COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI

ICAI – GITI

Mecánica de Fluidos

Tema 3: Dinámica I: Relaciones Integrales

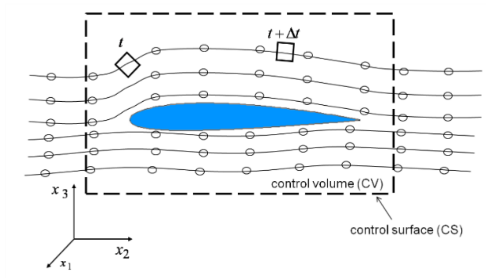
comillas.edu

Euler vs. Lagrange

- Descripción Lagrangiana: Descripción detallada del flujo en cada punto (x, y, z).

- Descripción Euleriana: Región finita del espacio.

  -Balance entre el fluido que entra y el que sale de ella → efecto neto



- Tipos de Volúmenes de Control:

VC fijo

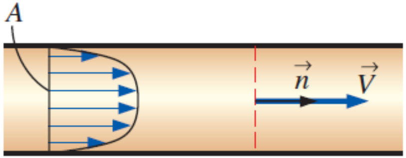
VC móvil

VC deformable

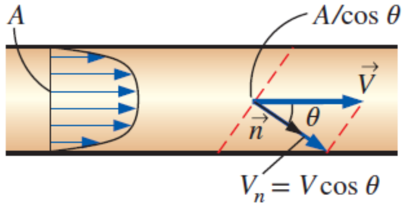
Flujos

- Flujo volumétrico: caudal [m³/s]

$$\boxed{Q = \iint (\vec{v} \cdot \vec{n})\,dA = \bar{v} \cdot A}$$



$$\dot{m} = \rho V A$$



$$\dot{m} = \rho(V\cos\theta)(A/\cos\theta) = \rho V A$$

- Flujo másico: [kg/s]

$$\boxed{\dot{m} = \iint \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})\,dA = \rho Q} \;\longrightarrow\;$$ Si ρ es constante: incompresible

- El objetivo es expresar las principales leyes en un VC:

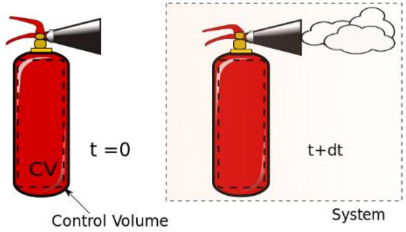
  -Conservación de la masa
  -Conservación de la cantidad de movimiento lineal
  -Conservación del momento cinético
  -Conservación de la energía

Teorema del transporte (Reynolds)

- Se trata de relacionar la derivada temporal de una magnitud fluida en un sistema con la variación temporal de esa propiedad en una región concreta (VC) y su variación a través de las fronteras (SC).

  -Magnitud B, por unidad de masa β

$$\beta = \frac{dB}{dm} \Rightarrow \beta dm = dB \Rightarrow \beta \rho dV = dB$$



- VOLUMEN DE CONTROL DEFORMABLE ó MÓVIL con velocidad v_r entre fluido y frontera:

$$\boxed{\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \beta\rho dV + \iint_{SC} \beta\rho(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA}$$

$\frac{d}{dt}\iiint_{VC} \beta\rho dV$: variación temporal de la magnitud B en el VC

$\iint_{SC} \beta\rho(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA$: flujo de la magnitud B a través de la SC

- CASO DE VOLUMEN DE CONTROL, NO DEFORMABLE, FIJO:

$$\boxed{\frac{dB_{sist}}{dt} = \iiint_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\beta\rho)dV + \iint_{SC} \beta\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})dA}$$

Teorema del transporte (Reynolds)

La formulación correcta del teorema del transporte de Reynolds para una propiedad B es (sist: sistema, VC: volumen de control):

