Problema 1

La figura muestra la formación de la capa límite unidimensional de un fluido de densidad ρ y viscosidad μ, cuando pasa por una placa delgada semi-infinita de ancho b. Sabiendo que, para las condiciones de ese sistema, el perfil de velocidad viene dado aproximadamente por la expresión matemática: $u(x,y) = u_\infty(y/\delta(x))^{1/7}$ y teniendo en cuenta únicamente las variables ρ, u_∞, $\delta(L)$ y b, calcular:

a) El caudal de fluido que atraviesa la capa límite cuando $x = L$.

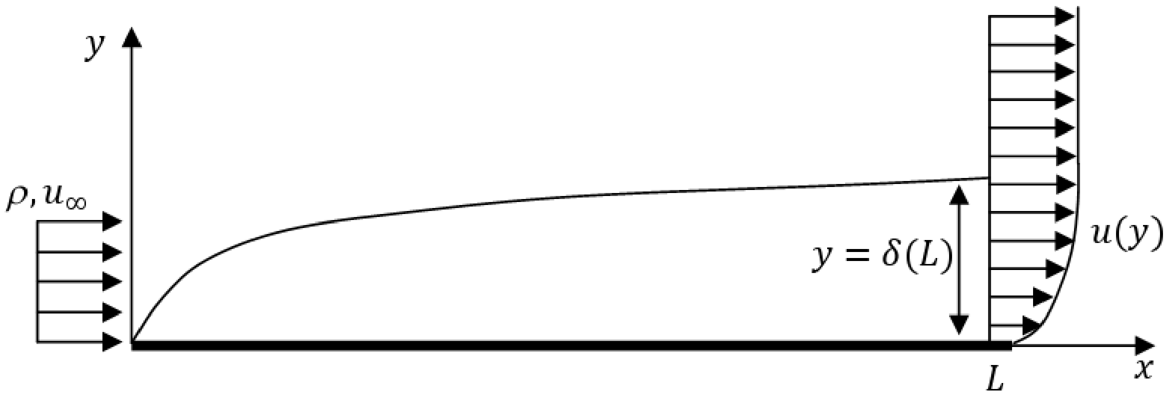
b) La fuerza viscosa que ejerce el fluido en todo ese tramo.

NOTA: Dibujar el Volumen de Control más adecuado para responder a las dos preguntas anteriores.

Además, se requiere verificar experimentalmente las expresiones evaluadas anteriormente. Para ello, se necesita:

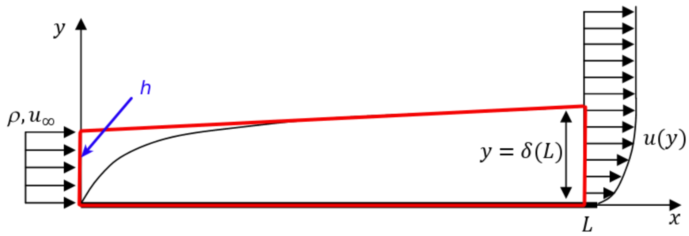
c) Expresión que relacione la fuerza viscosa en todo el tramo con las variables relevantes del problema.

Justificar todas las hipótesis realizadas.



Solución:

a) Usaremos el VC de control de la figura siguiente **(0,5 puntos)**:



El caudal se obtiene integrando el perfil de velocidades en la sección de *salida* ($x = L$). Así, **(2 puntos)**

$$Q = \int \vec{v} \cdot d\vec{A} = b \int_0^{\delta(L)} u_\infty \left(\frac{y}{\delta(L)} \right)^{1/7} dy = \frac{7}{8} u_\infty b \delta(L)$$

b) Planteamos la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

$$\vec{F}_{ext} - \oint_{SC} p' \hat{n} dA + \oint_{SC} \tau \cdot \hat{n} dA + \int_{VC} \rho g dV - m a_{arr} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \oint_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA$$

Por tratarse de un VC fijo, flujo estacionario, horizontal, donde la fuerza externa (horizontal) se debe a la fricción viscosa, la ecuación se reduce a **(1 punto) por la justificación más el planteamiento**

$$\cancelto{\text{no hay en } \vec{i}}{\vec{F}_{ext}} - \cancelto{atm.}{\oint_{SC} p' \hat{n} dA} + \underbrace{\oint_{SC} \tau \cdot \hat{n} dA}_{F_v} + \cancelto{\text{no hay en } \vec{i}}{\int_{VC} \rho g dV} - \cancelto{\text{VC fijo}}{m a_{arr}}$$

luego

$$F_v = \int_{x=L} \rho u(x,y)^2 dA - \int_{x=0} \rho u_\infty^2 dA = \underbrace{b \rho u_\infty^2 \int_0^{\delta(L)} \left(\frac{y}{\delta(L)} \right)^{2/7} dy}_{salida\ \textbf{1 punto}} - \underbrace{\rho u_\infty^2 b h}_{entrada\ \textbf{1punto}},$$

Para poder resolver necesitamos calcular h (ver figura del VC). Por conservación de masa $Q(x = 0) = Q(x = L) \Rightarrow u_\infty h b = 7/8 u_\infty$, por lo que $h = 7/8$ **(2 puntos)**

Resolviendo la ecuación para la fuerza, obtenemos **(0,5 puntos) por el resultado exacto**

$$\vec{F}_v = \frac{7}{72} \rho u_\infty^2 b \delta(L) \, \vec{i}$$

c) Usando análisis dimensional, tenemos las siguientes variables: D (arrastre), ρ, u_∞, L, $\delta(L)$, b y μ, por tanto $n = 7$, por lo que nos quedan $k = 7 - 3$ números Pi. Probamos que μ, L y u_∞ forman una base dimensional **(0,5 puntos)** (habría varias soluciones). Calculamos los 4 números Pi ($\mathbf{0,5 + 0,5 + 0,25 + 0,25 = 1,5}$ **puntos**):

$$\frac{D}{\rho u_\infty^2 L^2} = f \left(Re, \frac{\delta(L)}{L}, \frac{b}{L} \right)$$

Extra: Como curiosidad, podemos explotar la ecuación anterior y conectar con los primeros apartados. Por ejemplo, si duplicamos la profundidad de la placa (b), es evidente que la fuerza también se duplica, por lo que la función $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ es lineal en el tercer argumento. Por otro lado, para Reynolds muy altos, la dependencia en la viscosidad sería despreciable, y la ecuación se reduciría a:

$$D = \rho u_\infty^2 L b \tilde{f}(\delta(L)/L)$$

por lo que sólo tendríamos que determinar una función de un argumento (la $\tilde{f}$). Haciendo unos pocos experimentos veríamos que, comparando con la solución del apartado b), $\tilde{f}(x) = 7/72 x$.