Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2022

PROBLEMA 2

Una persona recibe una transfusión de sangre de caudal Q. La sangre fluye desde una bolsa cuya parte superior se encuentra a presión atmosférica y baja a través de un conducto recto vertical. El nivel de sangre de la bolsa es h. Posteriormente hay un codo de coeficiente de pérdida de carga K_{codo} y un tramo recto horizontal de longitud L. Finalmente, la sangre llega a una aguja de diámetro d y de longitud despreciable, cuyo coeficiente de pérdida de carga es K_{aguja} (referido al diámetro d). La presión relativa del caudal de salida de la sangre se puede considerar constante e igual a P_{sal}. Asumir flujo en régimen estacionario y completamente desarrollado y propiedades de la sangre constantes. El diámetro del conducto es D.

Datos:

Q =	9 cm^3/min	μ_{sangre} =	0.003 Pa·s
h =	15 cm	ρ_{sangre} =	1060 kg/m^3
K_{codo} =	1	D =	2 mm
K_{aguja} =	4	d =	0.5 mm
P_{sal} =	10500 Pa	L =	1 m
g =	9.81 m/s^2		

Se pide obtener:

a) (3.5 puntos) Expresión del perfil de velocidad en el tramo recto vertical del tubo en función del gradiente de presiones.
b) (1.5 puntos) Valor numérico del gradiente de presiones en el tramo vertical del tubo.
c) (4 puntos) Altura a la que es necesario colocar la base de la bolsa respecto a la aguja.
a) (1 punto) Obtener mediante el teorema de Pi la relación adimensional de la diferencia de presiones ΔP en función de: la longitud L del tramo recto del conducto, el diámetro D, la viscosidad μ de la sangre y la velocidad v.

Justificar todas las hipótesis realizadas. Considerar el eje z en sentido descendente.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(v_z)=0$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{{v_\theta}^2}{r}\right)=\rho g_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}v_r v_\theta\right)=\rho g_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2022

a) Expresión del perfil de velocidad en el tramo recto vertical del tubo en función del gradiente de presiones.

Hipótesis y consideraciones:

1. El flujo es estacionario y completamente desarrollado.
2. Flujo paralelo a las paredes de la tubería (u_r nula).
3. El fluido es incompresible y tiene viscosidad constante
4. Existe un gradiente de presiones en dirección z.
5. Se considera la gravedad
6. El problema es axil-simétrico, lo que implica que u_θ es cero y el problema no depende de θ
7. Flujo laminar, ya que se puede comprobar que Re<2300:

$$Q = 9\ cm^3/s = 1{,}5 \cdot 10^{-7} m^3/s$$

$$D = 2 \cdot 10^{-2}\ m \rightarrow A = 3{,}1416 \cdot 10^{-6}\ m^2 \rightarrow v = Q/A = 0{,}0477\ m/s$$

Por tanto,

$$Re_D = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} = 33{,}7 < 2300$$

Conservación de la masa:

$$\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)} + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow v_z = f(r)$$

Conservación de la cantidad de movimiento (N-S):

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + \cancel{v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}} + \cancel{v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{1}{\mu}\left(-\rho g_z + \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

$$r\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r^2}{2 \cdot \mu}\left(-\rho g_z + \frac{\partial p}{\partial z}\right) + A \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r}{2 \cdot \mu}\left(-\rho g_z + \frac{\partial p}{\partial z}\right) + \frac{A}{r}$$

$$v_z = \frac{r^2}{4 \cdot \mu}\left(-\rho g_z + \frac{\partial p}{\partial z}\right) + A \cdot \ln(r) + B$$

Condiciones de contorno:

$$\left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \rightarrow A = 0$$

$$v_z(r = D/2) = 0 \rightarrow B = \frac{D^2}{4 \cdot 4 \cdot \mu}\left(\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2022

Expresión del perfil de velocidades:

$$v_z = \frac{r^2}{4\cdot\mu}\left(-\rho g_z + \frac{\partial p}{\partial z}\right) + \frac{D^2}{4\cdot 4\cdot\mu}\left(\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right) = \left(\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{D^2}{4\cdot 4\cdot\mu} - \frac{r^2}{4\cdot\mu}\right)$$

$$\boldsymbol{v_z = \frac{1}{4\mu}\left(\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right) = \frac{1}{4\mu}\left(\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right)(R^2 - r^2) = -R^2\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z\right)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

b) Valor numérico del gradiente de presiones en el tramo vertical del tubo.

$$Q = \iint v_z(r)\cdot dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{D/2} v_z(r)\, r\cdot dr\cdot d\theta$$

$$Q = 2\pi\int_0^{D/2}\frac{1}{4\mu}\left(\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right) r\cdot dr$$

$$Q = \frac{2\pi}{4\mu}\left(\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right)\int_0^{D/2}\left(\frac{rD^2}{4} - r^3\right)\cdot dr$$

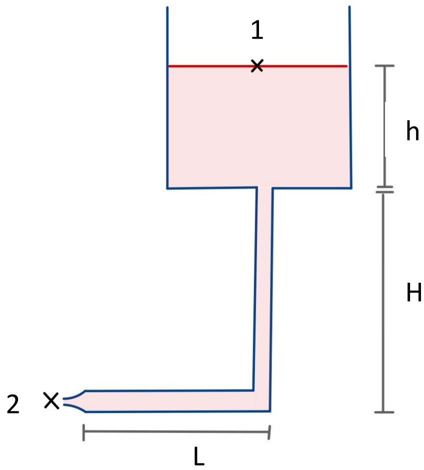
$$Q = \frac{2\pi}{4\mu}\left(\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(\frac{D^4}{64}\right) \to Q = \frac{\pi D^4}{128\mu}\left(\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

Entonces,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z - \frac{128\mu\cdot Q}{\pi D^4} = \rho g_z - \frac{8\mu\cdot Q}{\pi R^4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 1060\cdot 9{,}81 - \frac{128\cdot 0.003\cdot 1{,}5\cdot 10^{-7}}{\pi\cdot 0{,}002^4} = 9252{,}7\ Pa/m$$

b) Altura a la que es necesario colocar la base de la bolsa respecto a la aguja.



