ICAI – GITI

Mecánica de Fluidos

Tema 5: Análisis Dimensional

comillas.edu

Introducción

- Es un método que permite reducir el número y complejidad de las variables que intervienen en la descripción de un fenómeno físico dado, agrupándolas en forma adimensional.

$$F = f(L, U, \rho, \mu) \Rightarrow \frac{F}{\rho U^2 L^2} = g\left(\frac{\rho U L}{\mu}\right)$$

- Ahorro de tiempo y dinero
- Ayuda a pensar y planificar un experimento o teoría
- Proporciona leyes de escala que puedan convertir los datos obtenidos sobre un pequeño modelo en información para el diseño de un prototipo grande.

- Túneles de viento: link a artículo
- Túnel de viento NASA: link a BBC

Introducción

- Principio de homogeneidad dimensional: si una ecuación expresa una relación entre variables de un sistema físico, será dimensionalmente homogénea.

- Tipos de magnitudes:
  - Dimensionales:
    - Variables dimensionales: presión, velocidad, densidad…
    - Constantes dimensionales: presión atmosférica, g…
  - Adimensionales
    - Constantes puras: números, π..
    - Números adimensionles: $\frac{F}{\rho U^2 L^2} = g\left(\frac{\rho U L}{\mu}\right)$
    - Ángulos y revoluciones

- Sistemas de unidades estándar: Masa (M), Longitud (L), Tiempo (T), Temperatura (θ)
  - Todas las unidades se pueden expresar en términos de éstas

- Ejemplos:
  - Velocidad: $[LT^{-1}]$
  - Fuerza: $[MLT^{-2}]$
  - Calor específico: $[L^2T^{-2}\theta^{-1}]$

Teorema de Pi (Buckingham)

- Si un proceso satisface el principio de homogeneidad dimensional e involucra **n** variables dimensionales, se pueden reducir a sólo **k** variables adimensionales. La reducción **j=n-k** es igual al número máximo de variables que no pueden formar un grupo adimensional (Pi) y siempre es menor o igual que el número de dimensiones que describen las variables.

- Ejemplo y pasos a seguir para encontrar la relación adimensional: $\boxed{F = f(L, U, \rho, \mu)}$

1. Enumerar las n variables involucradas en el problema: 1 + 4 = **5**

2. Listar las dimensiones de cada una en el sistema MLTΘ

   -Fuerza: $[F]=[MLT^{-2}]$
   -Densidad del fluido: $[\rho]=[ML^{-3}]$
   -Viscosidad del fluido: $[\mu]= [ML^{-1}T^{-1}]$ ➡ M, L, T ➡ **j = 3**
   -Tamaño del objeto: $[L]=[L]$
   -Velocidad con la que se mueve $[U]=[LT^{-1}]$

3. Determinación de **j**. Buscar **j** variables independientes que NO pueden formar un grupo adimensional. Si no es posible, reducir **j** en una unidad. Tratar de elegir los más generales (longitudes, velocidades, densidad…).

   Grupo dimensional con **j** variables: **LUρ**

   $$\mathbf{L^a U^b \rho^c} = M^0L^0T^0 \Rightarrow [L]^a[LT^{-1}]^b[ML^{-3}]^c = M^0L^0T^0 \Rightarrow a = b = c = 0$$

Teorema de Pi (Buckingham)

4. Añadir una variable adicional a las **j** variables y formar un grupo de potencias para cada una de las variables restantes. Resolver los exponentes e intentar que las variables dependientes aparezcan en el numerador. Repetir hasta encontrar los **n-j = k** grupos adimensionales

- Grupos:
  - $L^a U^b \rho^c F = [L]^a [LT^{-1}]^b [ML^{-3}]^c [MLT^{-2}] = M^0 L^0 T^0$

$$\left.\begin{array}{l} L: \; a + b - 3c + 1 = 0 \\ M: \; c + 1 = 0 \\ T: \; -b - 2 = 0 \end{array}\right] \Rightarrow a=b=-2,\ c=-1 \Rightarrow \Pi_1 = \frac{F}{\rho L^2 U^2}$$

