TEMA 2 – POTENCIAL ELÉCTRICO.

Clase 2.1 Campo electrostático y energía

En este tema introducimos el concepto de potencial, que ayuda a la comprensión del campo electrostático y en algunos casos facilita los cálculos.

Trabajo para mover una carga en un campo

El trabajo es una integral que se calcula para un campo vectorial a lo largo de una trayectoria y que nos da una medida de si el campo va en la dirección y sentido del camino. Si el campo es el campo eléctrico, como es proporcional a la fuerza sobre una carga, nos da una medida del intercambio de energía entre el campo y una partícula que recorre la trayectoria. El trabajo puede ser positivo o negativo según el intercambio de energía tenga un sentido u otro.

Para definir el trabajo que cuesta mover una carga en un campo de forma que sea útil para calcular la energía que el campo transfiere a la carga, el movimiento debe hacerse de forma que la partícula no gane energía cinética. Para esto, el desplazamiento se hace de forma cuasi-estática, es decir se recorre un camino de un punto A a un punto B con una velocidad hipotética constante y extremadamente pequeña. En estas condiciones podemos decir que la aceleración de la partícula es prácticamente nula (a pesar de que pasa de cero a una pequeña velocidad y a pesar de que recorre una trayectoria curva y por lo tanto en algunos puntos tiene una pequeña aceleración tanto tangencial o normal).

Si la aceleración es nula, la suma de fuerzas sobre la partícula es nula, y por tanto necesitaremos una fuerza externa que cumplirá en cada punto (el campo eléctrico puede variar con la posición):

$$\vec{F}_{ext} + q\,\vec{E} \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{ext} = -q\,\vec{E}$$

Descomponemos el desplazamiento en pequeños desplazamientos $\Delta\vec{l}_i$ de forma que el trabajo que hace la fuerza externa en cada pequeño desplazamiento es $\Delta W_i = \vec{F}_{ext} \cdot \Delta\vec{l}_i$

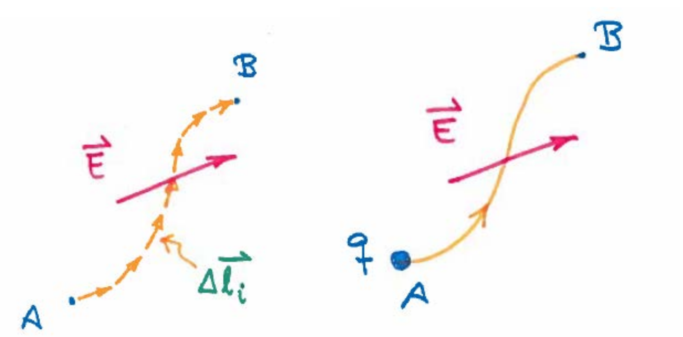


Imagen: JLRM:

Para calcular el trabajo total que hace el agente externo desde A hasta B sumaremos todos los tramos, lo que nos lleva a una integral denominada integral de línea:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Obsérvese que en estas condiciones cuasiestáticas, y debido a la ley de acción y reacción, el trabajo que hace el agente externo, tiene el mismo valor absoluto, pero signo contrario, que el trabajo que hace el campo electrostático.

Nota: en algunos textos cuanto se analizan estas situaciones, se dice que si el trabajo que hace el agente externo es negativo, es porque el trabajo lo realiza el campo. En realidad, es más riguroso considerar que tanto el agente externo como el campo hacen siempre un trabajo, que puede ser positivo o negativo.

Ejemplo

Se pide calcular el trabajo que hace una agente externo para mover (de forma cuasiestática) desde el punto O≡ (0, 0, 0) hasta el punto B≡ (x_1, y_1, 0) una carga *q* en el campo definido más abajo en coordenadas cartesianas, usando la definición de trabajo. Comprobar que, si se eligen dos caminos distintos, se obtiene el mismo resultado.

$$E_x = 6xy \quad E_y = 3x^2 - 3\,y^2 \quad E_z = 0$$

Solución. El primer camino que utilizaremos constará de dos tramos rectilíneos, que pasarán por el punto A≡ (x_1, 0, 0).

$$W_{O\to B} = W_{O\to A} + W_{A\to B} = \int_O^A \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = -q\int_O^A \vec{E} \cdot d\vec{l} - q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} =$$

$$= -q\int_O^A \vec{E} \cdot dx\vec{\imath} - q\int_A^B \vec{E} \cdot dy\vec{\jmath} = -q\int_O^A E_x\,dx - q\int_A^B E_y\,dy =$$

$$= \underbrace{-q\int_0^{x_1} 6x.0.dx}_{0} - q\int_0^{y_1} (3{x_1}^2 - 3\,y^2)dy = q\,(-3{x_1}^2 y_1 + \,{y_1}^3)$$

Nótese que en los caminos se ha sustituido el diferencial de longitud genérico por un diferencial de longitud en la dirección del camino, que al coincidir con direcciones paralelas a los ejes de coordenadas resulta tener una sola componente cartesiana.