- a. $dB_{sist}/dt = d/dt \int_{sist} \beta \rho dV + \int_{SC} \beta(\vec{v}_r \cdot \vec{n}) dA$
- b. $dB_{VC}/dt = d/dt \int_{VC} \beta \rho dV + \int_{SC} \beta(\vec{v}_r \cdot \vec{n}) dA$
- c. $dB_{sist}/dt = d/dt \int_{VC} \beta \rho dV + \int_{SC} \beta(\vec{v}_r \cdot \vec{n}) dA$

La ecuación del transporte general de Reynolds, de la forma $dB/dt = \int \int_{SC} \beta \rho (\vec{v} - \vec{v}_s) ds$ es válida para:

- a. Volumen de control deformable y móvil con v_s .
- b. Volumen de control no deformable y móvil con v_s .
- c. Volumen de control no deformable y propiedades estacionarias.

Conservación de la masa

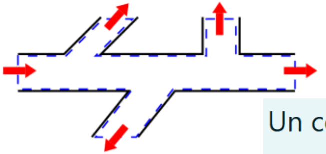
- Magnitud B=m, β=1: ecuación escalar.

$$\boxed{\frac{dm_{sist}}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho dV + \iint_{SC} \rho(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA}$$

<u>NO DEFORMABLE, FIJO</u>: $$\boxed{\iiint_{VC} \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \iint_{SC} \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})dA = 0}$$

<u>NO DEFORMABLE, FIJO Y ESTACIONARIO</u>: $$\iint_{SC} \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})dA = 0 \Rightarrow \dot{m}_e = \dot{m}_s \xrightarrow{\text{Incompresible}} Q_e = Q_s$$

<u>NO DEFORMABLE, FIJO, ESTACIONARIO y UNIDIMENSIONAL</u>: $$\sum_{entradas} \rho_e v_e A_e = \sum_{salidas} \rho_s v_s A_s$$



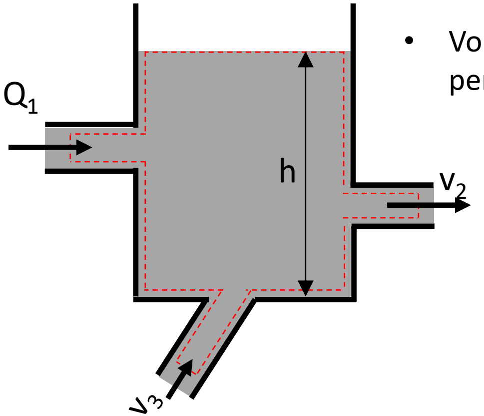
Un compresor situado en el centro de un conducto, de sección constante, impulsa un gas. Se puede afirmar que:

- a. Tanto el flujo másico como el caudal permanecen constantes a través del conducto.
- b. El caudal permanece constante a través del conducto.
- c. El flujo másico permanece constante a través del conducto.

Conservación de la masa

- Ejemplo: Evaluar la variación de la altura de líquido en el depósito cilíndrico, de área transversal A.

$$\boxed{\frac{dm_{sist}}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho dV + \iint_{SC} \rho(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA}$$



- Volumen de control deformable. Fijo. Entradas y salidas perpendiculares a las velocidades.

$$0 = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho dV + \iint_{SC} \rho(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA$$

$$0 = \rho\frac{d}{dt}\iiint_{VC} dV - \rho Q_1 + \rho V_2 A_2 - \rho V_3 A_3$$

$$0 = \rho A\frac{dh}{dt} - \rho Q_1 + \rho V_2 A_2 - \rho V_3 A_3$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{Q_1 - V_2 A_2 + V_3 A_3}{A}}$$

Conservación cantidad de movimiento

Magnitud $B = m\vec{v}$, $\beta = \vec{v}$: ecuación vectorial.

