Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2021

PROBLEMA 1

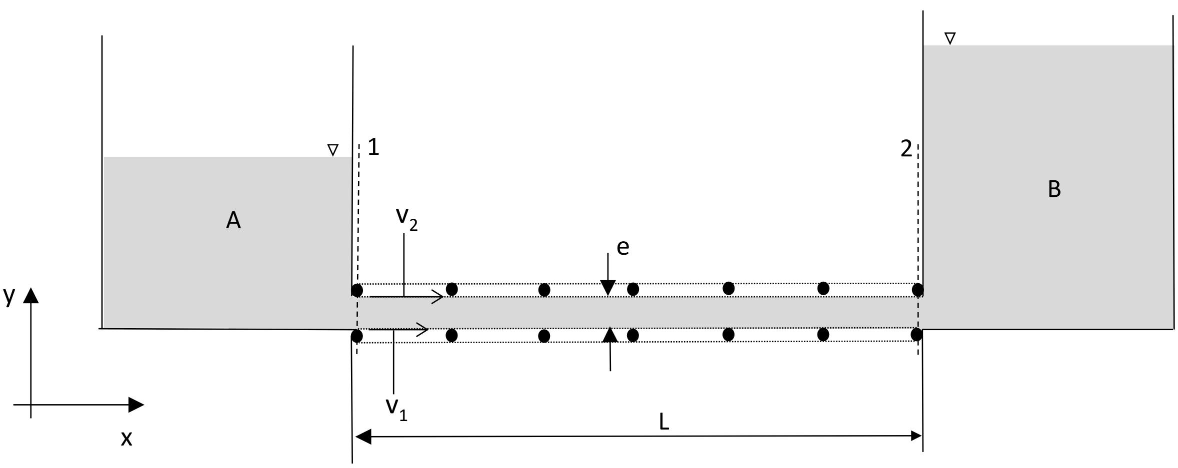
Se bombea un fluido newtoniano incompresible de densidad ρ y viscosidad μ desde el depósito A al depósito B mediante dos cintas transportadoras que se mueven a una velocidad constante v_2 (superior) y v_1 (inferior) y que pueden considerarse de profundidad b infinita.

El fluido circula en régimen laminar y completamente desarrollado entre las cintas transportadoras que se encuentran separadas una distancia e mucho menor que la longitud L entre las secciones 1 y 2.

Calcular, en función de los parámetros del problema

a) (4 puntos) Perfil de velocidad en función del gradiente de presiones.
b) (4 puntos) Gradiente de presiones necesario entre la sección 1 y 2 para que circule fluido del depósito A al B.
c) (2 puntos) Obtener la expresión adimensional del esfuerzo cortante en la pared en función de los parámetros relevantes del problema (μ, v_1, v_2, e, dp/dx).

Justificar todas las hipótesis realizadas.



Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2021

a) (4 puntos) Perfil de velocidad en función del gradiente de presiones.

Por ser dos placas paralelas horizontales, la única componente de la velocidad debe ser u.

$$\vec{v} = u\ (x, y, z)\vec{\imath}$$

Se parte de la ecuación de la conservación de la masa para fluido incompresible.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \to \frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \to \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \to u \neq f(x)$$

$L \gg e$ por tanto, no existe variación del perfil de velocidad en dirección z. Así:

$$u = u(y)$$

De las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w\right)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w\right)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w\right)$$

En el eje z, al no existir w ni g, se llega a:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \to p \neq f(z)$$

En el eje y, al no existir v, se llega a:

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \to\ p(x, y) = -\rho g y + f(x) \quad (1)$$

En el eje x:

$$\underbrace{\cancel{\rho g_x}}_{1} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}_{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}}_{3}\right) = \rho\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{4} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{2}u + \underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}v}}_{5} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}w}}_{6}\right)$$

1. No hay g en esta dirección.
2. La componente $u(y)$, no depende de x.
3. La componente $u(y)$, no depende de z.
4. No depende del tiempo.
5. No hay v.
6. No hay w.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \to \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (2)$$

La componente u solamente depende de y, por lo que $\partial p/\partial x$ sólo podría depender de y según la ecuación anterior (2). Por otro lado, según (1), $\partial p/\partial x = \partial f(x)/\partial x$, y por tanto solo podría depender de x. De esta forma, para que la función $\partial p/\partial x$ cumpla las ecuaciones (1) y (2), $\partial p/\partial x$ ha de ser igual a una constante K. Por tanto:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = K$$

De esta forma se puede integrar fácilmente:

$$K\partial y = \partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = Ky + A$$

$$u(y) = K\frac{y^2}{2} + Ay + B$$

Y sustituyendo:

$$u(y) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{y^2}{2} + Ay + B$$

Para determinar las constantes A y B, se definen las siguientes condiciones de contorno.

