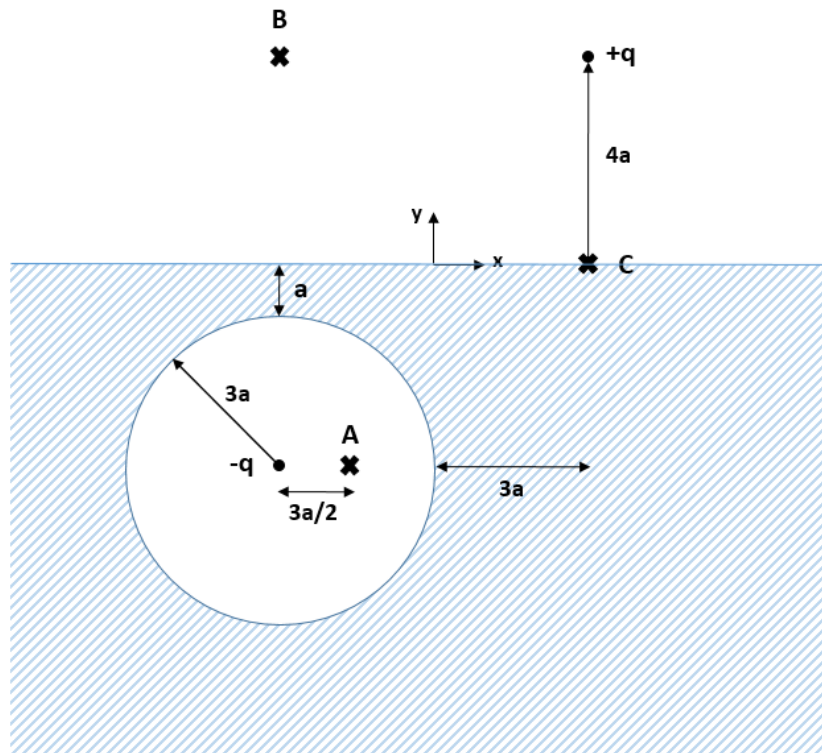


Problema 1. (2p)

Una carga puntual $+q$ se encuentra por encima de un suelo conductor a una distancia $4a$. El suelo conductor (que se considerará a potencial cero) se extiende indefinidamente horizontal y verticalmente hacia abajo. Dentro del suelo hay un hueco esférico de radio $3a$ en la posición que indica la figura. En el interior del hueco hay una carga $-q$ situada en su centro. Se pide, justificando brevemente todas las respuestas:

- Valor del campo electrostático (vector) en el punto A.
- Densidad superficial de carga en el punto C del conductor.
- Fuerza total sobre la carga $+q$.
- Diferencia de potencial entre los puntos A y B, $V_A - V_B$



Solución:

- a) (2/10 ptos) Debido al apantallamiento que produce el conductor, el campo en el punto A únicamente es producido por la carga $-q$ situada en el hueco de la esfera. La carga inducida en la superficie interna de la esfera está uniformemente distribuida y no produce campo en el punto A. Para calcular el campo se emplea la expresión del campo eléctrico de una carga puntual:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

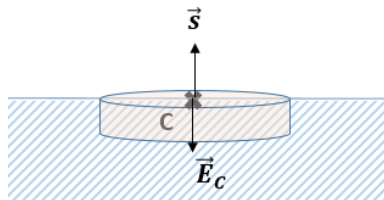
$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{\left(\frac{3}{2}a\right)^2} \vec{i} = -\frac{q}{9\pi\epsilon_0 a^2} \vec{i}$$

También se puede calcular el campo aplicando Gauss, donde la carga encerrada será únicamente $-q$.