  - $L^a U^b \rho^c \mu = [L]^a [LT^{-1}]^b [ML^{-3}]^c [ML^{-1}T^{-1}] = M^0 L^0 T^0$

$$\left.\begin{array}{l} L: \; a + b - 3c - 1 = 0 \\ M: \; c + 1 = 0 \\ T: \; -b - 1 = 0 \end{array}\right] \Rightarrow a=b=c=-1 \Rightarrow \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho L U} \Rightarrow \Pi_2 = \frac{\rho U L}{\mu}$$

5. Escribir la función adimensional resultante y comprobar que todos los grupos son adimensionales.

$$\boxed{\frac{F}{\rho U^2 L^2} = g\left(\frac{\rho U L}{\mu}\right)}$$

Teorema de Pi (Buckingham)

La potencia P de una turbina en una central hidroeléctrica depende del caudal Q de agua así como de su densidad ρ, y del diámetro de la tubería D. ¿Cuántos grupos adimensionales habrá?

- a. 3
- b. 1
- c. 2

La fuerza de propulsión de un submarino de juguete depende de: su longitud L, el diámetro D de su hélice, su velocidad angular ω y de las propiedades del agua ρ y μ. ¿Cuántas dimensiones básicas tiene el problema?

- a. 3
- b. 2
- c. 4

La reducción de las n variables dimensionales de un problema donde hay implicadas Z dimensiones básicas:

- a. Es igual a Z.
- b. Es mayor o igual que Z.
- c. Es menor o igual que Z.

Teorema de Pi (Buckingham)

- **Consejos** para elegir el grupo dimensional de j variables (Paso 3):
  - Nunca se escoge la variable dependiente. Así aparecerá en un solo grupo Π.
  - El conjunto de todas las variables elegidas debe tener todas las dimensiones básicas del problema.
  - Nunca se deben escoger variables que ya sean adimensionales. Estas ya son un Π.
  - Nunca se deben escoger dos variables con las mismas dimensiones o con dimensiones que difieran solo con un exponente.
  - Se deben escoger variables comunes y simples. En MF, es recomendable: $\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$, $U\ [m/s]$ y alguna longitud $[m]$.

Adimensionalización de las ecuaciones

- Al adimensionalizar las ecuaciones básicas del movimiento aparecen los parámetros adimensionales básicos, por ejemplo, el número de Reynolds.

  - Velocidad de referencia (U)
  - Longitud de referencia (L)
  - Frecuencia característica (*f*)
  - Gravedad (g)
  - Diferencia de presión de referencia $(p_o - p_\infty)$

$$\begin{cases} \vec{v}^* = \dfrac{\vec{v}}{U} \\ x^* = \dfrac{x}{L}; \quad y^* = \dfrac{y}{L}; \quad z^* = \dfrac{z}{L}; \quad R^* = \dfrac{R}{L}; \\ \nabla^* = L\nabla; \quad t^* = ft; \quad p^* = \dfrac{p - p_\infty}{p_o - p_\infty}; \end{cases}$$

- Continuidad: $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \dfrac{\nabla^*}{L} \cdot U\vec{v}^* = 0 \Rightarrow \nabla^* \cdot \vec{v}^* = 0$

- Cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{fL}{U}\right)}_{\textbf{Strouhal}} \frac{D\vec{v}^*}{Dt^*} = \underbrace{\left(\frac{gL}{U^2}\right)}_{\textbf{Froude}} \vec{g}^* - \underbrace{\left(\frac{p_o - p_\infty}{\rho U^2}\right)}_{\textbf{Euler}} \nabla^* p^* + \underbrace{\left(\frac{\mu}{\rho UL}\right)}_{\textbf{Reynolds}} \nabla^{*2}\vec{v}^*$$