El segundo camino que utilizaremos constará de dos tramos rectilíneos, que pasan por el punto C(0, y_1, 0).

$$W_{O\to B} = W_{O\to C} + W_{C\to B} = \int_O^C \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} + \int_C^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = -q\int_O^C \vec{E} \cdot d\vec{l} - q\int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{l} =$$

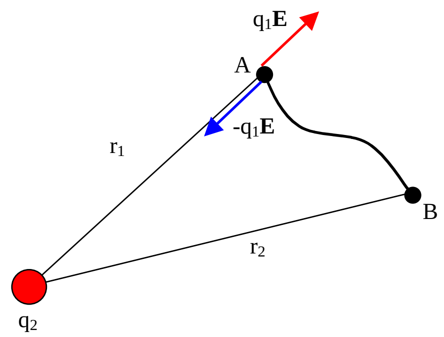
$$= -q\int_O^C \vec{E} \cdot dy\vec{\jmath} - q\int_C^B \vec{E} \cdot dx\vec{\imath} = -q\int_O^C E_y\,dy - q\int_C^B E_x\,dx =$$

$$= -q\int_0^{y_1} (3.0^2 - 3\,y^2)\,dy - q\int_0^{x_1} 6xy_1 dx = q\,(\,{y_1}^3 - 3{x_1}^2 y_1)$$

El resultado es el mismo por ambos caminos. Que los valores sean iguales no se trata de una coincidencia, como veremos más adelante, sino que es una propiedad del campo electrostático.

Ejemplo

Calcular el trabajo que hace una agente externo para mover una carga q_1 a través del camino indicado en la figura de A hasta B en el campo que crea una carga q_2 positiva, fija. (Considerar que el movimiento se hace de forma cuasiestática).



Solución. Aplicamos la expresión que permite calcular el trabajo, sustituyendo el campo y el desplazamiento elemental por su valor en coordenadas esféricas (consultando este último en una tabla).

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = -q_1 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{r} \quad d\vec{l} = dr.\vec{r} + r.d\theta.\vec{\theta} + r.sen\theta.d\varphi.\vec{\varphi}$$

$$W_{A\to B} = -q_1 \int_A^B \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Energía (potencial) de una configuración de carga

Llamaremos energía o energía potencial de una configuración de carga al trabajo que tiene que hacer un agente externo para "construir" dicha configuración a partir de la situación en que todas las cargas están en el infinito y separadas infinitamente unas de otras. Como el campo eléctrico es conservativo, como se verá más adelante, podemos construir la configuración de carga en cualquier orden y siguiendo cualquier trayectoria.

Energía de una configuración de dos cargas

Supondremos que en primer lugar el agente externo lleva desde el infinito hasta su posición final una de las cargas. Como no hay ninguna otra carga creando campo, la primera carga no experimenta ninguna fuerza y este primer movimiento no requiere trabajo. A continuación, se trae la segunda carga desde el infinito a su posición final. El trabajo requerido corresponde a la expresión vista en el ejercicio del apartado anterior. La energía del sistema, si llamamos r_{12} a la distancia final entre las dos cargas, será:

$$U = W_1 + W_2 = 0 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_\infty}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Energía de una configuración de N cargas

Aplicando el principio de superposición, la expresión anterior se puede extender para tres cargas. Al traer la tercera carga, esta experimentará la fuerza producida por las dos cargas anteriores.

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

Esta expresión se puede generalizar para N cargas continuando con el mismo proceso de ir trayendo las cargas de una en una. Se obtiene:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Densidad de energía de una configuración de carga en el vacío

Cuando se quiere calcular la energía de un sistema que no está formado por cargas puntuales, sino por distribuciones de carga, se puede recurrir a las siguientes expresiones:

Densidad de energía

Se atribuye al campo eléctrico en el vacío una energía por unidad de volumen de valor

$$\frac{\varepsilon_0}{2}E^2$$

Energía total

Integrando la expresión anterior en todo el volumen que ocupe el campo eléctrico (TEC), se puede obtener la energía de cualquier configuración de carga.

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{TEC} E^2.dv$$

Ejemplo

Calcular la energía acumulada entre dos placas paralelas de superficie *S* situadas a una distancia *d*, uniformemente cargadas con cargas *Q* y -*Q*.

Solución. Aproximaremos el campo como si las placas fueran infinitas. En este caso el campo será uniforme en todo el volumen que está entre las placas y valdrá $Q/(S\varepsilon_0)$. La densidad de energía en este caso es uniforme en todo el espacio, y vale

$$\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}$$

y la integral para calcular la energía, que se extiende al volumen que está entre las dos placas, ya que es la única zona donde hay campo, se reduce a

$$U = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}Sd = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$

Trabajo para mover una carga en un campo

Es el trabajo que hace una fuerza externa opuesta al campo.

Energía de una configuración de carga

Es el trabajo que tiene que hacer un agente externo para construir la configuración.

