechando la simetría esférica.

d) Calcular el vector polarización en todos los puntos del espacio aplicando $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$

e) Calcular la carga polarizada superficial (en las dos caras del dieléctrico) y volumétrica usando $\sigma_b = \vec{P}.\hat{n} \quad \rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

f) Comprobar que sumando el campo que crean en el dieléctrico las cargas q, σ_b (interna y externa), y ρ_b. se obtiene el mismo resultado que en (b).

g) Comprobar que la carga total en el dieléctrico es nula.

Solución: (a) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$ (b) $\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$ (c) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$ (d) 0 fuera del dieléctrico, $\frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\hat{r}$ dentro.

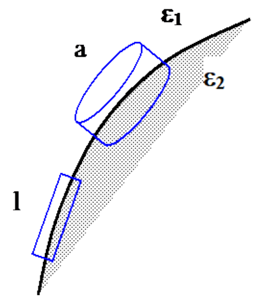
(e) $\sigma_{b\ interna} = -\frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{R_1^2} \quad \sigma_{b\ externa} = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{R_2^2} \quad \rho_b = 0$

Clase 4.6 Dieléctricos (II)

En esta clase veremos alguna información adicional sobre campo eléctrico en presencia de dieléctricos.

Condiciones de contorno en dieléctricos

Considérese la superficie de contacto entre dos dieléctricos distintos, uno de los cuales puede ser el vacío. Supóngase que en esta zona de contacto no hay cargas libres.



Continuidad de las componentes tangenciales.

El campo eléctrico total, dado que estamos considerando una situación electrostática, tiene una circulación nula por lo que, calculándola a través de un camino rectangular de altura diferencial como el de la figura, se puede escribir la siguiente relación entre sus componentes tangentes a la superficie:

$$E_{1t}.l - E_{2t}.l = 0 \;\rightarrow\; E_{1t} = E_{2t}$$

En la zona de contacto entre los dieléctricos, hay continuidad en las componentes tangenciales del campo electrostático.

Discontinuidad de las componentes normales.

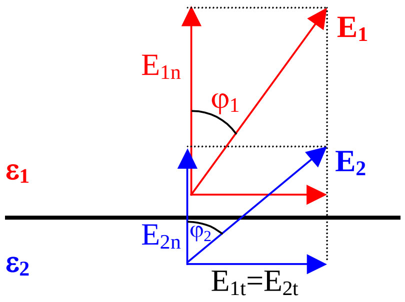
Por otro lado, si no hay cargas libres en la superficie de contacto, el flujo de $\varepsilon.\varepsilon_0.\vec{E}$ a través de una superficie cilíndrica de altura diferencial como el de la figura debe ser nulo y por tanto:

$$a.\varepsilon_1.E_{1n} - a.\varepsilon_2.E_{2n} = 0 \;\rightarrow\; \varepsilon_1.E_{1n} - \varepsilon_2.E_{2n} = 0$$

Por otro lado, si se conoce la densidad de carga polarizada superficial total en la zona de contacto entre los dieléctricos σ_b , aplicando Gauss se llega a:

$$a.E_{1n} - a.E_{2n} = \frac{a.\sigma_b}{\varepsilon_0} \;\rightarrow\; E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma_b}{\varepsilon_0}$$

Ambas expresiones nos indican que, en la zona de contacto entre los dieléctricos, hay discontinuidad en las componentes normales del campo.



Así pues, en la zona de contacto entre dos dieléctricos, si no hay cargas libres, observaremos continuidad en las componentes tangenciales y discontinuidad en las componentes normales.

Energía en dieléctricos

En un condensador plano en el que no hay dieléctrico, se ha visto que la energía acumulada se puede calcular aplicando la expresión general de energía del campo electrostático en el vacío e integrando el campo en todo el espacio (Las siglas TEC aquí significan "todo el campo", toda la región del espacio donde el campo eléctrico sea distinto de cero). Se puede comprobar que se obtiene que depende de la capacidad y del cuadrado de la tensión entre las placas. Esta es una expresión cierta para cualquier condensador:

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{TEC} E^2 \, . \, dv = \frac{1}{2} C_0 V^2$$

Si hay un dieléctrico entre las placas del condensador plano, para la misma diferencia de potencial entre las placas, sabemos que la carga es ε veces mayor, porque la capacidad es ε veces mayor. La expresión de la energía en función de la capacidad sigue siendo cierta y supone que la energía es ε veces mayor en el condensador con dieléctrico.

Se puede demostrar que la expresión de la energía del campo eléctrico en el vacío se generaliza de forma inmediata para los dieléctricos, sustituyendo la permeabilidad del vacío por la del dieléctrico. En esta expresión C es la nueva capacidad del condensador con el dieléctrico en su interior.

$$E_p = \frac{\varepsilon_0 \, \varepsilon}{2} \int_{TEC} E^2 \, . \, dv = \frac{1}{2} C V^2$$

Fuerza sobre un dieléctrico

Un objeto dieléctrico en un campo eléctrico no uniforme, es atraído hacia la región de campo más intenso.

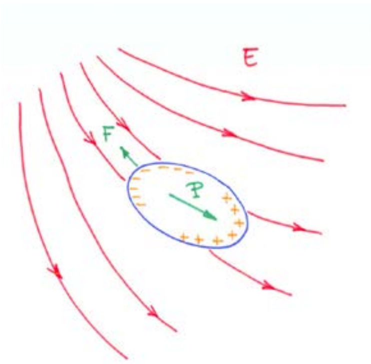


Imagen: JLRM

Condiciones de contorno en dieléctricos

Las componentes tangenciales del campo se mantienen constantes.

Las componentes normales varían inversamente proporcional a la constante dieléctrica.

Energía y dieléctricos

En el interior de un dieléctrico la densidad de carga volumétrica polarizada (ligada) es lineal.

Densidad de energía y dieléctricos

Podemos asignar esa energía al campo con una densidad $(\varepsilon \cdot \varepsilon_0/2) \cdot E^2$