- b) (3/10 ptos) La carga encerrada en el hueco esférico no influye en el campo de la región positiva del eje y , ya que se produce apantallamiento de los campos. El problema en la región $y > 0$ se resuelve aplicando el método de las imágenes, considerando el sistema formado por la carga $+q$ y su carga imagen $q' = -q$, situada de forma simétrica en el conductor, a una distancia $8a$ por debajo de la misma.

$$\vec{E}_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{(4a)^2} \vec{j} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{(4a)^2} \vec{j} = -\frac{q}{32\pi\epsilon_0 a^2} \vec{j}$$

La densidad de carga se puede obtener empleando la ley de Gauss en dicho entorno, teniendo en cuenta que el campo en el interior del conductor es nulo:



$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E_C S \cos \pi = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma = -\frac{q}{32\pi a^2} \text{ C/m}^2$$

También se puede obtener a partir de las condiciones de contorno en la superficie del conductor:

$$\Delta \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma = -\frac{q}{32\pi a^2} \text{ C/m}^2$$

- c) (2/10 pts) La fuerza que se experimenta la carga $+q$ por el conductor se obtiene por el método de las imágenes, a partir de la que le ejerce la carga imagen:

$$\vec{F} = (+q)\vec{E}_{q' \rightarrow q} = q \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{(8a)^2} \vec{j} = -\frac{q^2}{256\pi\epsilon_0 a^2} \vec{j}$$

- d) (3/10 pts) Por encima del conductor el potencial corresponde al creado por $+q$ y su carga imagen, aplicando principio de superposición. Se puede tomar como referencia el potencial en infinito, que se considera nulo:

$$V = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{6a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{10a} = \frac{q}{60\pi\epsilon_0 a}$$

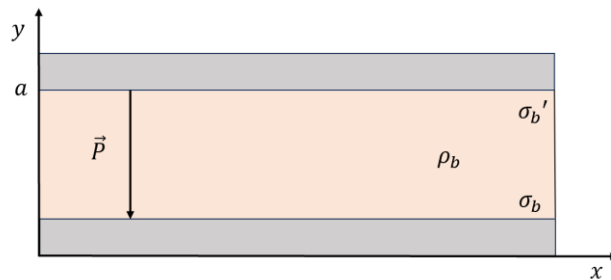
Dentro del hueco esférico el potencial corresponde al creado por $-q$, pero hay que tener en cuenta que en este caso el potencial de referencia está a una distancia de $3a$:

$$V_A = -\int_{3a}^{\frac{3a}{2}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{3a}^{\frac{3a}{2}} = -\frac{q}{12\pi\epsilon_0 a}$$

$$V_A - V_B = -\frac{q}{12\pi\epsilon_0 a} - \frac{q}{60\pi\epsilon_0 a} = -\frac{q}{10\pi\epsilon_0 a}$$

Problema 2. (2p)

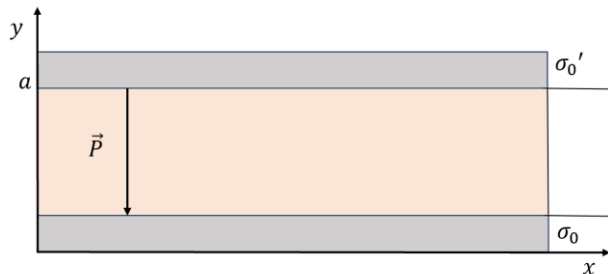
Entre dos placas conductoras planas y paralelas, de sección S y separadas una distancia a , muy juntas por lo que se pueden considerar infinitas, se encuentra un material aislante con carga neta cero, que presenta una polarización permanente (sin un campo externo que la produzca) dada por $\vec{P} = -P_0 \vec{j}$, siendo \vec{P} un vector uniforme, en la dirección perpendicular a las placas. Inicialmente las placas están descargadas. El espesor de las placas se considerará mucho menor que la distancia a .



- (2.5/10 pts) ¿Cuánto valen las densidades de carga ligada en las dos superficies, σ_b y σ_b' del dieléctrico? ¿Cuánto vale la densidad volumétrica de carga, ρ_b , en el interior del dieléctrico?
- (2.5/10 pts) Si se conectan un voltímetro entre las dos placas, ¿cuánto medirá éste? ¿Qué placa está a mayor potencial, la inferior o la superior?

Para los apartados (c) y (d) se considera que se mantiene el valor inicial de la polarización en el material aislante.

- (2.5/10 pts) Suponer (sólo para este apartado) que las dos placas se conectan mediante un hilo conductor, ¿cuál sería ahora la densidad de carga almacenada, σ_0 y σ_0' , en cada placa conductora?



