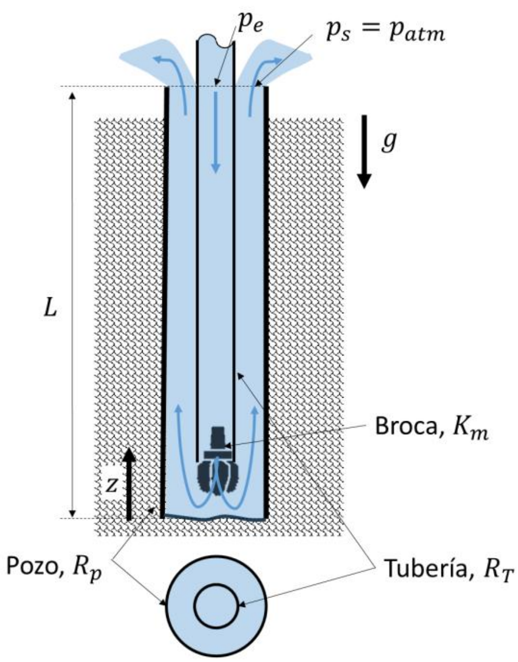
Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2024

PROBLEMA 2

La perforación de un pozo geotérmico emplea un sistema como el que se muestra en la figura. Por el interior de la tubería de perforación (de sección circular) se bombea un líquido newtoniano, que desciende por la tubería central, atraviesa la broca lubricándola y retorna por el espacio anular formado entre la tubería y la pared del pozo, hasta llegar a la superficie a presión atmosférica.



El cambio de dirección y paso a través de la broca se puede modelar con una pérdida de carga secundaria de valor K_m (referida a la velocidad en la tubería).

Datos:

ρ	$850\ kg/m^3$	ε	$0.0008\ m$
μ	$0.02\ kg/ms$	K_m	50
R_T (Tubería)	$0.02\ m$	L	$4000\ m$
R_p (Pozo)	$0.0762\ m$	Q	$0.005\ m^3/s$
Δp	$-33.44\ MPa$	g	$9.81\ m/s^2$

En un momento dado, la broca está estática y se hace circular el líquido por el sistema. Sabiendo que la caída de presión desde la parte inferior del pozo hasta la superficie, por el espacio anular, es Δp y que circula un caudal Q por la tubería. Se pide:

a) La expresión analítica del perfil de velocidad en el espacio anular con los datos del problema. (3 puntos)

b) El factor de fricción en el espacio anular. Compararlo con el factor de fricción obtenido como $f = \frac{64}{Re_{D_h}}$. (3.5 puntos)

c) Calcular la pérdida de carga total en el sistema (Δp_{s-e}). En este apartado se debe utilizar para el tramo de sección anular el factor de fricción $f = \frac{64}{Re_{D_h}}$. (3.5 puntos)

Justificar todas las hipótesis realizadas. Ecuación de Haaland: $\frac{1}{f^{1/2}} \cong -1.8 \cdot log\left(\left(\frac{\varepsilon/d}{3.7}\right)^{1.1} + \frac{6.9}{Re_d}\right)$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{{v_\theta}^2}{r}\right) = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}v_r v_\theta\right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

$$\tau_{rr} = 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} \qquad \tau_{\theta\theta} = 2\mu\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) \qquad \tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \qquad \tau_{\theta z} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) \qquad \tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2024

Solución:

Apartado a)

Para resolver el perfil de velocidades en la tubería cilíndrica se deberán resolver las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas.

En primer lugar, hay que analizar la ecuación de continuidad. Por un lado, la componente radial de la velocidad es cero ($v_r = 0$) y, además, la componente azimutal también se anula ($v_\theta = 0$) debido a la simetría cilíndrica del problema. Por tanto, el fluido se mueve sólo en la dirección vertical:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \rightarrow v_z = f(r,\theta) \rightarrow v_z = f(r)$$

La componente vertical sólo depende de la coordenada radial debido a la simetría cilíndrica del problema.

