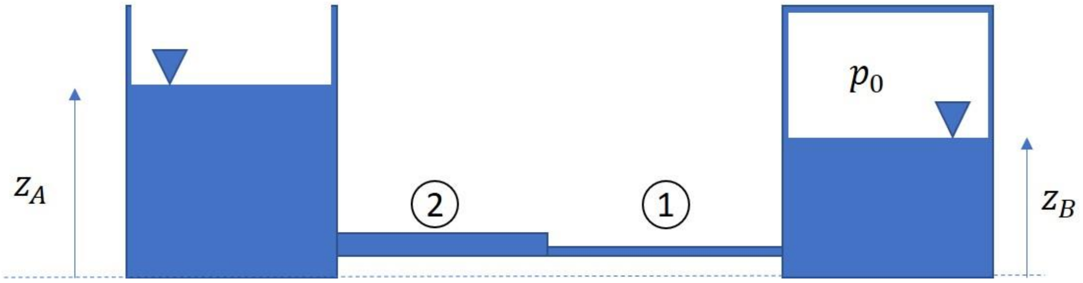
PROBLEMA 2

Se dispone de una instalación como la de que se muestra en la figura en la que se conectan dos depósitos, uno abierto a la atmósfera y otro presurizado a presión relativa p_0, conectados por medio de dos tramos de tuberías con diámetros d_1 y d_2, longitudes L_1y L_2 y de igual rugosidad ϵ. El fluido que discurre entre los depósitos tiene una viscosidad dinámica μ y una densidad ρ. Las cotas de los niveles de los depósitos, z_A y z_B, se pueden considerar constantes.

Considerar el coeficiente de pérdida de carga en el elemento de unión de ambas tuberías referida a la velocidad de la tubería de menor diámetro para cualquier sentido de flujo K_U, y el coeficiente de entrada de depósito a tubería K_E. Se pide:



Utilizar la ecuación de Haaland para el cálculo del factor de fricción:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8\,log\left(\left(\frac{\epsilon/d}{3.7}\right)^{1.1} + \frac{6.9}{Re_d}\right)$$

a) **Marca la respuesta correcta sobre el sentido de la circulación del flujo entre los dos depósitos.**
   1. La circulación irá en cualquier caso desde el depósito presurizado hasta el depósito abierto a la atmósfera.
   2. El sentido de la circulación dependerá únicamente de los valores de z_A y z_B.
   3. La circulación irá en cualquier caso desde el depósito abierto a la atmósfera hasta el depósito presurizado.
   4. Ninguna de las otras respuestas es válida.

b) **Calcular el caudal que circula entre los depósitos con los valores de la tabla. Expresar el resultado en m^3/h con dos decimales.**

$d_1 =$	3 cm	$z_A =$	6 m
$d_2 =$	8 cm	$z_B =$	2 m
$L_1 =$	100 m	$K_E =$	1.5
$L_2 =$	50 m	$K_U =$	0.8
$\epsilon =$	0.045 mm	$\mu =$	10^{-3} kg/ms
$g =$	9.81 m/s^2	$\rho =$	1000 kg/m^3
$p_0 =$	100 kPa		

c) **Se pretende invertir el flujo en la tubería manteniendo los niveles de los depósitos (z_A y z_B) y el caudal calculado en el apartado anterior. ¿Qué presión relativa debe tener el depósito B (p_0)? Expresar el resultado en Pa sin ningún decimal.**

Resolución

Para analizar el sentido de la circulación del fluido entre ambos depósitos, se aplica la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre de ambos depósitos, en cualquier dirección (de A a B, o de B a A) y se comprueba que las pérdidas hidráulicas son mayores que cero.

Para ello, se supone que el fluido circula desde el depósito B hasta el depósito A:

$$\frac{p_B}{\rho g} + z_B + \frac{\alpha v_B^2}{2g} - h_{pérdidas} + h_B - h_T = \frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{\alpha v_A^2}{2g} \qquad (1)$$

- Dado que los niveles de ambos depósitos pueden considerarse constantes, las velocidades v_A y v_B pueden considerase despreciables.
- Dado que el dato que nos dan en el enunciado es la presión relativa del depósito B, se puede trabajar en términos relativos.
- Dado que no hay bombas ni turbinas entre ambos depósitos, $h_B = h_T = 0$.

Reagrupando términos, la ecuación de Bernoulli queda:

$$h_{pérdidas} = \frac{p_0}{\rho g} + z_B - z_A > 0 \qquad (2)$$

Se observa que el sentido del flujo depende de la presión relativa dentro del depósito B y de la diferencia de cotas entre los niveles de ambos depósitos. Por tanto, la respuesta correcta del apartado a) es "*Ninguna de las otras respuestas es válida*".

Sustituyendo los datos del apartado se demuestra que $h_{pérdidas}$ queda mayor que cero en este sentido, por lo que el fluido circula desde B hasta A.