- (2.5/10 pts) Retiramos el hilo que unía a las placas y cargamos el condensador conectándolo a una batería cuyo potencial es V_0 (polo positivo en la placa inferior). Si retiramos a continuación el dieléctrico del interior de las placas dejándolo vacío, sin desconectarlo de la batería, ¿la carga de la placa inferior aumenta, disminuye o permanece igual? Justifica la respuesta.

**Solución:**

- a) Como la polarización es uniforme, la densidad volumétrica de carga ligada es nula. Además, se puede ver porque:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}_0 = 0$$

Las densidades superficiales son:

$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$, y como $\vec{P} = -P_0 \vec{j}$, en la cara superior habrá una $\sigma_b' = -P_0$, y en la cara inferior $\sigma_b = +P_0$

Hay que notar que el sentido del vector polarización va de las cargas ligadas negativas a las cargas positivas.

- b) Puesto que inicialmente las placas están descargadas, la única carga en este sistema es la de polarización debida al material, y se puede ver como dos placas con densidades de carga $\pm \sigma_b$. Por lo tanto, el único campo eléctrico es el debido a esta carga ligada.

La diferencia de potencial que mediría el voltímetro sería:

$$|\Delta V| = |V(a) - V(0)| = \left| - \int_0^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \right| = \int_0^a E \, dy = \frac{P_0 a}{\epsilon_0}$$

El campo eléctrico \vec{E}_b debido a la carga ligada, que es el campo neto puesto que es el único que hay, va en sentido opuesto a la polarización. Como el campo eléctrico apunta hacia potenciales decrecientes, la placa inferior se encuentra a un potencial mayor que la superior.

- c) Cuando se cortocircuitan las placas, la diferencia de potencial entre las placas es cero. Como $\Delta V = E_{neto} d$, el E_{neto} debe ser también cero.

Es decir, se produce una transferencia de carga entre las placas para igualar sus potenciales, y el proceso se detiene cuando se alcanza el equilibrio electrostático. Así pues, en el equilibrio, el campo neto entre las placas es nulo.

$$\vec{E}_{neto} = 0$$

Para que esto ocurra, los campos debidos a las placas y a la polarización deben ser iguales: Aplicando la ley de Gauss, escogiendo una gaussiana que atrape la placa superior, la densidad de carga total, suma de las libres más las de polarización en la interfaz entre el material y esta placa, debe ser nula.

Se cumple entonces que:

$$\sigma'_0 = -\sigma_b = +P_0$$



$$\sigma_0 = \sigma_b = -P_0$$

También se puede razonar como que el $\vec{E}_b + \vec{E}_0 = 0$.

- d) El potencial permanece constante porque en todo momento está conectado a la batería, al igual que la distancia entre las placas, que no varía. Como $V = E_{neto}d$, el campo eléctrico neto también tiene que permanecer constante.

$$\vec{E}_{neto} = \vec{E}_0 + \vec{E}_b$$

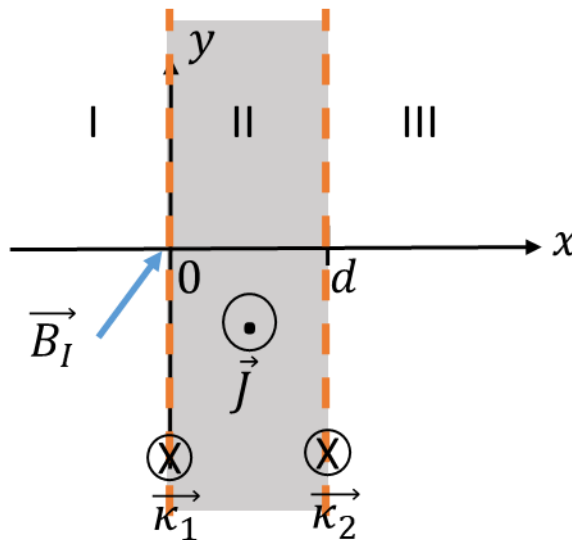
Por la polaridad de la batería, el sentido del campo eléctrico \vec{E}_0 va de la placa inferior a la placa superior. El campo ligado debido a la polarización, \vec{E}_b , hemos dicho que va también de la placa inferior a la superior.

