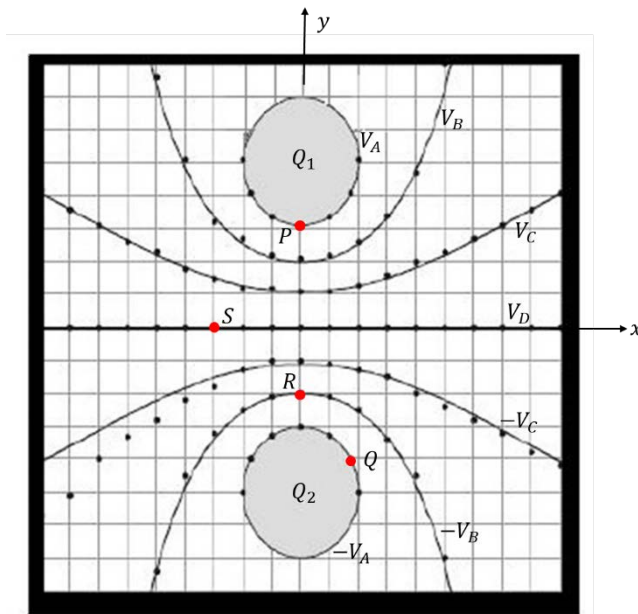


Nombre:

Grupo:

**Problema 1. (2 puntos)** Se tiene un sistema electrostático formado por dos discos conductores. La figura muestra la intersección de dichos conductores con el plano XY. Las cargas netas de los discos son  $Q_1=+Q$  y  $Q_2=-Q$ . No existen cargas exteriores a las contenidas en los discos conductores. La cuadrícula tiene 1 m de lado. Las líneas continuas representan la intersección de las superficies equipotenciales de dicho sistema electrostático con el plano del dibujo y tienen los siguientes valores medidos en voltios:  $V_A = V_0$        $V_B = \frac{2}{3}V_0$        $V_C = \frac{1}{3}V_0$        $V_D = 0$

$V_0$  es una constante positiva. Se pide, justificando todas las respuestas:



a) Dibuja el vector de campo eléctrico en los puntos P, Q, R y S y aproxima el valor de su módulo en los puntos P y Q.

b) Dibuja e indica dónde se encuentra la carga presente en el sistema, detallando si se trata de una densidad volumétrica, superficial o lineal de carga. Además, justifica si son uniformes o no. Calcula el valor de la densidad de carga presente en los puntos P, Q y R.

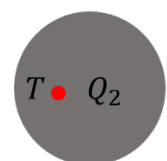
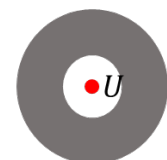
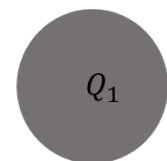
c) Se modifica el valor de las cargas presentes en los discos conductores, siendo ahora  $Q_1=+3Q$  y  $Q_2=-3Q$ . ¿Qué trabajo, medido en Julios, tiene que hacer un agente

externo para mover una carga  $+q$ , desde el punto Q hasta el punto P? Explicar el signo de este trabajo. (Supóngase que la carga  $q$  es muy pequeña y que no modifica la distribución de carga en los discos).

Al sistema original ( $Q_1=+Q$  y  $Q_2=-Q$ ) se añade una corona esférica conductora. Esta corona esférica tiene carga neta nula y 1 m de radio interior y radio exterior de 2 m. La corona esférica se encuentra equidistante de los dos discos y está situada entre ambos.

d) Dibuja dónde se encuentra la carga presente en el nuevo sistema, detallando si se trata de una densidad volumétrica, superficial o lineal de carga. Además, justifica si son uniformes o no.

e) ¿Qué signo tiene la diferencia de potencial  $V_T - V_U$ ? Justifica la respuesta.





**a) (3/10) Dibuja el vector de campo eléctrico en los puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  y aproxima el valor de su módulo en los puntos  $P$  y  $Q$ .**

Criterios de corrección:

- 1 punto por el razonamiento por el que se obtiene el valor del campo  $E$  a partir del potencial.
- 1 punto por la representación gráfica del campo  $E$  en cada punto.
- 1 punto por el valor del módulo del vector  $E$  en cada punto.

Sabemos que la relación entre un campo eléctrico conservativo,  $\vec{E}$ , y la función de potencial,  $\phi$ , es  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ , donde  $\vec{\nabla}$  es el gradiente, cuya expresión en coordenadas cartesianas es

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Esto implica que:

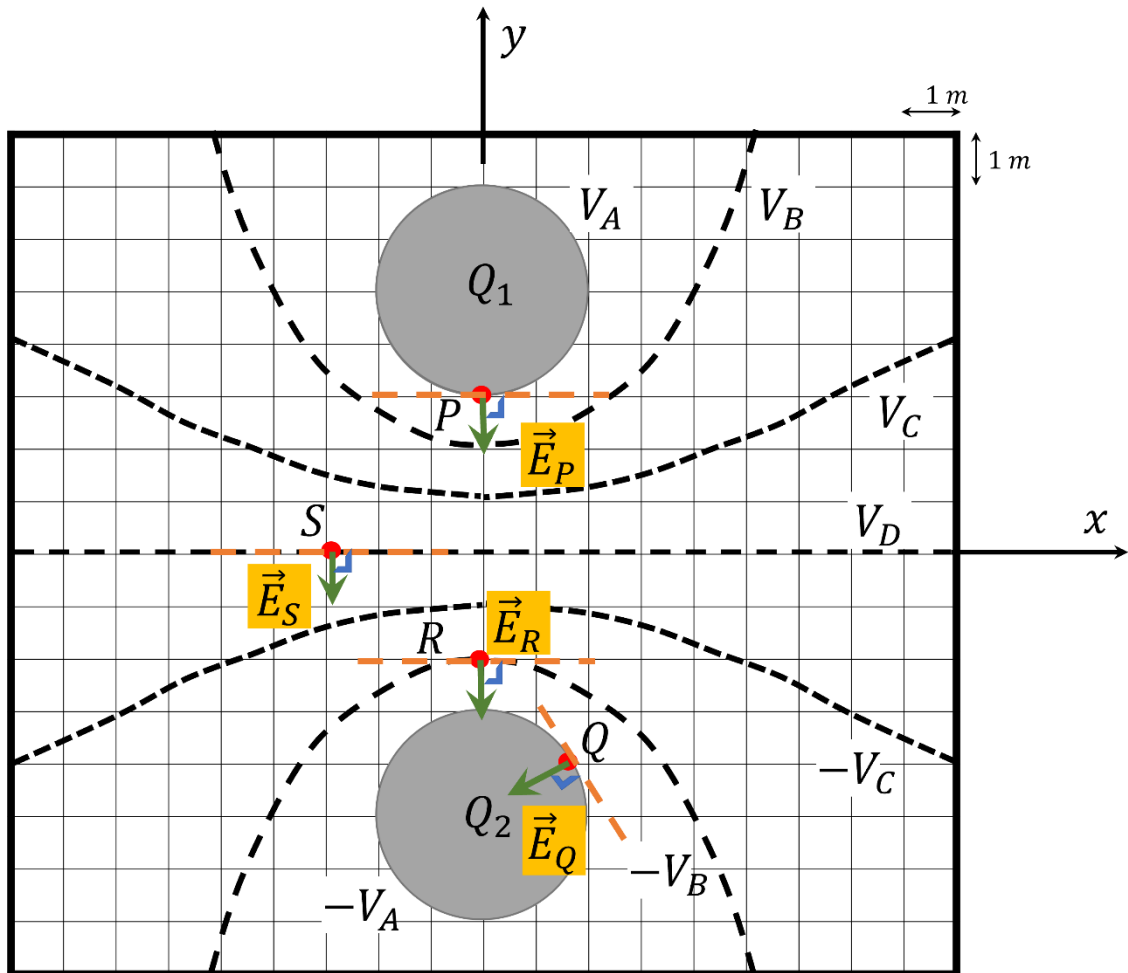
1. el sentido del campo eléctrico es el que maximiza la disminución de la función de potencial: el campo eléctrico “apunta” de superficies de potencial alto a valores bajos;
2. para cada punto de una superficie equipotencial, las líneas de campo eléctrico (y por lo tanto el campo eléctrico) son perpendiculares a la superficie; esto nos determina la dirección del campo.

A la hora de resolver el problema, podemos aproximar el cálculo del campo eléctrico por la expresión

$$\vec{E} \simeq -\left( \frac{\Delta\phi}{\Delta x}, \frac{\Delta\phi}{\Delta y}, \frac{\Delta\phi}{\Delta z} \right)$$

ya que la definición de la derivada en un punto  $a$  es  $\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Representación gráfica.



**Solución para el punto P.**

Dirección y sentido. Como  $V_A = V_0$  y  $V_B = \frac{2}{3}V_0$  tenemos que  $V_A > V_B$ , por lo que el campo eléctrico “apuntará” de la superficie  $V_A$  a la  $V_B$ . Será perpendicular a la superficie  $V_A$  en el punto P.

Módulo.

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta y} = \frac{V_A - V_B}{y_A - y_B} \simeq \frac{\frac{V_0}{3}}{1} = \frac{V_0}{3} \text{ V/m}$$

Solución en coordenadas cartesianas ( $E_x, E_y, E_z$ ):  $\vec{E}_P \simeq \left(0, -\frac{V_0}{3}, 0\right) \text{ V/m}$

**Solución para el punto Q.**

Dirección y sentido. Como  $-V_A = -V_0$  y  $-V_B = -\frac{2}{3}V_0$  tenemos que  $-V_B > -V_A$ , por lo que el campo eléctrico será perpendicular a la superficie  $V_A$  en el punto Q.

Módulo.

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta y} = \frac{-V_A - (-V_B)}{r_A - r_B} \simeq \frac{\frac{V_0}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{V_0}{3 \cdot \sqrt{2}} \text{ V/m}$$

donde  $r_A - r_B$  define la dirección perpendicular (normal) a las superficies equipotenciales

Solución en coordenadas esféricas  $(E_r, E_\theta, E_\phi)$ :  $\vec{E}_Q \simeq \left(-\frac{V_0}{3 \cdot \sqrt{2}}, 0, 0\right) \text{ V/m}$

La anterior solución se puede expresar en coordenadas cartesianas  $(E_x, E_y, E_z)$ :

$$\vec{E}_Q \simeq \left(-\frac{V_0}{3 \cdot 2}, -\frac{V_0}{3 \cdot 2}, 0\right) \text{ V/m}$$

- b) (3/10) Dibuja e indica dónde se encuentra la carga presente en el sistema, detallando si se trata de una densidad volumétrica, superficial o lineal de carga. Además, justifica si son uniformes o no. Calcula el valor de la densidad de carga presente en los puntos P, Q y R.**

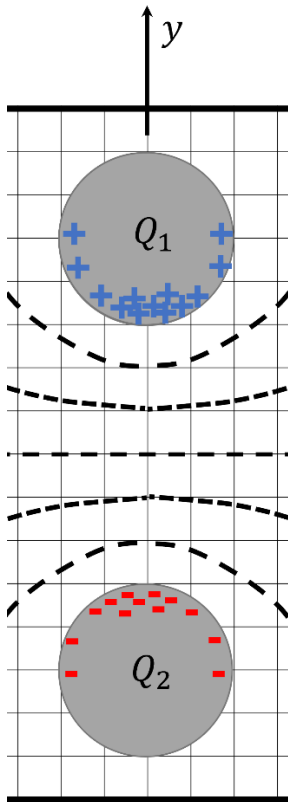
Criterios de corrección:

1 punto por el dibujo de la distribución de carga superficial.

1 punto por la justificación de la distribución.

1 punto por la determinación de la densidad de carga.

