TEMA 7 – INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Clase 7.1 Fuerza electromotriz

En este tema vamos a analizar el fenómeno de la inducción electromagnética, que es la base del funcionamiento de las máquinas eléctricas (transformadores, motores, generadores). Empezaremos con el concepto de fuerza electromotriz, que es una medida de las distintas acciones que son capaces de producir corrientes en un circuito.

¿Qué es la f.e.m.? ¿Por qué se mueven las cargas en un circuito?

Además del campo eléctrico, puede haber otras causas capaces de mover cargas en un circuito. Por ejemplo: fuerzas de origen químico como en una batería o fuerzas debidas al campo magnético. Además de las anteriores, que serán las que estudiaremos puede haber otras: el rozamiento en un generador de Van de Graaf, la luz en una célula fotoeléctrica, la presión en un material piezoeléctrico o el gradiente de temperatura en un termopar.

Así pues la densidad de corriente *J* en cada punto de un circuito, depende de la conductividad σ, que es un valor que depende del material, del valor en ese punto del campo electrostático *E'*, y de otras fuerzas por unidad de carga, con unidades de campo eléctrico, capaces de mover cargas que agruparemos llamándolas f_s. A la suma de los dos efectos le llamaremos *f*, que también tiene unidades de fuerza por unidad de carga.

$$\vec{J} = \sigma.\vec{f} = \sigma.\left(\vec{E'} + \vec{f_s}\right)$$

En esta expresión, *E'* representa sólo la parte electrostática del campo eléctrico, y es un campo conservativo. Veremos que puede haber una parte de *E*, que no es conservativa, y esa la sumaremos en f_s.

Definiremos fuerza electromotriz, o también f.e.m. en un circuito *C* (camino cerrado) como la integral a lo largo del circuito de esta fuerza por unidad de carga *f*. La expresión se simplifica teniendo en cuenta que la integral cerrada de *E'* es cero.

Fuerza electromotriz (fem):

$$fem = \varepsilon \equiv \oint_C \vec{f}\,.\,\vec{dl} = \oint_C \vec{f_s}\,.\,\vec{dl}$$

Batería (f.e.m. de origen químico) en circuito abierto

Vamos a ver cómo podemos medir el valor de la fem en un circuito abierto en el que tenemos una batería, que produce una fuerza f_s sobre las cargas de origen químico. Como se ve en la figura, esta fuerza hace que se desplacen cargas (iones cobre) hacia el electrodo de la derecha. Estas cargas se acumulan a la derecha y aparecen cargas negativas en el electrodo de la izquierda. El campo electrostático que crean estas cargas, *E'* (que en este caso es igual al campo total *E*), va creciendo al acumularse más cargas, hasta que llega un momento en que se equilibra con f_s . Se llega a un equilibrio y ya no hay más movimiento de cargas. En ese momento, en el interior de la batería $\vec{E'} + \vec{f_s} = 0$.

Imagen: JLRM

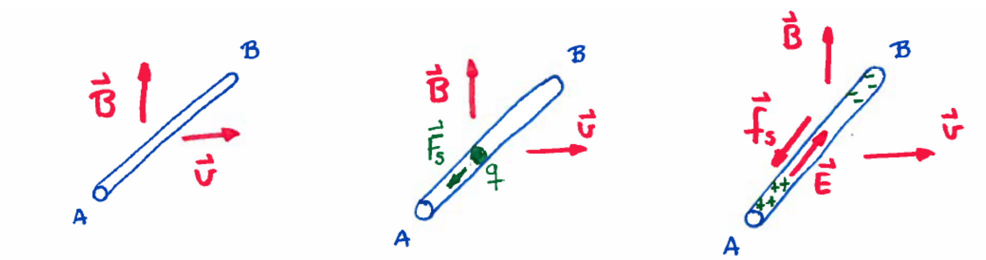
Ahora podemos calcular la diferencia de potencial entre A y B, que es lo que mediría un voltímetro conectado entre esos dos puntos. Y aprovechando la condición de equilibrio, y que sólo hay f_s dentro de la batería, llegamos a que la medida del voltímetro en circuito abierto coincide con la fem.

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = \int_a^b \vec{E}.\vec{dl} = \int_b^a \vec{f_S}.\vec{dl} = \oint_C \vec{f_s}.\vec{dl} = \varepsilon$$

En circuito abierto la medida de un voltímetro es la fem de un circuito.

Barra en movimiento en campo magnético estacionario (f.e.m. de origen magnético) en circuito abierto

Vamos a ver ahora otro circuito abierto, en este caso una barra conductora, en la que hay una fem de origen magnético debido a que la barra se está moviendo con velocidad *v* en un campo magnético *B* estacionario (no varía en el tiempo), tal como se ve en la figura.



De forma parecida al caso de la batería, la fuerza por unidad de carga de origen magnético que vale $\vec{f_s} = \vec{v} \times \vec{B}$ produce una acumulación de cargas positivas en el extremo A y de cargas negativas en el extremo B, que producen un campo electrostático *E'* (que en este ejemplo coincide con el campo total E) que llega a un equilibrio dentro de la barra en el que $\vec{E} + \vec{f_s} = 0$

Ahora podemos calcular la diferencia de potencial entre A y B, que es lo que mediría un voltímetro conectado entre esos dos puntos. Y aprovechando la condición de equilibrio, y que sólo hay f_s en la barra, llegamos nuevamente a que la medida del voltímetro en circuito abierto coincide con la fem.