- Condición de contorno de Laplace en una superficie libre: $p^* = \dfrac{p + \rho g z}{\rho U^2}$;

$$p = p_{amb} - \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow p^* = \underbrace{\left(\frac{p_{amb}}{\rho U^2}\right)}_{\textbf{Euler}} + \underbrace{\left(\frac{gL}{U^2}\right)}_{\textbf{Froude}} z^* - \underbrace{\left(\frac{\sigma}{\rho U^2 L}\right)}_{\textbf{Weber}} \left(\frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^*}\right)$$

Números adimensionales en MF

- **Número de Reynolds**

-Al adimensionalizar la ecuación de cantidad de movimiento aparece este número adimensional, el más importante en Mecánica de Fluidos.

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho U L}{\mu}}$$

-Cociente entre fuerza inercial y fuerza asociada a la viscosidad:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{\rho U L}{\mu} \cdot \frac{UL}{UL} = \frac{\rho U^2 L^2}{\mu U L} = \frac{[\mathrm{N}]}{[\mathrm{N}]}$$

-Es siempre importante, haya o no superficie libre, y su efecto sólo puede despreciarse fuera de las regiones donde hay altos gradientes de velocidad.

Números adimensionales en MF

- **Número de Euler**

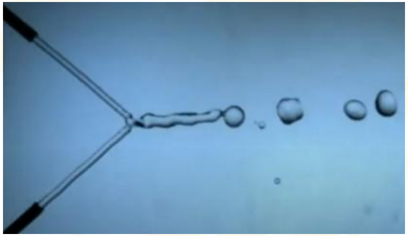
Aparece cuando las caídas de presión son lo suficientemente grandes para dar lugar a la formación de vapor (cavitación) en el líquido.

$$\boxed{\mathrm{Eu} = \frac{p_{amb}}{\rho U^2}}$$ ⇨ Número de cavitación: $$\boxed{\mathrm{Ca} = \frac{p_{amb} - p_v}{\rho U^2}}$$

- **Número de Weber**

Desempeña un papel importante sólo si es de orden unidad o menor, lo que ocurre normalmente cuando la curvatura de la superficie es comparable en tamaño a la profundidad del líquido: en gotas, flujos capilares, ondas de pequeña longitud de onda y en modelos hidráulicos de pequeñas dimensiones.

$$\boxed{\mathrm{We} = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}}$$



Vídeo

-Cociente entre fuerza inercial y fuerza asociada a tensión superficial:

$$\mathrm{We} = \frac{\rho U^2 L}{\sigma} \cdot \frac{L}{L} = \frac{[N]}{[N]}$$

Números adimensionales en MF

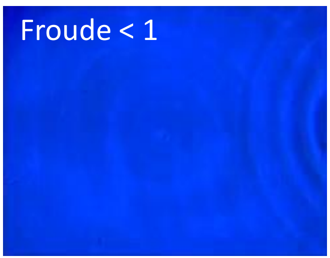
- **Número de Froude**

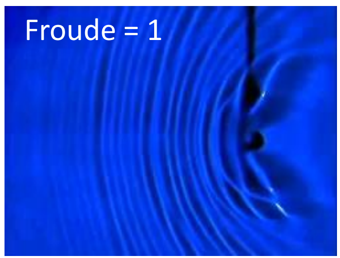
Tiene efecto dominante en flujos con superficie libre y su efecto sólo puede despreciarse cuando no hay superficie libre.

$$\boxed{\mathrm{Fr} = \frac{U^2}{gL}} \qquad \boxed{\mathrm{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}}}$$

-Cociente entre fuerza inercial y fuerza gravitacional:

$$\mathrm{Fr} = \frac{U^2}{gL} = \frac{\rho}{\rho} \cdot \frac{U^2}{gL} \cdot \frac{L^2}{L^2} = \frac{[N]}{[N]}$$