Densidad de energía de una configuración de carga en el vacío

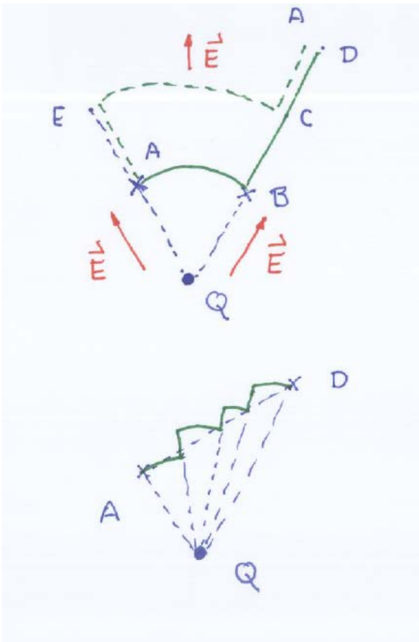
Podemos asignar esa energía al campo con una densidad $(\varepsilon_0/2).E^2$

Clase 2.2 Función potencial eléctrico

El campo electrostático es conservativo

Un campo es conservativo cuando sus integrales de camino entre dos puntos cualesquiera, no dependen del camino, valen lo mismo independientemente de qué camino se elija. Veremos que eso tiene consecuencias a la hora de calcular el trabajo que hace el campo, porque nos permite calcularlo de forma más sencilla usando una función potencial, que definiremos más adelante.

Veamos de forma cualitativa que el campo electrostático es conservativo. El razonamiento que vamos a hacer se puede aplicar a cualquier campo central (campo con componente radial en esféricas cuyo módulo solo depende de la distancia al origen de coordenadas).



Calculamos la integral por los caminos ABCD y AECD (figura superior), eliminando los tramos curvos AB y EC, en los que el campo es perpendicular al desplazamiento.

$$\int_{ABCD} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl} + \int_B^C \vec{E}.\overrightarrow{dl} + \int_C^D \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int_B^C \vec{E}.\overrightarrow{dl} + \int_C^D \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

$$\int_{AECD} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int_A^E \vec{E}.\overrightarrow{dl} + \int_E^C \vec{E}.\overrightarrow{dl} + \int_C^D \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int_A^E \vec{E}.\overrightarrow{dl} + \int_C^D \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

Las integrales son iguales si se cumple que $\int_B^C \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int_A^E \vec{E}.\overrightarrow{dl}$, lo que es cierto ya que son la misma integral al ser el campo radial y depender solo de la distancia.

En la figura inferior se ve que cualquier camino ente A y D se puede descomponer en un conjunto de tramos radiales y tramos concéntricos con el origen del campo, por lo que el razonamiento anterior se generaliza para cualquier camino, llegando a la conclusión de que el resultado de la integral es siempre el mismo.

Si el campo está generado por más de una carga, hay que aplicar el resultado anterior a cada una de las cargas por separado y luego aplicar superposición.

Función potencial

Si un campo es conservativo, para calcular trabajos, (que nos serán útiles para calcular los efectos de las fuerzas electrostáticas), es cómodo definir una función potencial.

Una función potencial de un campo conservativo es cualquier función escalar, con un valor en cada punto del espacio, que cumple que la diferencia de valor entre un punto B y un punto A, es el trabajo por unidad de carga que hace el campo al ir de A a B, cambiado de signo. Como el campo es conservativo esta integral no depende del camino y la definición tiene sentido.

$$\varphi_B - \varphi_A = -\frac{W_{AB}(campo)}{q} = -\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

Si se conoce la función potencial, se puede obtener también fácilmente el trabajo necesario para que un agente externo lleva una carga desde A hasta B (con un desplazamiento cuasiestático como ya se ha explicado).

$$W_{AB}(ext) = -W_{AB}(campo) = \int_A^B -q.\vec{E}.\overrightarrow{dl} = q.(\varphi_B - \varphi_A)$$

Para calcular una función potencial de las infinitas que se pueden obtener, se puede fijar un potencial de referencia en un punto y luego obtener la función potencial como:

$$\varphi(x,y,z) = -\int_{REF}^{(x,y,z)} \vec{E}.\overrightarrow{dl} + \ \varphi(REF)$$

(Para mayor claridad se ha expresado en coordenadas cartesianas).

Nota: dependiendo de los textos se utiliza para la función potencial la letra φ o también la letra V.

Ejemplo.

Calcular una función potencial para el campo creado por una carga puntual q situada en el origen de coordenadas.

Solución. Usaremos coordenadas esféricas y asignaremos arbitrariamente el valor de potencial φ_0 a los puntos del infinito, *r*= ∞.

