Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2024

PROBLEMA 1

Un pistón C (de diámetro d_2) puede deslizar sin rozamiento por el interior de un cilindro hueco B (de diámetro exterior d_1), el cual a su vez puede deslizar sin rozamiento por el interior del cilindro A que se encuentra anclado como muestra la figura. Los cilindros A y B y el pistón C tienen unas masas m_A, m_B y m_C, respectivamente. El pistón C tiene soldado un deflector en su parte inferior de masa despreciable. En el interior de los cilindros A y B hay contenidas masas de aire m_1 y m_2, respectivamente, ambas a temperatura T_0. Se supone que hay una perfecta estanqueidad en el interior de los cilindros y que el aire se comporta como gas ideal. Cuando **<u>NO</u>** existe chorro que impacte sobre el deflector y con una presión atmosférica de p_0:

a) Calcular las presiones y alturas del aire alojado en el interior de los cilindros A y B (p_1, p_2, h_1 y h_2). (3 puntos)

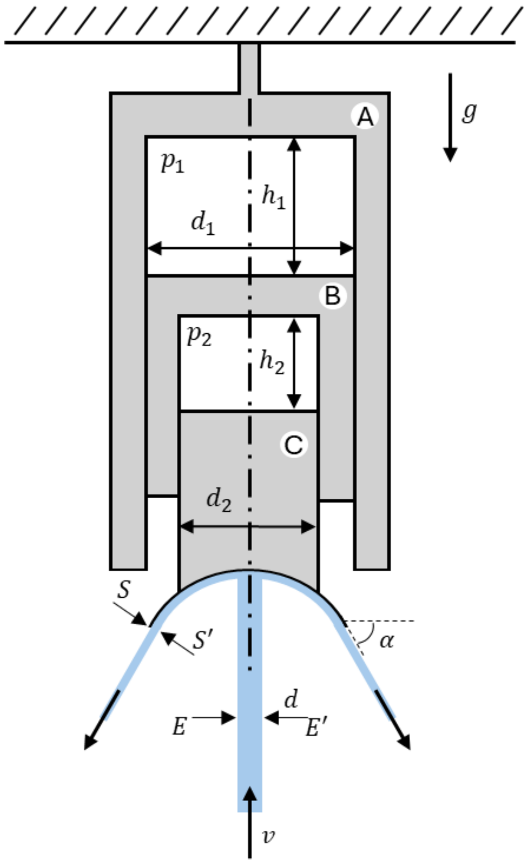
Partiendo de las condiciones descritas anteriormente, un chorro ideal (de diámetro d, densidad ρ y velocidad v) impacta sobre el deflector solidario al pistón C. El chorro es desviado de forma axilsimétrica, cuya área transversal total de salida S-S' es la misma que la de entrada E-E'. Despreciando el peso del chorro de agua.

b) Calcular la fuerza del anclaje sobre el cilindro A para que no se mueva. Justifica tu respuesta para el (los) volumen(es) de control escogido(s). (3.5 puntos)
c) Determinar las posiciones de equilibrio del pistón C y cilindro B (h_1 y h_2), suponiendo que el aire en el interior de los cilindros evoluciona de forma isotérmica. (3.5 puntos)

