

基于边际效用和拍卖理论的水资源优化利用模型

概括

随着近20年来美国西南部旱情的加剧，作为重要供水地的米德湖和鲍威尔湖面临缺水问题。为了解决水资源优化配置的一系列问题，本文提出三种模型。

对于模型1，我们仔细模拟了资源分配的整个过程，提出了水资源供应和电力需求的资源分配网络（RAN）。在资源充足但没有额外水资源的情况下，分配问题转化为线性规划问题。然后设计了相应的算法（时变线性优化算法）来有效地解决该问题。优化结果表明，在五个州的分配方案下，分配网络可以在没有额外水资源的情况下持续运行21天。

对于模型2，为了衡量通用水资源和水电的稀缺程度，并评估决策时给各个州带来的资源价值，我们引入经济学中的边际效用概念，建立 I_i 函数、 $Utility_i$ 函数和 $Value_i$ 函数($i = 1, 2, \dots, 5$)，量化水资源供应和电力生产的竞争利益，这是模型3(IPV模型)的重要基础。

对于模型3，考虑到水资源和水能资源不足的情况，创新性地引入拍卖理论，使资源配置尽可能接近最优，即帕累托最优，由此提出了独立私人价值（IPV）模型，并采用广义反向射击（BS）算法进行求解。基于边际效用模型提出的 $Value_i$ 函数 ($i = 1, 2, \dots, 5$)，IPV模型提出的资源配置方案优于资源配置网络（模型1），计算结果表明该方案更经济、更具可持续性。

然后我们利用模型处理更为复杂的情况，并对整个原理进行详细描述。同时，我们对模型进行了敏感性分析，并验证了模型的稳健性。为了满足模型的需要，我们最后给出了具体的罚款金额计算规则，以促进公民和企业采取节水节电措施。

通过仔细分析优势和劣势，我们进一步提出未来可能的工作并得出结论。

关键词：资源分配网络(RAN)；线性规划；边际效用；拍卖理论；边际效用；独立私人价值(IPV)模型；

內容

1 简介

1.1 背景

据史料考证，该水库始建于公元前600年左右，随着科技的发展，水库的功能逐渐扩展，不仅用于灌溉农田，还提供生活用水、防洪、开发水力发电等，以维持人们的正常生活。

然而，由于近年来生态环境恶化，部分地区民众日常生活面临严重的水资源短缺问题。2021年，美国遭遇严重旱灾，作为西部重要供水源地的米德湖和鲍威尔湖水位不断下降，创下历史新高。以米德湖为例，近二十年来，米德湖的蓄水量始终低于正常蓄水量，目前蓄水量仅为34%。米德湖水位也下降至约1067英尺，逼近胡佛水坝950英尺的最低发电水位。^[1]

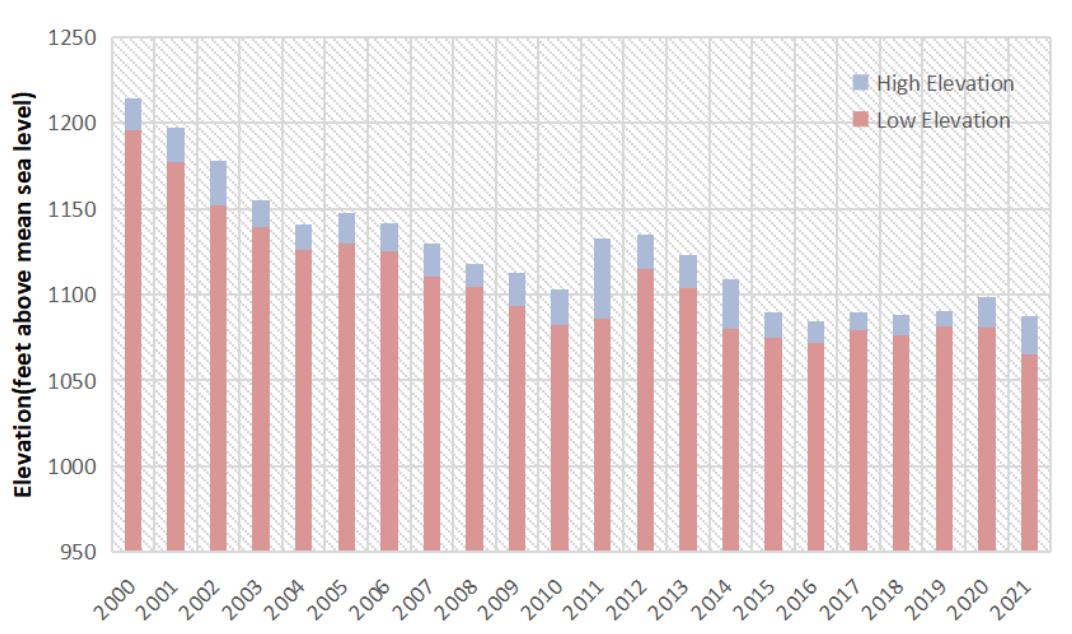


图 1：事实：2000-2021 年米德湖年最高和最低海拔

短期的节水、节电只能缓解暂时的水资源短缺，因此如何配置和利用水资源成为亟待解决的问题，这也是我们模型要解决的问题。

1.2 问题重述与分析

- 问题一：建立模型，计算在米德湖水位为M，鲍威尔湖水位为P，水需求量固定的条件下，需要从这两个湖抽取多少水才能满足需求。此外，第一个模型可以持续多长时间，需要额外抽取多少水才能满足固定的需求

要求。

- 问题二：预先制定一个应对竞争的标准，当出现利益竞争时，通用用水和水电用水如何分配。
- 问题三：模型需要包括水资源不足（即供应量小于需求量）时的做法。
- 问题四：模型能够应对这些情况，包括受影响区域的相关因素发生变化、其他可再生能源比重增加、采取节水、节电等措施。
- 一篇文章：撰写一篇将在期刊*Drought and Thirst*上发表的文章来说明该模型的结果。

