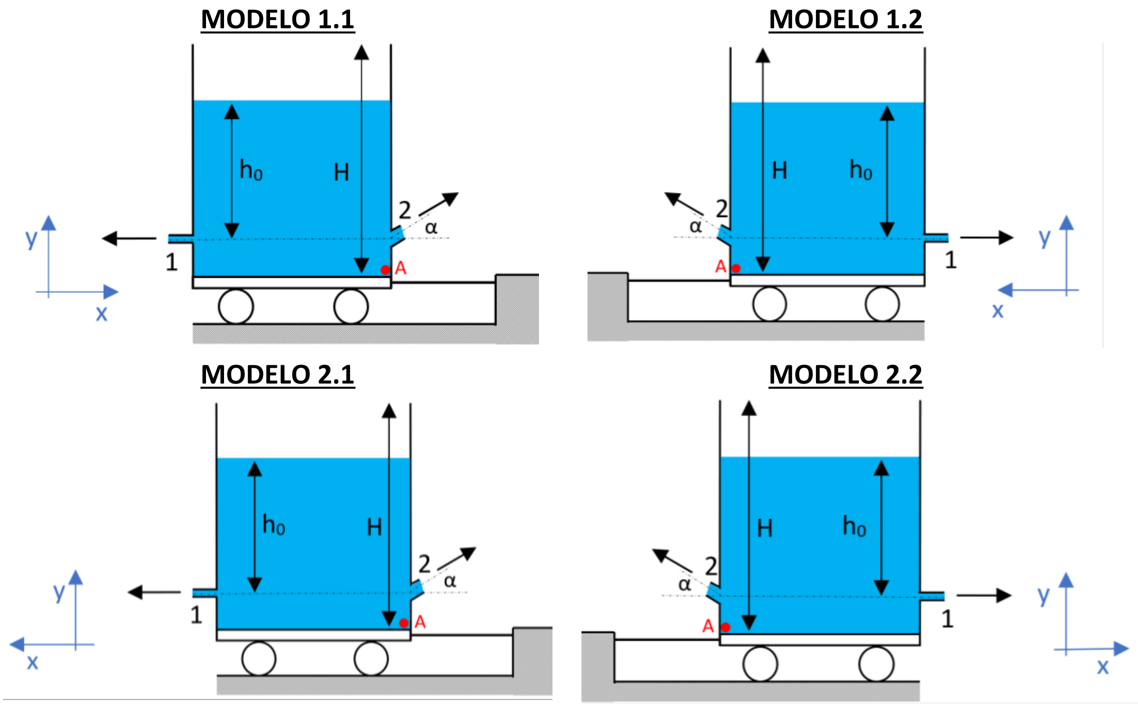
PROBLEMA 2

El tanque mostrado en la figura está anclado a un carro sin fricción y tiene un área transversal cuadrada de lado L=5 m y altura H=0.5 m. Se encuentra fijado a la pared con un cable y está lleno de agua hasta una altura inicial h0. El depósito tiene dos salidas 1 y 2 que se encuentran a la misma altura y tienen áreas $A_1=10^{-5}$ m^2 y $A_2=10^{-3}$ m^2 respectivamente. El fluido sale del depósito por la salida 1 horizontalmente, mientras que por la 2 con un ángulo α=10°, como se puede apreciar en la figura de abajo. Además, cada salida dispone de una válvula que se encuentra inicialmente cerrada. En el instante inicial se abren completamente las dos válvulas y el depósito comienza a vaciarse. Se considerarán todas las pérdidas (primarias y secundarias) despreciables. La presión atmosférica es $P_{atm}=10^5$ Pa. Tomar g=9.81 m/s^2 y ρ=1000 kg/m^3. Considerar despreciable la longitud de las salidas 1 y 2.



a) (4 puntos) Obtener la evolución temporal de la altura de agua h(t) en el tanque en el papel.

b) (0.5 puntos) Si la altura inicial es h_0=0.3 m, calcular la altura de la lámina de agua en metros al cabo de t=300 s. Dar el resultado con 3 decimales.