- Sistema de referencia inercial:

$$\boxed{\frac{d(m\vec{v})_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV + \iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA = \sum \vec{F}}$$

- Sistema de referencia no inercial:

$$\boxed{\sum \vec{F} - \iiint \vec{a}_{arr}dm = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV + \iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA}$$

- Las fuerzas son **acciones externas** sobre el volumen de control. Son:

  - Fuerzas volumétricas: generalmente peso $\vec{F}_{vol} = \iiint_{VC} \rho\vec{f}_m dV$

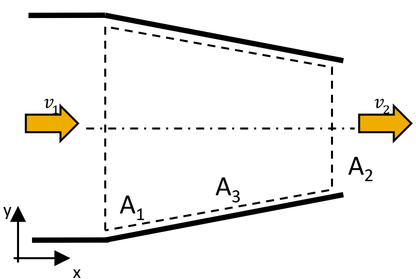
  - Fuerzas superficiales: esfuerzos de presión y cortantes.

$$\vec{F}_{sup} = \iint_{SC} p(-\vec{n})dA \qquad \vec{F}_{sup} = \iint_{SC} \tau dA$$

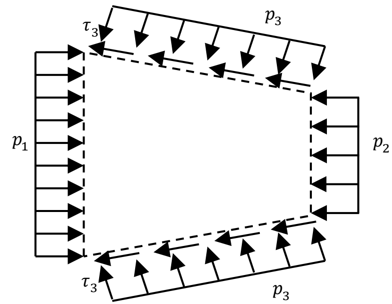
  - Reacciones internas al cortar sólidos con el VC.

Conservación cantidad de movimiento

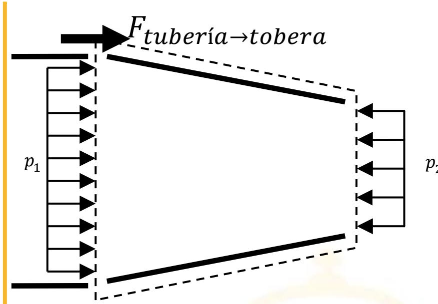
Ejemplo: tobera



VC solo fluido: por dentro



VC fluido y pared: por fuera



$$\frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV + \iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA = \sum \vec{F}$$

- Por dentro. En x:

$$\rho v_1(-v_1)A_1 + \rho v_2(v_2)A_2 = p_1A_1 - p_2A_2 + \underbrace{\iint_3 p(-\vec{n})dA + \iint_3 \tau dA}_{F_{pared \to fluido}}$$

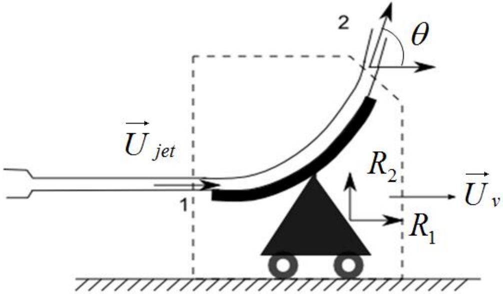
- Por fuera. En x:

$$\rho v_1(-v_1)A_1 + \rho v_2(v_2)A_2 = p_1A_1 - p_2A_2 + F_{tubería \to tobera}$$

$$F_{tubería \to tobera} = F_{pared \to fluido}$$

Conservación cantidad de movimiento

- Ejemplo: sistema de referencia inercial, VC a velocidad constante
  - Al despreciar la tensión superficial el chorro estará a presión atmosférica
  - VC solidario al carro, con $\overrightarrow{U_v}$



$$\frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v}dV + \iint_{SC} \rho\vec{v}(\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n})dA = \sum \vec{F}$$

$$\Downarrow$$

$$\iint_{SC} \rho\vec{v}_r(\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n})dA = \sum \vec{F}$$

- Por conservación de la masa: $-\rho(U_j - U_v)A_j + \rho v_{r2}A_j = 0 \Rightarrow v_{r2} = U_j - U_v$