Al retirar el material, el campo neto disminuye (estamos quitando ese \vec{E}_b), luego el \vec{E}_0 debe aumentar para compensar la disminución del \vec{E}_{neto} y que el potencial eléctrico V se mantenga constante. Por lo tanto, la carga libre de la placa inferior aumentará.

Problema 3. (2p)

Se tiene una distribución de corrientes tal como muestra la figura. En $x = 0$, se sitúa un plano de corriente superficial $\vec{\kappa}_1 = \frac{-1}{\mu_0} \hat{z}$ (A/m). Además, en $0 \leq x \leq d$ hay una placa con densidad de corriente $\vec{J} = \frac{+1}{\mu_0} \hat{z}$ (A/m²) de 4 m de ancho. Finalmente, en $x = d = 4$ m, se sitúa otro plano de corriente superficial $\vec{\kappa}_2 = \frac{-4}{\mu_0} \hat{z}$ (A/m).

Se sabe que en la región I del espacio (vacío) el campo magnético expresado en coordenadas cartesianas es: $\vec{B}_I = \hat{x} + 2\hat{y}$ (T). (Tener en cuenta que parte del campo magnético puede estar creado por otras corrientes lejanas distintas de las mencionadas). Además, se sabe que la componente B_z es 0 en todos los puntos del espacio.



Se pide, justificando las respuestas:

- Aplicando las propiedades del campo magnético, calcular la componente B_x en las regiones II ($0 < x < d$) y III ($x > d$).
- Calcular la componente B_y del campo magnético en las regiones II y III, indicando si depende o no de la coordenada x .
- ¿Qué fuerza (vector) sufre un tramo de hilo de 2 m de longitud centrado en la posición $(x = -d, y = 0)$ por el que circula una corriente de 1 A en el sentido $+\hat{z}$?
- En lugar del hilo del apartado anterior, se sitúa una brújula con momento dipolar $\vec{m} = m_0 \hat{y}$ ($m_0 > 0$) centrada también en la posición $(x = -d, y = 0)$. Si la brújula gira, ¿cuál será su orientación final? ¿Qué par (vector) experimenta y en qué sentido gira?

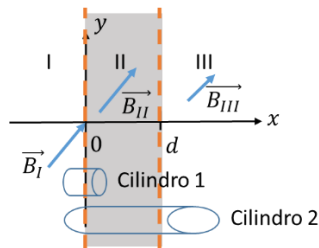
SOLUCIÓN

- a) (3/10 pts) Podemos descomponer el campo magnético en componente normal a los planos de corriente (B_x) y componente tangencial (B_y). Además, la componente B_z es 0 en todos los puntos del espacio.

Para calcular la relación entre las componentes normales (B_x), podemos aplicar que el flujo del campo magnético sobre una superficie cerrada es cero:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Por ejemplo, consideramos una Gaussiana que sea un cilindro con eje de revolución en x . Notar que, debido a la simetría del problema, los campos magnéticos no dependen de la coordenada y y dentro de cada región del espacio. Esto implica que el flujo a través de la cara lateral es 0 y únicamente nos queda flujo a través de las tapas debido a las componentes normales (B_x).



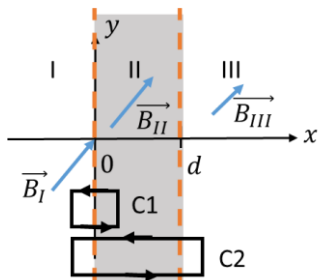
Si cogemos un cilindro situado a ambos lados del plano $x = 0$ (Cilindro 1):

$$B_{IIx} = B_{Ix} = 1 \text{ T}$$

Además, si aplicamos la misma propiedad sobre un cilindro situado entre las regiones I y III (Cilindro 2):

$$B_{IIIx} = B_{Ix} = 1 \text{ T}$$

- b) (3/10 pts) Para calcular las componentes tangenciales (B_y), debemos aplicar la Ley de Ampère. Basta con coger Amperianas rectangulares y considerar un sentido de circulación (en esta solución se considera el sentido antihorario). Debido a la simetría del problema, los campos magnéticos no dependen de la coordenada y y dentro de cada región del espacio. Las aportaciones de los lados horizontales se compensan y únicamente tenemos las aportaciones de las proyecciones de las componentes sobre los lados verticales.