La carga de los discos induce una distribución de carga superficial similar a la que se indica en la siguiente figura. La distribución no será uniforme porque de esa forma no se anularía el campo en el interior de los discos, habiendo más concentración de carga a lo largo del eje  $y$ , por la proximidad entre los discos.



En el punto R no hay carga, ya que toda la carga está localizada en los discos.

Para calcular el valor de la densidad de carga en los puntos  $P$  y  $Q$ , tendremos en cuenta que la componente normal del campo eléctrico es discontinua al atravesar una región en la que existe una densidad superficial de carga, es decir

$$\Delta E = E_{n.1} - E_{n.2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

En el interior de los discos conductores el campo eléctrico es cero, por lo que la determinación del campo eléctrico en los puntos  $P$  y  $Q$  determina directamente el valor de la densidad superficial de carga,  $\sigma$ , en esos puntos.

Punto Q.

La componente normal del campo en Q es igual a la componente radial,  $E_r$ , por lo que



$$\Delta E = E_{n.Q} - 0 = \frac{\sigma_Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_Q = -\frac{V_0 \epsilon_0}{3\sqrt{2}} \text{ C/m}^2$$

Punto P.

Componente normal del campo en P es igual a la componente y,  $E_y$ , por lo que

$$\Delta E = 0 - E_{n.P} = \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_P = \frac{V_0 \epsilon_0}{3} \text{ C/m}^2$$

Como se puede ver  $|\sigma_P| > |\sigma_Q|$ , lo que confirma la distribución superficial de carga previamente dibujada.

**c) (2/10) Se modifica el valor de las cargas presentes en los discos conductores, siendo ahora  $Q_1=+3Q$  y  $Q_2=-3Q$ . ¿Qué trabajo, medido en Julios, tiene que hacer un agente externo para mover una carga  $+q$ , desde el punto  $Q$  hasta el punto  $P$ ? Explicar el signo de este trabajo. (Supóngase que la carga  $q$  es muy pequeña y que no modifica la distribución de carga en los discos).**

Criterios de corrección:

1 punto por el razonamiento que justifique la utilización del potencial original.

1 punto por el resultado obtenidos.

Para resolver el problema debemos tener en cuenta la linealidad de la ecuación de Laplace, que es la ecuación general que tiene como resultado las superficies equipotenciales mostradas en la figura. Dado que tanto la ecuación de Laplace, como el gradiente, como la expresión que relaciona campo cerca del conductor con carga en su superficie son lineales, si partimos de una determinada configuración de la que suponemos su solución, se cumplen si se multiplica por un determinado factor (positivo o negativo) la carga neta en todos los conductores del problema, el campo y el potencial en todos los puntos quedan multiplicados por este factor.

Por lo tanto, el trabajo realizado para mover la carga  $+q$  en la nueva configuración de cargas, será igual el trabajo realizado usando las superficies equipotenciales de la configuración de cargas original, multiplicado por la relación de cargas entre el sistema nuevo y el original (3 en nuestro caso).



Definición de trabajo:

$$W_{QP}(ext) = - \int_Q^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \cdot (V_P - V_Q)$$

Solución:

$$W_{QP}^{nuevo}(ext) = 3 \cdot W_{QP}^{orig}(ext) = 3 \cdot q \cdot (V_P - V_Q) = 3 \cdot q \cdot (V_A - (-V_A)) = 6qV_0 \quad \text{Julios}$$

Al sistema original ( $Q_1=+Q$  y  $Q_2=-Q$ ) se añade una corona esférica conductora. Esta corona esférica tiene carga neta nula y 1 m de radio interior y radio exterior de 2 m. La corona esférica se encuentra equidistante de los dos discos y está situada entre ambos.

d) (1/10) Dibuja dónde se encuentra la carga presente en el nuevo sistema, detallando si se trata de una densidad volumétrica, superficial o lineal de carga. Además, justifica si son uniformes o no.

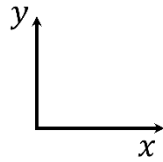
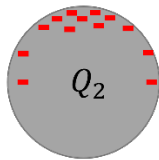
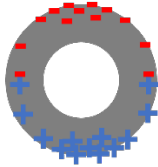
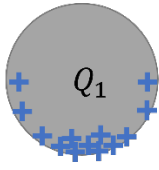
Criterios de corrección:

0.5 punto por el dibujo de la distribución de carga.

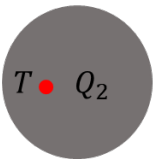
0.5 punto por la justificación de su distribución.

La carga neta de la distribución exterior es 0. Se inducirá carga en la superficie exterior de la esfera, como se muestra en la siguiente figura. El campo electrostático en el interior de un conductor hueco es nulo. Esta propiedad también se conoce como apantallamiento, ya que el conductor redistribuye sus cargas de forma que actúa como una pantalla que anula el campo que pudieran producir las cargas exteriores.

La siguiente figura muestra la distribución de carga en el plano x-y.



e) (1/10) ¿Qué signo tiene la diferencia de potencial  $V_T - V_U$ ? Justifica la respuesta.



Criterios de corrección:

0.5 punto por el razonamiento que justifique que el potencial en punto T y U es cero.





0.5 punto por el correcto valor (incluido el signo) de la diferencia de potencial.

El campo electrostático en el interior de un conductor hueco es nulo, ya que el conductor redistribuye sus cargas de forma que actúa como una pantalla que anula el campo que pudieran producir las cargas exteriores. Pero este hecho no implica que en el interior del disco el potencial valga cero. El interior del conductor tendrá el mismo valor que en la superficie. Como la esfera hueca es neutra, y no se modifican los potenciales de los otros conductores cargados, estará a un potencial cero, y por lo tanto el voltaje del punto U será cero también.

El punto  $T$  está al mismo potencial que el punto  $Q$ , ya que todos los puntos en un conductor están al mismo potencial.