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = \int_B^A \vec{f_s}.\vec{dl} = \int_B^A (\vec{v} \times \vec{B}).\vec{dl} = \varepsilon$$

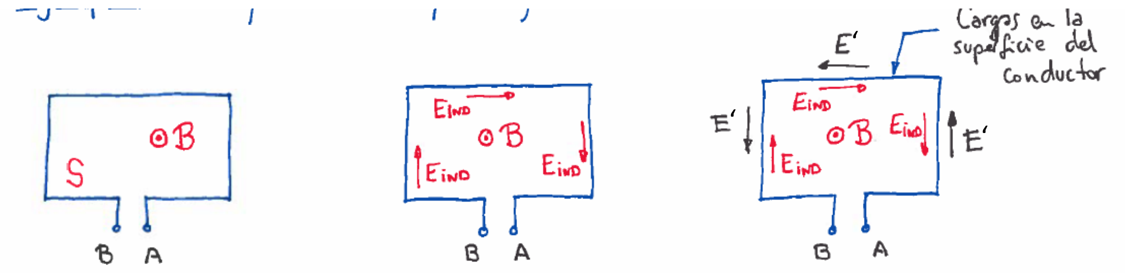
La fem coincide con la diferencia de potencial entre los extremos de la barra.

Campo magnético variable (f.e.m. de origen eléctrico) en circuito abierto

Otro ejemplo de circuito abierto. Ahora el circuito está quieto, pero el campo magnético, que es uniforme, es variable en el tiempo. $\vec{B} = \vec{B}(t)$.

En este caso, aparece un campo eléctrico inducido E_{ind}, que produce una acumulación de cargas en la superficie del conductor, que producen un campo electrostático E' que llega a un equilibrio en el que el campo total dentro del conductor es cero $\vec{E'} + \vec{E}_{ind} = 0$

Veremos más adelante que la circulación de este campo inducido la podemos calcular como la menos derivada del flujo magnético a través del circuito respecto del tiempo. Adelantamos este ejemplo para poder compararlo con los anteriores.



Para calcular la fem en este circuito es interesante darse cuenta de que la integral cerrada de este E_{ind} no es cero.

$$\oint \vec{f}.\vec{dl} = \oint \left(\vec{E'} + \vec{f_s}\right).\vec{dl} = \oint \left(\vec{E'} + \vec{E}_{ind}\right).\vec{dl} = \oint \vec{E}.\vec{dl} = \varepsilon = -\left(-\frac{d\phi}{dt}\right) =$$

$$= \int_{\substack{A\\V}}^{B} \vec{E}.\vec{dl} + \int_{\substack{B\\C}}^{A} \vec{E}.\vec{dl} = \int_{\substack{A\\V}}^{B} \vec{E}.\vec{dl} + \int_{\substack{B\\C}}^{A} \left(\vec{E'} + \vec{E}_{IND}\right)\vec{dl} = \int_{\substack{A\\V}}^{B} \vec{E}.\vec{dl}$$

En esta expresión V indica la integral a través del voltímetro y C a través del circuito (como el campo inducido no es conservativo, en este ejemplo las integrales sí dependen del camino). Otra vez la fem coincide con lo que mediría un voltímetro entre A y B. (Nota: un voltímetro mide la integral del campo eléctrico total. Cuando hay un campo eléctrico no conservativo, este valor no equivale a la diferencia de potencial, que sólo puede definirse para un campo conservativo).

f.e.m. en un circuito cerrado

Vamos a volver al ejemplo de la batería para ver qué ocurre si cerramos un circuito en el que hay una fem. Las cargas en lugar de acumularse comienzan a circular, y el campo eléctrico que antes anulaba la fem de origen químico f_s es menor. Las cargas son impulsadas dentro de la batería hacia la derecha ya que f_s es mayor que E (campo electrostático y conservativo), y en el cable circulan en sentido horario debido a E (que en el cable tiene solo la parte conservativa E').

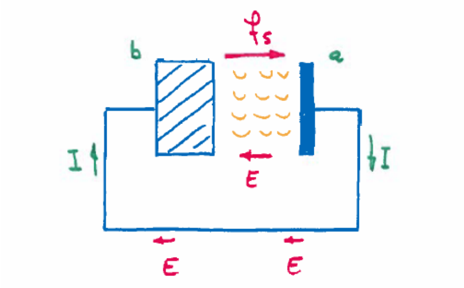


Imagen: JLRM

Si calculamos ahora la fem, tenemos:

$$fem = \varepsilon \equiv \oint_C \vec{f}\,.\,\overrightarrow{dl} = \oint_C \left(\overrightarrow{E'} + \vec{f_s}\right).\overrightarrow{dl} = \oint_C \left(\vec{E} + \vec{f_s}\right).\overrightarrow{dl} = \oint_C \vec{f_s}\,.\overrightarrow{dl} = \int_b^a \vec{f_s}.\overrightarrow{dl}$$

Por otro lado y según lo visto al principio de la clase también podemos relacionar la fem con la densidad de corriente:

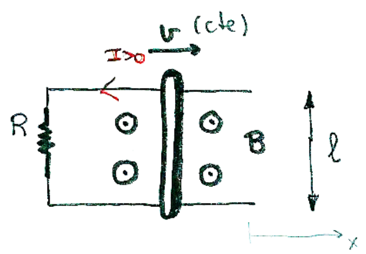
$$\varepsilon \equiv \oint_C \vec{f}\,.\overrightarrow{dl} = \oint_C \frac{\vec{J}}{\sigma}.\overrightarrow{dl} = I.\frac{l}{\sigma S} = I.R$$

Así que resulta que **en un circuito cerrado la suma de fems es igual a la intensidad que circula por el circuito multiplicada por la resistencia del circuito**.

$$\sum fem = \sum I.R$$

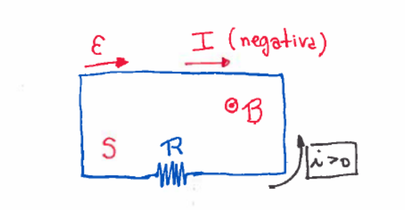
Ejercicio. Barra que se mueve sobre raíles.

La figura muestra una barra conductora que se mueve hacia la derecha. Se apoya sobre unos railes también conductores, formando un circuito con resistencia *R*. Hay un campo uniforme y estacionario (no varía con el tiempo) que entra perpendicularmente al circuito. Calcular la intensidad en el circuito.