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}.\overrightarrow{dl} + \ \varphi_0 = -\int_\infty^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.\hat{r}dr\,\hat{r} + \ \varphi_0 = -\int_\infty^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr + \ \varphi_0 =$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) + \ \varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \ \varphi_0$$

Esta función es válida como función potencial para cualquier valor de φ_0. Si se elige el valor $\varphi_0 = 0$:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Ejemplo

Potencial creado por el campo en cartesianas estudiado anteriormente. Se pide calcular una función potencial para el campo electrostático:

$$E_x = 6xy \quad E_y = 3x^2 - 3\,y^2 \quad E_z = 0$$

Solución. Aplicamos la expresión que permite calcular la función potencial. Tomaremos como referencia en valor de potencial 0 en el origen de coordenadas. Como el resultado no depende del camino, usaremos el camino formado por tramos rectilíneos OAX. A≡ (x, 0, 0) y B≡ (x, y, z) X é Y son variables mudas de integración.

$$\varphi(x,y,z) = -\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{E}.\overrightarrow{dl} + \underbrace{\varphi(0,0,0)}_{0} = -\int_{O}^{A} \vec{E}.\overrightarrow{dl} - \int_{A}^{B} \vec{E}.d\vec{l} =$$

$$= -\int_{O}^{A} \vec{E} \cdot dX\vec{\imath} - \int_{A}^{B} \vec{E} \cdot dY\vec{\jmath} = -\int_{O}^{A} E_x \, dX - \int_{A}^{B} E_y \, dY =$$

$$= \underbrace{-\int_{0}^{x} 6X.0.dX}_{0} - \int_{0}^{y} (3X^2 - 3\,Y^2)dY = -3x^2y + \,y^3$$

Obsérvese que los desplazamientos en la dirección del eje *z* no producen trabajo, ya que el campo no tiene coordenada en esta dirección, y por tanto la función potencial no depende de la coordenada *z*.

Consideraciones prácticas sobre la elección de la referencia para la función potencial

A partir de lo anterior, a la hora de elegir un punto y un valor de referencia para la función potencial hay que tener en cuenta que:

- Para un mismo campo electrostático, existen infinitas funciones potenciales que difieren en una constante.
- Para calcular la función potencial, se puede elegir un valor cualquier de referencia en un punto cualquiera (salvo para las excepciones explicadas a continuación).
- Cuando las distribuciones de carga no están restringidas a una zona finita del espacio (como ocurre en un hilo infinito o en una placa infinita), no se puede elegir como punto de referencia el infinito (un punto infinitamente alejado del origen de coordenadas), puesto que la integral que hay que resolver para calcular la función potencial, no converge. En este caso hay que elegir otro punto.
- Es habitual, cuando se trabaja con distribuciones de carga limitadas a una zona del espacio elegir como referencia en el valor cero en el infinito (un punto infinitamente alejado del origen de coordenadas). Pero no es la única alternativa.
- Si la función potencial viene dada, no necesariamente el valor en el infinito será cero.

Campo y función potencial

Campo a partir del potencial.

Se puede ver que la expresión que hemos utilizado para calcular la función potencial, es el resultado de integrar:

$$d\varphi = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

Un desplazamiento diferencial en cartesianas se expresa como:

$$\overrightarrow{dl} = dx.\hat{\imath} + dy.\hat{\jmath} + dz.\hat{k}$$

Y por tanto, desarrollando la primera expresión en cartesianas se cumple que:

$$d\varphi = -\left(E_x.dx + E_y.dy + E_z.dz\right)$$

Por otro lado, si tomamos la expresión del operador gradiente del potencial en cartesianas y lo multiplicamos escalarmente por el desplazamiento diferencial, obtenemos:

$$\overrightarrow{\nabla\varphi}.\overrightarrow{dl}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}.\hat{\imath}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\hat{\jmath}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\hat{k}\right)\left(dx.\hat{\imath}+dy.\hat{\jmath}+dz.\hat{k}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

El anterior resultado es también $d\varphi$, o sea la variación linealizada de la función φ cuando nos desplazamos una pequeña distancia en el espacio. (Nota: Es una generalización de lo que hacemos cuando aproximamos la variación una función de una sola variable por su tangente. En ese caso de una sola variable $d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}dx$, ahora la derivada es total, no parcial).

Finalmente, si comparamos las dos expresiones que hemos obtenido para $d\varphi$ obtenemos que el campo eléctrico es el gradiente del potencial cambiado de signo:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= -\left(E_x.dx + E_y.dy + E_z.dz\right) \\ d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \end{aligned}\right\} \vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}.\hat{\imath}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\hat{\jmath}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\hat{k}\right) = -\overrightarrow{\nabla\varphi} \qquad \boldsymbol{\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla\varphi}}$$

Obsérvese que el operador divergencia, que aparece en la expresión anterior, actúa sobre un campo escalar y devuelve un campo vectorial. El operador gradiente se representa como el vector nabla (∇) aplicado directamente sobre el campo escalar.

Ejemplo

Se sabe que un potencial eléctrico en coordenadas esféricas tiene la expresión (*a* y *R* son constantes positivas y conocidas):

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{3a}{2R} - \dfrac{ar^2}{2R^3} & si\, r \le R \\ \dfrac{a}{r} & si\, r > R \end{cases}$$

Determinar el campo eléctrico que corresponde con este potencial.