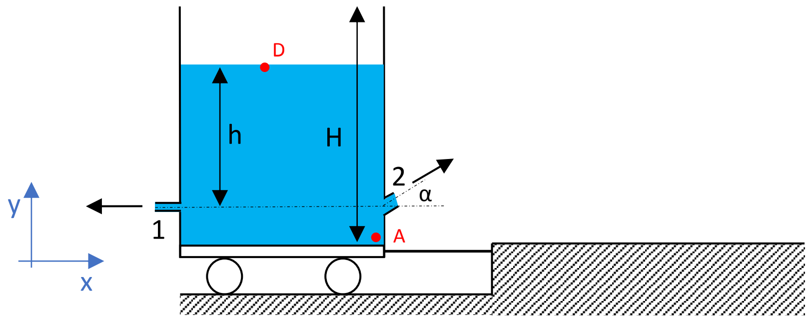
c) (3 puntos) Calcular la tensión del cable en Newton en el instante t= t_0, si la altura inicial es h_0. Dar el resultado con 2 decimales.

~~d) (1.5 puntos) A continuación, cuando el volumen del agua dentro del depósito es V_1, se cierran las válvulas, se retira el cable y se empuja el mismo con una aceleración horizontal con módulo a m/s^2 y sentido opuesto a la pared de la figura. Calcular el volumen de agua en m^3 que hay en el tanque después de acelerarlo. Dar el resultado con 3 decimales.~~

~~e) (1 punto) Calcular la presión absoluta en el punto A (en Pa, sin decimales) en el instante indicado en la pregunta anterior y dibujar en el papel las isobaras.~~

<u>**RESOLUCIÓN**</u>

a) Obtener la evolución temporal de la altura de agua h(t) en el tanque en el papel.



Se aplica la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre del depósito (D) y la salida 1. Teniendo en cuenta que la presión en ambos puntos es la misma, que la velocidad en el punto D es mucho menor que la velocidad en la salida 1 y que las pérdidas son despreciables:

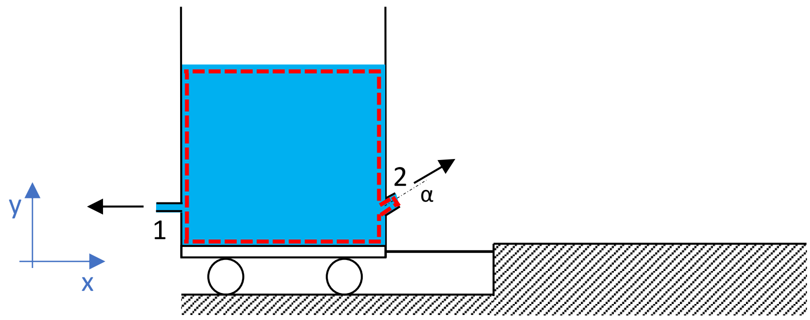
$$\left(\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+z\right)_D - \mathrm{h}_{turbinas} + \mathrm{h}_{bombas} = \left(\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+z\right)_1 + \mathrm{h}_{pérdidas}$$

$$\frac{{v_1}^2}{2g}+z_1=\frac{{v_D}^2}{2g}+z_D$$

$${v_1}^2=2\mathrm{g}(z_D-z_1)=2gh \rightarrow v_1=\sqrt{2gh}$$

Si se usa el mismo razonamiento para la salida 2, es posible obtener que $v_2=v_1=\sqrt{2gh}$

Si se aplica la ecuación de conservación de la masa a un volumen de control deformable que englobe solamente el fluido, y sea normal a las salidas se obtiene lo siguiente[1]:



$$0=\frac{d}{dt}\iiint_{VC}\rho dV+\iint_{SC}\rho(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA$$

$$0=\rho L^2\frac{dh}{dt}+\rho v_1 A_1+\rho v_2 A_2$$

[1] La solución es la misma para los 4 modelos

$$0 = L^2\frac{dh}{dt} + \sqrt{2\text{gh}} \cdot (A_1 + A_2)$$

$$\int_{h_0}^{h} \frac{dh}{\sqrt{2\text{gh}}} = -\int_0^t \frac{(A_1 + A_2)}{L^2}\text{dt} \rightarrow \frac{\sqrt{\text{h(t)}} - \sqrt{h_0}}{\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}}} = -\frac{(A_1 + A_2)}{L^2} \cdot \text{t}$$