Ejercicio. Circuito atravesado por campo magnético variable.

En la figura tenemos un circuito fijo, con resistencia total R, superficie S y atravesado por un campo variable B que sale del papel. Queremos calcular la intensidad que circula por el circuito si el campo magnético variara linealmente, $B(t) = k.t$. (La fem, como se verá más adelante debida a la variación del campo magnético responde a la ley de Faraday $\varepsilon = -S\frac{dB}{dt}$)



Así que de esta clase nos quedamos con estas ideas clave:

Fuerza electromotriz (f.e.m.)
Es la fuerza por unidad de carga que sienten las cargas en un circuito.

Fuerza electromotriz en circuito abierto
Si el circuito está abierto, la fem hace aparecer una diferencia de potencial.

Corriente y fuerza electromotriz.
En un circuito la suma de fems es igual a la intensidad por la resistencia.

Clase 7.2 Ley de Lenz

¿Cómo se usa la ley de Lenz?

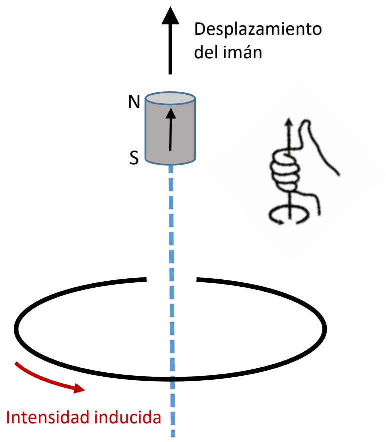
Antes de ver la ley de Faraday, que nos va a permitir calcular el valor de la inducción electromagnética, es útil estudiar la ley de Lenz, que nos informa, de forma cualitativa, hacia donde es la inducción.

Ley de Lenz:

En general, la ley de Lenz dice que cuando hay variaciones de flujo en una espira, aparecen fuerzas electromotrices que tienden a contrarrestar esta variación.

Vamos a ver algunos ejemplos, que además nos van a servir para entender cómo se aplica el criterio de signos que también nos valdrá para la ley de Faraday.

Ejemplo. Espira fija e imán móvil.



En la imagen se muestra una espira fija, y por encima de ella un imán, imantado hacia arriba, que se mueve hacia arriba alejándose de la espira. ¿Hacia dónde es la intensidad que se induce en la espira?

En este caso la inducción se debe a un campo eléctrico inducido, debido a la variación del campo magnético que atraviesa la espira.

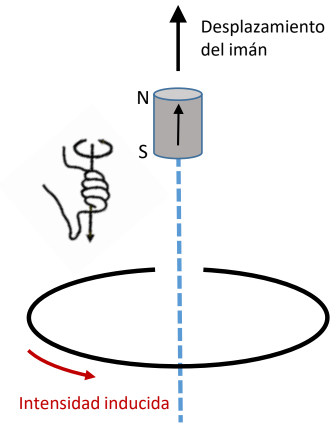
Vamos a responder a la pregunta utilizando el criterio de signos que se muestra en la imagen con una mano derecha. El pulgar señala el sentido positivo del flujo a través de la espira (hacia arriba) y el resto de dedos el sentido positivo de la intensidad en la espira (hacia la derecha en la parte de la espira que vemos más cerca). Para que funcione la Ley de Lenz, los criterios de signos de flujo e intensidad en una espira, tienen que corresponder con la regla de la mano derecha.

El imán produce un campo hacia arriba, que con el criterio de signos que estamos usando, da lugar a un flujo positivo. Al alejarse el imán el campo se debilita, y por tanto el flujo disminuye. La intensidad inducida trata de crear un flujo positivo que contrarreste esta disminución. Y para eso tiene que circular en el sentido que hemos considerado positivo, es decir hacia la derecha tal y como indica la flecha roja.

Ejemplo. Espira fija e imán móvil. Método 2. (Cambiando el criterio de signos)

El problema es exactamente el mismo que el anterior, pero vamos a resolverlo usando un criterio de signos distinto. El resultado nos debe dar el mismo (o sea que la corriente inducida es hacia la derecha), porque obviamente no puede depender del criterio de signos que usemos.

Ahora, tal y como indica la mano derecha de la figura, vamos a considerar el flujo a través de la espira positivo cuando vaya hacia abajo, y por tanto, la intensidad será positiva cuando circule hacia la izquierda.



Ahora nos encontramos con que el flujo que produce el imán es negativo. Al alejarse el imán sigue siendo negativo pero tiene un valor absoluto menor, y por lo tanto está aumentando. Para oponerse a este aumento, la inducción produce una intensidad negativa. Con el criterio de signos que tenemos ahora, es una intensidad hacia la derecha.

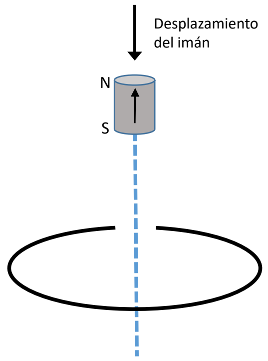
Hemos llegado por tanto a la misma respuesta, la intensidad inducida es hacia la derecha.

¿Cómo se usa la ley de Lenz para averiguar el sentido de las fuerzas?

En el ejemplo anterior vamos a preguntarnos ahora hacia dónde es la fuerza que produce la espira sobre el imán. En la espira hemos deducido que circula una corriente hacia la derecha. Además el imán, al estar magnetizado hacia arriba, podemos hacerlo equivalente a una espira por la que circula corriente hacia la derecha. Al tratarse de corrientes que circulan en el mismo sentido, se atraen.

Observamos que también la fuerza que aparece se opone al movimiento que tratamos de darle al imán. Esto ocurre en general en cualquier sistema en el que haya inducción magnética, las fems que aparecen, tienden a generar corrientes que producen fuerzas que se oponen al movimiento que se esté produciendo.