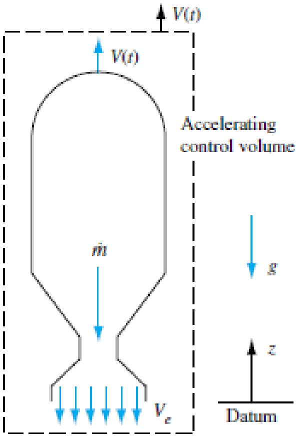
- Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$\rho(U_j - U_v)(-(U_j - U_v))\,A_j + \rho(U_j - U_v)cos\theta(U_j - U_v)A_j = R_1$$

$$\rho(U_j - U_v)seno\theta(U_j - U_v)A_j = R_2$$

Conservación cantidad de movimiento

- Ejemplo: sistema de referencia no inercial, VC acelerado
    - Un cohete que vuela verticalmente con una velocidad V(t) tiene una masa inicial M_0. Si el cohete expulsa masa de forma constante $\dot{m}$ y a velocidad (relativa) V_e, determinar la ecuación del movimiento para V(t). Nota despreciar el rozamiento del aire y suponer que el flujo en el interior es estacionario.



- Por conservación de la masa: $\frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho dV + \iint_{SC} \rho(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA = 0$

$$\frac{dm}{dt} + \dot{m} = 0 \Rightarrow \int_{M_0}^{m} dm = \int_0^t -\dot{m}\, dt \Rightarrow m(t) = M_0 - \dot{m}t$$

- Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$\sum \vec{F} - \iiint \vec{a}_{arr} dm = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\vec{v} dV + \iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA$$

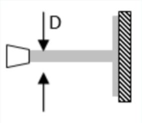
$$-mg - m\frac{dV}{dt} = 0 + \dot{m}(-V_e) \Rightarrow V = V_{inicial} - V_e Ln\left(1 - \frac{\dot{m}t}{M_0}\right) - gt$$

La masa se comporta de forma estacionaria con respecto al cohete

Conservación cantidad de movimiento

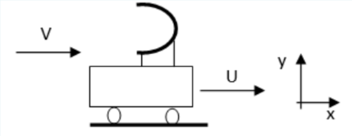
Sobre una pared vertical, incide un chorro que sale de una boquilla de diámetro D. El módulo de la fuerza horizontal que ejerce la pared sobre el fluido, para un caudal determinado:

- a. Permanece igual, porque el chorro está a presión atmosférica.
- b. Aumenta si se reduce el diámetro de la boquilla.
- c. Aumenta si se aumenta el diámetro de la boquilla.



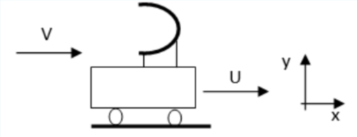
Un álabe invierte el sentido de un chorro de sección A. El chorro incide horizontalmente con velocidad V y el álabe se desplaza con velocidad constante U. Toda la estructura tiene una masa M. La fuerza horizontal que sufre el álabe es:

- a. $2\rho(V-U)^2A\vec{i}$
- b. $-2\rho(V-U)^2A\vec{i}$
- c. $\rho(V-U)^2A\vec{i}$



Un álabe invierte el sentido de un chorro de sección A. El chorro incide horizontalmente con velocidad V y el álabe se desplaza con velocidad constante U. Toda la estructura tiene una masa M. Si la velocidad del álabe no fuera constante, sino que dependiera del tiempo, la fuerza horizontal que sufre el fluido es:

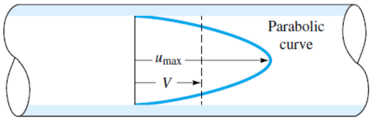
- a. $MdU/dt+2\rho(V-U)^2A)\vec{i}$
- b. $MdU/dt-\rho(V-U)^2A)\vec{i}$
- c. $MdU/dt-2\rho(V-U)^2A)\vec{i}$



Factores de corrección

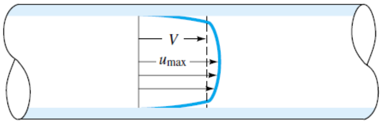
- Cuando hay perfiles de velocidad:

Régimen laminar:



$$v = v_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Régimen turbulento:

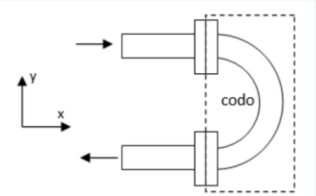


$$v \approx v_{max}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^m ; \frac{1}{9} \leq m \leq \frac{1}{5}$$

- Se puede integrar usando la velocidad media, pero con un coeficiente de corrección β

$$\iint_{SC} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dA = \beta\rho\bar{v}^2 A \quad \begin{cases} \text{Laminar: } \beta = 4/3 \\ \text{Turbulento: } \beta = \dfrac{(1+m)^2(2+m)^2}{2(1+2m)(2+2m)} \end{cases}$$

El módulo de la componente horizontal de la fuerza de sujeción del codo de la figura atravesado por un flujo $\dot{m}[kg/s]$ de densidad ρ, velocidad media y con un coeficiente de corrección de la cantidad de movimiento igual a 1,5, vale:



- a. $2\dot{m}\bar{V}$
- b. $3\dot{m}\bar{V}$
- c. $1,5\dot{m}\bar{V}$

Conservación del momento cinético

- Magnitud $B = \vec{r} \times m\vec{v}$, $\beta = \vec{r} \times \vec{v}$: ecuación vectorial.

- Sistema de referencia inercial:

$$\boxed{\frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho(\vec{r} \times \vec{v})dV + \iint_{SC} \rho(\vec{r} \times \vec{v})(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA = \sum \vec{M}}$$

- Sistema de referencia no inercial:

$$\boxed{\sum \vec{M} - \iiint \vec{r} \times a_{arr} dm = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho(\vec{r} \times \vec{v})dV + \iint_{SC} \rho(\vec{r} \times \vec{v})(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA}$$

- Los pares o momentos son **externos** sobre el volumen de control. Son:
  - Fuerzas volumétricas: generalmente peso

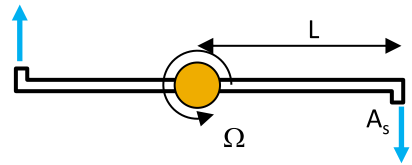
$$\vec{M}_{vol} = \iiint_{VC} \rho\vec{r} \times \vec{f}_m dV$$

  - Fuerzas superficiales: esfuerzos de presión y cortantes.

$$\vec{M}_{sup} = \iint_{SC} \vec{r} \times p(-\vec{n})dA \qquad \vec{M}_{sup} = \iint_{SC} \tau\vec{r} \times dA$$

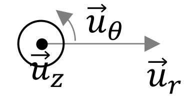
Conservación del momento cinético

- Ejemplo: Aspersor con dos brazos, alimentado con Q.



  - Conservación de la masa:

$$\boxed{0=\frac{d}{dt}\iiint_{VC}\cancel{\rho dV}+\iint_{SC}\rho(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA}$$



$$-Q+2v_{rs}A_s=0 \Rightarrow \quad v_{rs}=\frac{Q}{2A_s}$$

  - Conservación del momento cinético: **VC fijo**

$$\frac{d}{dt}\iiint_{VC}\cancel{\rho(\vec{r}\times\vec{v})dV}+\iint_{SC}\rho(\vec{r}\times\vec{v})(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA=\sum\vec{M}$$

