Mecánica de Fluidos

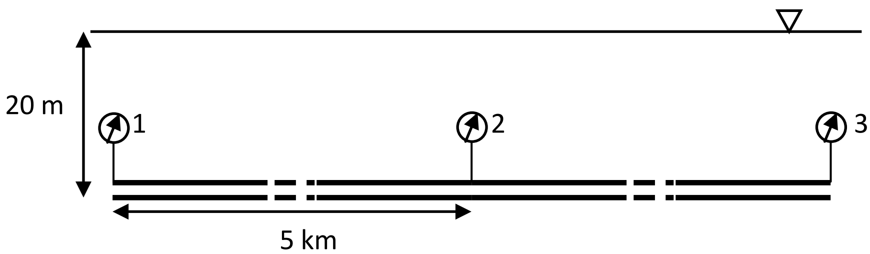
Apellidos, Nombre: Junio 2015

Grupo:

Problema 2

A una profundidad de 20 m bajo la superficie del mar, se transporta petróleo ($\rho = 900\ kg/m^3$, $\mu = 0.002\ kg/m \cdot s$) con una tubería de diámetro D = 0.4 m. A lo largo de un tramo horizontal se disponen 3 manómetros, separados entre sí una distancia de 5 km. Aguas abajo del último manómetro se mide también el caudal y se aprecia que se ha reducido en un 20% con respecto al medido en la posición del primer manómetro. Las medidas de los manómetros son $p_1 = 7.45 \cdot 10^5 Pa$, $p_2 = 5.1 \cdot 10^5\ Pa$ y $p_3 = 2.9 \cdot 10^5\ Pa$. La rugosidad de la tubería es de $\varepsilon = 0.5\ mm$. No se considerarán las pérdidas secundarias. Se pide:

a) Sabiendo en que la fuga se produce en el primer tramo, ¿a qué distancia del manómetro 2 se ha producido la fuga?
b) El caudal de fuga.
c) Si la fuga, con un caudal de 20 l/s, se produce justo en la mitad del tramo y sale a través de un orificio, de radio R = 1 cm, con un perfil $u(r) = U_{\max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^3$, evaluar el par que produciría en la sección del primer manómetro.



Apartado a)

Aplicar Bernoulli entre entre los manómetros 2 y 3 para la obtención de la velocidad:

$$\frac{p_2}{\rho g} + \cancel{\frac{v_2^2}{2g}} + \cancel{z_2} = \frac{p_3}{\rho g} + \cancel{\frac{v_3^2}{2g}} + \cancel{z_3} + h_f \tag{1}$$

$$\frac{5.1 \cdot 10^5}{900 \cdot 9.81} + \emptyset = \frac{2.9 \cdot 10^5}{900 \cdot 9.81} + \emptyset + f \frac{v_2^2}{2 \cdot 9.81} \frac{5000}{0.4} \tag{2}$$

$$f \cdot v_2^2 = 3.9 \overset{\frown}{1} \cdot 10^{-2} \tag{3}$$

Por otro lado, se define la ecuación de Colebrook para la determinación de f

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon / D}{2.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \tag{4}$$

Por otro lado, es necesario evaluar el número de Reynolds para verificar que el flujo se encuentra en régimen turbulento y así poder aplicar la ecuación de Colebrook 4
De esta forma para poder obtener la velocidad del flujo en dicho tramo, y por tanto el caudal $Q_2 = Q_3$ es necesario iterar. Se partirá por el valor medio del factor de fricción del diagrama de Moody ($f = 0.02$):

$$\begin{aligned} &Iter.1 \rightarrow f = 0.02 \rightarrow v_2 = 1.3984\, m/s \rightarrow Re = 2.5171 \cdot 10^5 \\ &Iter.2 \rightarrow f = 0.0217 \rightarrow v_2 = 1.3416\, m/s \rightarrow Re = 2.4150 \cdot 10^5 \\ &Iter.3 \rightarrow f = 0.0218 \rightarrow v_2 = 1.3405\, m/s \rightarrow Re = 2.4128 \cdot 10^5 \end{aligned} \tag{5}$$