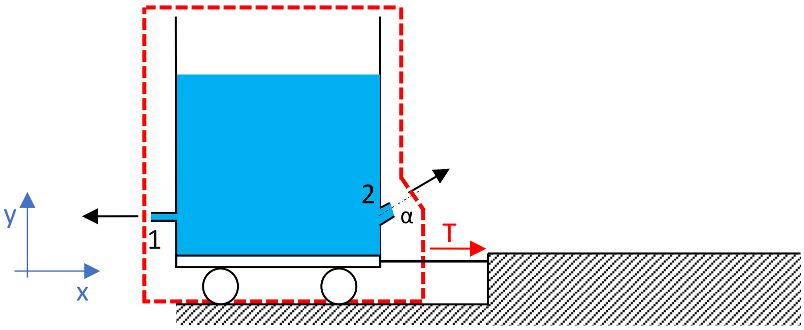
$$\text{h(t)} = \left(\sqrt{h_0} - \frac{(A_1 + A_2)}{L^2} \cdot \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} \cdot t\right)^2$$

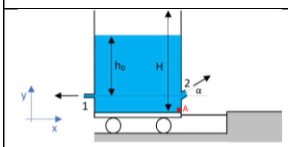
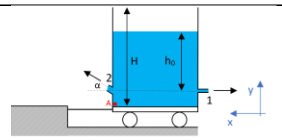
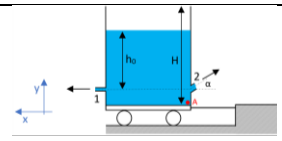
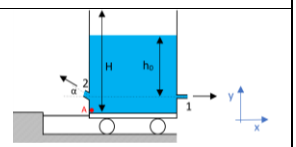
b) Si la altura inicial es h_0=0.3 m, calcular la altura de la lámina de agua en metros al cabo de t=300 s. Dar el resultado con 3 decimales.

$$\text{h}(\text{t}_1) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{(A_1 + A_2)}{L^2} \cdot \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} \cdot \text{t}_1\right)^2 = 0.271\, m$$

c) Calcular la tensión del cable en Newton en el instante t= 200 s, si la altura inicial es h_0=0.3 m. Dar el resultado con 2 decimales.

Se aplica la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en dirección x a un volumen de control que englobe a todo el depósito y tomando un sistema de referencia fijo. Se tiene en cuenta que las fuerzas de presión, las fuerzas debidas a los esfuerzos cortantes y la fuerza de rozamiento con el suelo son nulas.



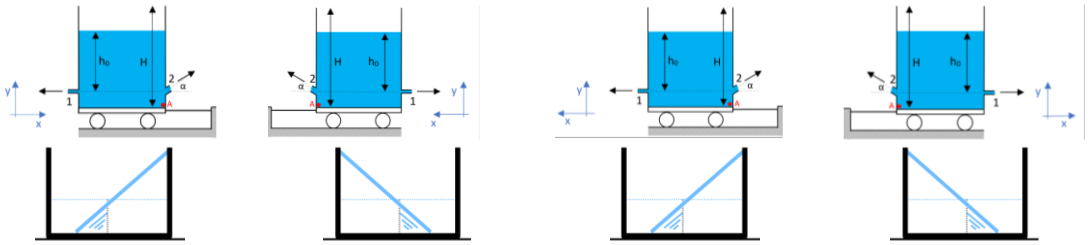
1.1	1.2	2.1	2.2
			
$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV + \iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA$ $T(t) = \rho(-V_1)(V_1)A_1 + \rho(V_2 \cdot \cos(\alpha))(V_2)A_2$ $T(t) = \rho(-\sqrt{2\text{gh}})(\sqrt{2\text{gh}})A_1 + \rho(\sqrt{2\text{gh}}\cos(\alpha))(\sqrt{2\text{gh}})A_2$ $T(t) = \rho 2\text{gh}(t)(A_2\cos(\alpha) - A_1)$		$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV + \iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA$ $-T(t) = \rho(V_1)(V_1)A_1 + \rho(-V_2 \cdot \cos(\alpha))(V_2)A_2$ $-T(t) = \rho(\sqrt{2\text{gh}})(\sqrt{2\text{gh}})A_1 + \rho(-\sqrt{2\text{gh}}\cos(\alpha))(\sqrt{2\text{gh}})A_2$ $T(t) = \rho 2\text{gh}(t)(A_2\cos(\alpha) - A_1)$	

$$T(\text{t}_1) = \rho 2\text{gh}(\text{t}_1)(A_2\cos(\alpha) - A_1) = 5.19\, N$$