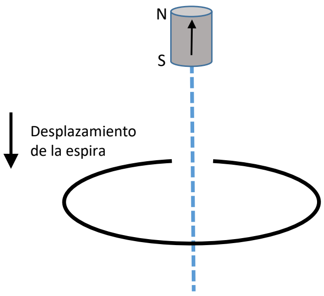
Ejercicio. Espira fija e imán móvil hacia abajo.



La figura muestra una espira fija, y un imán magnetizado hacia arriba que se acerca a la espira. Determina hacia dónde es la corriente que se induce en la espira usando dos criterios de signos distintos. (La corriente es hacia la izquierda en la parte de la espira que vemos más cerca.)

¿Cómo es la fuerza que se ejercen la espira y el imán? (Repulsiva)

Ejercicio. Espira móvil e imán fijo.



La figura muestra una espira que se mueve hacia abajo, y un imán magnetizado hacia arriba que permanece fijo. Determina hacia dónde es la corriente que se induce en la espira usando dos criterios de signos distintos. (La corriente es hacia la derecha en la parte de la espira que vemos más cerca.)

¿Cómo es la fuerza que se ejercen la espira y el imán? (Atractiva)

¿En qué se diferencia esa situación de la situación en que se mueve el imán? (En este caso, para un observador unido al imán el campo magnético no cambia. La inducción en la espira se debe ahora a que hay un circuito que se mueve en un campo magnético y la fuerza electromotriz es de tipo magnético.)

Nos quedamos con una idea clave de esta clase:

Ley de Lenz
Cuando el campo magnético que atraviesa una espira conductora varía, aparece una fem que tienden a contrarrestar la variación del flujo.

Clase 7.3 Ley de Faraday. Campos magnéticos variables.

Vamos a ver en esta clase cómo calcular la fem inducida cuando hay una variación del campo magnético, usando la Ley de Faraday. De momento vamos a considerar que los circuitos están en reposo. El caso en el que hay circuitos que se mueven lo veremos en otra clase.

Ley de Faraday

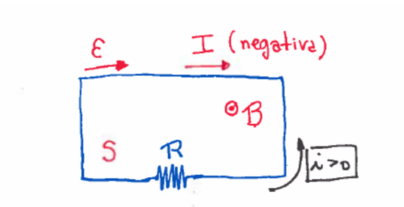
La ley de Faraday dice que la fem que se induce en un circuito en reposo es la variación del flujo magnético a través de ese circuito respecto del tiempo, con el signo cambiado.

$$\varepsilon = \oint \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

El campo eléctrico tiene una circulación que no es nula porque no es un campo electrostático. Por lo tanto no es conservativo.

Aplicación de la ley de Faraday. Fem inducida en una espira atravesada por un campo variable.

Ejemplo:



En la figura tenemos un circuito fijo, con resistencia total *R*, superficie S y atravesado por un campo variable *B* que sale del papel. Queremos calcular la intensidad que circula por el circuito, y para eso necesitamos calcular primero la fem. En este caso es una fem debida al campo eléctrico inducido.

Aplicamos la ley de Faraday utilizando el criterio de signos indicado en la figura por la flecha negra. La intensidad la tomaremos positiva cuando circule en sentido antihorario y por tanto el flujo magnético será positivo saliendo del papel (regla de la mano derecha). Así pues la fem valdrá:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -S.\frac{dB}{dt}$$

Ahora aplicamos que en un circuito cerrado $\varepsilon = I.R$ y llegamos a:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{S.\frac{dB}{dt}}{R}$$

Si por ejemplo el campo magnético variara linealmente, $B(t) = k.t$, la intensidad valdría

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{S.k}{R}$$

Como ha salido negativa, quiere decir que circula en sentido horario. Esto es coherente con la ley de Lenz. como el flujo aumenta, aparece una fem como la dibujada, que hace circular una corriente negativa que contrarresta este aumento.

Si en otra situación, el campo magnético variara senoidalmente, $B(t) = A.sen(wt)$, la intensidad valdría:

$$I = \frac{-A.w.cos(wt).S}{R}$$

Ley de Faraday en versión diferencial

Podemos escribir el flujo como una integral de superficie a través de la superficie *S*, que es cualquier superficie que se apoya en el circuito *C*. Normalmente elegiremos la superficie con la que los cálculos sean más fáciles.

$$\oint_C \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}.\overrightarrow{da}$$

Aplicando el teorema de Stokes (la circulación de un campo vectorial a lo largo de un camino C es el flujo de su rotacional a través de una superficie S(C) que se apoya en ese camino), podemos convertir la primera integral en un integral de superficie (del rotacional de *E*). En el segundo término introducimos la derivada dentro de la integral.

$$\int_S \vec{\nabla}\times \vec{E}.\overrightarrow{da} = \int_S -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}.\overrightarrow{da}$$

Esta igualdad es cierta para cualquier superficie *S*, y por tanto debe ser igual lo que hay dentro de las integrales.

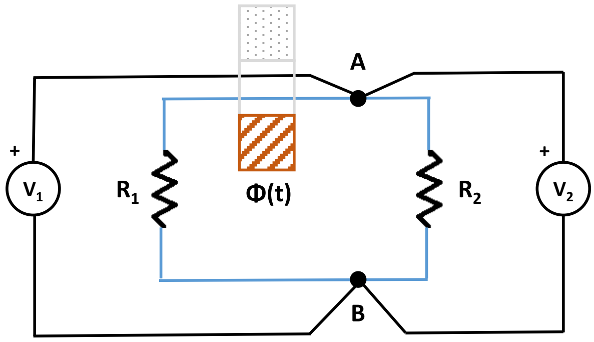
Ley de Faraday en versión diferencial:

Como la igualdad anterior es cierta para cualquier superficie S, tiene que cumplirse que lo que estamos integrando en ambas expresiones es igual, con lo que llegamos a que:

$$\vec{\nabla}\times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Es la ley de Faraday en versión diferencial y nos da el valor del rotacional del campo eléctrico, que cuando hay campos magnéticos variables, no es cero como lo era en situaciones electrostáticas.

