Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Marzo 2023

PROBLEMA

Por una tubería cilíndrica vertical de radio R circula un caudal Q de líquido newtoniano, de densidad ρ y viscosidad dinámica μ, de forma laminar. La tubería asciende con una velocidad U y el chorro de salida choca sobre una superficie horizontal. Se pide:

a) (5 puntos) Determinar el valor de la variación de presión por unidad de longitud en función de los datos del problema en el fluido dentro de la tubería.

En un determinado instante, se observa que el flujo de descarga a la atmósfera (p_{atm}) sobre la superficie horizontal forma una película de altura h constante a partir de $r \geq R_1$. Se pide:

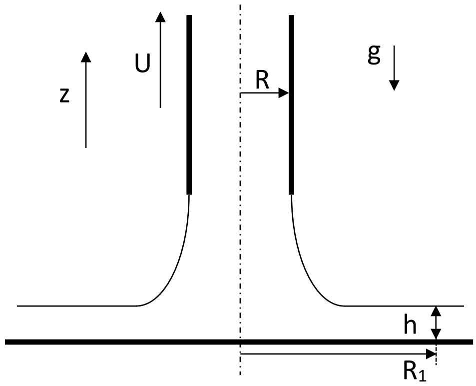
b) (3 puntos) Simplificar las ecuaciones diferenciales necesarias para calcular el perfil de velocidad en $r \geq R_1$, sin resolverlas.
c) (1 punto) Calcular el campo de presiones para $r \geq R_1$.

En ese instante el caudal de descarga es Q_1. Determinar:

d) (1 punto) Velocidad media del líquido en R_1

Justificar todas las hipótesis que se realicen en el problema.

Datos: R, Q, μ, ρ, g, U, p_{atm}, h, R_1, Q_1.



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{{v_\theta}^2}{r}\right) = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}v_r v_\theta\right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Marzo 2023

a)

Para resolver el perfil de velocidades en la tubería cilíndrica se deberán resolver las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas.

En primer lugar, hay que analizar la ecuación de continuidad. Por un lado, la componente radial de la velocidad es cero ($v_r = 0$) y, además, la componente azimutal también se anula ($v_\theta = 0$) debido a la simetría cilíndrica del problema. Por tanto, el fluido se mueve sólo en la dirección vertical:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \rightarrow v_z = f(r,\theta) \rightarrow v_z = f(r)$$

La componente vertical sólo depende la coordenada radial debido a la simetría cilíndrica del problema.

En segundo lugar, se resolverán las ecuaciones de Navier-Stokes en las tres coordenadas cilíndricas. De las componente radial y azimutal se obtienen las expresiones:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0; \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

de donde se deduce que la presión sólo puede depender de la componente vertical $p(z)$.

Por tanto, en la componente radial se tiene:

$$\rho\left(\underset{1}{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}} + \underset{1,2}{\cancel{v_r}}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\underset{3,4}{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}}} + v_z\underset{1}{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\underset{4}{\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}}} + \underset{1}{\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}}\right)$$

1. La componente v_z no depende del tiempo (Q es constante) y solo depende de r.
2. No existe v_r
3. No existe v_θ
4. Hay simetría en θ
5. No hay componente de la gravedad en θ

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right) = 0$$

Se puede observar que por un lado la componente vertical de la velocidad v_z depende únicamente de la posición radial, y que la presión sólo puede depender de la coordenada vertical z. Por tanto, para que dicha ecuación sea válida en todo el campo fluido, los términos $\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}$ deben ser constantes y se pueden integrar directamente.