Desarrollando las pérdidas en ambos tramos de tuberías, teniendo en cuenta la entrada a tubería (K_E), la unión entre ambas tuberías (K_U, referida a la tubería de menor diámetro) y la descarga al depósito A ($K_D = 1$), queda:

$$h_{pérdidas} = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2g} + (K_E + K_U) \frac{v_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2g} + K_D \frac{v_2^2}{2g} \qquad (3)$$

Por otro lado, dado que la densidad es constante, por la conservación de la masa, el caudal en ambas tuberías es el mismo:

$$Q_1 = Q_2 \rightarrow v_1 A_1 = v_2 A_2 \rightarrow v_1 = v_2 \frac{D_2^2}{D_1^2} \qquad (4)$$

Desarrollando las ecuaciones anteriores, y expresando la ecuación (3) en función de la velocidad en la tubería 1, v_1, queda:

$$\frac{v_1^2}{2g}\left(f_1 \frac{L_1}{D_1} + K_E + K_U + \frac{D_1^4}{D_2^4}\left(f_2 \frac{L_2}{D_2} + K_D\right)\right) = \frac{p_0}{\rho g} + z_B - z_A$$

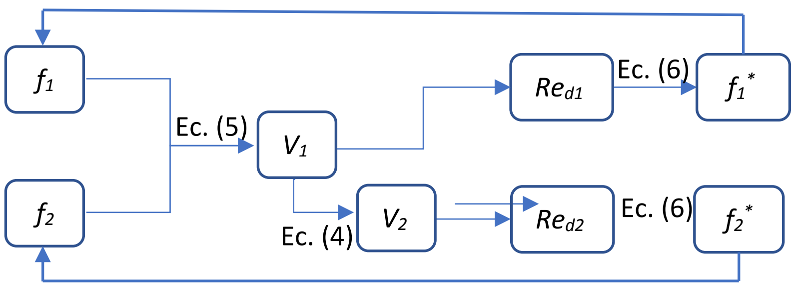
Despejando:

$$v_1^2 = \frac{2g\left(\frac{p_0}{\rho g} + z_B - z_A\right)}{f_1 \frac{L_1}{D_1} + K_E + K_U + \frac{D_1^4}{D_2^4}\left(f_2 \frac{L_2}{D_2} + K_D\right)} \qquad (5)$$

Para poder calcular dicha velocidad, se deben conocer los factores de fricción de ambas tuberías, f_1 y f_2. Para ello, asumiendo que estamos en régimen turbulento, utilizaremos la expresión de Haaland para cada uno de los tramos de la tubería:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8\, log\left(\left(\frac{\frac{\epsilon}{d}}{3.7}\right)^{1.1} + \frac{6.9}{Re_d}\right) \qquad (6)$$

Dado que se trata de un problema no lineal, se resuelve iterando, comenzando con unos valores iniciales de $f_1 = f_2 = 0.02$. Esos valores se sustituirían en la ecuación (5) para obtener v_1 y según la (4), $v_2 = v_1 D_1^2/D_2^2$. Con esos valores de velocidad se comprobaría que nos encontramos en régimen turbulento $Re_i > 2300$ en ambas tuberías, y se calcularía el nuevo factor de fricción f_1^* y f_2^* por medio de la expresión de Haaland (2). En caso de que el error entre el nuevo valor del factor de fricción y el valor considerado inicialmente sea mayor de un 5%, se volvería a calcular la velocidad por medio de la ecuación (5), y se repetiría el proceso iterativo anterior hasta que el error fuera menor al 5%.



En cada iteración:

$$Err_1 = \left|\frac{f_1 - f_1^*}{f_1}\right| < 5\%$$

$$Err_2 = \left|\frac{f_2 - f_2^*}{f_2}\right| < 5\%$$

$$Q = v_1 A_1 = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} \rightarrow Q = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} 3600\ \frac{m^3}{h}$$

Una vez que tenemos el caudal, se pretende invertir el sentido del flujo cambiando la presión dentro del depósito B. Para ello, se vuelve a plantear la ecuación de Bernoulli, entre ambos depósitos, pero desde A hasta B:

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{\alpha v_A^2}{2g} - h_{pérdidas} + h_B - h_T = \frac{p_B}{\rho g} + z_B + \frac{\alpha v_B^2}{2g} \qquad (7)$$

Al igual que en el apartado anterior, se cancelarían la mayoría de los términos, quedando, la presión relativa dentro del depósito B, p_0, como:

$$\frac{p_0}{\rho g} = z_A - z_B - h_{pérdidas}$$

Siendo las pérdidas en este caso:

$$h_{pérdidas} = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2g} + (K_U + K_D) \frac{v_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2g} + K_E \frac{v_2^2}{2g} \qquad (8)$$

Resultados:

$$f_1 = 0.02646$$

$$f_2 = 0.02964$$

$$Q = 2.94\ m^3/h$$

$$p_0 = -21254\ Pa$$