Por lo tanto, la diferencia de potencial toma el valor

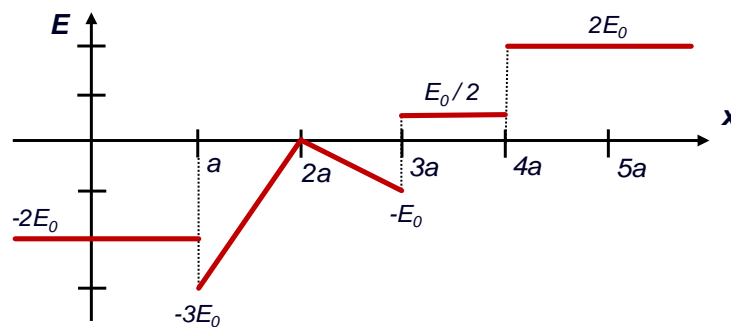
$$(V_T - V_U) = (-V_A - 0) = -V_A = -V_0 < 0$$

ya que  $V_0 > 0$ .

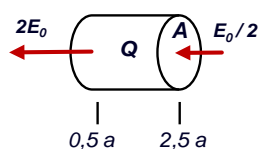
**Problema 2. (2 puntos)** La gráfica muestra el módulo de un campo electrostático de la forma  $\vec{E} = E(x) \cdot \hat{i}$  producido por un conjunto de placas y láminas de carga planas (no conductoras), que son infinitas tanto en la dirección  $y$ , como en la dirección  $z$ . ( $a$  y  $E_0$  son constantes positivas conocidas). Se sabe además que en la zona  $3a < x < 4a$ , hay un dieléctrico con constante dieléctrica desconocida  $\epsilon$  (constante dieléctrica relativa o permitividad relativa, sin unidades). También se conoce que en el plano  $x=4a$  no hay carga libre superficial.

Se pide, justificando todas las respuestas:

- Carga total que encierra un cilindro de base  $A$ , con su eje paralelo al eje  $x$ , cuya altura se extiende desde  $x = 0,5a$ , hasta  $x = 2,5a$ .
- Trabajo realizado por un agente externo para mover una carga  $q > 0$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 2a$ .
- Determinar el vector polarización en el interior del dieléctrico. Supóngase  $\epsilon$  conocido para este apartado.
- Determinar cuánto valen en  $x=3a$  la densidad de carga superficial total  $\sigma(3a)$  (libre más polarizada) y la densidad de carga superficial libre  $\sigma_f(3a)$ . Supóngase  $\epsilon$  conocido para este apartado.
- Calcular el valor numérico de  $\epsilon$ .



- (20%) Aplicando la ley de Gauss al cilindro de la imagen:

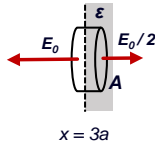


$$A \left( 2E_0 - \frac{E_0}{2} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow Q = \epsilon_0 A \frac{3E_0}{2}$$

- (20%) A partir de la definición de trabajo calculando  $\vec{F}_{ext} = -q\vec{E}$ :

$$\begin{aligned} W_{02} &= \int_0^{2a} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = - \int_0^{2a} q\vec{E} = -q \int_0^{2a} E \cdot dx \\ &= -q \int_0^a -2E_0 \cdot dx - q \int_a^{2a} \left( -6E_0 + \frac{3E_0}{a}x \right) \cdot dx = \frac{7}{2} qE_0 a \end{aligned}$$

- (20%) Como es un dieléctrico lineal la polarización se obtiene directamente a partir del campo eléctrico.  $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\frac{E_0}{2}\hat{i}$
- (20%) Para un cilindro de altura muy pequeña situado en  $x=3a$  se aplica la ley de Gauss y se obtiene la densidad de carga total  $\sigma(3a)$  (libre más polarizada).



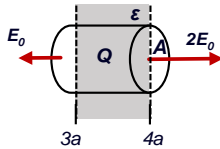
$$E_0 A + \frac{E_0}{2} A = \frac{\sigma(3a) \cdot A}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma(3a) = \frac{3}{2} \epsilon_0 E_0$$

La densidad de carga libre puede obtenerse restando la polarizada, que se obtiene a partir del vector polarización calculado anteriormente.

$$\sigma_p(3a) = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot (-\hat{i}) = -\epsilon_0(\epsilon - 1) \frac{E_0}{2}$$

$$\sigma_f(3a) = \sigma(3a) - \sigma_p(3a) = \frac{3}{2} \epsilon_0 E_0 - \left( -\epsilon_0(\epsilon - 1) \frac{E_0}{2} \right) = \epsilon_0 E_0 \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \right)$$

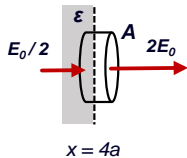
Método alternativo: si se aplica Gauss al cilindro de la imagen que está entre 3a y 4a, teniendo en cuenta que la carga polarizada total en el dieléctrico es cero y que en x=4a no hay carga libre, se obtiene directamente la carga libre, y además no es necesario conocer  $\epsilon$ .



$$E_0 A + 2E_0 A = \frac{\sigma_f(3a)}{\epsilon_0} A \rightarrow \sigma_f(3a) = 3\epsilon_0 E_0$$

- e) (20%) Para un cilindro de altura muy pequeña situado en x=4a aplicamos que la carga libre (nula en esta zona según el enunciado) se puede calcular como

$$Q_f = \oint \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



$$-A\epsilon\epsilon_0 \frac{E_0}{2} + A\epsilon_0 2E_0 = 0 \rightarrow \epsilon = 4$$

Método alternativo: también se puede aplicar Gauss al mismo cilindro, que contiene solo carga polarizada:  $Q = Q_p = A\vec{P} \cdot \hat{n} = A\epsilon_0(\epsilon - 1) \frac{E_0}{2}$

$$-A \frac{E_0}{2} + A 2E_0 = \frac{A\epsilon_0(\epsilon - 1) \frac{E_0}{2}}{\epsilon_0} \rightarrow \epsilon = 4$$



**Problema 3. (2 puntos)** La componente  $B_\phi$  de un campo magnético viene dada en coordenadas cilíndricas por:

$$\vec{B} = B_\phi \hat{\phi} ; B_\phi = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{B_0 r^2}{2R^2} & R < r < 2R \\ \frac{2B_0 R}{r} & r > 2R \end{cases}$$

( $r$  es la distancia al eje  $z$ ,  $B_0$  y  $R$  son constantes positivas conocidas y  $B_r = B_z = 0$ . La distribución que genera este campo tiene simetría cilíndrica y se puede considerar infinita).

