Mecánica de Fluidos

Mayo 2018

Apellidos, Nombre:

Grupo:

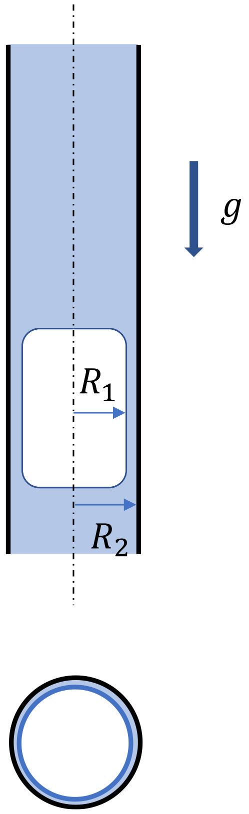
PROBLEMA 1

Se dispone de un cilindro hueco de radio R_2 y longitud L por el que desciende un líquido viscoso de densidad ρ y viscosidad μ. Por el interior del cilindro asciende una burbuja cilíndrica con radio R_1 como muestra la figura. Sabiendo que la viscosidad dinámica del aire es despreciable frente a la del líquido, se pide:

a) Perfil estacionario de velocidad del líquido que aparece en la región entre la burbuja y el cilindro despreciando los efectos de borde. Simplifique la expresión agrupando términos.

b) Adimensionalizar la expresión de la velocidad ascendente de la burbuja con las variables relevantes del problema.

<u>Datos:</u> $R_2, R_1, \rho, \mu, \frac{dp}{dz}, g$



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{{v_\theta}^2}{r}\right) = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}v_r v_\theta\right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

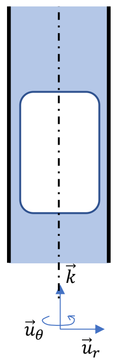
$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Mecánica de Fluidos

Mayo 2018

Apellidos, Nombre:

Grupo:



<u>Solución:</u>

Apartado a)

Para resolver el perfil de velocidades en la región de líquido entre la burbuja y el cilíndrico se deberán resolver las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas.

En primer lugar hay que analizar la ecuación de continuidad. Por un lado, la componente radial de la velocidad es cero ($v_r = 0$) debido a que dicha componente será cero tanto en la burbuja como en el cilindro; y además, la componente azimutal también se anula ($v_\theta = 0$) debido a la simetría cilíndrica del problema. Por tanto, el fluido se mueve sólo en la dirección vertical:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \rightarrow v_z = f(r,\theta) \rightarrow v_z = f(r)$$

Notar que la componente vertical sólo depende la coordenada radial debido a la simetría cilíndrica del problema.

En segundo lugar, se resolverá la ecuación de Navier-Stokes en las tres coordenadas cilíndricas. A partir de la componente radial, se obtiene la relación $\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{r}} = 0$, y a partir de la azimutal $\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \theta} = 0$. De donde se deduce que la presión sólo puede depender de la componente vertical (z).

Resolviendo la componente vertical llegamos a la siguiente expresión:

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right) = 0$$

Si analizamos esa expresión se puede observar que por un lado la componente vertical de la velocidad v_z depende de la posición radial, y que la presión sólo puede depender de la coordenada vertical z. Por tanto, para que dicha ecuación sea válida en todo el campo fluido, los términos $\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}$ son constantes o no dependen de r, y se pueden integrar directamente.

Resolviendo dicha expresión, considerando que la gravedad es $g = -g_z\vec{k}$, se puede obtener la expresión del perfil de velocidades:

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{r}{\mu} \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{r}{2\mu} + C_1\frac{1}{r}$$

Apellidos, Nombre:

Grupo:

$$v_z = \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{r^2}{4\mu} + C_1 ln(r) + C_2$$

Para poder obtener el valor de las constantes es necesario aplicar las condiciones del contorno del problema. Por un lado, en la posición radial $r = R_2$, la velocidad será nula debido a la condición de no deslizamiento ($v_z = 0$), y por otro lado en la posición $r = R_1$ el esfuerzo cortante debe ser el mismo en el aire y en el líquido, y como la viscosidad del aire es despreciable, el esfuerzo cortante será nulo ($\tau_{rz} = 0$):

- $r = R_1 \rightarrow \tau_{rz} = 0 \rightarrow \tau_{rz} = \mu \frac{dv_z}{dr}\Big|_{r=R_1} = \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{R_1}{2\mu} + C_1 \frac{1}{R_1} = 0 \rightarrow$

$$C_1 = -\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{{R_1}^2}{2\mu}$$

- $r = R_2 \rightarrow v_z = 0 \rightarrow v_z = \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{{R_2}^2}{4\mu} - \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{{R_1}^2}{2\mu}\ ln(R_2) + C_2 = 0 \rightarrow$

$$C_2 = \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{1}{2\mu}\left({R_1}^2 ln(R_2) - \frac{{R_2}^2}{2}\right)$$