1.3 我们工作的概述

为了避免复杂的描述，直观的反映我们的工作流程，流程图如下图所示：

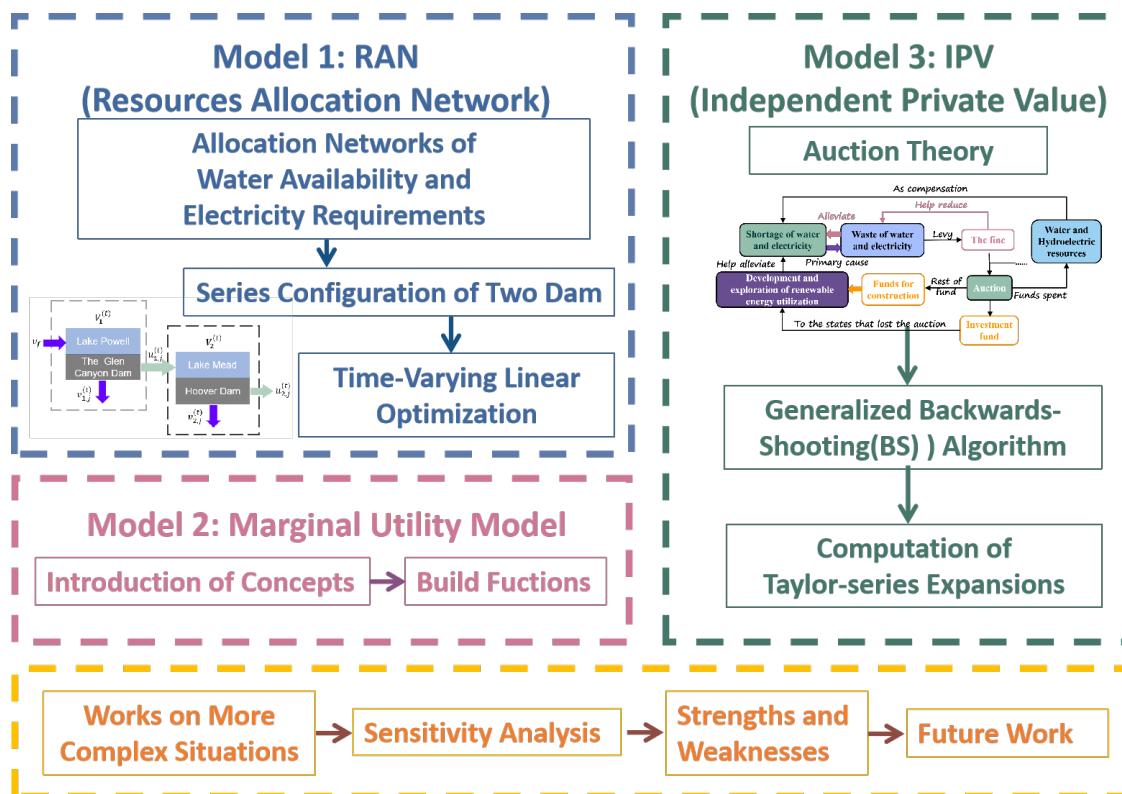


图 2：我们的工作框架

2 假设

- 假设 1：米德湖和鲍威尔湖的所有水仅用于一般用途和水力发电。
- 假设 2：亚利桑那州、加利福尼亚州、科罗拉多州、新墨西哥州和怀俄明州的水和水力发电均来自胡佛水坝和格伦峡谷水坝。
- 假设三：在计算涉案五州用水量时，将公共供水和生活用水归为居民用水，灌溉、水产养殖和畜牧用水归为农业用水，工业用水、火力发电和采矿用水归为工业用水。水力发电时，将商业和居民用水归为居民用水，工业用水的5%归为农业用水，其余部分工业和交通运输用水归为工业用水。
- 假设4：水、电在运输过程中的损耗与运输距离成正比。
- 假设5：为简化计算，将湖泊视为一个圆柱形容器。
- 假设6：在鲍威尔湖流向米德湖的途中，支流的影响并不被单独考虑，因为该河的主流水量远远多于支流水量。

3 符号列表

Symbol	Meaning
$v_{ij}^{(t)}$	the volume of water available for general usage from dam i to state j at time t
$u_{ij}^{(t)}$	the volume of water available for the hydropower production from dam i to state j at time t
$w_{ij}^{(t)}$	the effectively produced electric energy through ultra-high voltage grid from dam i to state j at time t
d_j^{water}	the demand on general water usage of state j within unit time
d_j^{elec}	the demand on hydropower of state j within unit time
$V_i^{(t)}$	the water storage amount of dam i at time t

表 1：符号列表

Notice :索引 $i = 1, 2$ 分别指代格伦峡谷大坝和胡佛大坝。索引 $j = 1, 2, 3, 4, 5$ 分别指代亚利桑那州、加利福尼亚州、怀俄明州、新墨西哥州和科罗拉多州。

4 科罗拉多河资源配置网络

科罗拉多河的流向图如下图[3]所示。图中清晰地标出了两座水坝（格兰峡谷大坝、胡佛大坝）和两座湖泊（鲍威尔湖、米德湖）的位置。对于一座水坝来说，我们关心的水流方向是

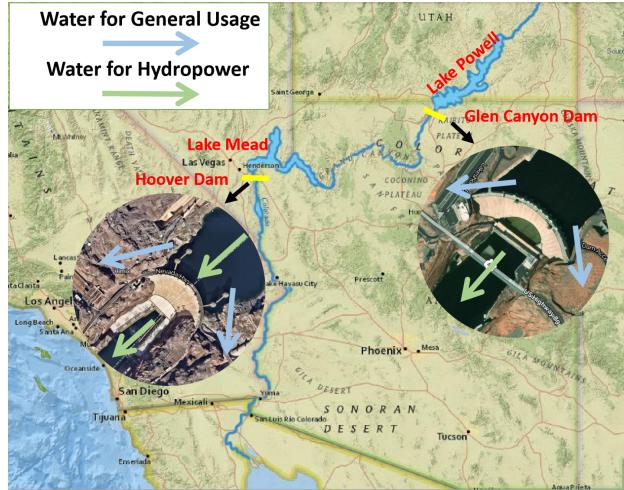


图3：科罗拉多河流向图：(a) 蓝色箭头表示部分水资源用于农业、工业和住宅，(b) 绿色箭头表示部分水资源用于发电和泄洪。

一般用途的水流方向和水力发电的水流方向，如下图 [3] 所示。

由于水运与水力发电过程中存在不可避免的自然损耗与消耗，我们引入输水率来衡量从水坝 i 到状态 j 的输送效率，即成功输送的百分比。下文中若无特别说明，输水率定义同上。[4]

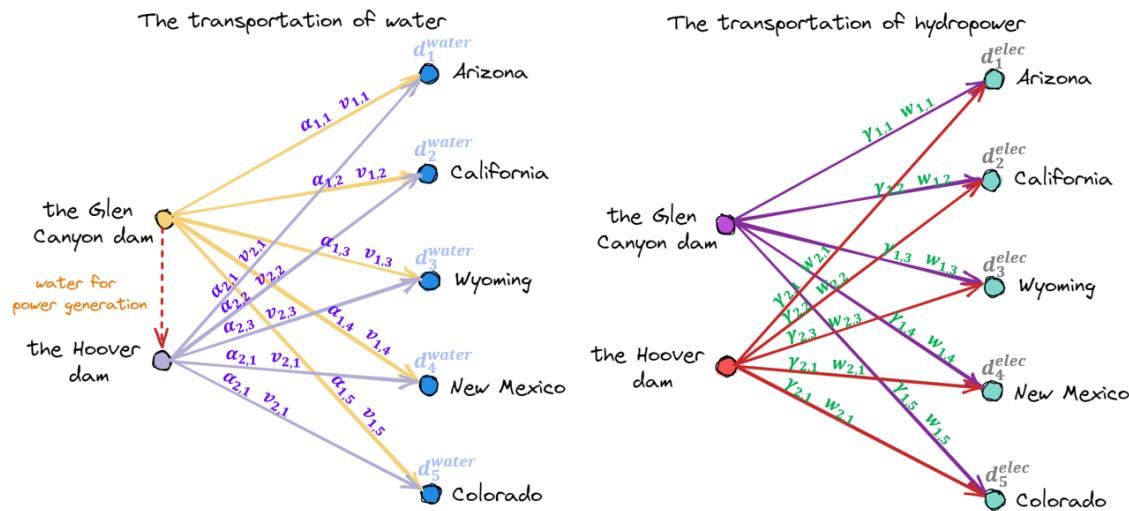


图4：水资源供应和电力需求的分配网络

令 $v_{ij}^{(t)}$ 为从大坝 i 到州 j 可供一般使用的水量，令 α_{ij} 为

运输率，我们得到以下守恒定律。

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_{ij} v_{ij}^{(t)} = d_j^{water}, j = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (1)$$