En segundo lugar, se resolverán las ecuaciones de Navier-Stokes en las tres coordenadas cilíndricas. De las componente radial y azimutal se obtienen las expresiones:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0;\ \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

de donde se deduce que la presión sólo puede depender de la componente vertical $p(z)$.

Por tanto, en la componente radial se tiene:

$$\rho\left(\underset{1}{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}} + \underset{2}{\cancel{v_r}}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\underset{3,4}{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}}} + v_z\underset{1}{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\underset{4}{\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}}} + \underset{1}{\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}}\right)$$

1. La componente v_z no depende del tiempo (Q es constante) y solo depende de r.
2. No existe v_r
3. No existe v_θ
4. Hay simetría en θ

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right) = 0$$

Se puede observar que por un lado la componente vertical de la velocidad v_z depende únicamente de la posición radial, y por otro, que la presión sólo puede depender de la coordenada vertical z. Por tanto, para que dicha ecuación sea válida en todo el campo fluido, los términos $\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}$ deben ser constantes y se pueden integrar directamente.

Resolviendo dicha expresión, considerando que la gravedad es $g_z = -g\vec{k}$, e integrando:

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2024

$$-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right)=0\rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)=\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{r}{\mu}\rightarrow\frac{\partial v_z}{\partial r}=\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{r}{2\mu}+C_1\frac{1}{r}$$

$$v_z(r)=\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{r^2}{4\mu}+C_1 ln(r)+C_2$$

Para calcular las constantes es necesario aplicar las condiciones del contorno:

$$r=R_T\rightarrow v_z(R_T)=0$$

$$r=R_P\rightarrow v_z(R_P)=0$$

La expresión del perfil de velocidad se puede expresar como:

$$v_z(r)=\frac{1}{4\mu}\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(r^2-\frac{{R_T}^2-{R_P}^2}{ln\frac{R_T}{R_P}}\ln(r)-{R_T}^2+\frac{{R_T}^2-{R_P}^2}{ln\frac{R_T}{R_P}}\ln(R_T)\right)$$

Sustituyendo se obtiene que:

$v_z(r)=12.5\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)(r^2-0.004\ln(r)-0.0162)$=-272$(r^2-0.004\ln(r)-0.0162)=-272r^2+1.278lnr+4.406$

Aunque no se pide en el enunciado, vamos a confirmar que efectivamente el perfil de velocidades corresponde al caudal especificado:

$$Q=0.005=\int_{R_T}^{R_P}v_z(r)\,2\pi r\,dr=\int_{R_T}^{R_P}12.5\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)(r^2-0.004\ln(r)-0.0162)\,2\pi r\,dr=$$

$$=-25\pi\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(\frac{{R_P}^4-{R_T}^4}{4}-0.004\left(\frac{{R_P}^2\ln(R_P)}{2}-\frac{{R_T}^2\ln(R_T)}{2}+\frac{{R_P}^2-{R_T}^2}{4}\right)-0.0162\frac{{R_P}^2-{R_T}^2}{2}\right)$$

Despejando se obtiene,

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-83560\frac{Pa}{m}$$

Y

$$\Delta p=33{,}441{,}037Pa$$

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2024

Apartado b)

De la expresión del factor de fricción para un conducto no circular,

$$h_f = f\frac{L}{D_{hP}}\frac{V_p^2}{2g}$$

El diámetro hidráulico se puede calcular como:

$$D_{hP} = 4\frac{\pi({R_P}^2 - {R_T}^2)}{2\pi(R_P + R_T)} = 2(R_P - R_T) = \ 0.1124\ \mathrm{m}$$

La velocidad media se calcula como:

$$V_P = \frac{Q}{\pi({R_P}^2 - {R_T}^2)} = 0.294\ m/s$$

De la ecuación de Bernoulli, la altura de pérdidas se puede calcular como:

$$h_f = \Delta z + \frac{\Delta P}{\rho g} = -L + \frac{\Delta P}{\rho g}$$

Despejando el factor de fricción:

$$f_P = \frac{D_{hP}}{L}\frac{2g}{{V_P}^2}\left(-L + \frac{\Delta P}{\rho g}\right) = D_{hP}\frac{2g}{{V_P}^2}\left(-1 + \frac{\Delta P}{L}\frac{1}{\rho g}\right) = D_{hP}\frac{2g}{{V_P}^2}\left(-1 - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{1}{\rho g}\right) = 0.066$$

Si calculásemos el factor de fricción con la aproximación de diámetro hidráulico

$$f_P = \frac{64}{Re_{D_{hP}}} = 0.0455$$

El factor de fricción de un conducto circular con un diámetro hidráulico equivalente subestima en un 31% el valor real.