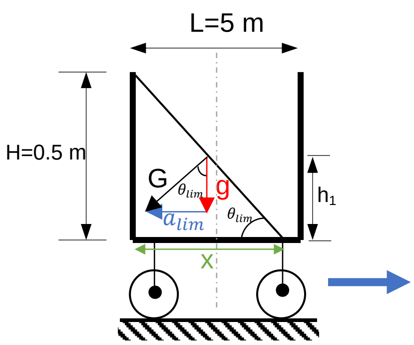
d) A continuación, cuando el volumen del agua dentro del depósito es V_1=4 m^3, se cierran las válvulas, se retira el cable y se empuja el mismo con una aceleración horizontal con módulo 3 m/s^2 y sentido opuesto a la pared de la figura. Calcular el volumen de agua en m^3 que hay en el tanque después de acelerarlo. Dar el resultado con 3 decimales.

$$h_1 = \frac{V_1}{L^2} = 0.16 \text{ m}$$

Modelo 1.1	Modelo 1.2	Modelo 2.1	Modelo 2.2
$\vec{a} = -a_1\vec{i}$	$\vec{a} = -a_1\vec{i}$	$\vec{a} = a_1\vec{i}$	$\vec{a} = a_1\vec{i}$



Como el recipiente es simétrico, y la altura inicial del líquido es inferior a la mitad de la altura de la pared vertical ($h_1 < H/2$), a medida que la aceleración crece el líquido siempre tocará antes el borde inferior que el superior. Si la aceleración es aún mayor, se llegaría a obtener el ángulo límite, θ_{lim} en el que la superficie libre de líquido toca el borde superior.



$$\tan(\theta_{lim}) = \frac{a_{lim}}{g} = \frac{H}{x} \rightarrow \theta_{lim} = 8.88\,^{\circ}$$

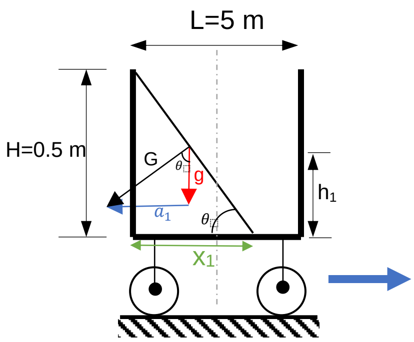
No se derrama nada de líquido hasta a_{lim}, el volumen antes de acelerar y después es el mismo

$$V_1 = V_2$$

$$h_1 \cdot L \cdot L = L \cdot x \cdot \frac{H}{2} \rightarrow x = \frac{h_1 L}{\frac{H}{2}}$$

$$a_{lim} = g \cdot \frac{H^2}{2h_1 \cdot L} = 1.53\,\frac{m}{s^2}$$

En todos los casos numéricos se comprueba que $a_1 > a_{lim}$ por lo que se derrama agua.



$$\tan(\theta) = \frac{a_1}{g} \rightarrow \theta = 17^{\circ}$$

$$\tan(\theta) = \frac{a_1}{g} = \frac{H}{x_1} \rightarrow x_1 = \frac{g \cdot H}{a_1} = 1.635\ m$$

El volumen final de agua que quedará en el tanque será el siguiente:

$$V_F = x_1 \cdot \frac{H}{2} \cdot L = \frac{g \cdot H}{a_1} \cdot \frac{H}{2} \cdot L = 2.044\ m^3$$

e) Calcular la presión absoluta en el punto A (en Pa, sin decimales) en el instante indicado en la pregunta anterior y dibujar en el papel las isobaras.

En todos los casos $a_1 > a_{lim}$ se desborda el agua. La presión absoluta en el punto A es la misma en todos los casos e igual a

$$p_a = p_{atm} + \rho g H = 10^5 + 1000 \cdot 9.81 \cdot 0.5 = 104905$$

Las isóbaras son perpendiculares a la aceleración resultante G.