Nombre y Apellidos: Mayo 2012

Instrucciones:
* Cada problema se entregará por separado.
* Si se utilizan hojas adicionales se deberá poner el nombre en todas ellas
* Sólo se responderán dudas relativas al enunciado en los primeros 15 minutos del examen.

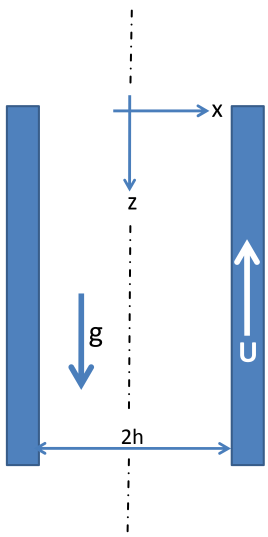
Problema-1

Un fluido viscoso de densidad ρ y viscosidad μ fluye de manera laminar y estacionaria debido a la acción de la gravedad entre dos placas verticales paralelas de longitud L y separación 2h (h<<L). La placa de la derecha se mueve con velocidad constante, U, hacia arriba. Sabiendo que no hay gradientes de presión entre las placas, determinar

a) El perfil de velocidad del fluido.

b) ¿En qué región del sistema es mayor el esfuerzo (stress) cortante?

c) Encontrar una relación adimensional entre el tiempo T que tardaría el sistema en alcanzar el régimen estacionario y las variables ρ, μ, h, g y U.



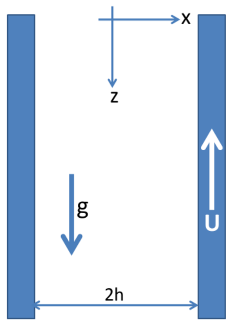
Enunciado

Un fluido viscoso de densidad ρ y viscosidad μ fluye de manera laminar y estacionaria debido a la acción de la gravedad entre dos placas verticales paralelas de longitud L y separación $2h$ ($h \ll L$). La placa de la derecha se mueve con velocidad constante, U, hacia arriba. Sabiendo que no hay gradientes de presión entre las placas, determinar

a) El perfil de velocidad del fluido.

b) ¿En qué región del sistema es mayor el esfuerzo (stress) cortante?

c) Encontrar una relación adimensional entre el tiempo T que tardaría el sistema en alcanzar el régimen estacionario y las variables ρ, μ, h, g y U.



Solución

a) El perfil de velocidad del fluido.

Como el flujo es bidimensional, no existirá dependencia de las variables en la componente y y el campo de velocidades estará descrito por $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + w\mathbf{k}$ (es decir v=0) Asimismo, como el flujo es laminar, asumimos que no hay dependencia explícita en la dirección z (en otras palabras, como el sistema es "infinito", el fluido se *ve* igual a distintas alturas. Esto es análogo a lo que ocurre con el campo eléctrico entra las placas de un condensador infinito). Finalmente, como el problema es estacionario, no habrá por tanto dependencia explícita en el tiempo. Es decir, $u = u(x)$ y $w = w(x)$. Por último, las condiciones de contorno en las paredes serán:

$$u(x = \pm h) = 0 \qquad w(x = -h) = 0 \qquad w(x = h) = -U. \tag{1}$$

Por tanto, la ecuación de continuidad tendrá la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0, \tag{2}$$

por tanto u será una constante. Por las condiciones de contorno (1), $u = 0$.

Asimismo, las eecuaciones de Navier Stokes,

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}+\cancel{u}\frac{\partial u}{\partial x}+w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}\right)\Rightarrow p=p(z). \tag{3}$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}+\cancel{u}\frac{\partial w}{\partial x}+w\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}\right)+\rho g. \tag{4}$$

De la ecuación (4) deducimos que

$$\rho g+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial p}{\partial z}=0, \tag{5}$$

donde la última igualdad se debe a que, como dice el enunciado, no hay gradientes de presiones entre las placas.

Integrando la ecuación (5) dos veces con respecto a x, llegamos a

$$w(x)=-\frac{\rho g}{2\mu}x^2+Ax+B, \tag{6}$$

donde A y B son constantes de integración. Usando las condiciones de contorno (1), llegamos a

$$w(x)=-\frac{\rho g}{2\mu}(x^2-h^2)-\frac{U}{2}\left(1+\frac{x}{h}\right). \tag{7}$$

b) ¿En qué región del sistema es mayor el esfuerzo (stress) cortante?

En régimen laminar, el esfuerzo cortante viene dado por la ley de Newton:

$$\tau_{xz}=\mu\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-\rho g x-\frac{\mu U}{2h}. \tag{8}$$

Como es lineal, por tanto, en el intervalo $[-h,h]$, el valor absoluto del stress será máximo en $x=h$.

c) Encontrar una relación adimensional entre el tiempo T que tardaría el sistema en alcanzar el régimen estacionario y las variables ρ, μ, h, g y U

Queremos *adimensionalizar* la expresión

$$T=f(\rho,\mu,h,g,U), \tag{9}$$

por tanto $n=6$.

Escribimos las dimensiones de todas las variables:

$$[T]=T;[\rho]=ML^{-3};[\mu]=ML^{-1}T^{-1};[h]=L;[g]=LT^{-2};[U]=LT^{-1}; \tag{10}$$

Por tanto, $j_{max}=3$. Como suele ser costumbre en Mecánica de Fluidos, tomamos como *base dimensional* las variables ρ, h y U, que como son dimensionalmente independientes (no podemos formar un número Π con ellas) entonces $j=3$.

Por tanto $k = n - j = 6 - 3 = 3$ números Π. Siguiendo el procedimiento explicado en los apuntes, llegamos a:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{TU}{h}, && (11)\\
\Pi_2 &= \frac{gh}{U^2}, && (12)\\
\Pi_3 &= \frac{\mu}{\rho U h} = Re^{-1}. && (13)
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$T = \frac{h}{U}\hat{f}\left(\frac{gh}{U^2}, Re\right). \tag{14}$$