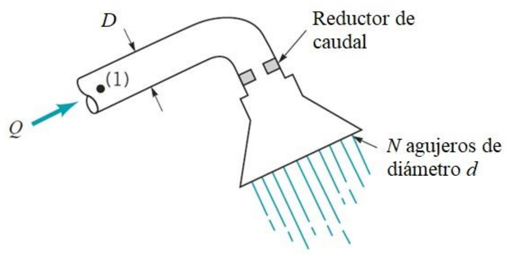
Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2023

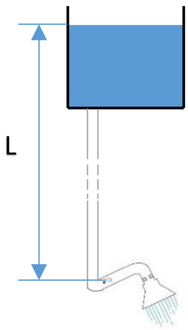
PROBLEMA 2

Para ahorrar agua en una instalación de una ducha, se instala un reductor de caudal en el cabezal como se muestra en la figura.



a) (3 puntos) Determinar el valor del coeficiente de pérdidas (K) del reductor de caudal basado en la velocidad del agua en la tubería, si al instalarlo se pretende que el caudal se reduzca a la mitad, permaneciendo constante la presión en 1. (Todas las pérdidas se pueden despreciar salvo la del reductor de caudal, así como las diferencias de cotas).

Dado el acechante problema de sequía, se quiere estudiar la posibilidad de alimentar la ducha con un depósito de agua de lluvia situado en el tejado de la vivienda, a través de una tubería de cobre de diámetro D. Para que la calidad de la instalación sea aceptable se requiere una presión relativa en el punto (1) de 1.5 bar.



b) (2 puntos) Determinar el caudal que se suministrará, en l/s, para el caso inicial, sin reductor de caudal.

c) (2 puntos) Hallar la altura de la superficie libre del depósito (L) respecto a la ducha para poder tener la presión requerida, asumiendo esa altura como longitud de tubería necesaria (despreciar la altura del agua en el depósito, así como todas las pérdidas secundarias en la tubería).

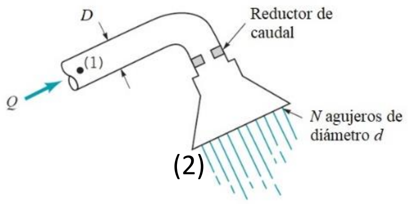
d) (3 puntos) La caída de presión a través del reductor de caudal es función de la densidad del agua (ρ), de su viscosidad (μ), de su velocidad en la tubería principal (V), del diámetro de la tubería principal (D) y del diámetro en la reducción (δ).
Si se construye un modelo a escala doble del cabezal de ducha, calcular la relación de caída de presión frente a la que tiene lugar en el cabezal de tamaño original, si se utiliza el mismo fluido (agua), asumiendo semejanza total.

Ecuación de Haaland: $$\frac{1}{f^{1/2}} \cong -1.8 \cdot log\left(\left(\frac{\varepsilon/d}{3.7}\right)^{1.1} + \frac{6.9}{Re_d}\right)$$

D	=	2 cm
d	=	0.1 cm
N	=	50
ε_{cobre}	=	0.0015 mm

g	=	9.81 m/s^2
ρ	=	1000 kg/m^3
μ	=	0.001 kg m/s

Apartado a) (3 Puntos)



Primero, para el caso sin el reductor de caudal, se aplica Bernoulli entre (1) y la salida de la ducha (2). Teniendo en cuenta que no hay bombas ni turbinas, que se desprecian todas las pérdidas y las diferencias de cotas, que la descarga es a la atmósfera (p_2=0) y suponiendo flujo turbulento (α=1; esta hipótesis se asume en todo el problema y se comprobará en la aplicación numérica de los apartados b y c) queda:

$$\frac{p_1}{\rho g}+\cancel{z_1}+\frac{v_1^2}{2g}=\cancel{\frac{p_2}{\rho g}}+\cancel{z_2}+\frac{v_2^2}{2g} \qquad \text{Ec. 1.}$$

Suponiendo un caudal Q para la situación sin reductor de caudal, se cumple:

$$\mathrm{Q}=A_1 v_1=A_2\, v_2\,; \quad v_1=\frac{4Q}{\pi D^2} \quad ;\, v_2=\frac{4Q}{N\pi d^2}$$

Que, sustituido en la Ec.1, queda:

$$\frac{p_1}{\rho g}=\frac{16Q^2}{2g\pi^2}\left(\frac{1}{N^2 d^4}-\frac{1}{D^4}\right) \qquad \text{Ec. 2.}$$