Para una Amperiana C1 situada entre cualquier punto de la región I y x (región II) con altura h :



$$B_{IIy} = B_{Iy} + x - 1 = 1 + x \text{ (T)}$$

Para una Amperiana C2 de altura h situada entre las regiones I y III:

$$B_{IIIy} = B_{Iy} + d - 5 = 1 \text{ (T)}$$

- c) (2/10 pts) El campo magnético es uniforme en todos los puntos de la región I donde se sitúa el hilo: $\vec{B}_I = \hat{x} + 2\hat{y}$ (T). La fuerza que experimenta el hilo, la podemos calcular como:

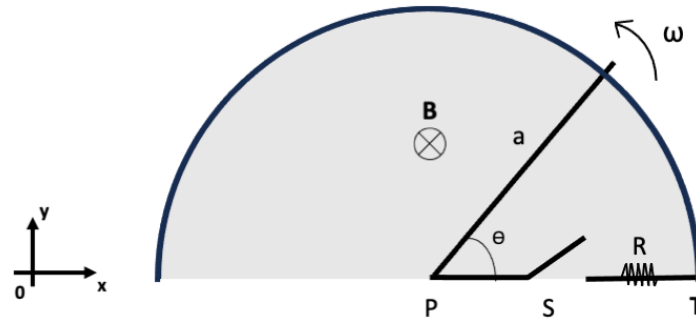
$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B}_I = 2(-2\hat{x} + \hat{y}) \text{ (N)}$$

- d) (2/10 pts) La posición de equilibrio de la brújula será paralela al campo magnético de la región I.

Girará en el sentido horario acorde con el par:

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}_I = m_0\hat{y} \times (\hat{x} + 2\hat{y}) = -m_0\hat{z}$$

Problema 4 (2p)



Una barra conductora de longitud a gira con velocidad angular ω constante en torno a su extremo (P) apoyada sobre un carril semicircular conductor tal y como muestra la figura. El extremo P de la barra está unido a uno de los extremos del carril (T) a través de un interruptor S y una resistencia R. Hay un campo magnético externo uniforme B entrante perpendicular al plano del dibujo. Se pide:

(2.5/10 ptos.) a) Si el interruptor S está abierto, ¿cuál de los puntos P o T está a mayor potencial?

Podemos calcular la diferencia de potencial entre dos puntos del circuito abierto por el interruptor S, que es lo que mediría un voltímetro conectado entre esos dos puntos. En circuito abierto, la medida de un voltímetro es la fem de un circuito, que también coincide con la diferencia de potencial entre los extremos de la barra que se mueve. La fuerza por unidad de carga de origen magnético, que vale $v \times B$, se dirige en este caso hacia el punto P atravesando la barra y produce una acumulación de cargas positivas en dicho extremo. En circuito abierto se produce entonces una fem debida al movimiento rotatorio de la barra que es:

$$\varepsilon = \int_0^a (v \times B) dr = \int_0^a B \omega r dr = \frac{1}{2} B \omega a^2 = V_{PT}$$

Como es positiva, la fuerza producida por la fem arrastrará las cargas positivas de forma antihoraria por la barra hacia el punto P, dejando las cargas negativas en el otro extremo y, por tanto, P estará a mayor potencial. Esto es, $V_P > V_T$

Para los siguientes apartados se considerará el interruptor cerrado formándose un circuito por el que puede circular una intensidad que atraviesa la barra. Si despreciamos la autoinducción,



(2.5/10 ptos.) b) Calcule la corriente a través de la barra. Justifique su sentido.