Vídeo

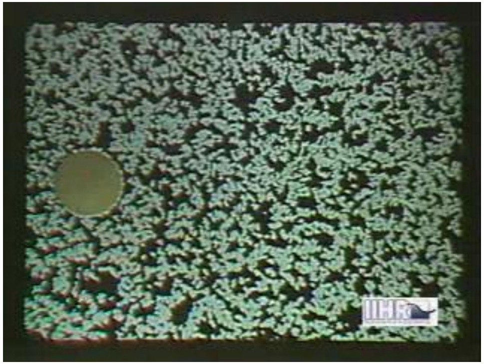
Números adimensionales en MF

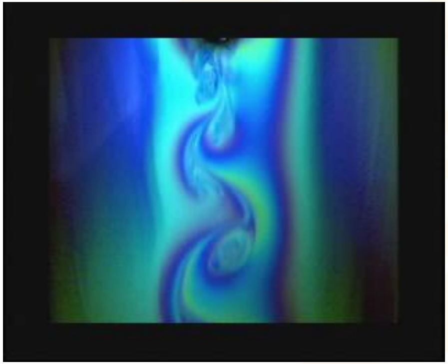
- ## **Número de Strouhal**

Algunos flujos que podrían parecer perfectamente estacionarios tienen un comportamiento oscilatorio que depende del número de Reynolds.

$$\boxed{\mathrm{St} = \frac{fL}{U}}$$

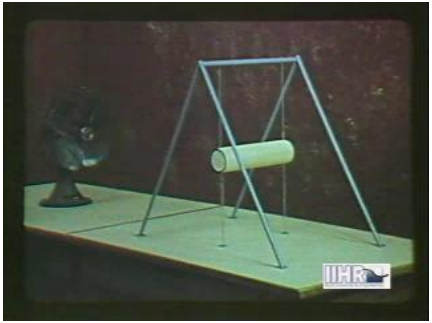
- Ejemplos: calle de torbellinos en la estela de un cuerpo inmerso en una corriente estacionaria de velocidad U. Esta estructura regular de los torbellinos desprendidos periódicamente se denomina calle de torbellinos de Kármán





Números adimensionales en MF

- Ejemplos:



Números adimensionales en MF

- **Fluidos compresibles:**
  - **Número de Mach:**

    - Relación entre la velocidad del flujo y la velocidad del sonido. Por debajo de 0.3, el flujo se puede considerar como incompresible.

    - Aire a 20 °C, a = 343 m/s → U = 0.3 · 343 ≈ 370 km/h

$$\boxed{\mathrm{Ma} = \frac{U}{a}}$$

  - **Relación de calores específicos:**

$$\boxed{\gamma = \frac{c_p}{c_v}}$$

  - **Link a lista de números adimensionales en MF**

Números adimensionales en MF

El diámetro d de las gotas que salen de la tobera de un spray, dependen del diámetro D de la tobera, de su velocidad U, de la densidad ρ y viscosidad del líquido μ, así como de la tensión superficial σ. Uno de los números adimensionales será:

- a. Euler
- b. Reynolds
- c. Froude

El número de Strouhal se define como:

Seleccione una:

- a. $\frac{p_{amb}}{\rho U^2}$
- b. $\frac{fL}{U}$
- c. $\frac{U^2}{gL}$

El análisis de la formación de gotas estaría relacionado principalmente con el número de:

Seleccione una:

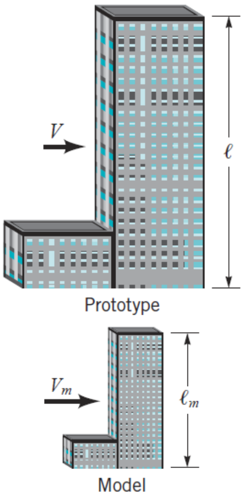
- a. Froude
- b. Weber
- c. Strouhal

Leyes de semejanza

- A partir de la relación adimensional se obtienen resultados experimentales y habría que relacionar las medidas en el modelo con el prototipo.

- Las condiciones del flujo para un modelo de ensayo son completamente semejantes a las del prototipo si coinciden los valores de todos los parámetros adimensionales correspondientes en el modelo y el prototipo.