De esta forma el caudal de salida queda (Q_3)

$$Q_3 = v_2 \cdot A = 0.1684\, m^3/s \tag{6}$$

Y por tanto el caudal de entrada (Q_1):

$$Q_1 = Q_3/0.8 = 0.2106\, m^3/s \tag{7}$$

Siendo la velocidad de entrada $v_1 = 1.6756$ m/s.
Una vez conocido el caudal que atraviesa la tubería, para el cálculo de la distancia del punto de fuga con respecto al manómetro dos $(L - X)$ es necesario aplicar Bernoulli desde el manómetro 1 hasta el punto de fuga $*$ y desde el punto de fuga $*$ hasta el manómetro 2:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho g} + \cancel{\frac{v_1^2}{2g}} + \cancel{z_1} &= \frac{p^*}{\rho g} + \cancel{\frac{v^{*2}}{2g}} + \cancel{z^*} + h_f \\ \frac{p_1 - p^*}{\rho g} &= f_1 \frac{v_1^2}{2g} \frac{X}{D} \rightarrow p_1 - p^* = A1 \cdot X \\ \frac{p^* - p_2}{\rho g} = f_2 \frac{v_2^2}{2g} \frac{L - X}{D} &\rightarrow p^* - p_2 = A2 \cdot (L - X) \end{aligned} \tag{8}$$

A partir de las velocidades a ambos lados de la fuga calculadas anteriormente, y evaluando el factor f a partir de la ecuación de Colebrook 4, tenemos $f_1 = 0.0216$ y $v_1 = 1.6756$ m/s; y $f_2 = 0.0218$ y $v_2 = 1.3405$ m/s. Resolviendo 8:

$$p_1 - p_2 - A2(L - X) = A1 \cdot X \rightarrow X = \frac{p_1 - p_2 - A2 \cdot L}{A1 - A2} \tag{9}$$

Por tanto, $X = 621.16$ m y $p^* = 7.0267 \cdot 10^5$ Pa. Distancia entre la fuga y el manómetro 2 es de $L - X = 4378.8$ m.

Apartado b)

El caudal de fuga de acuerdo con el enunciado es de $Q_{fuga} = Q_1 - Q_3 = 0.2Q_1 = 0.0421\, m^3/s$

Apartado c)

Asumiendo que el caudal de fuga es de $Q_{fuga} = 20\, l/s = 0.02\, m^3/s$, se calculará el perfil de velocidades como:

$$Q_{fuga} = \iint u(r)dA = \int_0^R u_{max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^3 2\pi r dr \tag{10}$$

Aplicando el cambio de variable $1 - (r/R)^2 = \theta$ y $2rdr/R^2 = d\theta$ la ecuación anterior nos quedaría:

$$Q_{fuga} = -u_{max}R^2\pi \int_1^0 \theta^3 d\theta = -u_{max}R^2\pi \left[\frac{\theta^4}{4}\right]_1^0 == +u_{max}R^2\pi\frac{1}{4} \tag{11}$$

Sustituyendo:

$$0.02 = u_{max}0.01^2\pi\frac{1}{4} \rightarrow u_{max} = 254.64\, m/s \tag{12}$$

Por otro lado la fuerza tiene la forma:

$$F = \iint \rho v^2 dA = \int_0^R \rho u_{max}^2\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^6 2\pi r dr \tag{13}$$

Y aplicando el mismoambio de variable anterior, nos queda:

$$F = -\rho u_{max}^2 R^2\pi \int_1^0 \theta^6 d\theta = -\rho u_{max}^2 R^2\pi \left[\frac{\theta^7}{7}\right]_1^0 = 2619N \tag{14}$$

$$M = 2619 * 2500 = 6548073N \cdot m \tag{15}$$

Calificación:

Apartado a) y b) 6.5 puntos:

- Planteamietno de Bernoulli *0.5 ptos*: Ecuación 1
- Resultado de relación de f y v *0.5 ptos*: Ecuación 3
- Proceso Iterativo: Ecuación 5
  - Comprobar Re *0.5 ptos*
  - Procedimiento *0.5 ptos*
  - Resultado *1 ptos*
- Punto de fuga
  - Plantear los dos Bernoulli *1 ptos*: Ecuación 8
  - Resultado de la distancia *1 ptos*
- Cálculo del caudal de fuga:
  - Planteamiento de la ecuación: *0.5 ptos*
  - Resultado *1 ptos*

Apartado c) *3.5 ptos*:

- Planteamiento de la ecuación del caudal de fuga *0.5 ptos*: Ecuación 10
- Resultado del u_{max} *1 ptos*: Ecuación 11
- Planteamiento de la fuerza *1 ptos*: Ecuación 13
- Resultado del par *1 ptos*