Solución

Calculamos el campo aplicando directamente el gradiente cambiado de signo, consultando en una tabla su expresión en coordenadas esféricas, que se simplifica en este caso, al depender el potencial solo de la coordenada radial:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla\varphi} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r.sen\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi}\right) = -\frac{d\varphi}{dr}\hat{r}$$

El campo pedido solo tiene componente radial:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{ar}{R^3}\hat{r} & si\, r \le R \\ \dfrac{a}{r^2}\hat{r} & si\, r > R \end{cases}$$

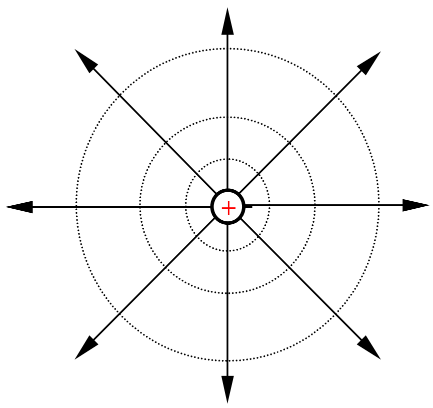
Superficies equipotenciales y gradiente.

Dada una configuración de carga, se definen las superficies equipotenciales como aquellas superficies en las que el potencial del campo eléctrico que crean es constante. Este concepto es útil porque permite “visualizar” el potencial eléctrico.

Aplicando la definición de función potencial es inmediato deducir, que cuando una carga se mueve sobre una superficie equipotencial, la fuerza eléctrica no realiza trabajo, puesto que no hay variación de potencial.

Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo. Si no lo fueran, las fuerzas eléctricas realizarían trabajo al moverse sobre ellas. Debido al signo menos de la expresión $d\varphi = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$, la dirección del campo es opuesta a aquella en la que el potencial aumenta.

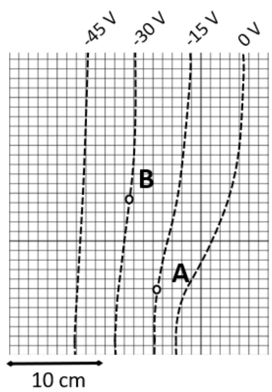
Por ejemplo, en el campo creado por una carga puntual positiva, las superficies equipotenciales son esferas concéntricas con centro en la carga (línea discontinua en la figura). El potencial disminuye al separarnos del centro hasta alcanzar el valor cero en el infinito.



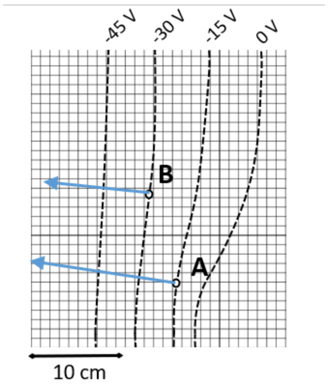
Si se dispone de una representación gráfica de las superficies equipotenciales de un campo con sus valores, se puede aproximar el valor del campo eléctrico. La dirección será la perpendicular a las equipotenciales, el sentido aquel en que el valor del potencial decrece. El módulo del campo será la variación del potencial en valor absoluto al pasar de una equipotencial a otra, dividida entre la distancia entre ambas, medida perpendicularmente a la equipotencial que pasa por el punto en el que estamos calculando el campo.

Ejemplo

La imagen representa el corte de cuatro superficies equipotenciales con el plano del dibujo. Las superficies son perpendiculares al plano del dibujo. Se pide, dibujar el sentido del campo en los puntos A y B y calcular de forma aproximada su módulo. ¿En qué punto es mayor el campo? ¿Cómo puede saberse?



Solución. En la imagen se muestra la dirección y sentido del campo en A y en B, como el campo es el gradiente del potencial, tiene que ser perpendicular a las superficies equipotenciales y señalar en el sentido en que el potencial decrece.



En cuanto al módulo del campo, podemos estimarlo en el punto A como la diferencia de potencial entre las líneas de 0 y -30 voltios, que son las que están a ambos lados del punto A y la distancia entre ambas, medidas sobre la dirección del campo, dibujado en el esquema (no en horizontal, aunque en este caso el resultado es prácticamente el mismo). $|E_A| = \frac{30}{0.07} = 428.6\ V/m$

De forma análoga para el punto B, $|E_B| = \frac{30}{0.1} = 300\ V/m$ Es fácil ver que el módulo del campo en el punto A es mayor, porque las líneas de campo están más próximas, la variación del campo al desplazarse, que es lo que mide el gradiente (el potencial), es mayor.

Líneas de campo.

Una forma habitual de visualizar los campos eléctricos es dibujar sus líneas de campo. Las líneas de campo son curvas orientadas, que tienen la dirección y sentido del campo en cada punto.

Algunas propiedades interesantes de las líneas de campo son:

- Parten de las cargas positivas y acaban en las negativas. También pueden partir de o acabar en el infinito.
- Por cada punto solo pasa una línea de campo, por lo que no se cruzan.
- Son perpendiculares a las líneas equipotenciales.