Se pide responder razonadamente a las siguientes preguntas:

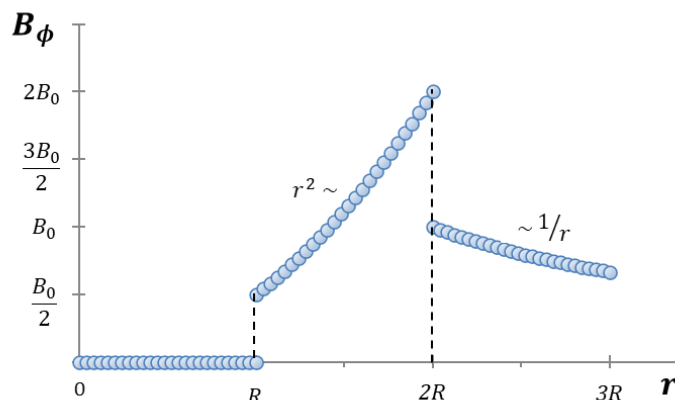
- ¿Hay densidad de corriente superficial  $\vec{k}$  (A/m) en alguna zona del espacio? En caso afirmativo, determina dónde está localizada y su valor, dirección y sentido.
- Determinar el vector densidad de corriente  $\vec{j}$  (A/m<sup>2</sup>) en todas las zonas del espacio. Indicar además si dicha densidad de corriente es uniforme o no. Justificar la respuesta.
- Indicar el valor y el sentido de la corriente total que circula en la región  $R < r < 2R$  a través de una superficie perpendicular al eje  $z$ .
- Determinar el vector fuerza por unidad de longitud que ejerce la distribución de corrientes responsable del campo dado (con eje de simetría centrado en  $r = 0$ ) sobre un hilo finito de longitud  $L$  paralelo al eje  $z$ . Este hilo está situado a una distancia  $r = 4R$  del eje de la distribución y por él circula una corriente  $I$  en el sentido positivo del eje  $z$ . ¿Se trata de una fuerza atractiva o repulsiva?

(Todas las respuestas deberán justificarse adecuadamente)

Nombre:

Grupo:

SOLUCIÓN:



- a) A partir de la gráfica podemos confirmar que existen dos densidades de corriente superficiales, una en  $r = R$  y la otra en  $r = 2R$ , ya que en esas zonas del espacio se produce un salto en la componente tangencial del campo magnético  $B_\phi$ . El valor de dichas densidades de corriente lo podemos obtener a partir de los saltos de campo:

- En  $r = R$ :  $\Delta B_\phi = \frac{B_0}{2} - 0 = \mu_0 K_R \Rightarrow \vec{K}_R = \frac{B_0}{2\mu_0} \hat{k}$  [A/m]

Tenemos una lámina de corriente en dirección  $+\hat{k}$  ya que el salto del campo es positivo.

- En  $r = 2R$ :  $\Delta B_\phi = B_0 - 2B_0 = -B_0 = \mu_0 K_{2R} \Rightarrow \vec{K}_{2R} = -\frac{B_0}{\mu_0} \hat{k}$  [A/m]

En este caso, tenemos una lámina de corriente en dirección  $-\hat{k}$  ya que el salto del campo es negativo.

- b) En  $r > 2R$  no hay densidad de corriente  $\vec{J}$  porque  $B_\phi$  decrece con  $1/r$ . Se puede demostrar fácilmente aplicando la ley de Ampère diferencial:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot B_\phi) \hat{k} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{2B_0 R}{r} \right) \hat{k} = 0 = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \vec{J} = 0$$

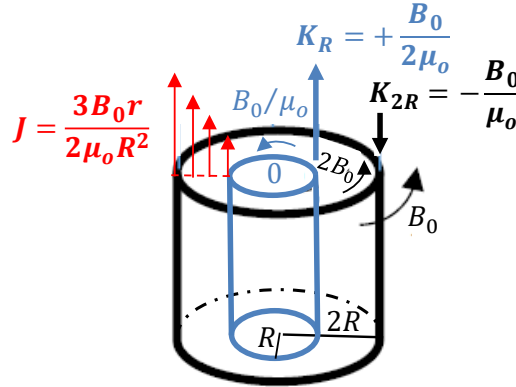
En  $R < r < 2R$  hay una densidad de corriente  $\vec{J}$  (A/m<sup>2</sup>) en dirección  $+\hat{k}$  que se obtendría fácilmente aplicando  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  en cilíndricas:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{B_0 r^2}{2R^2} \right) \hat{k} = \frac{3B_0 r}{2R^2} \hat{k} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \vec{J} = \frac{3B_0 r}{2\mu_0 R^2} \hat{k}$$
 [A/m<sup>2</sup>]

La densidad de corriente en esta zona del espacio **no es uniforme**, aumentando linealmente con  $r$ .

En  $r < R$  no hay densidad de corriente  $\vec{J}$  porque  $B_\phi$  es cero, es decir,  $\vec{J} = 0$ .