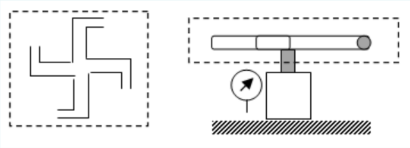
$$\rho\left[L(\vec{u}_r)\times\underbrace{\left(\frac{Q}{2A_s}\ -\Omega L\right)(-\vec{u}_\theta)}_{\vec{v}_{abs}=\vec{v}_r+\vec{v}_{arr}}\right]\frac{Q}{2}+\rho\left[L(\vec{u}_r)\times\underbrace{\left(\frac{Q}{2A_s}\ -\Omega L\right)(-\vec{u}_\theta)}_{\vec{v}_{abs}=\vec{v}_r+\vec{v}_{arr}}\right]\frac{Q}{2}=2\rho L\left(\frac{Q}{2A_s}\ -\Omega L\right)\frac{Q}{2}(-\vec{u}_z)=\vec{M}$$

  - Conservación del momento cinético: VC móvil.
    - Término a integrar en la aceleración de arrastre: $2\vec{\Omega}\times\vec{v}$

Conservación del momento cinético

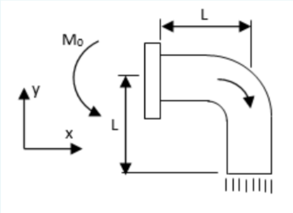
Para regar el césped de un pequeño jardín, se usa un aspersor de n brazos, donde el agua sale en un plano horizontal y con dirección perpendicular a los mismos. La longitud de los brazos es L_b y el área circular por donde sale el agua es A_s. El aspersor gira libremente sin sufrir ninguna resistencia con velocidad ω. constante. Módulo del par que hay que introducir al sistema para que gire a $\omega/2$.

- a. $M = \rho L_b Q(Q/nA_s + \omega L_b/2)$
- b. $M = \rho L_b Q(Q/nA_s - \omega L_b/2)$
- c. $M = n\rho L_b Q(Q/nA_s + \omega L_b/2)$



El codo de la figura es travesado por un flujo $\dot{m}[kg/s]$ de densidad ρ y velocidad media $\bar{V}$. Despreciando los pesos, el par M_O de sujeción del codo vale:

- a. 0
- b. $-L\bar{V}\dot{m}\vec{k}$
- c. $L\bar{V}\dot{m}\vec{k}$



Conservación de la energía

- Magnitud $B = E$, $\beta = $ e: ecuación escalar.

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho e dV + \iint_{SC} \rho e(\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA}$$

- Criterio de signos:
  - Q(+) aportación. W(-) realizado sobre el sistema
  - Q(-) pérdida. W(+) desarrollado por el sistema.
- Términos:
  - Q: no lo desarrollaremos
  - $\dot{W} = \dot{W}_{ext} + \dot{W}_{presión} + \dot{W}_{viscosidad}$
    - $\dot{W}_{ext}$: ejercido sobre elementos móviles de máquinas
    - $\dot{W}_{presión} = \iint_{SC} \mathrm{p}\, (\vec{v_r} \cdot \vec{n})dA$
    - $\dot{W}_{viscosidad} = \iint_{SC} -\tau\vec{v}dA$ $\begin{cases} \text{Paredes sólidas fijas: } \vec{v}=0 \rightarrow \dot{W}_{viscosidad} = 0 \\ \text{Entradas y salidas: } \tau \approx 0 \rightarrow \dot{W}_{viscosidad} \approx 0 \end{cases}$

Conservación de la energía

- e es la suma de: interna + cinética + potencial + otras (despreciables aquí)

$$e = \tilde{u} + \frac{1}{2}v^2 + gz$$

- Pasando el $\dot{W}_{presión}$ al lado derecho:

h: entalpía

$$\boxed{\dot{Q} - \dot{W}_{ext} - \dot{W}_{\upsilon} = \frac{d}{dt}\iiint_{VC} \rho\left(\tilde{u} + \frac{1}{2}v^2 + gz\right)dV + \iint_{SC} \rho\left(\tilde{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz\right)(\vec{v_r}\cdot\vec{n})dA}$$

- Al igual que en cantidad de movimiento, habría que integrar para los perfiles de velocidad:

$$\iint_{SC} \rho\left(\frac{1}{2}v^2\right)(\vec{v}\cdot\vec{n})dA = \frac{1}{2}\alpha\rho\bar{v}^3 A \begin{cases} \text{Laminar: } \alpha = 2 \\ \text{Turbulento: } \alpha \approx 1 \end{cases}$$