Voltímetros en circuitos con fem inducida



Ejemplo:

Vamos a analizar el circuito de la figura, para repasar los conceptos de fem y Ley de Faraday. Se trata de dos resistencias en paralelo, de valores distintos que forman una malla que es atravesada por un flujo variable en el tiempo. Supongamos que en un momento, se conoce la derivada del flujo con respecto al tiempo y es positiva, de valor *b* considerando positivo el flujo que sale del papel.

La intensidad en el circuito de color azul se calcula de forma inmediata:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = -\frac{b}{R_1 + R_2}$$

Resulta negativa, que con el criterio de signos empleado, quiere decir que es en sentido horario.

Ahora nos preguntamos qué mide el voltímetro 1. Para eso analizamos el circuito formado por V1-A-R2-B. Seguimos con el criterio de recorrer el circuito en sentido antihorario como sentido positivo.

$$\oint_C \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int_{\substack{A \\ V1}}^{B} \vec{E}.\overrightarrow{dl} + \int_{\substack{B \\ R2}}^{A} \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

El primer término es la fem y el segundo término incluye la medida del voltímetro y la caída de tensión en la resistencia 2.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -b = V_{AB}(V1) + I.R_2$$

Y la medida del voltímetro resulta:

$$V_{AB}(V1) = -b - I.R_2 = -b + b\frac{R_2}{R_1 + R_2} = -b\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

También podemos calcular la medida del voltímetro 1 analizando el circuito formado por V1-A-R1-B. Ahora la variación de flujo no atraviesa el circuito, y la fem es cero. El resultado es el mismo.

$$0 = \underset{V1}{\int_A^B} \vec{E}.\vec{dl} + \underset{R1}{\int_B^A} \vec{E}.\vec{dl} = V_{AB}(V1) - I.R_1 \quad \Longrightarrow \quad V_{AB}(V1) = -b\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Si nos preguntamos qué mide el voltímetro 2, podemos usar por ejemplo el circuito V2-A-R2-B

$$0 = \underset{V2}{\int_B^A} \vec{E}.\vec{dl} + \underset{R2}{\int_A^B} \vec{E}.\vec{dl} = -V_{AB}(V2) - I.R_2 \Longrightarrow \quad V_{AB}(V2) = b\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Curiosamente, los dos voltímetros no miden lo mismo si las resistencias son distintas. Esto es debido a que la integral del campo eléctrico a través de un circuito cerrado no es cero, porque hay un campo magnético variable que lo atraviesa.

Precisamente, las lecturas de los voltímetros sumadas a lo largo del circuito cerrado C': V1-B-V2-A, recorrido en sentido antihorario, nos da la fem inducida.

$$\oint_{C'} \vec{E}.\vec{dl} = \underset{V1}{\int_A^B} \vec{E}.\vec{dl} + \underset{V2}{\int_B^A} \vec{E}.\vec{dl} = V_{AB}(V1) - V_{AB}(V2) = -b\frac{R_1}{R_1 + R_2} - b\frac{R_2}{R_1 + R_2} = -b$$

Ejercicio:

Calcula la medida del voltímetro 2 usando el circuito V2-A-R1-B. El resultado tiene que coincidir con el calculado en V2-A-R2-B.

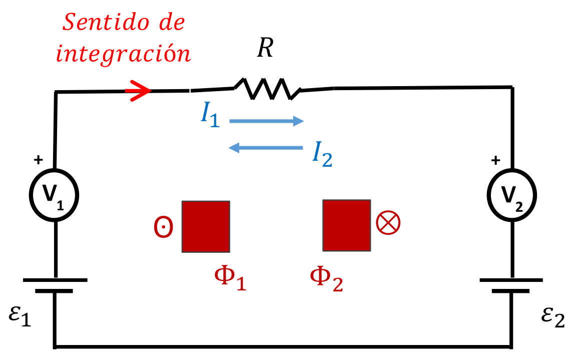
Cómo escribir las ecuaciones de malla cuando hay fems magnéticas

De lo anterior se deduce que cuando se desee escribir la ecuación de malla de un circuito atravesado por un flujo variable, se puede seguir el siguiente procedimiento:

- Elegir un sentido de integración.
- Plantear la ecuación $\sum fem = \sum I.R$
- En el término de la izquierda las fems serán positivas cuando vayan en el sentido elegido para integrar y negativas en caso contrario.
- Los términos I.R serán positivos cuando la intensidad en cada resistencia se haya definido con el sentido de integración y negativos cuando el sentido sea el opuesto.
- Los voltímetros, que son resistencias de valor alto, tienen una lectura de valor $V = I_{volt}.R$ positiva cuando el sentido de integración entre por el borne positivo del voltímetro y negativo cuando entre por el borne negativo. (I_{volt} va de positivo – borne que se considera a mayor tensión- a negativo –borne que se considera a menor tensión- en el interior del voltímetro)
- Nota: se está despreciando la posible autoinducción del circuito. Se explica cómo tenerla en cuenta más adelante.

Ejemplo:

Para el circuito de la figura, que incluye baterías, flujos magnéticos variables, una resistencia y dos voltímetros, escribir la ecuación de malla en dos versiones según se haya definido la intensidad en la resistencia. (No se considera autoinducción en el circuito, que es un concepto que se introduce más adelante).