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_k) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \Pi_{2m} = \Pi_{2p} \\ \Pi_{3m} = \Pi_{3p} \\ \vdots \\ \Pi_{km} = \Pi_{kp} \end{array}\right] \Rightarrow \Pi_{1m} = \Pi_{1p}$$



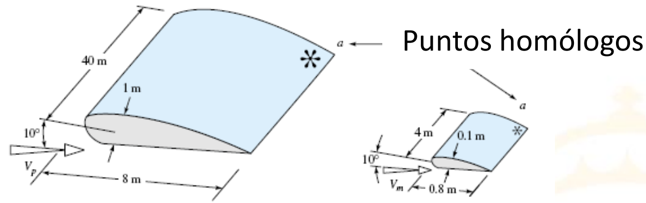
- Por ser difícil de conseguir la semejanza completa, se usan:
  - Semejanza geométrica
  - Semejanza cinemática
  - Semejanza dinámica

Leyes de semejanza

- **Semejanza geométrica**

  Un modelo y un prototipo son geométricamente semejantes si, y sólo si, todas las dimensiones espaciales en las tres coordenadas tienen la misma relación de escala lineal. Se conservan:

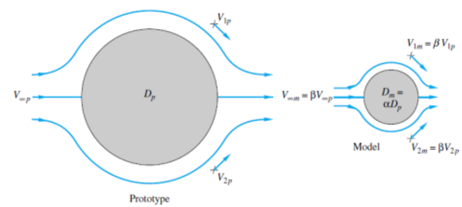
  - La orientación del modelo y del prototipo con respecto a los objetos
  - Todos los ángulos
  - Las direcciones del flujo



- **Semejanza cinemática**

  -Los movimientos de dos sistemas son cinemáticamente semejantes si partículas homólogas alcanzan puntos homólogos en instantes homólogos.

  -<u>Flujo sin fricción y sin superficie libre, fluido incompresible</u>: cinemáticamente semejantes con escalas de longitud y tiempo independientes.



Leyes de semejanza

- **Semejanza cinemática**

  -Flujos sin fricción, con superficie libre ⇨ Igualdad en Fr ⇨ $\boxed{\mathrm{Fr}_m = \frac{U_m^2}{gL_m} = \frac{U_p^2}{gL_p} = \mathrm{Fr}_p}$

  -Si la escala de longitud es: $L_m = \alpha L_p$ ⇨ $U_m = \sqrt{\alpha} U_p$ ⇨ $\frac{T_m}{T_p} = \frac{L_m/U_m}{L_p/U_p} = \sqrt{\alpha}$

- **Semejanza dinámica**

  -Existe semejanza dinámica cuando modelo y prototipo tienen la misma relación de escala de longitudes, la misma relación de escala de tiempos y la misma relación de escala de fuerzas (o de masa).
  -La semejanza geométrica es el primer requisito. La semejanza dinámica existe simultáneamente con la semejanza cinemática, si todas las fuerzas guardan la misma proporción. Esto ocurre si:

  - Flujo compresible: Igualdad en Re, Ma y γ

  - Flujo incompresible
    - Sin superficie libre: Igualdad en Re
    - Con superficie libre: Igualdad en Re, Fr y si intervienen: We y Eu.

Leyes de semejanza

- **Discrepancias de los ensayos en aire y agua:**

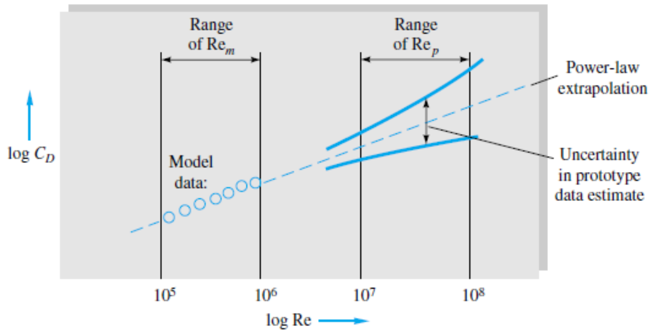
-La semejanza dinámica perfecta es más una ilusión que una realidad, ya que la igualdad de los números de Re y de Fr sólo se puede conseguir con cambios importantes en las propiedades de los fluidos.