En la pared inferior:

$$u(y=0) = v_1 \rightarrow v_1 = B$$

En la pared superior:

$$u(y=e) = v_2 \rightarrow A = \left(\frac{v_2 - v_1}{e} - \frac{dp}{dx}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{e}{2}\right)$$

$$u(y) = \frac{dp}{dx}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{y^2}{2} + \left(\frac{v_2 - v_1}{e} - \frac{dp}{dx}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{e}{2}\right)y + v_1$$

b) (4 puntos) Gradiente de presiones necesario entre la sección 1 y 2 para que circule fluido del depósito A al B.

Para que circule fluido de la sección 1 a la sección 2 se debe tener Q>0 siendo el caudal que circula entre las dos cintas transportadoras el siguiente:

$$Q = b\int_0^e u(y)\,dy$$

$$Q = b\int_0^e \left[\frac{dp}{dx}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{y^2}{2} + \left(\frac{v_2 - v_1}{e} - \frac{dp}{dx}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{e}{2}\right)y + v_1\right]\,dy$$

$$Q = b\left[\frac{dp}{dx}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{e^3}{6} + \left(e\frac{v_2 - v_1}{2} - \frac{dp}{dx}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{e^3}{4}\right) + v_1\cdot e\right]$$

$$Q = b\left[-\frac{dp}{dx}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{e^3}{12} + \left(e\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\right]$$

$$Q > 0 \rightarrow\ b\left[-\frac{dp}{dx}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{e^3}{12} + \left(e\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\right] > 0$$

$$-\frac{dp}{dx}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{e^3}{12} > \left(e\frac{v_2 + v_1}{2}\right)$$

$$\frac{dp}{dx} < 6\mu\cdot\frac{(v_2 + v_1)}{e^2}$$

c) (2 puntos) Obtener la expresión adimensional del esfuerzo cortante en la pared en función de los parámetros relevantes del problema (μ, v_1, v_2, e, dp/dx).

Dimensiones: $n = 6$ variables: $\tau, \mu, v_1, v_2, e, dp/dx$

Dependiente:

$$\tau = [Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right] = \left[\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m^2}\right] = [ML^{-1}T^{-2}];$$

Independientes:

$$\mu = [kg/m \cdot s] = [ML^{-1}T^{-1}];$$
$$v_1 = [m/s] = [LT^{-1}];$$
$$v_2 = [m/s] = [LT^{-1}];$$
$$e = [m] = [L];$$
$$\frac{dp}{dx} = \left[\frac{Pa}{m}\right] = [ML^{-2}T^{-2}];$$

Determinación de j: $j = 3 = [\,M, L, T]$.

Grupo dimensional: μ, v_1, e

$$\mu^a {v_1}^b e^c = [ML^{-1}T^{-1}]^a [LT^{-1}]^b [L]^c = M^0 L^0 T^0$$
$$M \to a = 0$$
$$L \to -a + b + c = 0 \to c = 0$$
$$T \to -a - b = 0 \to b = 0$$

Se obtiene $a = b = c = 0$, por lo que μ, v_1, e forman un grupo dimensional.

Grupos adimensionales: $k = n - j = 6 - 3 = 3$

El primer grupo haremos que contenga la variable dependiente (τ):

$$\Pi_{dep} = \tau \mu^a {v_1}^b e^c = [ML^{-1}T^{-2}][ML^{-1}T^{-1}]^a [LT^{-1}]^b [L]^c$$
$$M \to 1 + a = 0$$
$$L \to -1 - a + b + c = 0$$
$$T \to -2 - a - b = 0$$

Se obtiene $a = -1; b = -1;\ c = 1;$

$$\Pi_{dep} = \tau \mu^{-1} {v_1}^{-1} e^1 = \frac{\tau}{\mu \cdot v_1/e}$$

Los siguientes grupos adimensionales se obtienen agrupando las variables seleccionadas como grupo dimensional con el resto de las variables independientes, una a una:

$$\Pi_1 = \frac{dp}{dx} \cdot \mu^a {v_1}^b e^c = [ML^{-2}T^{-2}][ML^{-1}T^{-1}]^a [LT^{-1}]^b [L]^c$$
$$M \to 1 + a = 0$$
$$L \to -2 - a + b + c = 0$$
$$T \to -2 - a - b = 0$$

Se obtiene $a = -1; b = -1;\ c = 2;$

$$\Pi_1 = \frac{dp}{dx} \mu^{-1} {v_1}^{-1} e^2 = \frac{dp/dx}{\mu \cdot v_1/e^2}$$

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2021

$$\Pi_2 = \frac{v_2}{v_1}$$

$$\frac{\tau}{\mu \cdot v_1/e} = f\left(\frac{dp/dx}{\mu \cdot v_1/e^2}, \frac{v_2}{v_1}\right)$$

Otro grupo dimensional posible: $dp/dx, \mathrm{v}_1, e$

$$\frac{\tau}{\frac{dp}{dx} \cdot e} = f\left(\frac{\mu}{\frac{dp}{dx} \cdot e^2/v_1}, \frac{v_2}{v_1}\right)$$