它保证输送到州 j 的 $v_{ij}^{(t)}$ 总量满足州 j 的水需求 d_j^{water} 。电力也是如此。令 $w_{ij}^{(t)}$ 为从大坝 i 到州 j 通过特高压电网有效生产的电能，令 γ_{ij} 为输送速率，我们推导出电量恒等方程如下。

$$\sum_{i=1}^2 \gamma_{ij} w_{ij}^{(t)} = d_j^{elec}, j = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (2)$$

其中 d_j^{elec} 代表州 j 的电力需求。

要将鲍威尔湖的体积参数 $V_1^{(t)}$ 更新为 V_1^{t+1} ，我们需要以下迭代公式。

$$V_1^{(t+1)} = V_1^{(t)} - \sum_{j=1}^5 (v_{1j}^{(t)} + u_{1j}^{(t)}) + v_f \Delta t \quad (3)$$

其中 v_f 表示格伦峡谷大坝上游的流入速率，而 Δt 表示一定长度的时间间隔。

米德湖的体积更新公式与之类似。不同之处在于，胡佛水坝上游的流入量是格伦峡谷水坝因发电而流出的量。

$$V_2^{(t+1)} = V_2^{(t)} - \sum_{j=1}^5 (v_{2j}^{(t)} + u_{2j}^{(t)}) + \sum_{j=1}^5 u_{1j}^{(t)} \quad (4)$$

具体流程如下（图[5]）。

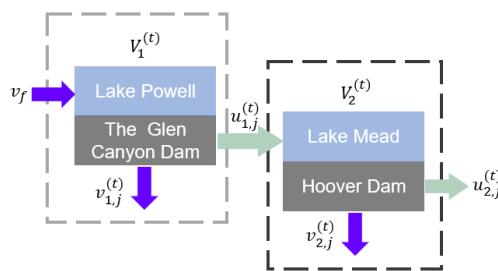


图5：两座大坝的串联配置

为了简化模型，便于求解，将水库模型抽象为圆柱体，通过圆柱体体积公式可计算得到时刻 t 的水位 $h_i^{(t)}$ 。

$$h_i^{(t)} = \frac{V_i^{(t)}}{S_i}, i = 1, 2 \quad (5)$$

其中 S_i 代表湖泊的底部面积。

然后，我们进一步考虑 u_{ij} (发电所用的水量)如何转换为 $w_{ij}^{(t)}$ (发电机从势能有效转换的电能)。根据机械能守恒定律，其物理学工作原理如下。

$$w_{ij}^{(t)} = \beta_i \rho_{water} u_{ij}^{(t)} g h_i, i \in \{1, 2\}, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (6)$$

其中 β_i 为发电机的效率系数。 ρ_{water} 和 g 分别代表水的密度和重力加速度。

最后，我们需要确保只有在 $h_i \geq h_i^{lowest}$ 时才发电。由于发电机 i 的功率与 $h_i^{(t)}$ 成比例，我们将比例系数表示为 η_i ，将区间表示为 Δt 。

$$\sum_{j=1}^5 w_{ij}^{(t)} \leq \begin{cases} \eta_i h_i^{(t)} \Delta t, & h_i \geq h_i^{lowest} \\ 0, & \text{else} \end{cases}, i = 1, 2 \quad (7)$$

另外，为了节省能源，我们应该尽可能的减少 $v_{ij}^{(t)}$ 和 $u_{ij}^{(t)}$ 。

考虑到上述所有因素，我们通过考虑公式 Eq (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) 得到以下优化问题。

$$\min_{v_{ij}^{(t)}, u_{ij}^{(t)}} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 v_{ij}^{(t)} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 u_{ij}^{(t)} \quad (8)$$

$$s.t. \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^2 \alpha_{ij} v_{ij}^{(t)} = d_j^{water}, & j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ \sum_{i=1}^2 \gamma_{ij} w_{ij}^{(t)} = d_j^{elec}, & j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ V_1^{(t+1)} = V_1^{(t)} - \sum_{j=1}^5 (v_{1j}^{(t)} + u_{1j}^{(t)}) + v_f \Delta t \\ V_2^{(t+1)} = V_2^{(t)} - \sum_{j=1}^5 (v_{2j}^{(t)} + u_{2j}^{(t)}) + \sum_{j=1}^5 u_{1j}^{(t)} \\ h_i^{(t)} = \frac{V_i^{(t)}}{S_i}, & i = 1, 2 \\ w_{ij}^{(t)} = \beta_i \rho_{water} u_{ij}^{(t)} g h_i^{(t)}, & i \in \{1, 2\}, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ \sum_{j=1}^5 w_{ij}^{(t)} \leq \begin{cases} \eta_i h_i^{(t)} \Delta t, & h_i \geq h_i^{lowest} \\ 0, & \text{else} \end{cases}, & i = 1, 2 \\ v_{ij}, u_{ij} \geq 0, & i \in \{1, 2\}, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ V_i^{(t+1)} \geq 0, & i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (9)$$

4.1 分配网络的解决方案：伪代码

问题 Eq(8)(9) 是一个时变线性优化问题。因此，我们的算法思路是采用迭代方法，在(t)步骤中优化网络的水和水电分配。以下是此阶段的伪代码（算法 [1]），它很好地表示了整个代码流程。