<u>Justificar todas las hipótesis realizadas.</u>

<u>Datos:</u>

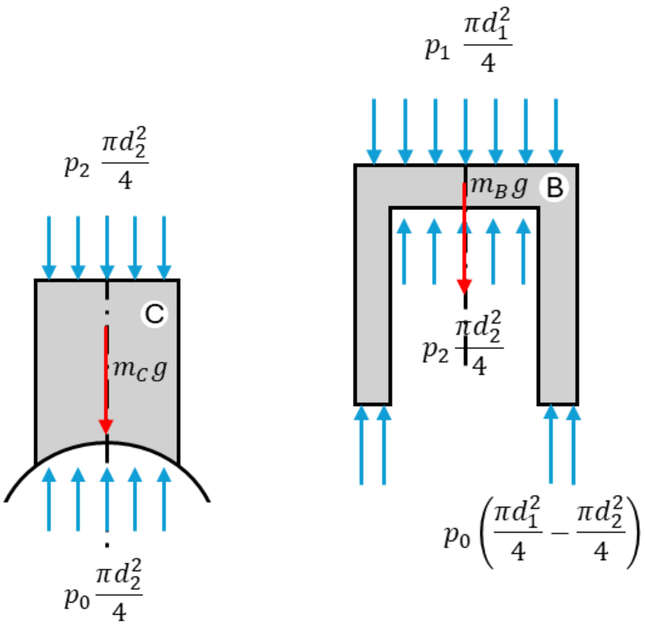
m_A	$50\ kg$	g	$9.81\ m/s^2$
m_B	$25\ kg$	α	60°
m_C	$12\ kg$	T_0	20°C
m_1	$1\ gr$	p_0	$100\ kPa$
m_2	$0.5\ gr$	v	$12\ m/s$
d_1	$0.16\ m$	d	$0.04\ m$
d_2	$0.12\ m$	ρ	$998\ kg/m^3$
R_{aire}	$287\ J/kg\ K$		



Apellidos, Nombre: Mayo 2024

Solución:

Apartado a)



Por medio del análisis del equilibrio de fuerzas que actúan sobre el pistón C se tiene:

$$-p_2 \frac{\pi d_2^2}{4} + p_0 \frac{\pi d_2^2}{4} - m_C\, g = 0 \rightarrow p_2 = p_0 - \frac{m_C\, g}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = 89{,}591\ Pa$$

De forma análoga, analizando el equilibrio de fuerzas sobre el cilindro B

$$-p_1 \frac{\pi d_1^2}{4} + p_2 \frac{\pi d_2^2}{4} + p_0 \frac{\pi (d_1^2 - d_2^2)}{4} - m_B\, g = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow\ -p_1 \frac{\pi d_1^2}{4} + p_0 \frac{\pi d_1^2}{4} - (m_B + m_C)\, g = 0 \rightarrow$$

$$p_1 = p_0 - \frac{(m_B + m_C)\, g}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = 81{,}947\ Pa$$

Teniendo en cuenta que se trata de un gas ideal, se puede aplicar la ecuación de estado para calcular la densidad del gas en el interior de los cilindros. Finalmente, se obtienen las alturas:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R\, T_0} = \frac{m_1}{\frac{\pi d_1^2}{4}\, h} = 0.975\ kg/m^3 \rightarrow h_1 = \frac{R\, T_0}{p_1} \frac{m_1}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = 0.051\ m$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R\, T_0} = \frac{m_2}{\frac{\pi d_2^2}{4}\, h} = 1.065\ kg/m^3 \rightarrow h_2 = \frac{R\, T_0}{p_2} \frac{m_2}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = 0.041\ m$$

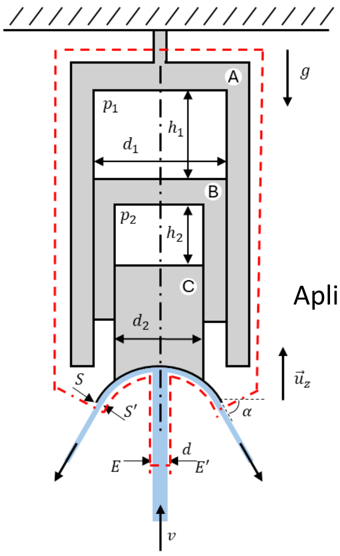
Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2024

Apartado b)

Se escoge un VC fijo, no deformable, como el que muestra la figura.

$$A_{EE'} = A_{SS'} = \frac{\pi d^2}{4}$$



Aplicando la conservación de la masa se tiene:

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho dV + \iint_{SC} \rho(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA$$

$$\dot{m}_{EE'} = \dot{m}_{SS'} \rightarrow v = v_s$$

Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento al VC:

$$\sum \vec{F} = \iint_{SC} p(-\vec{n})dA + \iint_{SC} \tau dA + \iiint_{VC} \rho \vec{f}_m dV + \vec{R}$$
$$= \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v} dV + \iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA$$