Para el primer caso (I_1) y siguiendo el procedimiento explicado, elegimos un sentido de integración horario y la ecuación resulta:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{d\phi_1}{dt} - \frac{d\phi_2}{dt} = I_1 . R - V_1 + V_2$$

Si se elige la corriente I_2 en la resistencia, con el mismo sentido de integración, obtenemos:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{d\phi_1}{dt} - \frac{d\phi_2}{dt} = -I_2 . R - V_1 + V_2$$

Podemos resumir esta clase en dos ideas clave:

Ley de Faraday

Una variación de flujo en una espira cerrada produce una fem igual a la variación del flujo respecto del tiempo, que se opone a la variación.

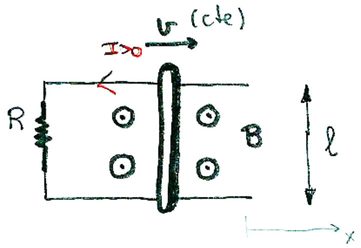
Voltímetros y ley de Faraday

Un voltímetro mide la integral de línea del campo eléctrico total (incluyendo el inducido) a través de él mismo

Clase 7.4 Ley de Faraday y conductores en movimiento

Vamos a ver en esta clase otra situación en la que se produce inducción electromagnética y es cuando hay circuitos en movimiento. En este caso, la fem que produce la inducción se debe a las fuerzas magnéticas.

Inducción en circuitos en movimiento



Ejemplo. Barra que se mueve sobre raíles.

La figura muestra una barra conductora que se mueve hacia la derecha. Se apoya sobre unos railes también conductores, formando un circuito con resistencia *R*. Hay un campo uniforme y estacionario (no varía con el tiempo) que entra perpendicularmente al circuito. Vamos a ver cómo funciona el fenómeno de inducción en este ejemplo en el que hay un conductor en movimiento, la barra.

Sobre las cargas que se mueven de la barra, aparece una fuerza magnética, en dirección $\vec{v} \times \vec{B}$. En este caso, esta fuerza es hacia abajo, en la dirección de la barra. Esta fuerza, es una fuerza electromotriz, que podemos calcular e igualar a *I.R* para calcular la intensidad en el circuito. Tomamos criterio positivo para la intensidad, antihorario. Resulta negativa, o sea que es hacia abajo en la barra.

$$\varepsilon = \oint_C \ (\overrightarrow{v} \times \vec{B}).\overrightarrow{dl} = -v.B.l = I.R \quad \Rightarrow \quad I = \frac{-vbl}{R}$$

Ley del flujo para circuitos en movimiento

En el ejemplo anterior, se puede calcular la fem utilizando la ley del flujo. Veremos más adelante que la ley del flujo no siempre funciona para circuitos en movimiento, así que es mejor alternativa calcular la fem a partir de la fuerza magnética.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}[B.(x_0 + v.t).l] = -B.v.l$$

Cálculo de fuerzas y trabajo

Para entender mejor lo que ocurre en el circuito con la barra móvil vamos a estudiar el comportamiento de las fuerzas que están actuando.

La barra es un circuito por el que circula una corriente, y que está dentro de un campo magnético, así que experimenta una fuerza que podemos calcular fácilmente integrando la expresión que da la fuerza sobre cada tramo $\overrightarrow{dF} = I.\overrightarrow{dl}x\vec{B}$ Para usar esta expresión *dl* tiene que ir en el sentido de la intensidad (hacia abajo en la barra). Ojo, que es el sentido contrario al que hemos usado para calcular la fem. La fuerza resulta hacia la izquierda (negativa).

$$F = I.l.B = -\frac{vB^2l^2}{R}$$

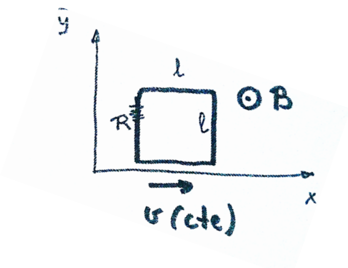
La barra se mueve con velocidad constante, así que debe haber un agente externo que haga una fuerza igual y de sentido contrario que anule esta. Podemos calcular el trabajo que hace este agente externo sobre el sistema cuando la barra se desplaza una distancia *b*. Es un trabajo positivo ya que hace una fuerza hacia la derecha, que es hacia donde se mueve la barra.

$$W_{ext} = F_{ext}.b = -F.b = \frac{vB^2l^2b}{R}$$

Por otro lado podemos calcular cuánta energía se disipa en la resistencia en el tiempo en que la barra recorre la distancia *b* que es *b/v*. Como no se puede acumular energía en el circuito (estamos despreciando el fenómeno de autoinducción que veremos más adelante), debe valer lo mismo.

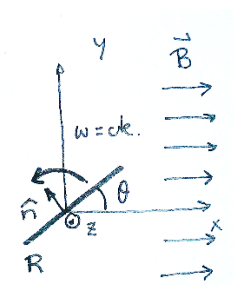
$$W_R = I^2.R.\frac{b}{v} = \frac{v^2B^2l^2}{R^2}R\frac{b}{v} = \frac{vB^2l^2b}{R} = W_{ext}$$

Ejercicio. Espira que se mueve en campo que varía con la posición.



Una espira cuadrada contenida en el plano xy, se mueve con velocidad constante hacia la derecha. Hay un campo magnético estacionario, que varía con la posición x : $\vec{B} = kx\vec{z}$ ¿Cuánto vale la intensidad inducida en la espira. (No se tiene en cuenta la autoinducción.)

Ejercicio. Espira que gira en campo uniforme y estacionario.



La espira de la figura es cuadrada, de lado l. Gira con velocidad angular uniforme alrededor del eje z. Tiene una resistencia R y una autoinducción despreciable. Hay un campo magnético uniforme y estacionario en la dirección del eje x. $\vec{B} = k\vec{\imath}$ ¿Cuánto vale la intensidad inducida en la espira en función del tiempo?

Campos variables y circuitos en movimiento

Si tenemos a la vez campos variables y circuitos en movimiento, tenemos que sumar en la fem los efectos debidos al campo magnético sobre las cargas que se mueven y los efectos del campo eléctrico inducido. En muchos casos se puede usar la regla del flujo y entonces se obtiene directamente el resultado de los dos efectos.