Algorithm 1: Time-Varying Linear Optimization

```

input :  $\{\alpha_{ij}, \gamma_{ij}, v_f, S_i, \beta_i, \rho_{water}, g, h_i^{lowest}\}$ , for  $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 5$ 
output  $\{v_{i,j}^{(t)}, u_{ij}^{(t)}, t_1, t_2\}$ , for  $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 5, \forall t = 1, 2, \dots$ 
:
1 Initialization:  $\{V_{(1)}^0, V_{(2)}^0, h_{(1)}^0, h_{(2)}^0\}$ ,  $t \leftarrow 0$ 
2 while  $h_1^{(t)} > h_1^{lowest}$  and  $h_2^{(t)} > h_2^{lowest}$  do
3    $t \leftarrow t + 1$ 
4   if  $V_1^{(t)} > 0$  and  $V_2^{(t)} > 0$  then
5      $\{v_{i,j}^{(t)}, u_{ij}^{(t)}\} \leftarrow argmin \left( \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 v_{ij}^{(t)} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 u_{ij}^{(t)} \right)$ , for
        $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 5$ 
6   else if  $V_1^{(t)} \leq 0$  and  $V_2^{(t)} > 0$  then
7      $\{v_{1,j}^{(t)}\} \leftarrow 0$ , for  $j = 1, 2, \dots, 5$ 
8      $\{v_{2,j}^{(t)}, u_{ij}^{(t)}\} \leftarrow argmin \left( \sum_{j=1}^5 v_{2j}^{(t)} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 u_{ij}^{(t)} \right)$ , for
        $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 5$ 
9   else if  $V_1^{(t)} > 0$  and  $V_2^{(t)} \leq 0$  then
10     $\{v_{2,j}^{(t)}\} \leftarrow 0$ , for  $j = 1, 2, \dots, 5$ 
11     $\{v_{1,j}^{(t)}, u_{ij}^{(t)}\} \leftarrow argmin \left( \sum_{j=1}^5 v_{1j}^{(t)} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 u_{ij}^{(t)} \right)$ , for
        $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 5$ 
12   else
13     BREAK
14   if  $h_1^{(t)} \leq h_1^{lowest}$  or  $h_2^{(t)} \leq h_2^{lowest}$  for the first time then
15      $t_1 \leftarrow t \cdot \Delta t$ 
16   Update:  $V_1^{(t+1)} \leftarrow V_1^{(t)} - \sum_{j=1}^5 (v_{1j}^{(t)} + u_{1j}^{(t)}) + v_f \Delta t$ 
17   Update:  $V_2^{(t+1)} \leftarrow V_2^{(t)} - \sum_{j=1}^5 (v_{2j}^{(t)} + u_{2j}^{(t)}) + \sum_{j=1}^5 (v_{1j}^{(t)} + u_{1j}^{(t)})$ 
18   Update:  $h_i^{(t+1)} \leftarrow \frac{V_i^{(t+1)}}{S_i}$ , for  $i = 1, 2$ 
19  $t_2 \leftarrow t \cdot \Delta t$ 

```

根据式[9]中的约束，当大坝水位低于发电最低水位，但高于发电最低水位时，

大坝，大坝仍可提供水资源，但无法发电。而且，当两座大坝的水位都低于各自的最低水位，或无法满足各州的需求时，该算法会立即终止。

4.2 结果与分析

通过查找相关资料，我们得到了两座水坝的水位数据（表[2]）以及五个州的农业、工业和住宅需求数据（图[4.2]）。

the Name of the Dam	Minimum Water Level	Minimum Water Level for Power Generation	Average Water Level	Maximum Water Level
Glen Canyon Dam	65m	110m	142m	216m
Hoover Dam	79m	119m	158m	221m

表 2：水位限制列表

对于问题给出的水位 P 和 M ，我们分别计算三种情况下的分配方案，

- $P = 142\text{m}$ （深蓝色线）， $M = 158\text{m}$ （红棕色线），平均水位18天前曲线为直线，说明单座水坝的水量足够5个州使用，18天到21天曲线出现曲折，说明有一座水坝无法发电（但可以供水），21天后两座水坝均无法满足5个州的水电需求。

- $P = 110\text{米}$ （棕黄色线）、 $M = 119\text{米}$ （紫线），发电最低水位

4天之前，曲线是一条直线，说明单独一座水坝的水量足够5个州使用，而4天之后，两座水坝已无法满足5个州的用水和用电需求。

- $P = 216\text{m}$ （绿线）， $M = 221\text{m}$ （浅蓝线），最高水位32天前曲线为直线，说明单座水坝的水量足够5个州使用，32天到49天曲线出现曲折，说明有一座水坝无法发电（但可以供水），49天后两座水坝均无法满足5个州的水电需求。

显然，该算法与时间和初始水位密切相关。综合考虑这三种情况，我们选择第一种情况作为平均值。我们得到在这 21 天内，在没有降雨和其他水源供应的情况下，问题一的水量分配为（可视化结果如图 [4.2] 所示）：

有 资源配置网络的一些结论

工作：

- 从第 1 天到第 18 天，格伦峡谷大坝每天向 WY 分配 $4.42 \times 10^8 \text{m}^3$ 股水；胡佛大坝每天向 AZ 分配 $2.38 \times 10^8 \text{m}^3$ 股水，向 CA 分配 $1.12 \times 10^9 \text{m}^3$ 股水，向 NW 分配 $1.23 \times 10^8 \text{m}^3$ 股水，向 CO 分配 $4.45 \times 10^8 \text{m}^3$ 股水。

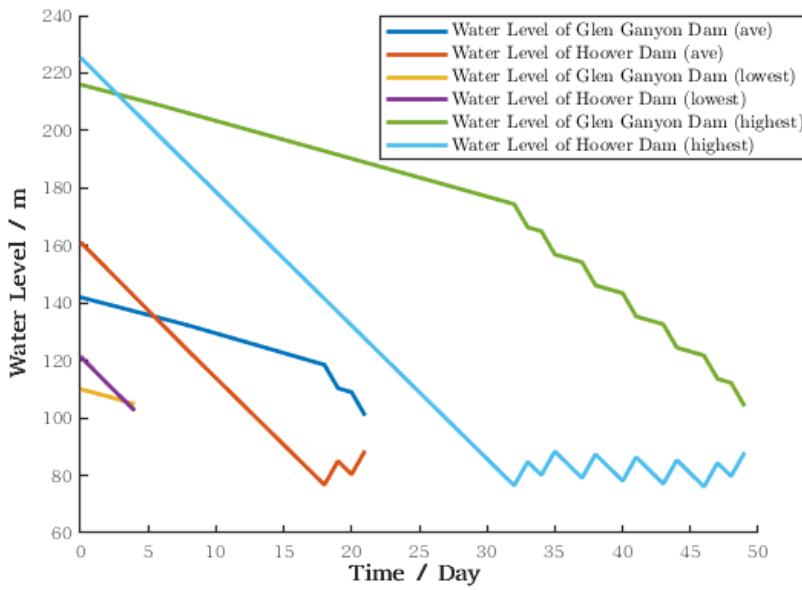


图6：问题一的结果

- 从第 19 天到第 21 天，格伦峡谷大坝每天向亚利桑那州分配 $2.66 \times 10^8 m^3$ 股水，向加利福尼亚州分配 $1.35 \times 10^9 m^3$ 股水，向怀俄明州分配 $4.42 \times 10^8 m^3$ 股水，向西北部分配 $1.26 \times 10^8 m^3$ 股水，向科罗拉多州分配 $4.56 \times 10^8 m^3$ 股水。
- 分配网络可连续维持21天不补充水量。
- 水分配计划建议每 21 天重新运行一次模型。
- 允许 $\sum_{j=1}^5 u_{2j} = 3.51 \times 10^7 m^3/day$ 水从科罗拉多河流入加利福尼亚湾。