El campo electrostático es conservativo

El trabajo para mover una carga en un campo electrostático no depende del camino.

Función potencial

Si el campo es conservativo, se puede definir una función potencial. A veces es más cómoda para los cálculos que el campo.

Campo y función potencial

El campo es menos el gradiente del potencial.

Clase 2.3 Potencial eléctrico y energía potencial eléctrica

Potencial creado por una carga

Como se ha visto en un ejercicio anterior, el potencial asociado al campo que crea una carga puntual, si se asigna el valor cero a los puntos del infinito es:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Ejemplo

Analizar el significado de los signos del trabajo que hace un agente externo al desplazar de forma cuasiestática una carga Q en el campo eléctrico creado por una carga q. Se supone que ambas cargas son positivas.

Supongamos que desplazamos la carga Q por un camino curvilíneo que empieza a una distancia r_1 y que acaba a una distancia r_2 de la carga q.

Caso 1. Si $r_1 < r_2$ El desplazamiento separa las cargas q y Q. La fuerza entre las cargas es repulsiva, de forma que el agente externo tiene que hacer una fuerza sobre la carga Q en la dirección de q. Por tanto:

- El desplazamiento es en la misma dirección que la fuerza que le hace el campo de la carga q a la carga que se desplaza (Q). Por lo tanto, el campo hace un trabajo positivo.
- La fuerza del agente externo es igual y de signo contrario a la del campo, por lo que el agente externo hace un trabajo negativo.

Caso 2. Si $r_1 > r_2$ El desplazamiento acerca las cargas q y Q. La fuerza entre las cargas es repulsiva, de forma que el agente externo tiene que hacer una fuerza sobre la carga Q en la dirección de q. Por tanto:

- El desplazamiento es en la dirección opuesta que la fuerza que le hace el campo de la carga q a la carga que se desplaza (Q). Por lo tanto, el campo hace un trabajo negativo.
- La fuerza del agente externo es igual y de signo contrario a la del campo, por lo que el agente hace un trabajo positivo.

Potencial de una distribución de carga

Si queremos calcular el potencial creado por un conjunto de cargas, podemos aplicar el principio de superposición y calcularlo por separado para cada una de las cargas y luego sumar los distintos potenciales. Obtenemos:

$$\varphi_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$$\varphi = \sum_i \varphi_i(r) = \sum_i \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

Si la carga está distribuida en una línea, superficie o volumen, tendremos que llevar la expresión anterior al límite, considerando infinitas cargas infinitesimales, de forma que se convierte en una integral.

$$\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

En esta expresión, la integral debe extenderse a toda la zona del espacio donde hay cargas, para sumar la contribución de todas ellas. (Por ejemplo, si se está calculando el potencial que crean dos placas cargadas, la integral se extiende a ambas).

La variable r_i representa la distancia desde la carga infinitesimal *dq* que crea el campo/potencial, hasta el punto donde se está calculando.

Es importante tener en cuenta que en la expresión anterior se ha asignado potencial nulo a los puntos del infinito, por tanto, no se puede utilizar para distribuciones de carga que no estén restringidas a una zona del espacio ("distribuciones infinitas").

En esta integral:

- $dq = \lambda.dl$ (*dl* es un elemento diferencial de longitud) si se trata de una carga con densidad lineal λ (lambda) expresada en C/m,
- $dq = \sigma.ds$ (*ds* es un elemento diferencial de superficie) si se trata de una carga con densidad superficial σ (sigma) expresada en C/m^2
- $dq = \rho.dv$ (*dv* es un elemento diferencial de volumen) si se trata de una carga con densidad volumétrica ρ (sigma) expresada en C/m^3

Las funciones de densidad tanto lineal como superficial o volumétrica pueden ser constantes, y también pueden no serlo y ser dependientes de la posición, según los casos.

Diferencia entre función potencial y energía potencial

La **función potencial**, $\varphi(x, y, z)$, tiene un valor en cada punto, se mide en voltios y representa el trabajo necesario para que un agente externo, traslade una carga unitaria desde el punto al que se haya asignado potencial cero como referencia y el punto en cuestión.

Por su parte, la **energía potencial** de una configuración de carga, es el trabajo que tiene que hacer un agente externo para colocar las cargas en dicha configuración, partiendo de una situación en que las cargas están en el infinito. Se mide en julios y es un único valor, no es función de una posición.

Ejercicio

Tenemos tres cargas de valor *Q*. La primera está en el origen de coordenadas, la segunda sobre el eje *x* a una distancia *a* y la tercera sobre el eje *x*, a una distancia *2a* del origen. Se pide:

a) Calcular la función potencial en todos los puntos del espacio.
b) Calcular la energía potencial de esta distribución de tres cargas.
c) ¿Es necesario calcular la función potencial de las tres cargas para calcular la energía potencial?
d) ¿Hay alguna otra función potencial de otras configuraciones de carga, que sean útiles para calcular la energía potencial?