La intensidad puede calcularse como:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

La fuerza electromotriz producida por la rotación puede también calcularse por los cambios de flujo magnético. Según Faraday-Lenz, es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d(-B \cdot S)}{dt} = \frac{d(B \cdot S)}{dt} = B \frac{d(S)}{dt}$$

Como el vector inducción magnético es constante en este caso, la responsable del cambio de flujo \mathbf{B} será la dependencia temporal del área. Dicha área, para un sector circular de ángulo θ dependiente del tiempo como $\theta = \theta_0 + \omega t$, es:

$$S = \pi a^2 \left[\frac{\theta}{2\pi} \right] = \pi a^2 \left[\frac{\theta_0 + \omega t}{2\pi} \right] = \frac{a^2}{2} (\theta_0 + \omega t)$$

Sustituyendo:

$$\varepsilon = \frac{B\omega a^2}{2}$$

Observamos que obtenemos el mismo resultado que en el cálculo inicial. Sustituyendo para obtener el valor de la corriente:

$$I = \frac{B\omega a^2}{2R}$$

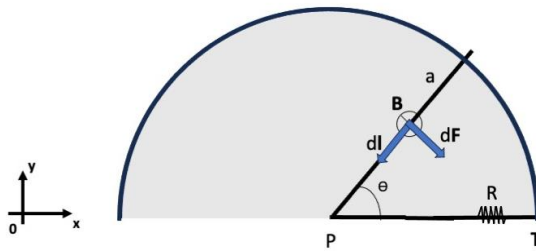
que circula por tanto en sentido positivo, antihorario, para oponerse al aumento de flujo magnético.

(2.5/10 ptos.) c) Para la posición de la figura, calcula el vector fuerza magnética sobre la barra.

Calculamos la fuerza sobre la barra,

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

La corriente es antihoraria y su carga vectorial la lleva el $d\vec{l}$. Como \vec{B} entra en \mathbf{z} , los vectores son perpendiculares por lo que, en el extremo del brazo del carril:



$$F = IaB = \frac{B^2 \omega a^3}{2R}$$

con

$$\hat{u}_F = \sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}$$

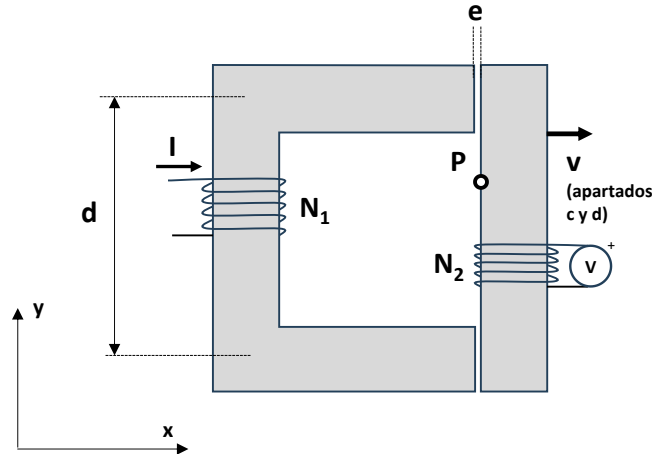
(2.5/10 ptos.) d) Suponiendo que el circuito tiene una inductancia (coeficiente de autoinducción) constante de valor L , escribir la ecuación diferencial que cumple $i(t)$, considerando como positivo el sentido horario.

En un circuito cerrado, la suma de todas las fems es igual a la intensidad que circula por el circuito multiplicada por la resistencia del circuito. Así que, al tener en cuenta la autoinductancia, calculamos una nueva fem incorporando la contribución de L teniendo en cuenta el criterio del enunciado: $\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$

Al considerar positivo el sentido horario, cambiamos de signo la contribución debida al movimiento antes calculada y la diferencia de potencial total es la contribución de ambas fem que incorporamos a la ecuación mencionada, obteniendo la ecuación diferencial solicitada.:

$$\varepsilon_{Total} = -\frac{Ba^2\omega}{2} - L \frac{di}{dt} = I \cdot R$$

Problema 5 (2p)



Se tiene un núcleo de perfil cuadrado de material magnético con permeabilidad (o permeabilidad relativa) μ . La longitud total de la línea media de los cuatro tramos de material ferromagnético es $4d$ y la sección transversal es S . Hay dos entrehierros de longitud e cada uno, en los que se considera que no hay dispersión.

Inicialmente se considera que todas las partes del núcleo de hierro están en reposo. Se pide:

- (4/10 pts) Calcular el vector H (vector) en el punto P de la superficie del núcleo magnético.
- (2/10 pts) Determinar la densidad de corriente de magnetización (o corriente ligada) (vector) en el punto P de la superficie lateral del núcleo magnético.