借助 USGS [9] 和 EIA [10] 的数据，图[7]和图[8]制作了各州各部门用水量和水电分配的两个饼状图。

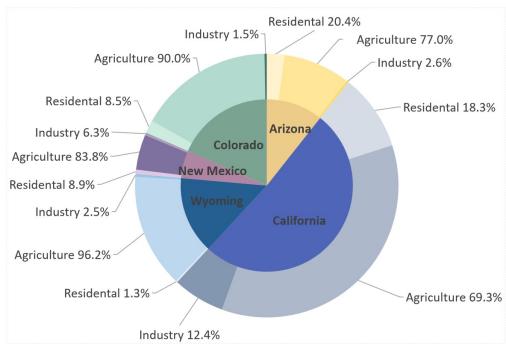


图 7：州用水分配概况

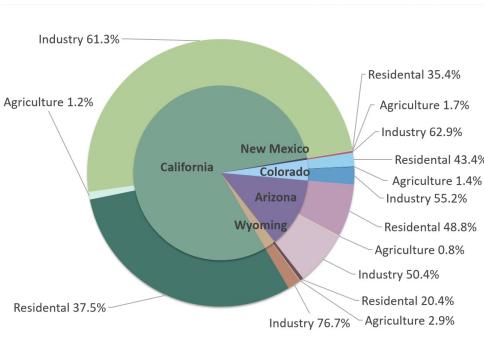


图 8：各州水电使用分配概况

第一个模型的结果包含了每个州每个部门的用水量和水电分配，可以制作成桑基图，以更好地显示图[4.2]中的流程。

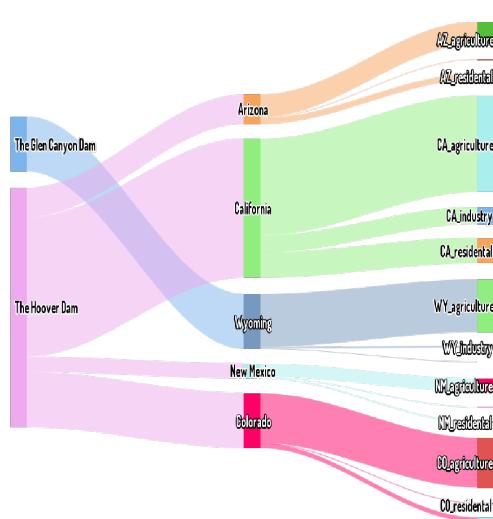


图 9：用水量桑基图

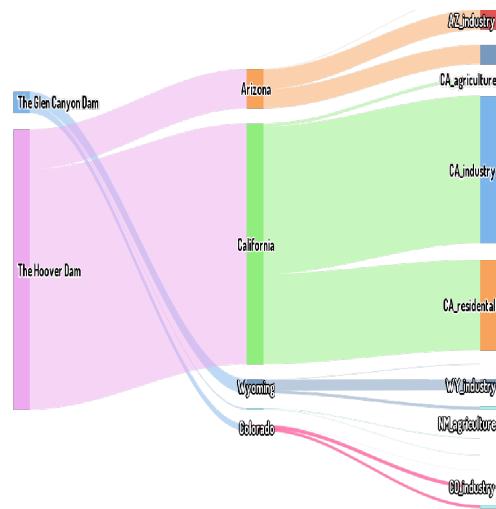


图 10：水电使用情况桑基图

5 边际效用模型：各州的资源利益与估价

由于模型中的变量数量众多，我们倾向于做以下简化，以避免使表达变得冗长。

$$\text{function}(\text{Resource}_i) = \text{function}(\arg_i^{\text{water}}, \text{ind}_i^{\text{water}}, \text{res}_i^{\text{water}}, \arg_i^{\text{elec}}, \text{ind}_i^{\text{elec}}, \text{res}_i^{\text{elec}}) \quad (10)$$

其中， $\arg_i^{\text{water}}, \arg_i^{\text{elec}}$ 代表分配给第*i*个州农业的水资源和水电， $\text{ind}_i^{\text{water}}, \text{ind}_i^{\text{elec}}$ 代表分配给工业的水资源和水电， $\text{res}_i^{\text{water}}, \text{res}_i^{\text{elec}}$ 代表分配给居民的水资源和水电。我们将 Resource_i 称为包括 $\arg_i^{\text{water}}, \text{ind}_i^{\text{water}}, \text{res}_i^{\text{water}}$ 和 $\arg_i^{\text{elec}}, \text{ind}_i^{\text{elec}}, \text{res}_i^{\text{elec}}$ 在内的六个变量。

水和能源之间存在着很强的关联性[2]，例如工厂里的机器需要用电来加热、用水来冷却，农田里也只能用电力来驱动机器进行灌溉。因此，我们假设只有当水和水电按一定的比例配置时，两种资源才能共同发挥出最大的效用，在经济学中，我们称这种结果符合帕累托最优。经济学中经常利用边际效用函数来判断最后的结果是否符合帕累托最优。利用类似的思想，我们定义一个函数，其值域在 $[0, 1]$ 内，且先增大后减小，其最大值的唯一条件是：水和水电按一定的比例配置。显然，边际效用效率函数的负梯度的大小代表了沿方向单位努力所对应的利润。相关的定义如下。

$$I_i(Resource_i) = \frac{2 \ln \frac{e(x_i+1)}{2}}{x_i + 1} \in [0, 1] \quad (11)$$

其中 $x_i = \frac{1}{3} \left(\frac{arg_i^{water}}{arg_i^{elec}} / k_{arg} + \frac{ind_i^{water}}{ind_i^{elec}} / k_{ind} + \frac{res_i^{water}}{res_i^{elec}} / k_{ind} \right)$ 和 e 是欧拉常数。

根据 R. Layard 等人 (2008) [1] 对边际效用的定义，竞争利益的关键问题是这种影响如何随收入变化，而不是收入对各州效用的影响程度。因此，我们将效用函数定义如下，

$$Utility_i(Resource_i) = \frac{y_i^{1-\mu_i^{water}} - \mu_i^{water}}{1 - \mu_i^{water}} + \frac{z_i^{1-\mu_i^{elec}} - \mu_i^{elec}}{1 - \mu_i^{elec}} \quad (12)$$

其中 $y_i = arg_i^{water} + ind_i^{water} + res_i^{water}$ 和 $z_i = arg_i^{elec} + ind_i^{elec} + res_i^{elec}$ 。参数 $\mu_i^{water}, \mu_i^{elec}$ 表示自变量的变化对各州效用的影响。然而， μ_i^{water} 和 μ_i^{elec} 的值很难确定，特别是在缺乏数据的情况下。在本文中，为了简化模型，我们根据各州对水和电的需求来确定这两个参数 μ_i^{water} 和 μ_i^{elec} 。