Potencial eléctrico y energía potencial eléctrica

Dos conceptos distintos. Trabajo para traer una carga unitaria desde la referencia hasta un punto vs. Trabajo para crear una configuración.

Clase 2.4 Operador divergencia

La siguiente clase trata sobre el operador diferencial divergencia, que permite relacionar el campo eléctrico con la distribución de carga que la crea. A pesar de que está en el grupo de clases sobre potencial eléctrico, en esta clase en particular no se trabaja con este concepto.

¿Qué es la divergencia?

La divergencia es un operador diferencial relacionado con el flujo (integral a través de una superficie) de un campo, y que nos será útil para trabajar con campos electromagnéticos.

Es una función escalar (o sea, tiene un valor que es un número real, que puede ser distinto en cada punto del espacio). Indica el flujo por unidad del volumen en cada punto del espacio cuando se calcula a través de una superficie cerrada muy pequeña. Se puede considerar una “densidad de flujo”.

Expresada matemáticamente, la divergencia de un campo genérico $\vec{F}$ es el límite del cociente entre el flujo Φ_i de $\vec{F}$ a través de una superficie cerrada S_i, y el volumen v_i, contenido por la superficie S_i.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \lim_{v_i \to 0} \frac{\Phi_i}{v_i} \qquad donde\ \ \Phi_i = \oint_{S_i} \vec{F}.d\vec{s}$$

La divergencia se representa como el producto escalar del vector simbólico nabla ($\vec{\nabla}$) por el campo: $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

Obsérvese que, justo al contrario que el gradiente, el operador divergencia actúa sobre un campo vectorial y devuelve un campo escalar.

Divergencia del campo electrostático

Aplicando la definición de divergencia al campo electrostático y teniendo en cuenta la ley de Gauss, se llega a la conclusión de que vale la densidad de carga dividida por la constante ε_0.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Efectivamente, si consideramos una superficie de integración infinitesimal S_i, podemos calcular el flujo de campo electrostático a través de esta superficie utilizando la ley de Gauss, el flujo valdrá la carga Q_i contenida por la superficie dividida por ε_0. Al dividir por el volumen v_i obtenemos la densidad de carga ρ en el interior de dicha superficie.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{v_i \to 0} \frac{\Phi_i}{v_i} = \lim_{v_i \to 0} \frac{\oint_{S_i} \vec{E}.d\vec{s}}{v_i} = \lim_{v_i \to 0} \frac{Q_i/\varepsilon_0}{v_i} = \frac{\rho_i}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

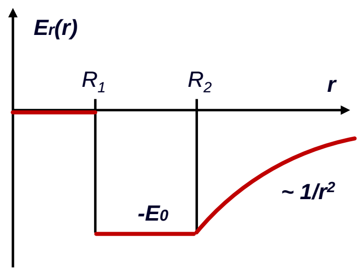
Ejercicio. Se conoce el valor de un campo eléctrico expresado en coordenadas cartesianas.

$$\vec{E}(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{-\rho a - \sigma}{\varepsilon_0}\vec{\imath} & si\ x \leq -a \\ \dfrac{\rho x + \sigma}{\varepsilon_0}\vec{\imath} & si - a < x < a \\ \dfrac{\rho a + \sigma}{\varepsilon_0}\vec{\imath} & si\ x \geq a \end{cases}$$

a) ¿Hay carga superficial en alguna zona?
b) ¿Hay carga volumétrica? Calcularla usando el operador divergencia.

Solución. Hay una densidad de carga superficial de valor uniforme $+2\sigma$ en el plano *x=-a* y una densidad volumétrica de valor uniforme ρ en toda la zona comprendida entre los planos *x=-a* y *x=a*.

Ejercicio. La gráfica muestra el valor de la componente radial de un campo eléctrico expresado en coordenadas esféricas. El campo solo tiene componente radial. Se pide la densidad de carga en todos los puntos del espacio. ¿Hay cargas superficiales? En caso afirmativo, ¿dónde están localizadas?



Solución. Hay una densidad de carga superficial de valor uniforme $\sigma = -\varepsilon_0 E_0$ en la superficie esférica *r=R₁* y una densidad volumétrica de valor variable $\rho(r) = -2\varepsilon_0 E_0 / r$ en la corteza esférica $R_1<r<R_2$. En el resto del espacio no hay carga.

Teorema de Gauss

Se puede calcular el flujo de un campo cualquiera $\vec{F}$, a través de una superficie finita cerrada como la suma de los flujos sobre un conjunto de superficies cerradas (pueden ser dos o pueden ser un valor mayor, incluso un número infinito). Esto se debe a que el flujo en las superficies internas se anula entre los dos volúmenes adyacentes.