En la figura se presenta un caso (el de la izquierda) en el que no se puede aplicar la ley de flujo. Como se ve, es un caso más bien rebuscado. En general, si el material que forma el circuito cambia, es decir se incorporan al circuito partes que no estaban y salen partes que sí estaban, entonces es probable que no se pueda usar esta ley.

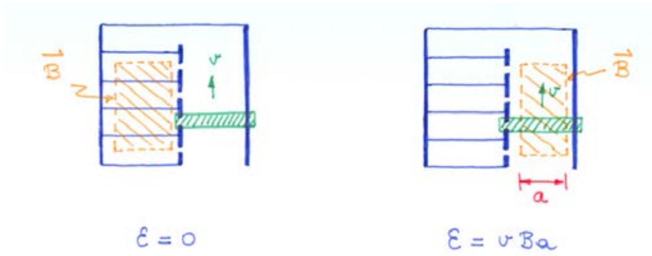


Imagen: JLRM

Podemos resumir toda esta clase en dos ideas clave:

Ley de Faraday y conductores en movimiento

La ley del flujo es válida para determinar la fem de origen magnético en algunas situaciones con circuitos en movimiento.

Inducción, conductores en movimiento y trabajo

Las fuerzas que aparecen en los conductores en movimiento con corriente inducida realizan trabajos que cumplen la conservación de la energía.

Clase 7.5 Inducción mutua y autoinducción

Cuando por un circuito circula una intensidad variable, aparece una fem inducida (campo eléctrico inducido) debida a la variación del campo producida por el campo variable que produce el circuito. Hasta ahora hemos considerado que se podía despreciar. Vamos ahora a ver cuánto vale.

Inductancia mutua

Antes de introducir el concepto de inductancia, vamos con un concepto relacionado y que a menudo se utiliza a la vez. La inductancia mutua es una forma alternativa de estudiar la inducción que recibe un circuito debido a un campo externo, cuando el campo lo produce otro circuito. En ese caso en el vacío habrá una relación lineal entre la intensidad que circula por el circuito que produce el campo y el flujo que atraviesa el circuito que lo recibe.

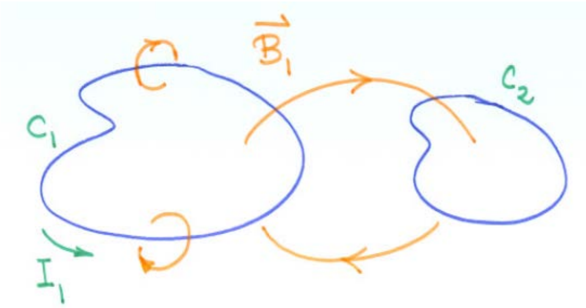


Imagen: JLRM

Si llamamos Φ_{21} al flujo que atraviesa el circuito C_2 debido a la intensidad que circula por C_1 podemos escribir que es proporcional a I_1, llamando a la constante de proporcionalidad M (se mide en una unidad denominada Henrio).

$$\Phi_{21} = \int_{S2} \overrightarrow{B_1}.\overrightarrow{da_2} = M.I_1$$

Así que la fem que induce C_1 en C_2 *valdrá:*

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{d\mathrm{I}_1}{dt}$$

Si calculamos la fem que induce C_2 en C_1 podemos comprobar que se cumple (no se da una demostración aquí), que el coeficiente de proporcionalidad es el mismo.

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M\frac{d\mathrm{I}_2}{dt}$$

Este coeficiente depende únicamente de la geometría de los conductores y puede ser tanto positivo como negativo, dependiendo del criterio de signos que se use en cada circuito.

Inductancia

De una forma parecida definimos un coeficiente L (inductancia o coeficiente de autoinducción, se mide en Henrios) que relaciona el flujo que atraviesa un circuito, producido por él mismo, con la intensidad que circula por el circuito. Para el circuito 1:

$$\Phi_{11} = L_1 . I_1$$

Y la fem autoinducida, que habrá que sumar al resto de fems del circuito vale:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} = -L\frac{dI_1}{dt}$$

El coeficiente depende de la geometría del circuito y es siempre positivo ya que en la espira se están tomando criterios de signos para el flujo y la intensidad en la espira relacionados con la regla de la mano derecha.

Energía del campo magnético en el vacío

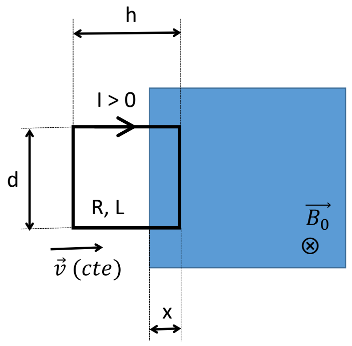
Dado que al cambiar la corriente en un circuito se induce una fem que se opone a este cambio, es necesario proporcionar energía al circuito para cambiar la intensidad que circula por él. Esta energía se puede recuperar. Se puede calcular (no explicamos aquí por qué) a partir del campo magnético como una integral de volumen (si no hay materiales magnéticos):

$$E_P = \frac{1}{2.\mu_0} \int_{\substack{TODO\ EL \\ CAMPO}} B^2 . dv$$

Y también se puede calcular a partir de la corriente en el circuito:

$$E_P = \frac{1}{2} I^2 L$$

Ejemplo. Espira con autoinducción.



La espira de la figura es rectangular y se mueve hacia la derecha con velocidad constante *v* entrando en una zona de campo uniforme B_0. La resistencia de la espira es R y su coeficiente de autoinducción *L*. Se pide:

Calcular la intensidad en la espira con el criterio indicado.