-Ejemplo: ensayos hidráulicos con superficie libre para $L_m = \alpha L_p$

-De la igualdad en Fr: $\frac{U_m^2}{gL_m} = \frac{U_p^2}{gL_p} \Rightarrow U_m = \sqrt{\alpha} U_p$

-De la igualdad en Re: $\frac{U_m L_m}{\nu_m} = \frac{U_p L_p}{\nu_p} \Rightarrow \nu_m = \alpha^{3/2} \nu_p$

-En la práctica se usa agua (incompresible) y aire (compresible), necesitándose por ejemplo extrapolaciones:



Leyes de semejanza

Si un fenómeno está dominado por el Reynolds y el Froude, la semejanza total (geométrica, cinemática y dinámica) entre el modelo y el prototipo exigirá hacer el ensayo con una relación de dimensiones L_m/L_p entre el modelo y el prototipo:

- a. $\left(\frac{\nu_m}{\nu_p}\right)$
- b. $\left(\frac{\nu_m}{\nu_p}\right)^{2/3}$
- c. $\left(\frac{\nu_m}{\nu_p}\right)^2$

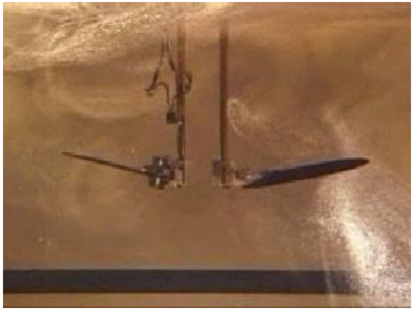
Un barco de 20 m de largo, diseñado para navegar a 10 m/s, se quiere probar usando un modelo de 3 m de largo (fluido ideal, g = 10 m/s^2). La velocidad de navegación apropiada para el modelo será:

- a. 15 m/s
- b. $\sqrt{15}$ m/s
- c. $\sqrt{1.5}$ m/s

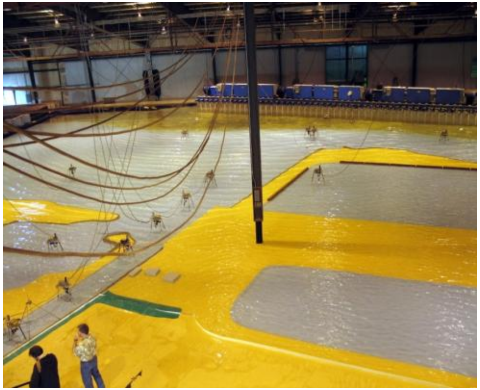
¿A qué velocidad del mismo fluido, bajo las mismas condiciones de presión y temperatura, hay que ensayar el modelo (m) de un prototipo (p) de camión, ¿α veces más grande que el modelo?

- a. $V_m = \alpha V_p$
- b. $V_m = \frac{V_p}{\alpha}$
- c. $V_m = V_p\sqrt{\alpha}$

Tipos de modelos



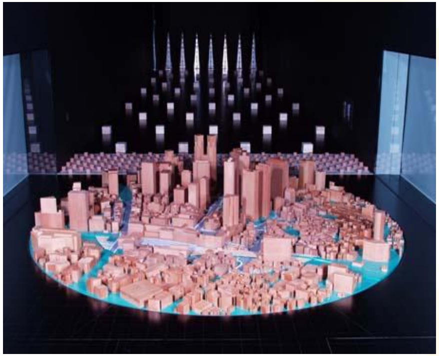
Tipos de modelos



Vídeo: CEHIPAR

Vídeo: inundaciones

Vídeo: Mercedes



Modelos numéricos: CFD