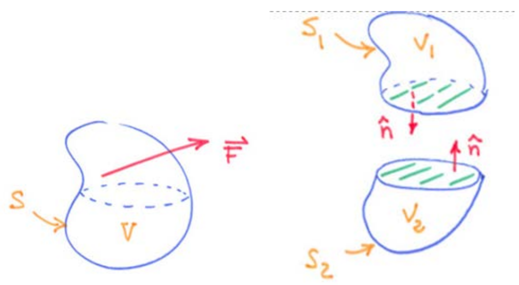


Imagen: JLRM

$$\Phi \equiv \oint_S \vec{F}.d\vec{s} = \oint_{S_1} \vec{F}.d\vec{s} + \oint_{S_2} \vec{F}.d\vec{s} = \sum_i \oint_{S_i} \vec{F}.d\vec{s}$$

Si esta suma se hace para infinitas superficies infinitesimales, esta expresión puede calcularse usando la divergencia, ya que está relacionada con el flujo a través de pequeñas superficies.

$$\Phi = \sum_i \oint_{S_i} \vec{F}.d\vec{s} = \sum_i v_i \frac{\oint_{S_i} \vec{F}.d\vec{s}}{v_i} \quad \xrightarrow[i\to\infty]{} \quad \Phi = \sum_i v_i.\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right).dv$$

El teorema de Gauss (no confundir con la ley de Gauss) afirma que el flujo de un campo a través de una superficie cerrada *S* es la integral de volumen de su divergencia en el volumen V que limita esa superficie.

$$\oint_S \vec{F}.d\vec{s} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}).dv$$

Teorema de Gauss y ley de Gauss

Si se aplica el teorema de Gauss a la expresión de la divergencia del campo electrostático se llega a la ley de Gauss, que ya habíamos enunciado anteriormente.

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{s} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}).dv = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

El significado de esta expresión es: "el flujo del campo electrostático a través de una superficie cerrada S es la carga total que contiene el volumen que delimita la superficie S ".

Divergencia y flujo

La divergencia es el flujo por unidad de volumen para volúmenes muy pequeños.

Divergencia del campo electrostático

Es la densidad de carga eléctrica en cada punto, dividida por ε_0.

Clase 2.5 Otros operadores diferenciales

Ecuación de Poisson y laplaciano

Partiendo de la expresión de la divergencia del campo eléctrico $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ y de la relación entre el campo eléctrico y el potencial $\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla\varphi}$ se llega a que:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla\varphi}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Es decir que, si calculamos el gradiente del potencial electrostático, y al resultado le aplicamos la divergencia, obtenemos la densidad de carga con el signo cambiado y dividida por ε_0.

Esta combinación de los operadores gradiente y divergencia se conoce como operador laplaciano y se simboliza así:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla\varphi}\right) = \nabla^2\varphi$$

Con esta expresión, puede escribirse la denominada ecuación de Poisson.

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En las zonas en que no hay carga, se cumple $\nabla^2\varphi = 0$.

Obsérvese que el operador Laplaciano opera sobre un campo escalar (un valor real para cada punto) y obtiene otro campo escalar.

Ideas básicas sobre el operador rotacional

El operador rotacional se estudiará en detalle en el tema de magnetostática. Se presentan aquí algunas ideas previas, útiles para su aplicación en electrostática.

- El operador rotacional opera sobre un campo vectorial y devuelve otro campo vectorial.
- Se representa como el producto vectorial del vector simbólico nabla ($\vec{\nabla}$) por el campo: $\vec{\nabla} \times \vec{F}$
- Está relacionado con la integral de camino a lo largo de líneas (caminos) cerradas (circulación).
- Dado que la integral de camino a lo largo de cualquier línea cerrada del campo eléctrico es cero, debido a que es conservativo, el rotacional del campo electrostático es cero en todos los puntos: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$
- Esta ecuación en su versión integral es $\forall C \ \oint_C \vec{E}.d\vec{l} = 0$

Ecuación de la electrostática

Utilizando los operadores diferenciales se pueden formular las condiciones que cumple el campo electrostático de forma compacta con solo dos ecuaciones:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Usando el teorema de Gauss y el teorema de Stokes (que se verá más adelante al hablar de magnetostática), estas ecuaciones pueden escribirse en forma integral.

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \oint_C \vec{E}.d\vec{l} = 0$$

Es decir, que el flujo del campo electrostático a través de cualquier superficie cerrada es la carga que contiene, dividida por ε_0 y que la integral de línea a lo largo de cualquier camino cerrado es cero.

Una forma alternativa, equivalente a la anterior, de resumir la electrostática en dos ecuaciones es:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{\nabla\varphi}$$

Uso práctico de operadores diferenciales

En la práctica, para el estudio de los campos electromagnéticos, los operadores diferenciales suelen utilizarse en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas, y para calcularlos se emplean tablas en las que ya están desarrollados los valores de sus distintas coordenadas en función de las coordenadas del campo del que se calcula el operador.

Laplaciano

Divergencia del gradiente. Relaciona potencial y carga.

Rotacional y circulación

El rotacional está relacionado con la circulación (integral de línea a lo largo de caminos cerrados).

Rotacional del campo electrostático

Vale cero ya que trata de un campo conservativo y todas las circulaciones valen cero.

Anexo: Resumen electrostática

En la siguiente figura se representan de forma esquemática las principales relaciones entre las magnitudes básicas de la electrostática.