Otra forma de calcular el factor de fricción es hallar la relación entre h_f y los esfuerzos cortantes (los cuales se pueden calcular a partir del perfil de velocidad) mediante conservación de la cantidad de movimiento en un volumen de control:

$$\sum F_z = \Delta p\pi\left({R_p}^2 - {R_T}^2\right) - \rho g\pi\left({R_p}^2 - {R_T}^2\right)L - \left|\tau_{w_P}\right|(2\pi R_p)L - \left|\tau_{w_T}\right|(2\pi R_T)L =$$

$$= \dot{\mathrm{m}}(\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2) = 0$$

Dividiendo entre $\rho g\pi\left({R_p}^2 - {R_T}^2\right)$:

$$-L + \frac{\Delta P}{\rho g} = h_f = \frac{2L\left(\left|\tau_{w_P}\right|R_p + \left|\tau_{w_T}\right|R_T\right)}{\rho g\left({R_p}^2 - {R_T}^2\right)}$$

Por otra parte, obteniendo los esfuerzos cortantes a partir del perfil de velocidad:

$$\tau_{\mathrm{rz}} = \mu\left(\frac{\partial \mathrm{v_r}}{\partial \mathrm{z}} + \frac{\partial v_z}{\partial \mathrm{r}}\right) = 0 + \frac{1}{4}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(2r - \frac{{R_T}^2 - {R_P}^2}{ln\frac{R_T}{R_P}}\frac{1}{r}\right)$$

Y sustituyendo sus expresiones en la ecuación anterior se obtiene el mismo resultado.

Mecánica de Fluidos

Apellidos, Nombre: Mayo 2024

Apartado c)

Aplicando Bernoulli entre los límites del sistema (entrada y salida):

$$\left(\frac{P_e}{\rho g} + \frac{\alpha_e v^2{}_e}{2g} + z_e\right)_e = \left(\frac{P_s}{\rho g} + \frac{\alpha_s v^2{}_s}{2g} + z_s\right)_s + h_{fT} + h_{km} + h_{fP} \; (1)$$

Teniendo en cuenta que la diferencia de cotas es nula:

$$\frac{\Delta p_{e-s}}{\rho g} = \frac{\alpha_s v^2{}_s}{2g} - \frac{\alpha_e v^2{}_e}{2g} + f_T \frac{L}{D_T}\frac{v_T{}^2}{2g} + f_P \frac{L}{D_{hP}}\frac{v_P{}^2}{2g} + K_m \frac{v_T{}^2}{2g}$$

El factor de fricción y la velocidad media en el pozo se calcularon en el apartado anterior. Además $\alpha_P = \alpha_e = 2$ por ser régimen laminar. Para el tramo de tubería:

$$V_T = \frac{Q}{\pi(R_T{}^2)} = 3.98\, m/s$$

$$Re_T = \frac{\rho V_T D_T}{\mu} = 6764 > 2300 \rightarrow \text{Turbulento}$$

Siendo turbulento, tenemos que $\alpha_T = \alpha_s = 1$ y calculamos el factor de fricción f_T usando la ecuación de Haaland.

$$\frac{1}{f_T{}^{1/2}} = -1.8\, log\left(\left(\frac{\frac{\varepsilon}{D_T}}{3.7}\right)^{1.1} + \frac{6.9}{Re_T}\right)$$

$$f_T = 0.055$$

Despejando en la ecuación (1) se obtiene una diferencia de presiones de:

$$\Delta p_{e-s} = 37{,}238{,}054\, Pa$$