Aplicamos que la suma de fems en el circuito (incluyendo la fem magnética debida al movimiento de la barra, y la autoinducida) es I.R:

$$-\frac{d\phi_B}{dt} - L\frac{d\mathrm{I}}{dt} = -B_0.\mathrm{d.v} - L\frac{d\mathrm{I}}{dt} = I.\mathrm{R}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial tenemos: $\mathrm{I} = -\frac{B_0.\mathrm{d.v}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Calcular la fuerza sobre la espira.

La fuerza es hacia la izquierda (ley de Lenz) y su módulo vale: $|F| = B_0.\mathrm{I.d} = \frac{B_0^2 d^2 \mathrm{v}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Calcular el trabajo del agente externo cuando la posición *x* varía entre 0 y *a*.

El trabajo del agente externo, que se opone a la fuerza anterior es positivo (fuerza hacia la derecha y desplazamiento hacia la derecha).

$$W = \int_0^a |F|.dx = \int_0^a \frac{B_0^2 d^2 \mathrm{v}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).dx = \int_0^{\frac{a}{\mathrm{v}}} \frac{B_0^2 d^2 v^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).dt$$

Calcula la energía acumulada en la autoinducción cuando *x=a*. ¿Coincide con el resultado anterior? ¿Por qué?

Ejercicio. Espira con campo variable y autoinducción.

Una espira con autoinducción *L* y superficie *S* es atravesada por un campo que crece uniformemente con el tiempo $B(t) = -kt$ (Teslas) Escribe una ecuación diferencial que permita calcular la intensidad que recorre la espira en función del tiempo.

Inducción mutua

La relación entre los flujos recíprocos que se producen dos circuitos y las corrientes que los producen es la misma (M).

Autoinducción

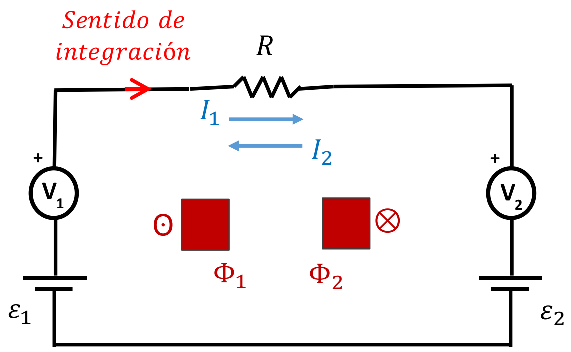
La intensidad que circula por un circuito produce un flujo proporcional (L) sobre el propio circuito. La variación de ese flujo produce una fem inducida.

Anexo: cómo escribir las ecuaciones de malla cuando hay fems magnéticas

Al método explicado anteriormente para escribir las ecuaciones de malla, hay que añadirle como una fem más el efecto de la autoinducción del circuito. Para ello tendremos en cuenta que el flujo a través de la espira se considera positivo cuando la intensidad es positiva, y que ambas magnitudes deben estar relacionadas según la regla de la mano derecha cuando son positivas. (Desde el punto de vista de la autoinducción esto se denomina criterio receptor).

Ejemplo:

Para el circuito de la figura, que incluye baterías, flujos magnéticos variables, una resistencia y dos voltímetros, escribir la ecuación de malla en dos versiones según se haya definido la intensidad en la resistencia. Tener en cuenta que el circuito tiene una autoinducción de valor L.



Para el primer caso (I_1) y siguiendo el procedimiento explicado, elegimos un sentido de integración horario y la ecuación resulta:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{d\phi_1}{dt} - \frac{d\phi_2}{dt} - L\frac{dI_1}{dt} = I_1.R - V_1 + V_2$$

Si se elige la corriente I_2 en la resistencia, con el mismo sentido de integración, obtenemos:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{d\phi_1}{dt} - \frac{d\phi_2}{dt} + L\frac{dI_2}{dt} = -I_2.R - V_1 + V_2$$

En este caso el sentido positivo del flujo (hacia dentro teniendo en cuenta el sentido de integración), no está relacionado con I_2 según la regla de la mano derecha, y por ese motivo el signo del término de autoinducción sería positivo.

Se propone como ejercicio escribir las ecuaciones de malla utilizando el sentido de integración antihorario y comprobar que tanto si se usa I_1como si se usa I_2 se llega a las mismas ecuaciones.

Clase 7.6 Cálculo del campo eléctrico inducido

Vamos a ver que en algunas situaciones, podemos calcular el campo eléctrico inducido de una forma semejante a la que hemos utilizado para calcular el campo magnético.

En una zona en la que haya corrientes estacionarias, hemos visto que el campo magnético responde a las siguientes ecuaciones:

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0.\vec{J}$$

Si las comparamos con las que rigen el campo eléctrico en una zona en la que no haya cargas, se cumple:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Nos encontramos con que las ecuaciones son muy parecidas. Los campos tendrán la misma forma si se cumple que $\mu_0.\vec{J}$ es proporcional a $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Ejemplo. Campo variable en región cilíndrica.

Se sabe que en el interior de un cilindro de radio R hay un campo magnético variable, con derivada respecto del tiempo conocida. Calcular el campo eléctrico inducido en el interior del cilindro.

Si calculáramos un campo magnético, usando la ley de Ampere y la simetría del problema, podemos escribir la circulación de B e igualarla a $\mu_0.I$, llegando a: $2\pi r B = \mu_0 J \pi r^2$ y de aquí se deduce que $B = \frac{\mu_0 J r}{2}$ en el interior del cilindro.

Por analogía (E cumple el papel de B, y $\mu_0.I$ cumple el papel de $-\frac{dB}{dt}$), la circulación de E se puede escribir $2\pi r E = -\frac{dB}{dt}\pi r^2$ y el campo inducido en el interior del cilindro resulta $E = -\frac{dB}{dt}\frac{r}{2}$.

Cálculo del campo eléctrico inducido

En zonas sin carga, para algunas configuraciones con simetría, la solución del campo eléctrico inducido puede obtenerse usando un método análogo a la Ley de Ampere.