通过将 I_i 函数与 $Utility_i$ 函数相乘，我们得出了 $Value_i$ 函数，这意味着五个州对同一资源的价值评估不同。我们实施 $Value_i$ 函数来量化水资源可用性和电力生产的竞争利益。

$$Value_i(Resource_i) = I_i(Resource_i) \cdot Utility_i(Resource_i) \quad (13)$$

注意：第 6 节中的 IPV 模型基于边际效用模型，因此我们将在下一节讨论边际效用模型的结果。

6 竞争利益的拍卖理论：独立私人价值（IPV）模型

从现在起，科罗拉多河的水资源越来越稀缺，如果我们继续毫无节制地开采，整条河的水资源将被耗尽。从这个意义上讲，我们应该尽最大努力减少从科罗拉多河取水。但水和电是每个行业的基本需求。这意味着我们需要找到其他解决方案，使整个计划可行且可持续。

基于以上考虑，我们引入如下IPV模型（图[11]）。

事实上，美国西部水电资源匮乏的主要原因之一就是美国人普遍的浪费习惯。科罗拉多河的危险性越来越大，水和水电资源也变得越来越宝贵。但许多美国人的奢侈浪费习惯却丝毫未减。如果能减少浪费，目前的危机将大大改善。作为一种很好的监控手段，对浪费者处以罚款是一种有效的方法。而且罚款可以筹集到一大笔钱，这对我们的IPV模式大有裨益。

接下来是IPV模型的核心。该模型主要基于拍卖理论，

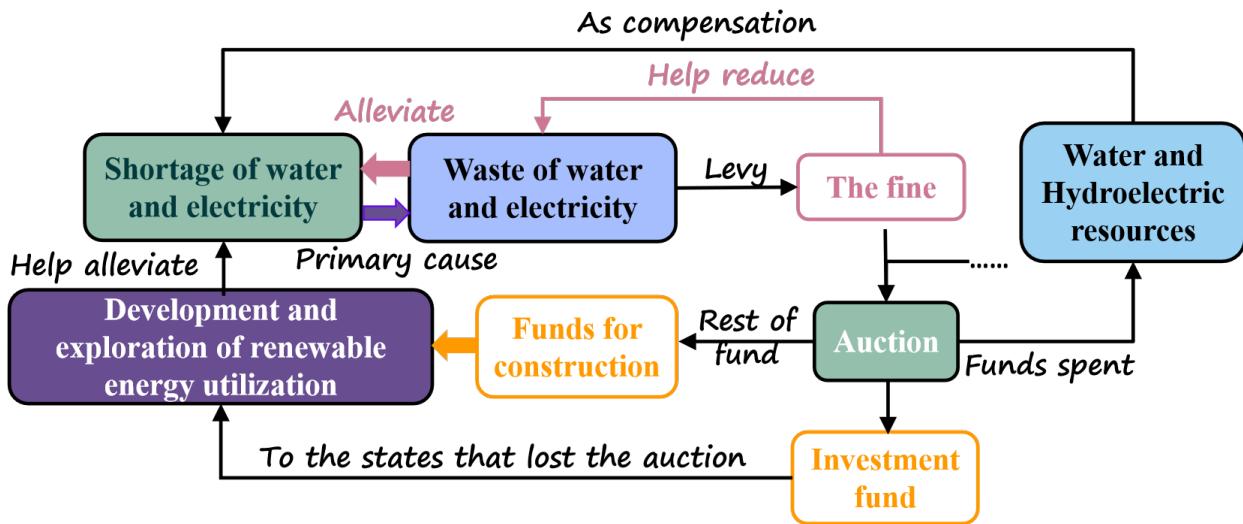


图11：IPV模型框架

这是微观经济学的一个重要分支。历史上，多次获得诺贝尔经济学奖的拍卖理论有其独特的作用和意义。在我们的模型中，创造性地引入了这一理论并结合具体场景进行修改，最终实现了整个问题的最优解（经济学上我们称之为帕累托最优[3]）。解决这个问题的具体算法后面会讲到，这里我们只需要知道它是模型的核心，以及它在整个系统中是如何运作的。

- 一开始将一定数量的水和电平均分配给五个州，将每个州视为一个独立的竞标者，然后有五个竞标者竞标剩余的水。每个竞标者会权衡自己的利益，决定是否支付自己的出价（主要来自罚款，也可以包括其他来源）。同时，出价最高的人获得资源，这符合我们都熟悉的竞标规则。
- 剩下的资源分配好之后，各州可以自己管理剩下的钱，我们的建议是把剩下的钱尽量投入到可再生能源的开发和勘探建设上，因为这样的投资从长远来看是有积极意义的。
- 剩余资源拍卖所得将作为投资资本，帮助那些从拍卖中获利最少或没有获利的州进行建设。这样，中标者就可以用资本来换取他们认为有价值的资源。
- 这些水利水电资源也算作是缓解水电短缺的一种补偿，虽然这种补偿有限，但相信这种收益对于参与竞拍的竞拍者来说还是有好处的，因为竞拍行为是基于充分的利益考量，总之，竞拍者至少从拍卖中获得了短期收益，而且对他们而言，结果是正面的。

- 另一方面，拍卖收益最少的州则获得相应的投资来协助建设，长远来看必定会有积极效果，他们可以逐渐摆脱对河流相关资源的依赖，转而利用海水淡化、太阳能发电等来替代。

总体来看，双方均受益，河流压力随着时间的推移不断减小，有利于生态修复和可持续发展。

因此，我们在此考虑独立私人价值 (IPV) 第一价格拍卖 [4] [5]： $N = 5$ 个州，称为竞标者，提交密封投标，最高出价者获胜并支付其出价。只有那些其 *private valuation* 高于拍卖师设定的 *reserve price*、 R 的人才会提交有竞争力的出价。

不同的州（投标人）对水和电资源的估价不同，遵循边际效用 [1]，这意味着更多的资源带来的增量效用较少。假设每个州对效用都是风险中性的，并以共同支持 $[p_{left}, p_{right}]$ 上的分布函数 H_i 为特征。投标函数表示为 $\varphi_i, i = 1, \dots, N$ 。

令 $t = \varphi_i(p)$ 表示状态 i 提交的均衡出价，其私有信号为 $p \in [p_{left}, p_{right}]$ 。令 $p = \lambda_i(t)$ 表示逆出价函数。状态 i 提交的出价为 t ，其信号为 $p \in [R, p]$ ，即优化问题的解。

$$t = \arg \max_{q \in (R, p_{right})} (p - q) \prod_{j \neq i} H_j(\lambda_j(q)) \quad (14)$$

根据一阶条件定义，推导出以下公式：

$$1 = [H_i^{-1}(H_i(\lambda_i(t))) - t] \cdot \left[\prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{H'_i(\lambda_j(t))}{H_i(\lambda_j(t))} \right], i = 1, \dots, 5 \quad (15)$$

