Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre:

Grupo:

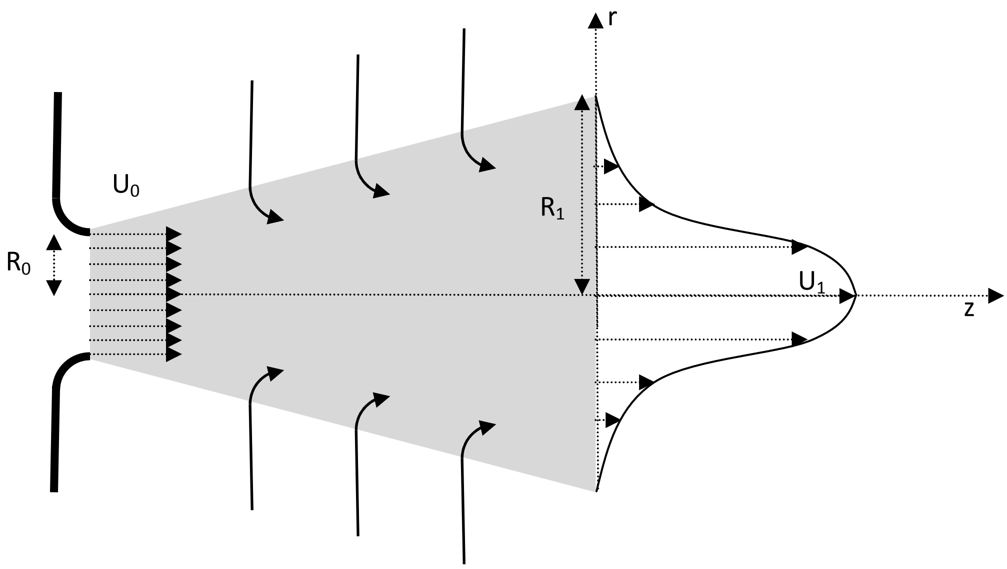
Problema 2

Se tiene un chorro de aire de sección circular. En la sección inicial el radio del chorro es $R_0 = 5$ cm y entra con una velocidad uniforme $U_0 = 30$ m/s. El chorro descarga en aire y lejos del mismo, el aire está en reposo. Se supone que el proceso es estacionario, que las fuerzas másicas son despreciables y que el aire es ideal e incompresible de densidad $\rho = 1.22$ kg/m^3. A medida que aumenta z, el chorro se va abriendo, de manera que su radio r va aumentando, y el perfil de velocidad deja de ser uniforme, tomando la forma:

$$U(r,z) = U_1\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^2$$

donde r es la distancia al eje del chorro y U_1 la velocidad en dicho eje. La configuración es axisimétrica. Se pide:

1. Evaluar U_1, suponiendo que el fluido arrastrado entra radialmente en el chorro y que la presión en todo el campo fluido es uniforme. $R_1 = 50$ cm.
2. Calcular el flujo de aire arrastrado por el chorro.



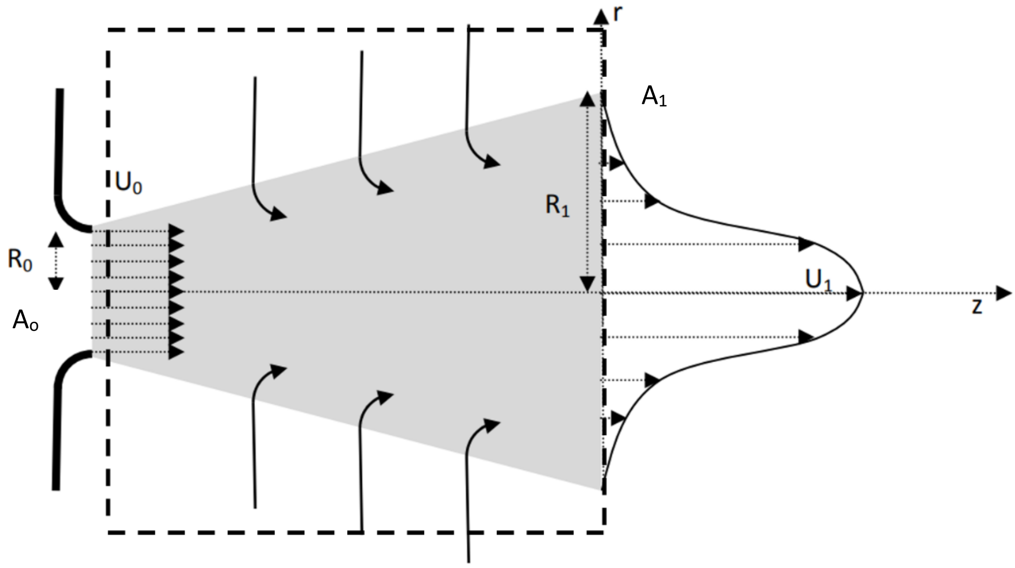
Resultados:

1) 6.71 m/s

2) 1.86 kg/s

Extraordinario 2009-P2

1.



Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$\sum \vec{F} = \cancel{\frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV} + \iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA$$

El aire se comporta en este problema como fluido incompresible. Además, en el eje z, la fuerza es nula, ya que se considera fluido ideal.

$$0 = \iint \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot n)\, dA_0 + \iint \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot n)\, dA_1$$

La entrada de aire arrastrado se realiza en dirección radial, por lo que no habría que tenerla en cuenta:

$$\int_0^{R_0} \rho\cdot U_0(-U_0)\cdot 2\pi r dr + \int_0^{R_1} \rho\cdot U(r)^2\cdot 2\pi r dr = 0$$

$$-\rho\cdot U_0^2\cdot 2\pi\int_0^{R_0} r\, dr + \rho\cdot 2\pi\int_0^{R_1}\left(U_1\left(1-\left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right)^2\right)^2\cdot r dr = 0$$

$$-\rho\cdot U_0^2 2\pi\frac{R_0^2}{2} + 2\pi\rho\cdot U_1\int_0^{R1}\left(1-\left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right)^4\cdot r dr = 0$$

Usando el cambio de variable:

$$t = 1 - r^2/R_1^2$$
$$dt = -2r dr/R_1^2$$

$$-\rho\cdot U_0^2 2\pi\frac{R_0^2}{2} + 2\pi\rho U_1\int_1^0 t^4\cdot\frac{R_1^2 dt}{-2} = 0$$

$$-\rho\cdot U_0^2 2\pi\frac{R_0^2}{2} + 2\pi\rho\cdot U_1^2\cdot\frac{R_1^2}{-2}\frac{t^5}{5}\bigg|_1^0 = 0$$

$$U_1 = \sqrt{5} \cdot U_0 \frac{R_0}{R_1} = \sqrt{5} \cdot 30 \ \frac{5 \cdot 10^{-2}}{50 \cdot 10^{-2}} = 6.71 \frac{m}{s}$$

2. Por conservación de la masa en la misma superficie de control.

$$0 = \frac{d}{dt} \cancel{\iiint_{VC} \rho dV} + \iint_{SC} \rho(\vec{v_r} \cdot \vec{n}) dA$$

$$-\dot{m}_0 - \dot{m}_{arr} + \dot{m}_1 = 0$$

$$\rho(-U_0)\pi R_0^2 - \dot{m}_{arr} + 2\pi\rho \int_0^{R_1} U_1 \left(1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right)^2 r dr$$

Con el mismo cambio de variable anterior:

$$\dot{m}_{arr} = -\rho U_0 \pi R_0^2 + 2\pi\rho U_1 \int_1^0 t^2 \frac{R_1^2 dt}{-2}$$

$$\dot{m}_{arr} = -\rho U_0 \pi R_0^2 + 2\pi\rho U_1 \frac{R_1^2}{-2} \frac{t^3}{3}\bigg|_1^0 = -\rho U_0 \pi R_0^2 + \pi\rho U_1 \frac{R_1^2}{3}$$

Sustituyendo el valor de U_1, del apartado anterior:

$$\dot{m}_{arr} = -\rho U_0 \pi R_0^2 + \pi\rho\sqrt{5} \cdot U_0 \frac{R_0}{R_1} \frac{R_1^2}{3} = \rho U_0 \pi R_0 \left(-R_0 + \frac{\sqrt{5} R_1}{3}\right)$$

$$\dot{m}_{arr} = 1.22 \cdot 30\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} \left(-5 \cdot 10^{-2} + \frac{\sqrt{5} \cdot 50 \cdot 10^{-2}}{3}\right) = 1.855 \frac{kg}{s}$$