Sustituyendo en el perfil de velocidades original:

$$v_z = \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{r^2}{4\mu} - \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{{R_1}^2}{2\mu} ln(r) + \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{1}{2\mu}\left({R_1}^2 ln(R_2) - \frac{{R_2}^2}{2}\right)$$

Simplificando la expresión anterior se tiene:

$$v_z = \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{1}{4\mu}\left(r^2 - {R_2}^2 + 2{R_1}^2 ln\left(\frac{R_2}{r}\right)\right)$$

Apartado b)

La velocidad de ascenso de la burbuja U se obtiene a partir del perfil de velocidad calculada en apartado anterior para $r = R_1$:

$$U = v_z(r = R_1) = \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{1}{4\mu}\left({R_1}^2 - {R_2}^2 + 4{R_1}^2 ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)$$

Por tanto, la velocidad dependerá de los siguientes variables:

$$U = f\left(\rho, g, \frac{\partial p}{\partial z}, \mu, R_1, R_2\right)$$

Las unidades de las variables del problema son:

Mecánica de Fluidos

Mayo 2018

Apellidos, Nombre:

Grupo:

- $U = \frac{m}{s} = L^1T^{-1}$
- $R_1 = m = L$
- $R_2 = m = L$
- $\rho = \frac{kg}{m^3} = M^1L^{-3}$
- $g = \frac{m}{s^2} = L^1T^{-2}$
- $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{N}{m^3} = \frac{kg}{m^2s^2} = M^1L^{-2}T^{-2}$
- $\mu = \frac{kg}{ms} = M^1L^{-1}T^{-1}$

Para aplicar el teorema de Buckinham Pi, hay que escoger un grupo de variables independientes que formen un grupo adimensional. Dado que el problema no depende de la temperatura, el número máximo de variables independientes es tres, por ello, el número mínimo de grupos adimensionales del problema será igual a 4. Un posible grupo de tres variables independientes es ρ, g y R_1.

Se comprueba que las tres variables son independientes:

$$(L^1)^a(M^1L^{-3})^b(L^1T^{-2})^c = L^0M^0T^0 \rightarrow a = b = c = 0$$

De esta forma los grupos adimensionales quedan:

- $U \rightarrow \Pi_0$

$$L^1T^{-1}(L^1)^a(M^1L^{-3})^b(L^1T^{-2})^c = L^0M^0T^0 \rightarrow a = -1/2, b = 0, c = -1/$$

$$\Pi_0 = \frac{v_z}{{R_1}^{1/2}g^{1/2}}$$

- $\frac{\partial p}{\partial z} \rightarrow \Pi_1$

$$M^1L^{-2}T^{-2}(L^1)^a(M^1L^{-3})^b(L^1T^{-2})^c = L^0M^0T^0 \rightarrow a = 0, b = -1, c = -1$$

$$\Pi_1 = \frac{\partial p/\partial z}{\rho g}$$

- $\mu \rightarrow \Pi_2$

$$M^1L^{-1}T^{-1}(L^1)^a(M^1L^{-3})^b(L^1T^{-2})^c = L^0M^0T^0 \rightarrow a = -3/2, b = -1, c = -1/2$$

Mecánica de Fluidos

Mayo 2018

Apellidos, Nombre:

Grupo:

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{{R_1}^{3/2}\rho g^{1/2}}$$

- $R_2 \rightarrow \Pi_3$

$$L^{-1}(L^1)^a(M^1L^{-3})^b(L^1T^{-2})^c = L^0M^0T^0 \rightarrow a = -1, b = 0, c = 0$$

$$\Pi_3 = \frac{R_2}{R_1}$$

Por tanto, la relación de grupos adimensionales nos quedará:

$$\frac{U}{{R_1}^{1/2}g^{1/2}} = f\left(\frac{\partial p/\partial z}{\rho g}, \frac{\mu}{{R_1}^{3/2}\rho g^{1/2}}, \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Otros posibles grupos adimensional podrían ser:

$$\rho, \mu \text{ y } R_1 \rightarrow \frac{U\rho R_1}{\mu} = f\left(\frac{\frac{\partial p}{\partial z}\ \rho\ {R_1}^3}{\mu^2}, \frac{g\ \rho^2\ {R_1}^3}{\mu^2}, \frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$g, \mu \text{ y } R_1 \rightarrow \frac{U}{{R_1}^{1/2}g^{1/2}} = f\left(\frac{\frac{\partial p}{\partial z}\ {R_1}^{3/2}}{\mu\ g^{1/2}}, \frac{\rho\ g^{1/2}\ {R_1}^{3/2}}{\mu}, \frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}, \mu\ y\ R_1 \rightarrow \quad \frac{U\ \ \mu}{{R_1}^2\ \frac{\partial p}{\partial z}} = f\left(\frac{\frac{\partial p}{\partial z}\ \rho\ {R_1}^3}{\mu^2}, \frac{g\ \rho}{\frac{\partial p}{\partial z}}, \frac{R_2}{R_1}\right)$$