6.1 独立私人价值 (IPV) 模型的求解

为了解决这一问题，Gayle 和 Richard (2008) [6] 推广了 Marshall 等人 (1994) [7] 的 Backwards-Shooting (BS) 算法，该算法是拍卖中的数值解决方案。Gale 和 Richard 的算法依赖于等距细分的估值支持。根据 [6]，状态 i 的预期利润由下式给出：

$$G_i(R) = \int_R^{t^*} [H_i^{-1}(H(\lambda_i(t))) - t] \cdot \frac{H'_i(\lambda_i(t))}{H_i(\lambda_i(t))} \cdot \prod_{j=1}^n [H(\lambda_j(t))] \quad (16)$$

广义向后射击 (BS) 算法包含以下步骤[6]。首先，我们将 H_i^{-1} 的泰勒级数展开式输入到算法中（计算 H_i^{-1} 的方法[3]将在下文中提到），

其中，广义向后射击(BS)算法[2]中的迭代方程(17)(18)(19)(20)为：

算法 2：广义向后射击 (BS) 算法

- 1 **while** from $J = 1$ to n **do**
 - 2 To calculate a_{iJ} , iterative Eq(19) in step $J - 1$ into Eq(17) for next step through

$$H'(\lambda_i(t)) = H(\lambda_i(t)) \cdot \left[\frac{H'(\lambda_i(t))}{H(\lambda_i(t))} \right]$$
 - 3 Calculate b_{iJ} through the Taylor-series Expansions
 - 4 Calculate c_{iJ} , using the links of Eq(18) and Eq(19)
 - 5 Then, calculate d_{iJ} through Eq(20)
-

$$H(\lambda_i(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(t - t_0)^j \quad (17)$$

$$H_i^{-1}(H(\lambda_i(t))) - t = \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}(t - t_0)^j \quad (18)$$

$$\frac{H'(\lambda_i(t))}{H(\lambda_i(t))} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(t - t_0)^j \quad (19)$$

$$H_i^{-1}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} d_{ij}(x - x_0)^j \quad (20)$$

为了计算上面算法[2]中提到的泰勒级数展开式，需要遵循以下步骤：

算法 3：泰勒级数展开式的计算

- 1 Construct an equally spaced grid $\{p_j; j : 1 \rightarrow J\}$ for the interval $[0, 1]$
 - 2 Calculate the corresponding grid for the inverse CDF F^{-1} , $\{q_j; q_j = F^{-1}(p_k); j : 1 \rightarrow J\}$ by using a standard root finder
 - 3 Construct a B-spline interpolator for F^{-1} , invoking the IMSL subroutines DBSNAK (to construct a knot sequence) and DBSINT (to compute B-spline coefficients) by [8]
 - 4 Invoke the IMSL subroutine BSCPP to convert the B-spline interpolator into a piece-wise polynomial approximation
-

6.2 结果与分析

假设在水资源稀缺的情况下，科罗拉多河上游的水源只有 $505m^3$ 口，即每秒 505 口流量，是整条河唯一的水源。在这种情况下，我们将这个水源作为一个拍卖，由五个州以最高价格进行拍卖。根据 Gayle 和 Richard (2008) [6] 提出的广义 Backwards-Shooting(BS) 算法，我们计算出可能为所有州和墨西哥带来最大利益的最佳竞争策略，

根据IPV模型，我们将整个水资源分为两部分，并设定一个

用相应的比例（参数）来修改拍卖的水资源总量，而未拍卖的部分则用于向五个州进行平均分配。结果见表 [3]。

Allotted Water after the Auction	AZ	CA	WY	NM	CO
none for auction (control group)	57.0149	227.3120	77.6765	36.3715	106.7070
50% for auction	57.0149	227.3120	77.6765	36.3715	106.7070
growth rate of 50% for auction	1.0478	0.9355	1.0418	1.3498	1.0872
70% for auction	55.0809	223.3868	76.8827	37.1827	112.0978
growth rate of 70% for auction	1.0191	0.9272	1.0342	1.3770	1.1206
100% for auction	51.0264	222.0100	74.5972	37.3735	119.9878
growth rate of 100% for auction	0.9581	0.9242	1.0123	1.3833	1.1684

表 3 : 水位限制列表

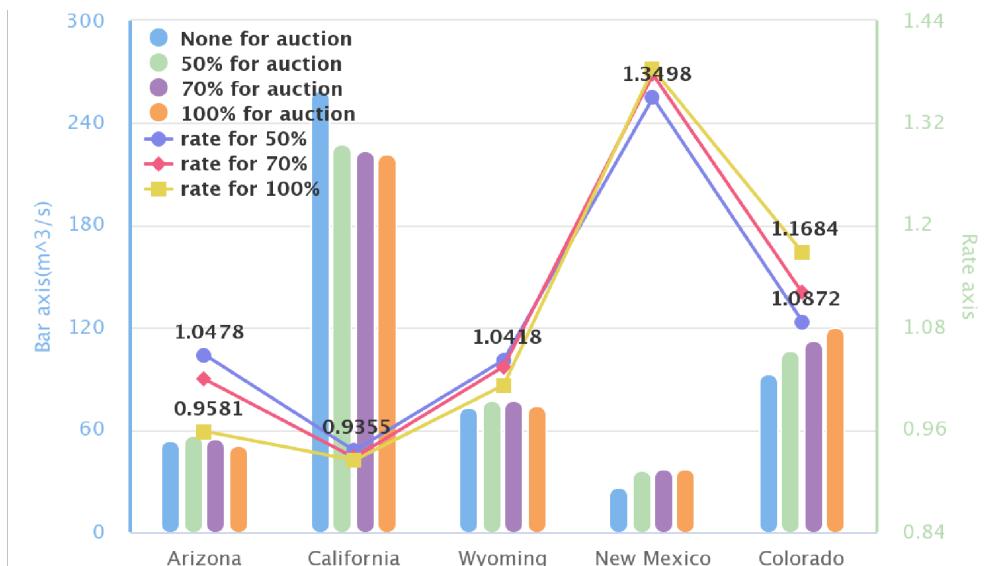


图12 : 拍卖资源占总资源的比例对各州总体价值的影响

在图[12]中，与对照组（所有水资源均等分配给各州的情况，图中蓝色柱）相比，拍卖的水资源越多，加利福尼亚州获得的水资源就越少，而其他四个州获得的水资源则增加或几乎相等，这意味着不同州之间的平等性得到了提高。更重要的是，可持续利用自然资源是当今世界所推崇的。另一方面，图中变量“rate”表示竞争性博弈后各州获得的价值与对照组的比值。显然，怀俄明州、新墨西哥州和科罗拉多州的价值都在上升，五个州的整体价值也在上升。综上所述，IPV拍卖模式促进了五个州的发展。而且，竞标支付的钱可以用来补偿墨西哥或水利体系相对落后的地区。

7 敏感性分析——我们的模型处理更复杂的情况

7.1 受影响区域的生长或萎缩

总体而言，如果受影响地区的人口、农业和工业增长，这些地区对水和水电的需求肯定会增加。为了避免更多的损失并促进发展，这些州必须愿意竞标比以前更多的水，即使价格高得多。此时，他们愿意接受更高的价格，因为即使多一滴水对他们来说也比以前更有意义和更有价值。拍卖价格的提高提高了那些在拍卖中获益最少的人的投资资金数量。根据我们之前对模型的解释，投资应该用于建设，以缓解长期能源需求的压力，同时减少未来对科罗拉多河流域水和水电资源的高度依赖。这对实现长期可持续发展大有裨益。