- El VC está en contacto con la atmósfera en su totalidad:

$$\iint_{SC} p(-\vec{n})dA = 0$$

- Como el chorro es ideal

$$\iint_{SC} \tau dA = 0$$

- Las fuerzas volumétricas únicamente son las correspondientes al peso. Despreciando el peso del aire, dado que su masa es mucho menor al de los cilíndros se tiene:

$$\iiint_{VC} \rho \vec{f}_m dV = -(m_A + m_B + m_c)g\,\vec{k}$$

- Las reacción que aparecen al cortar el anclaje es la fuerza del anclaje sobre el VC.

$$\vec{R} = F_{anclaje\ sobre\ el\ VC}\,\vec{k}$$

- El VC es no deformable, la densidad del chorro y su velocidad son constantes. Por tanto:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v} dV = 0$$

- Evaluando el flujo de la cantidad de movimiento a través de las superficies de control se tiene:

$$\iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA = \left(-\rho\, v_c^2 A_{EE'} - \rho v_c^2 A_{SS'}\ \sin\alpha\right)\vec{k}$$

Por tanto:

$$F_{anclaje\ sobre\ el\ VC} - (m_A + m_B + m_C)\,g = -\rho\, v_c^2 A_{EE'} - \rho v_c^2 A_{SS'}\ \sin\alpha$$

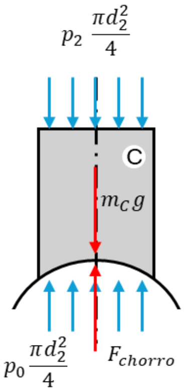
$$F_{anclaje\ sobre\ el\ VC} = -\rho\, v_c^2 A_{EE'}(1 + \sin\alpha) + (m_A + m_B + m_C)\,g = 516.5\ N$$

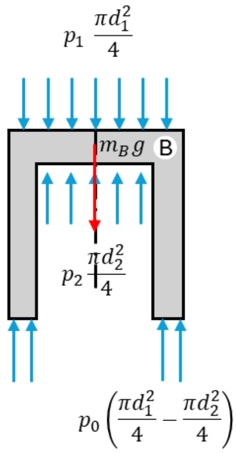
La fuerza que hace el chorro sobre el deflector corresponde:

$$F_{chorro \to deflector} = F_{chorro} = \rho\, v_c^2 A_{EE'}(1 + \sin\alpha) = 337\ N$$

Apartado c)

Evaluando el equilibrio de fuerzas de nuevo se tiene:





Pistón C:

$$F_{chorro} - p_2 \frac{\pi d_2^2}{4} + p_0 \frac{\pi d_2^2}{4} - m_C\, g = 0 \to p_2 = p_0 + \frac{F_{chorro} - m_C\, g}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = 119{,}388 Pa$$

Cilíndro B:

$$-p_1 \frac{\pi d_1^2}{4} + p_2 \frac{\pi d_2^2}{4} + p_0 \frac{\pi (d_1^2 - d_2^2)}{4} - m_B\, g = 0 \to$$

$$\to\ -p_1 \frac{\pi d_1^2}{4} + p_0 \frac{\pi d_1^2}{4} + F_{chorro} - (m_B + m_C)\, g = 0 \to$$

$$p_1 = p_0 + \frac{F - (m_B + m_C)\, g}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = 98{,}708\ Pa$$

Teniendo en cuenta que se trata de un gas ideal y que el fluido se comporta de forma isotérmica:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R\, T_0} = \frac{m_1}{\frac{\pi d_1^2}{4} h_1} = 1.17\ \frac{kg}{m^3} \to h_1 = \frac{R\, T_0}{p_1} \frac{m_1}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = 0.042\ m$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R\, T_0} = \frac{m_2}{\frac{\pi d_2^2}{4} h_2} = 1.42\ \frac{kg}{m^3} \to h_2 = \frac{R\, T_0}{p_2} \frac{m_2}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = 0.031\ m$$