Resolviendo dicha expresión, considerando que la gravedad es $g_z = -g\vec{k}$, e integrando:

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Marzo 2023

$$-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right)=0\rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)=\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{r}{\mu}\rightarrow\frac{\partial v_z}{\partial r}=\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{r}{2\mu}+C_1\frac{1}{r}$$

$$v_z(r)=\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{r^2}{4\mu}+C_1 ln(r)+C_2$$

Para calcular las constantes es necesario aplicar las condiciones del contorno:

$$r=R\rightarrow v_z(R)=U$$

$$r=0\rightarrow\frac{\partial v_z}{\partial r}=0$$

La expresión del perfil de velocidad queda como:

$$v_z(r)=\frac{1}{4\mu}\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)(r^2-R^2)+U$$

También se podría expresar como:

$$v_z(r)=-\frac{R^2}{4\mu}\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)+U=u_{max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)+U$$

Por otro lado, se considera como dato el valor del caudal Q, por lo que:

$$Q=\int_0^R v_z(r)2\pi r\,dr=-\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)+U\pi R^2$$

Teniendo en cuenta el perfil parabólico, se llega a la misma expresión:

$$Q=\bar{v}A=\frac{u_{max}}{2}\pi R^2+U\pi R^2=-\frac{R^2}{8\mu}\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)\pi R^2+\ U\pi R^2$$

Finalmente:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z}=8\mu\left(\frac{U}{R^2}-\frac{Q}{\pi R^4}\right)-\rho g}$$

b)

A partir de $r>R_1$, el flujo se distribuye únicamente de forma radial (v_r) e independientemente del ángulo θ por simetría. En el suelo la componente radial tendrá velocidad nula, pero en $z=h$, la velocidad será máxima. Por tanto:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\cancel{v_\theta})+\frac{\partial}{\partial z}(\cancel{v_z})=0\rightarrow\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)=0\rightarrow\boxed{\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)=0}$$

De la anterior expresión se podría deducir también que: $v_r=f(z)/r$

En las ecuaciones de Navier-Stokes:

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Marzo 2023

-La componente axial v_z no existe, por lo tanto:

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}+v_r\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial r}}+\frac{v_\theta}{r}\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}}+v_z\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial r}}\right)+\frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right)$$

$$\boxed{0=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}}\rightarrow p(z)=-\rho g z+f(r)$$

Para la superficie libre ($z=h$), la presión es la atmosférica para cualquier r, por lo que la presión solo dependerá de z.

$$p(z)=-\rho g z+K$$

-En la componente azimutal:

$$\rho\left(\underset{1}{\cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial t}}}+v_r\underset{1}{\cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial r}}}+\underset{1,2}{\cancel{\frac{v_\theta}{r}}}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\underset{1,3}{\cancel{v_z}}\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}v_r\underset{1}{\cancel{v_\theta}}\right)=\underset{4}{\cancel{\rho g_\theta}}-\frac{1}{r}\underset{2}{\cancel{\frac{\partial p}{\partial \theta}}}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\underset{1}{\cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial r}}}\right)+\frac{1}{r^2}\underset{1,2}{\cancel{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}}}+\underset{1}{\cancel{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}}}-\underset{1}{\cancel{\frac{v_\theta}{r^2}}}+\frac{2}{r^2}\underset{2}{\cancel{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}}}\right)$$

1. No existe v_θ
2. Hay simetría en θ
3. No existe v_z
4. No hay componente de la gravedad en θ

-En la componente radial:

$$\rho\left(\underset{1}{\cancel{\frac{\partial v_r}{\partial t}}}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\underset{2,3}{\cancel{\frac{v_\theta}{r}}}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\underset{4}{\cancel{v_z}}\frac{\partial v_r}{\partial z}-\underset{2}{\cancel{\frac{v_\theta^2}{r}}}\right)=\underset{5}{\cancel{\rho g_r}}-\underset{6}{\cancel{\frac{\partial p}{\partial r}}}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\underset{1,3}{\cancel{\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}}}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\underset{2,3}{\cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}}\right)$$

$$\boxed{\rho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}-\frac{v_r}{r^2}\right)}$$

1. La componente v_r solo depende de z y r.
2. No existe v_θ
3. Hay simetría en θ
4. No existe v_z
5. No hay componente de la gravedad en r
6. La presión no depende de r

c)

Anteriormente se ha definido: $p(z)=-\rho g z+K$. Para $z=h$, se tiene que $p(z=h)=p_{atm}$. Por tanto:

$$\boxed{p(z)=\rho g(h-z)+p_{atm}}$$

d)

$$Q_1=\bar{v}A\rightarrow\boxed{\bar{v}=\frac{Q_1}{2\pi R_1 h}}$$