Teneiendo en cuenta el apartado a) y b), un esquema del sistema de corrientes que está generando el campo dado sería:



- c) La corriente total que circula en la región  $R < r < 2R$  la podemos calcular usando la ley de Ampère. Primeramente, calculamos la corriente total encerrada dentro de una circunferencia amperiana de radio  $R$  ( $I_1$ ):

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_1 \Rightarrow \underbrace{B \oint d\vec{l}}_{\substack{\vec{B} \parallel d\vec{l} \\ B \text{ unif}}} = \mu_0 I_1 \Rightarrow \underbrace{\frac{B_0 R^2}{2R^2} 2\pi R}_{B(r=R)} = \mu_0 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{\pi B_0 R}{\mu_0}$$

Después, determinamos la corriente total encerrada dentro de una circunferencia amperiana de radio  $2R$  ( $I_2$ ):

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_2 \Rightarrow \underbrace{B \oint d\vec{l}}_{\substack{\vec{B} \parallel d\vec{l} \\ B \text{ unif}}} = \mu_0 I_2 \Rightarrow \underbrace{\frac{4B_0 R^2}{2R^2} 2\pi(2R)}_{B(r=2R)} = \mu_0 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{8\pi B_0 R}{\mu_0}$$

Finalmente, la corriente total que circula en la región  $R < r < 2R$  la calculamos como la diferencia de ambas corrientes:

$$I_{total} = I_2 - I_1 = \frac{8\pi B_0 R}{\mu_0} - \frac{\pi B_0 R}{\mu_0} = \frac{7\pi B_0 R}{\mu_0} \quad [A]$$

La corriente calculada es positiva y circula en sentido positivo del eje  $z$ .

Nota: También, como alternativa, se podía haber obtener la corriente total en el tramo de  $R$  a  $2R$  integrando el vector densidad de corriente  $\vec{J}$  hallado en el apartado b) a través de una superficie perpendicular al eje  $z$ :

$$I_{total} = \iint \vec{J} d\vec{A} \underset{\vec{J} \parallel d\vec{A}}{=} \iint J dA = \int_R^{2R} \frac{3B_0 r}{2\mu_0 R^2} 2\pi r dr = \frac{\pi B_0}{\mu_0 R^2} [r^3]_R^{2R} = \frac{7\pi B_0 R}{\mu_0} \quad [A]$$



- d) La forma que tiene el campo generado por la distribución en puntos del espacio con  $r > 2R$  sería:

$$\vec{B} = \frac{2B_0R}{r} \hat{\phi}$$

Como el hilo es paralelo al eje de la distribución, todos los puntos del hilo se encuentra a la misma distancia de la misma y, por tanto, el campo que actúa sobre el hilo es uniforme y vale:

$$\vec{B}(r = 4R) = \frac{2B_0R}{4R} \hat{\phi} = \frac{B_0}{2} \hat{\phi}$$

La fuerza magnética que actúa sobre el hilo de corriente se calcula como:

$$\vec{F}_m = \int I d\vec{l} \times \vec{B} \quad \stackrel{\substack{\vec{B} \text{ uniforme} \\ \text{sobre hilo}}}{=} \quad I\vec{L} \times \vec{B} = I(L \hat{k}) \times \left(\frac{B_0}{2} \hat{\phi}\right) = IL \frac{B_0}{2} (-\hat{r})$$

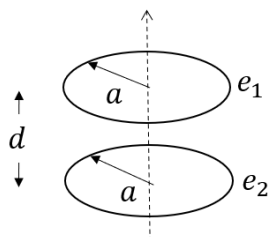
De modo que fuerza magnética por unidad de longitud sería:

$$\frac{\vec{F}_m}{L} = \frac{IB_0}{2} (-\hat{r}) \quad [\text{N/m}]$$

Se observa que la fuerza que ejerce la distribución sobre el hilo tiene dirección radial y sentido negativo, por lo que es una fuerza atractiva.

**Problema 4 (2 puntos)**

Dos espiras idénticas  $e_1$  y  $e_2$ , de radio  $a$ , tienen el mismo eje y están separadas una distancia  $d$ , como muestra la siguiente figura. Ambas espiras están recorridas por  $I_1$  e  $I_2$  respectivamente.

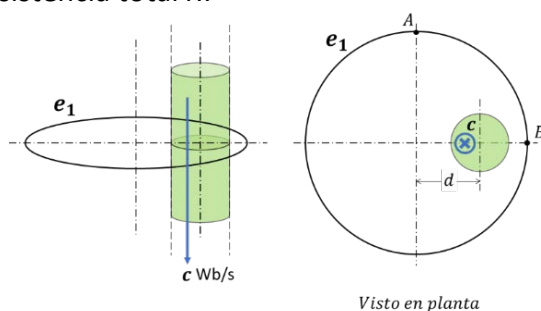


- a) Explica, según el sentido en el que circulen las corrientes por cada una de las espiras, en qué casos la fuerza que ejerce la espira  $e_1$  sobre la espira  $e_2$  es atractiva.

Se considera ahora una situación en la que la espira  $e_2$  se encuentra situada a una distancia  $d \gg a$  respecto a la espira  $e_1$ .

- b) ¿Hay inductancia mutua entre las dos espiras? Si la respuesta es afirmativa, calcula de forma aproximada el coeficiente de inductancia mutua que hay entre las dos espiras. En caso contrario, justifica por qué no hay inductancia mutua.

Supóngase ahora que la espira  $e_2$  ya no interviene en el problema. A continuación, se coloca un solenoide muy largo atravesando la espira  $e_1$  de forma no coaxial como muestra la siguiente figura. El solenoide produce un flujo magnético que aumenta linealmente a razón de  $c$  Wb/s ( $c > 0$ ). El radio del solenoide es  $b < a$ . La espira tiene una resistencia total  $R$ .

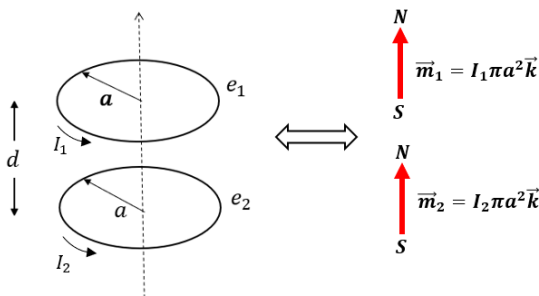


- c) Calcula el valor y sentido (visto desde arriba) de la fuerza electromotriz que se induce en la espira  $e_1$ . Despreciar el efecto de autoinducción en la espira.
- d) Calcula, si es posible, el campo eléctrico que se induce en los puntos A y B de la espira utilizando la ley de Faraday. Si no es posible, explica por qué. Dibuja sobre la figura los vectores campo eléctrico en esos dos puntos, indicando si tienen el mismo módulo o cuál de ellos es mayor en caso contrario. Despreciar el efecto de autoinducción en la espira.