Se repite el proceso para el caso en el que se dispone del reductor de caudal. Las diferencias con el caso anterior son que ahora sí hay una pérdida de carga que tener en cuenta, y que el caudal será la mitad. Así, la ecuación de Bernoulli entre (1) y (2) queda:

$$\frac{p'_1}{\rho g}+\cancel{z_1}+\frac{v'^2_1}{2g}=\cancel{\frac{p_2}{\rho g}}+\cancel{z_2}+\frac{v'^2_2}{2g}+h_m=\frac{v'^2_2}{2g}+K\frac{v'^2_1}{2g} \qquad \text{Ec. 3.}$$

La pérdida de carga del reductor se refiere a la velocidad en la tubería, como se indica en el enunciado. Y el caudal será de Q/2:

$$\frac{Q}{2}=A_1 v'_1=A_2 v'_2\,; \; v'_1=\frac{2Q}{\pi D^2} \quad ; \; v'_2=\frac{2Q}{N\pi d^2}$$

Que sustituido en la Ec.3 queda:

$$\frac{p'_1}{\rho g}=\frac{4Q^2}{2g\pi^2}\left(\frac{1}{N^2 d^4}-\frac{(1-K)}{D^4}\right) \qquad \text{Ec. 4.}$$

Como p_1 se mantiene, $p'_1=p_1$, e igualando las Ec. 2 y 4 se obtiene el valor de K, que es la única incógnita:

$$\frac{16Q^2}{2g\pi^2}\left(\frac{1}{N^2 d^4}-\frac{1}{D^4}\right)=\frac{4Q^2}{2g\pi^2}\left(\frac{1}{N^2 d^4}-\frac{(1-K)}{D^4}\right)$$

$$K=3\left(\frac{D^4}{N^2 d^4}-1\right)=189$$

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2023

Apartado b) (2 puntos)

Para un valor de presión de p_1=1.5 bar, de la Ec. (2) se despeja el caudal:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{16Q^2}{2g\pi^2}\left(\frac{1}{N^2 d^4} - \frac{1}{D^4}\right)$$

$$Q = \sqrt{\frac{\pi^2 p_1}{8\rho}\frac{1}{\left(\frac{1}{N^2 d^4} - \frac{1}{D^4}\right)}} = 0.00069\frac{m^3}{s} = 0.69\frac{l}{s}$$

Finalmente. se comprueba que es régimen turbulento y por tanto, la hipótesis de α=1 es válida. Para ello se obtienen las velocidades en las secciones 1 y 2 y a continuación el número de Re:

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} = 2.18\frac{m}{s};\ v_2 = \frac{4Q}{N\pi d^2} = 17.46\frac{m}{s}$$

$$Re_{D1} = \frac{\rho\, v_1 D}{\mu} = 4.36 \cdot 10^4\ ;\ Re_{D2} = \frac{\rho\, v_2 d}{\mu} = 17457$$

Por tanto, la hipótesis de régimen turbulento es correcta.

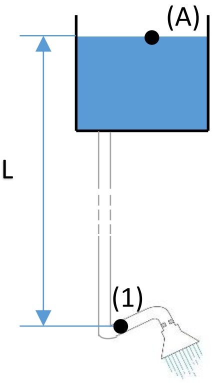
Apartado c) (2 puntos)

Para ello se aplica Bernoulli desde un punto de la superficie libre del depósito (A) hasta el punto (1), del que se conoce tanto la presión (dato), como la velocidad y se asume que es origen de cotas.

$$\cancel{\frac{p_A}{\rho g}} + z_A + \cancel{\frac{v_A^2}{2g}} = \frac{p_1}{\rho g} + \cancel{z_1} + \frac{v_1^2}{2g} + h_f$$

Utilizando la ecuación de Darcy:

$$z_A = L = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + f\frac{L}{D}\frac{v_1^2}{2g}$$



$$L\left(1 - \frac{f}{D}\frac{v_1^2}{2g}\right) = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \longrightarrow \quad L = \frac{\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}}{\left(1 - \frac{f}{D}\frac{v_1^2}{2g}\right)}$$

Ec. 5.

La velocidad por la tubería es la misma que en el punto (1) y se ha obtenido en el apartado anterior. Como el flujo es turbulento, se utiliza la ecuación de Haaland para obtener el factor de fricción, f. Para ello, se emplea el valor de la rugosidad de la tubería de cobre, su diámetro D y el número de Re.

$$\frac{1}{f^{1/2}} \cong -1.8 \cdot log\left(\left(\frac{\frac{\varepsilon}{d}}{3.7}\right)^{1.1} + \frac{6.9}{Re_d}\right) \quad \rightarrow \quad f = 0.02157$$

Sustituyendo el valor de presión requerida, la velocidad y el factor de fricción junto con los datos de la tubería en la Ec. 5:

$$L = \frac{\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}}{\left(1 - \frac{f}{D}\frac{v_1^2}{2g}\right)} = 21.04\ m$$

Apartado d) (3 puntos)