Conservación de la energía

- En régimen estacionario, para un fluido incompresible y con VC de un tramo de tubería:
  - $\dot{W}_{ext}$: aportaciones de máquinas hidráulicas: bombas, ventiladores o turbinas.
  - $\dot{W}_{\upsilon} \approx 0$
  - $d/dt = 0$
  - $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$

$$\dot{Q} - \dot{W}_{ext} = \dot{m}\left[\left(h + \frac{\alpha}{2}v^2 + gz\right)_2 - \left(h + \frac{\alpha}{2}v^2 + gz\right)_1\right] \qquad \text{[W]}$$

- Dividiendo entre $\dot{m}$

$$q - w_{ext} = \left[\left(h + \frac{\alpha}{2}v^2 + gz\right)_2 - \left(h + \frac{\alpha}{2}v^2 + gz\right)_1\right] \qquad \text{[J/kg]}$$

Primer principio de la termodinámica para sistemas abiertos

- Separando de nuevo la entalpía en sus dos términos y reordenando:

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\alpha}{2}v^2 + gz\right)_1 - w_{ext} = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\alpha}{2}v^2 + gz\right)_2 + \underbrace{(\hat{u}_2 - \hat{u}_1) - q}_{g \cdot h_{pérdidas}}$$

$h_{pérdidas} \geq 0$ ⇨ representa una expresión del segundo principio de la termodinámica

$$w_{ext} \begin{cases} \text{realizado \underline{sobre} el fluido por una bomba (-)} \\ \text{realizado \underline{por} el fluido en una turbina (+)} \end{cases}$$

Conservación de la energía

$$h_{pérdidas} = 0 \Rightarrow (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) - q = 0 \quad \begin{cases} \text{Si } q = 0 \text{ (proceso adiabático)} & \hat{u}_2 = \hat{u}_1 \\ \text{Si } q \neq 0 \text{ (proceso no adiabático)} & q = (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \end{cases}$$

(sin rozamiento viscoso, fluido ideal)

$h_{pérdidas} > 0 \Rightarrow (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) > q \Rightarrow$ varía la energía interna a costa de la degradación de energía provocada por el rozamiento viscoso independientemente de si hay calor aportado desde el exterior

(rozamiento viscoso, fluido real)

- Dividiendo la ecuación anterior por "g" $\Rightarrow$ ecuación de la energía expresada en forma de alturas

Ecuación de Bernoulli

$$\boxed{\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + z\right)_1 - h_{turbinas} + h_{bombas} = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + z\right)_2 + h_{pérdidas}}$$

Conservación de la energía

Un tanque, de grandes dimensiones, está lleno de un líquido newtoniano que se puede considerar ideal. Si se realiza un orificio pequeño en su base, entonces:

- a. La velocidad de salida a través del orificio aumenta con la densidad del líquido.
- b. La velocidad de salida a través del orificio será la misma para cualquier líquido.
- c. El caudal de salida no depende del tamaño del orificio.

De una pared sale una tubería con un codo de 45° por la que circula un flujo másico de agua $\dot{m}$, descargándolo a la atmósfera. Tanto el tramo inclinado como el horizontal miden L y tienen la misma sección A. Si se considera el fluido como ideal. Si v es la velocidad del agua, la fuerza horizontal que sufre el fluido.

- a. $[\dot{m}(1-\sqrt{2})(v/\sqrt{2}) + \rho g(L/\sqrt{2})A]\vec{i}$
- b. $[\dot{m}(1-\sqrt{2})(v/\sqrt{2}) - \rho g(L/\sqrt{2})A]\vec{i}$
- c. $[\dot{m}(1-\sqrt{2})(v/\sqrt{2}) + \rho g L A]\vec{i}$