El flujo es laminar:

$$Q = 9\ cm^3/s = 1{,}5\cdot 10^{-7} m^3/s,$$
$$D = 2\cdot 10^{-2}\ m,$$
$$A = 3{,}1416\cdot\ 10^{-6}\ m^2,$$
$$v = 0{,}0477\ m/s$$

$$Re_D = \frac{\rho\cdot V\cdot D}{\mu} = 33{,}7 < 2300$$

Aplicando Bernoulli entre 1-2. Se trabaja en presiones relativas y el origen de cotas se toma en el punto 2.

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2022

$$\left(\frac{P}{\rho g}+\frac{\alpha v^2}{2g}+z\right)_1 - \mathrm{h}_{turb} + \mathrm{h}_{bomb} = \left(\frac{P}{\rho g}+\frac{\alpha v^2}{2g}+z\right)_2 + \sum_{\substack{Cada\\tramo\\recto}} \mathrm{h}_f + \sum_{\substack{Cada\\elemento}} \mathrm{h}_m$$

$$\left(\cancel{\frac{P}{\rho g}}+\cancel{\frac{\alpha v^2}{2g}}+z\right)_1 = \left(\frac{P}{\rho g}+\frac{2v_{aguja}^2}{2g}+\cancel{z}\right)_2 + f\frac{L_{horizontal}}{D}\frac{v^2}{2g} + f\frac{L_{vertical}}{D}\frac{v^2}{2g} + K_{codo}\frac{v^2}{2g} + K_{aguja}\frac{v_{aguja}^2}{2g}$$

Al ser régimen laminar $f = 64/Re_D$, por lo que:

$$h + H = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_{aguja}^2}{2g} + \frac{64}{Re_D}\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} + \frac{64}{Re_D}\frac{H}{D}\frac{v^2}{2g} + K_{codo}\frac{v^2}{2g} + K_{aguja}\frac{v_{aguja}^2}{2g}$$

De la conservación de la masa:

$$v_{aguja}\cdot\frac{\pi D_{aguja}^2}{4} = v\cdot\frac{\pi D^2}{4} \rightarrow v_{aguja} = 16\cdot v$$

$$h + H = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{(16\cdot v)^2}{g} + \frac{64}{Re_D}\frac{1}{D}\frac{v^2}{2g}(L+H) + K_{codo}\frac{v^2}{2g} + K_{aguja}\frac{(16\cdot v)^2}{2g}$$

$$0{,}15 + H = 1{,}00975 + 0{,}05937 + 0{,}11008(1+H) + 0{,}000116 + 0{,}11887$$

$$0{,}15 + H = 1{,}00975 + 0{,}00371 + 0{,}11008(1+H) + 0{,}000116$$

$$H = 1{,}29\ m$$

c) Obtener mediante el teorema de Pi la relación adimensional de la diferencia de presiones ΔP en función de: la longitud L del tramo recto del conducto, el diámetro D, la viscosidad μ de la sangre y la velocidad v.

<u>Dimensiones</u>: $n = 5$ variables: $\Delta P, D, v, \mu, L$

Dependiente:

$$\Delta P = [Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right] = \left[\frac{kg\cdot m}{s^2\cdot m^2}\right] = [ML^{-1}T^{-2}];$$

Independientes:

$\mu = [kg/m\cdot s] = [ML^{-1}T^{-1}];$

$\mathrm{v} = [m/s] = [LT^{-1}];$

$\mathrm{D} = [m] = [L];$

$\mathrm{L} = [m] = [L]$

<u>Determinación de j</u>: $j = 3 = [M, L, T]$.

<u>Grupo dimensional</u>: μ, v, D

$\mu^a v^b D^c = [ML^{-1}T^{-1}]^a[LT^{-1}]^b[L]^c = M^0L^0T^0$

$M \rightarrow a = 0$

$L \rightarrow -a + b + c = 0$

$T \rightarrow -a - b = 0$

Se obtiene $a = b = c = 0$, por lo que μ, v, D forman un grupo dimensional.

<u>Grupos adimensionales</u>: $k = n - j = 5 - 3 = 2$

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2022

El primer grupo haremos que contenga la variable dependiente (ΔP):

$$\Pi_{dep} = \Delta P \mu^a v^b D^c = [ML^{-1}T^{-2}][ML^{-1}T^{-1}]^a[LT^{-1}]^b[L]^c$$

$M \rightarrow 1 + a = 0$

$L \rightarrow -1 - a + b + c = 0$

$T \rightarrow -2 - a - b = 0$

Se obtiene $a = -1; b = -1;\ c = 1;$

$$\Pi_{dep} = \Delta P \mu^{-1} \mathrm{v}_1{}^{-1} D^1 = \frac{\Delta P}{\mu \cdot v/D}$$

El siguiente grupo adimensional se obtiene agrupando la variable seleccionada como grupo dimensional con el resto de las variables independientes, una a una:

$$\Pi_{dep} = L \cdot \mu^a \mathrm{v}^b D^c = [L][ML^{-1}T^{-1}]^a[LT^{-1}]^b[L]^c$$

$M \rightarrow a = 0$

$T \rightarrow b = 0$

$T \rightarrow c = -1$

$$\Pi_2 = \frac{L}{D}$$

$$\frac{\Delta P \cdot D}{\mu \cdot v} = f\left(\frac{L}{D}\right)$$