Aplicando el teorema de Pi de Buckingham:

n=6 variables (Δp, ρ, μ, V, D, δ)

Dimensiones: $n = 6$ variables: Δp, ρ, μ, V, D, δ

- Dependiente:

  $\Delta P = [Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right] = \left[\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m^2}\right] = [ML^{-1}T^{-2}];$

- Independientes:

  $\rho = [kg/m^3] = [ML^{-3}];$

  $\mu = [kg/m \cdot s] = [ML^{-1}T^{-1}];$

  $V = \left[\frac{m}{s}\right] = [LT^{-1}];$

  $D = [m] = [L];$

  $\delta = [m] = [L];$

Determinación de j: $j = 3 = [\ M, L, T]$.

Grupo dimensional: ρ, V, D. Este grupo se recomienda ya que permite fácilmente la obtención del número de Reynolds.

$\rho^a V^b D^c = [ML^{-3}]^a [LT^{-1}]^b [L]^c = M^0 L^0 T^0$

$M \rightarrow a = 0$

$L \rightarrow -3a + b + c = 0$

$T \rightarrow -b = 0$

Se obtiene $a = b = c = 0$, por lo que $\rho, V\ y\ D$ forman un grupo dimensional.

Grupos adimensionales: $k = n - j = 6 - 3 = 3$

El primer grupo haremos que contenga la variable dependiente (ΔP):

$\Pi_{dep} = \Delta P \rho^a V^b D^c = [ML^{-1}T^{-2}][ML^{-3}]^a [LT^{-1}]^b [L]^c$

$M \rightarrow 1 + a = 0$

$L \rightarrow -1 - 3a + b + c = 0$

$T \rightarrow -2 - b = 0$

Se obtiene $a = -1; b = -2;\ c = 0;$

$$\Pi_{dep} = \Delta P \rho^{-1} V^{-2} D^0 = \frac{\Delta P}{\rho V^2}$$

Los siguientes grupos adimensionales se obtienen agrupando las variables seleccionadas como grupo dimensional con el resto de las variables independientes, una a una:

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2023

$$\Pi_1 = \mu\rho^a V^b D^c = [ML^{-1}T^{-1}][ML^{-3}]^a[LT^{-1}]^b[L]^c$$

$$M \rightarrow 1 + a = 0$$

$$L \rightarrow -1 - 3a + b + c = 0$$

$$T \rightarrow -1 - b = 0$$

Se obtiene $a = -1; b = -1;\ c = -1;$

$$\Pi_1 = \mu\rho^{-1}V^{-1}D^{-1} = \frac{\mu}{\rho V D}$$

$$\Pi_2 = \delta\rho^a V^b L^c = [L][ML^{-3}]^a[LT^{-1}]^b[L]^c$$

$$M \rightarrow a = 0$$

$$L \rightarrow 1 - 3a + b + c = 0$$

$$T \rightarrow -b = 0$$

Se obtiene $a = 0; b = 0;\ c = -1;$

$$\Pi_2 = \delta\rho^0 V^0 D^{-1} = \frac{\delta}{D}$$

Por tanto:

$$\Pi_{dep} = \mathrm{f}(\Pi_1, \Pi_2)$$

$$\frac{\Delta P}{\rho V^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho V D}, \frac{\delta}{D}\right) = f\left(Re, \frac{\delta}{D}\right)$$

Una vez obtenidos los diferentes números adimensionales, para hacer el modelo a escala doble, asumiendo semejanza total, los números adimensionales serán iguales en el modelo y en el prototipo. La relación de escala será:

$$\frac{L_m}{L_p} = 2 \ \rightarrow \ \Pi_{2m} = \Pi_{2p} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta_m}{D_m} = \frac{\delta_p}{D_p}$$

Y por tanto:

$$\frac{\delta_m}{\delta_p} = \frac{D_m}{D_p} = 2$$

De la igualdad del número de Re en modelo y prototipo, manteniendo el mismo fluido para ambos:

$$\Pi_{1m} = \Pi_{1p} \quad \rightarrow \quad \frac{\rho V_m D_m}{\mu} = \frac{\rho V_p D_p}{\mu} \rightarrow V_m D_m = V_p D_p$$

Y por tanto:

$$\frac{V_p}{V_m} = \frac{D_m}{D_p} = 2$$

De la igualdad del número adimensional dependiente se obtiene la relación de las caídas de presión que se busca:

$$\Pi_{dep_m} = \Pi_{dep_p} \rightarrow \quad \frac{\Delta P_m}{\rho V_m^2} = \frac{\Delta P_p}{\rho V_p^2} \rightarrow \quad \frac{\Delta P_m}{\Delta P_p} = \frac{V_m^2}{V_p^2} = \frac{1}{4}$$