### Solución

- a) La fuerza será atractiva si las corrientes que circulan por cada una de las dos espiras van en el mismo sentido, sea horario o antihorario, y repulsiva si van en sentidos contrarios. Esto se justifica porque las espiras se pueden ver como dos momentos magnéticos, orientados según el sentido de la corriente, y éstos como dos pequeños imanes, tal y como muestra la figura.



- b) Sí hay inductancia mutua entre las dos espiras. Para calcularla es necesario suponer que por una de ellas, por ejemplo la  $e_2$ , circula una corriente en sentido antihorario, y calcular el flujo del campo magnético creado por esa corriente sobre la superficie encerrada por la otra espira. Por el teorema de reciprocidad, es indiferente calcular el flujo del campo creado por la espira  $e_2$  sobre la espira  $e_1$  o viceversa.

Al estar a una distancia  $d \gg a$  aproximamos la espira  $e_2$  a un momento magnético,  $\vec{m}_2$ , y como están alineadas, el campo magnético creado será la componente radial  $\vec{B}_r$  del campo creado por dicho momento.

$$\Phi_{2,1} = \iint \vec{B}_{r2} \cdot \vec{ds}_1 = B_{r2} S_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_2}{d^3} \pi a^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 \pi a^2}{d^3} \pi a^2$$

$$\text{Luego } M_{2,1} = \frac{\Phi_{2,1}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi^2 a^4}{d^3}$$

- c) Visto en planta, como  $c = \frac{d\Phi_m}{dt} > 0$ , aumenta el flujo magnético entrante, luego la intensidad inducida irá en sentido antihorario, de forma que disminuirá este flujo entrante creando flujo saliente. El módulo de esta fem será:

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\Phi_m}{dt} \right| = c$$

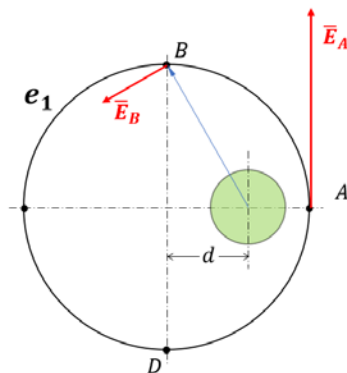
- d) No es posible calcular el campo eléctrico aplicando la ley de Faraday,  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot \vec{ds} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ , porque no hay simetría que permita calcular fácilmente esta integral de circulación.

Por simetría, las líneas de campo eléctrico en el exterior de un solenoide por el cual circula una corriente variable con el tiempo son circunferencias centradas en el eje del solenoide. Según esto, si eligiese convenientemente una curva  $C$  centrada en el eje del hilo, se cumplirían las condiciones de simetría que me permitirían resolver esta integral fácilmente y calcular el módulo del campo eléctrico:

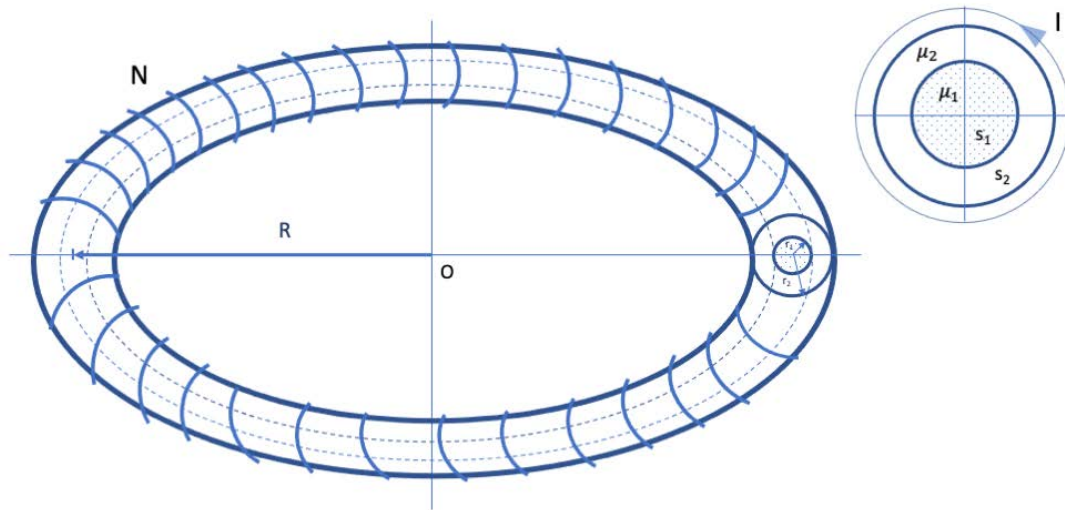
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C E \, dl = E \oint_C dl = E 2\pi r = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -c$$

En este caso, la espira  $e_1$  no cumple estas condiciones de simetría, luego no se podría calcular fácilmente el módulo del campo eléctrico.

Sí podemos estimar la dirección y sentido de los vectores campo eléctrico en esos puntos (tangente a esa circunferencia centrada), y cuál de ellos es mayor, tal y como muestra la figura.



## Problema 5



La figura muestra un circuito magnético formado por un solenoide toroidal de radio medio  $R$  y sección transversal circular de radio mucho menor que  $R$ . El interior lo llenan completamente dos materiales magnéticos lineales, uno dentro del otro tal como muestra la figura. El área de la sección circular del material interior es  $S_1$  y el correspondiente al material exterior es  $S_2$ , las permeabilidades magnéticas relativas son  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , respectivamente. El arrollamiento tiene  $N$  espiras y la intensidad que circula por él es  $I$ .