Para los siguientes apartados se considera que a partir de la posición de la figura, el lado de la derecha del núcleo ferromagnético se traslada hacia la derecha con una velocidad v constante conocida.

- (2/10 pts) Calcular el nuevo flujo magnético que atraviesa el arrollamiento de la derecha en función del tiempo. Simplificar el resultado suponiendo que el valor de μ es muy grande ($\mu \cong 10000$) y que $d \cong 100e$
- (2/10 pts) Determinar la lectura del voltímetro con su signo, en función del tiempo.

Solución:

- Utilizando la teoría de circuitos magnéticos, se calcula primero el flujo Φ a través del circuito, que es hacia abajo. Después teniendo en cuenta que el núcleo es un material lineal, se obtiene \vec{H}_P :

$$\Phi = \frac{N_1 I}{\mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_e} = \frac{N_1 I}{\frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{4d}{S} + \frac{1}{\mu_0} \frac{2e}{S}} \Rightarrow \vec{H}_P = \frac{\vec{B}_P}{\mu_0 \mu} = \frac{-\Phi}{\mu_0 \mu S} \hat{y} = \frac{-N_1 I}{4d + 2e\mu} \hat{y}$$

Método alternativo: También es posible plantear a partir de la ley de Ampere que la circulación de H es $N_1 I$ y que como el flujo del campo magnético a través de una superficie cerrada es cero, entonces en el hierro (y en el punto P) y el entrehierro el campo magnético tiene el mismo valor. Se llega al mismo resultado.

$$N_1 I = H_{Fe} 4d + H_e 2e = \frac{B_P}{\mu_0 \mu} 4d + \frac{B_P}{\mu_0} 2e \Rightarrow B_P = \frac{N_1 I}{\frac{4d}{\mu_0 \mu} + \frac{2e}{\mu_0}} \Rightarrow \vec{H}_P = \frac{\vec{B}_P}{\mu_0 \mu} = \frac{-N_1 I}{4d + 2e\mu} \hat{y}$$

- b) En primer lugar se escribe el campo magnético a partir del campo H calculado en el apartado anterior, ya que se trata de un material lineal:

$$\vec{B}_P = \mu_0 \mu \vec{H}_P = \frac{-\mu_0 \mu N_1 I}{4d + 2e\mu} \hat{y}$$

A partir de la definición de vector H se obtiene la magnetización y de ahí la corriente superficial de magnetización en el punto P:

$$\vec{M}_P = \frac{\vec{B}_P}{\mu_0} - \vec{H}_P = \frac{-(\mu - 1)N_1 I}{4d + 2e\mu} \hat{y}$$

$$\vec{\kappa}_P = \vec{M}_P \times \hat{n} = \vec{M}_P \times \hat{n} = \vec{M}_P \times (-\hat{x}) = \frac{-(\mu - 1)N_1 I}{4d + 2e\mu} \hat{z}$$

- c) Consideramos ahora que $e(t) = e + vt$, y que la reluctancia del hierro es mucho menor que la del entrehierro. Además hay que tener en cuenta que el arrollamiento tiene N_2 vueltas.

$$\Phi_2 = N_2 \Phi = N_2 \frac{N_1 I}{\mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_e} \cong N_2 \frac{N_1 I}{\mathcal{R}_e} = \frac{N_2 N_1 I}{\frac{1}{\mu_0} \frac{2(e + vt)}{S}}$$

- d) Aplicando la ley de Faraday se obtiene la lectura del voltímetro. Como la reluctancia sube al crecer el entrehierro, el flujo hacia abajo disminuye con lo que la fem tiende a generar una corriente que produciría flujo hacia abajo (saldría del extremo + del voltímetro si se cerrara el circuito), con lo que la medida del voltímetro es negativa. Su valor absoluto es:

$$|V| = \left| -\frac{d\Phi_2}{dt} \right| = \frac{N_2 N_1 I \mu_0 S}{2} \left(\frac{v}{e^2} \right)$$

Nota: En todo el problema se tiene en cuenta que la corriente a través del voltímetro es cero.