Se pide, haciendo las simplificaciones que se consideren adecuadas, y justificando las respuestas:

- Calcular el campo  $H$  dentro (1,5 pto.) y fuera del solenoide indicando su sentido (0,5 pto.).
- Calcular el campo magnético  $B$  dentro (1,5 pto.) y fuera del solenoide indicando su sentido (0,5 pto.).
- Calcular la magnetización  $M$  dentro (1,5 pto.) y fuera del solenoide indicando su sentido (0,5 pto.).
- Determinar dónde hay corrientes superficiales de magnetización (0,5 pto.) y su valor (1,5 pto.).
- Si se añade un corte transversal a ambos materiales que añade un pequeño entrehierro de espesor  $e$ . ¿Se mantiene, aumenta o disminuye el valor del campo magnético en los materiales magnéticos? Justifica la respuesta. (2 pto.)



## SOLUCIÓN:

Este circuito magnético está compuesto por dos materiales magnéticos que producirán una relación lineal entre  $B$  y  $H$ . El flujo magnético se conservará, ya que  $B$  se considera confinado dentro del material magnético, que hace a su vez de tubo de flujo cuando se desprecia el flujo disperso; de esta forma,  $B$  estará confinado dentro del circuito (en este contexto tomaremos un  $B$  medio y trabajaremos para ello con el  $B$  del radio medio como una representación del valor medio, y el flujo será:  $\phi = B_{\text{med}} S_{\text{útil}}$ ). Al ser el flujo constante,  $H$  se considera uniforme en aquellos tramos en el que el material y la sección lo sea; esto permite dividir en tantos tramos como materiales (o secciones) haya en el circuito magnético.

a) Aplicaremos Ampère a los dos materiales que rellenan el solenoide teniendo en cuenta que la distancia  $R$  es mucho mayor que los radios internos de los distintos materiales magnéticos ( $r_1$  y  $r_2$ ), esto es, despreciando los radios internos por ser mucho más pequeños que  $R$  y tomando  $R$  como la distancia por la que circulará el campo  $H$ .

Si fuera un circuito con únicamente el material  $\mu_1$  y aplicáramos Ampère, obtendríamos:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_1 2\pi R = NI \rightarrow H_1 = \frac{NI}{2\pi R}$$

Es decir, el campo  $H$  no depende de la  $\mu_1$ , sólo de la corriente libre. Es decir, cuando hay  $I_{\text{libre}}$ , el campo  $H$  es debido a ellas. Entonces, aunque tengamos dos materiales, el campo  $H$  será el mismo:

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi R} \mathbf{u}_\varphi$$

La dirección es tangente a la circunferencia media.

El sentido viene dado por la ley de inducción: si el sentido de la corriente es antihorario, la regla de la mano derecha hace que  $H$  circule por el interior de los materiales a lo largo de todo el circuito en sentido horario, esto es, en sentido horario viendo el circuito general desde arriba.

El campo  $H$  en el exterior es nulo porque el campo magnético se encuentra confinado en el material.



b) Calcular el campo magnético  $B$  dentro y fuera del solenoide indicando su sentido.

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mu_1 \mathbf{H}_1 = \mu_0 \mu_1 \frac{NI}{2\pi R} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mu_2 \mathbf{H}_2 = \mu_0 \mu_2 \frac{NI}{2\pi R} \mathbf{u}_\varphi$$

Es decir, lo que hace el material es potenciar el campo  $B$ , haciéndolo  $\mu$  veces mayor.

El campo  $\mathbf{B}$  en el exterior es cero porque  $\mathbf{H}$  es cero y no hay  $\mathbf{M}$  (no hay material magnético).

c) Calcular la magnetización  $M$  dentro y fuera del solenoide indicando su sentido. El vector  $\mathbf{M}$  lo obtenemos de su relación con los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H}$$

$$\mathbf{M}_1 = \frac{\mu_0 \mu_1 \frac{NI}{2\pi R}}{\mu_0} - \frac{NI}{2\pi R} \mathbf{u}_\varphi = \frac{NI}{2\pi R} (\mu_1 - 1) \mathbf{u}_\varphi \approx \mu_1 \frac{NI}{2\pi R} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{\mu_0 \mu_2 \frac{NI}{2\pi R}}{\mu_0} - \frac{NI}{2\pi R} \mathbf{u}_\varphi = \frac{NI}{2\pi R} (\mu_2 - 1) \mathbf{u}_\varphi \approx \mu_2 \frac{NI}{2\pi R} \mathbf{u}_\varphi$$

Como no hay material magnético fuera del solenoide,  $\mathbf{M}$  en el exterior es cero.

d) Determinar dónde hay corrientes superficiales de magnetización y su valor.

Las corrientes superficiales de magnetización están relacionadas con las cargas ligadas dentro del solenoide y no con las corrientes libres, así que, en esta ocasión, habrá corrientes superficiales en la superficie de ambos materiales, en la misma dirección que las corrientes del bobinado:

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$$

$$K_{b1} = M_1 = \mu_1 \frac{NI}{2\pi R}$$



$$K_{b2} = M_2 = \mu_2 \frac{NI}{2\pi R}$$

En el exterior del solenoide no habrá corriente superficial.

e) Se introduce un entrehierro y el campo H tendrá un nuevo recorrido a través del aire del entrehierro, con un nuevo sumando en la ley de Ampère inicial:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum H \cdot l = H \cdot 2\pi R + H_{aire} \cdot l_{aire} = \sum I_{libre}$$

Para los materiales:  $H_i = \frac{B_i}{\mu_r \mu_0} = \frac{N \cdot I}{2\pi R}$ , igual para ambos materiales.

Para el entrehierro:  $H_a = \frac{B_a}{\mu_0} = \frac{N \cdot I}{l}$

El campo B debe bajar por la presencia del entrehierro. Si B no bajara, la circulación de H sería mayor que NI, que es lo que la produce, añadida por el nuevo sumando a la ley de Ampère, que es grande, pues  $H_a = \frac{B_a}{\mu_0}$ .

Otra posible explicación es que la reluctancia del circuito aumenta de forma significativa por la reluctancia del entrehierro, que es grande al no ir dividida por la permeabilidad relativa.