相反，当出现萎缩时，流域资源需求总压力就会减小，相应的竞价支出也会减少。

- 人口与农业及工业

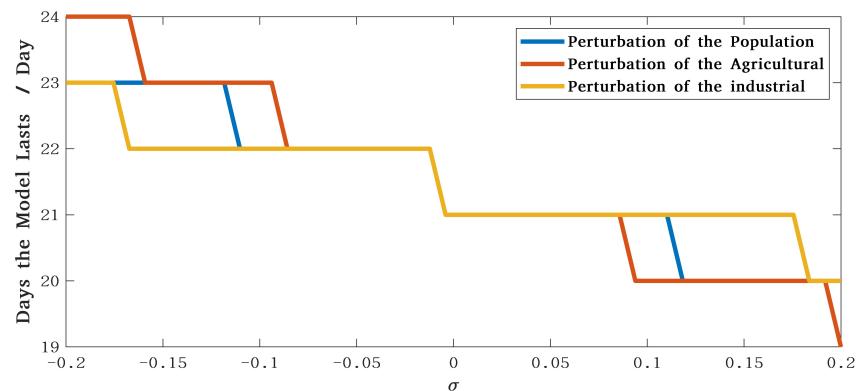


图 13：敏感性分析：人口、农业和工业的扰动

我们假设这三者之一存在一些扰动 σ ，这会影响模型在没有添加水的情况下维持的最长时间。

具体来说，从图[13]中不难看出，在轻微扰动的情况下，模型持续的天数基本保持不变，误差波动不超过三天，这表明我们的模型具有良好的鲁棒性。

7.2 提高可再生能源技术比重

首先，可再生能源技术比例的增加意味着能源消耗减少，资源利用效率提高。在我们的模型中，这相当于逐步

科罗拉多河流域资源需求的减少，主要体现在资源利用重心的逐步转移。

事实上，可再生能源占比的提高（特别是当它超过我们在模型中设定的初始默认值时）会在一定程度上延长模型的持续时间，这也可以在模型的敏感性测试中得到验证。这也 在我们的测试中得到了证实。如图[14]所示，再次证明了良好的抗干扰能力。

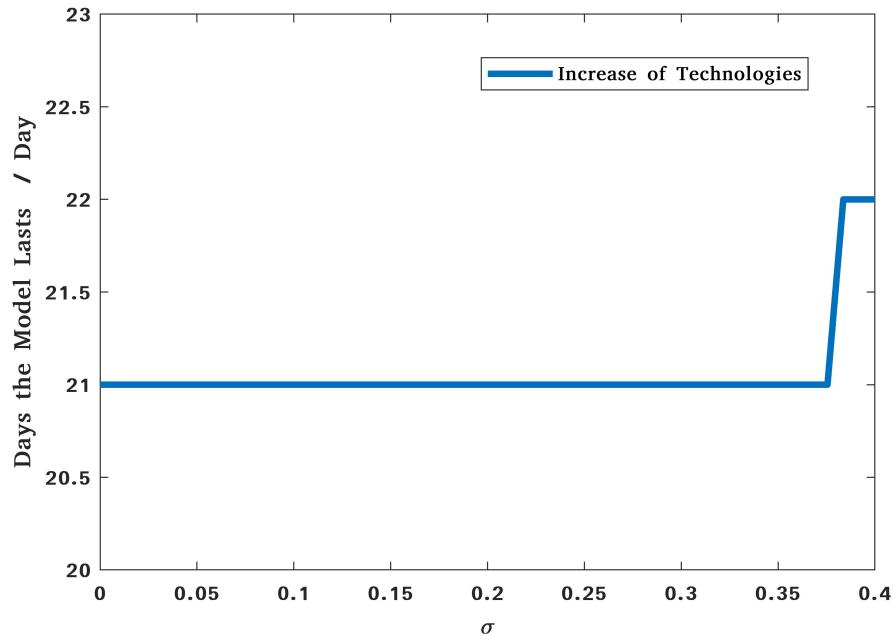


图 14：敏感性分析：技术改进

7.3 节水节电措施

事实上，一旦实施了额外的节水节电措施，水电使用效率将大大提高。在我们的模型中，额外的节水节电措施是以惩罚浪费行为的形式出现的，即罚款。在罚款的压力下，更有效地利用水电，可以减少不必要的浪费。在我们的模型中，这对长期发展具有重要意义，是长期利益的根本保障。

然而，如果没有一套完整有效的惩罚制度，这些规划和愿景就难以实现。我们为构建惩罚制度体系提出以下几点建议。

$$Fine_{total}(i) = Fine_{basic}(i) + Fine_{extra}(i) = i * Fine_{basic} + Utility(i) \quad (21)$$

其中，第*i*个惩罚总额由基本惩罚额和附加惩罚额组成，第*i*个基本惩罚额总额等于 $i * Fine_{basic}$ ，附加惩罚额表示第*i*个浪费的机会成本，可以用效用函数很好地描述。

8 讨论

8.1 优势和劣势

8.1.1 优势

- 综合考虑

我们考虑到尽可能多的细节，比如运输过程中可能出现的损失等等，我们的模型也综合考虑整体利益，在满足各州和墨西哥利益的前提下追求全局优化。

- 特别创新

我们利用经济学概念和理论（如边际效用、拍卖理论）建立模型，为资源竞争体系提供了独特、革命性的视角。

- 良好的可视化

我们很好地完成了可视化工作，包括我们工作的框架、水坝和两个湖泊位置的可视化、通过双层饼图概览国家水分布、IPV 模型示意图等。

- 高度可扩展

资源优化配置问题在日常生活中十分常见，该模型理论保障性强，结合实际背景稍加修改即可应用，且模型对数据的依赖性较小。

8.1.2 弱点

- 粗略估计

在假设5中，我们将湖泊视为两个圆柱体来计算体积。虽然计算简化了，但与实际情况必定存在误差。在本题中，我们认为体积计算并不是需要解决的核心问题。由于时间和进度要求，我们最终选择简化这一步骤。

- 理想化设计

我们的模型力图先通过理想化、抽象化的描述抓住问题的本质，因此，模型在理论上是比较完备的，但可能与实际有所偏差，因为模型缺乏实践检验。

8.2 未来工作

这类问题的本质是资源的最优分配问题，解决这类问题在我们的日常生活中具有重要意义。在资源充足的情况下，很多问题涉及到数百甚至数千个对象的分配。在这方面，我们未来的工作可以着眼于将模型扩展到更大的对象数量并提高算法的计算速度，或者设计出可以应用于更广泛范围、更便捷高效的算法。

在后续引入的资源紧缺情况下的模型中，由于时间关系，我们并没有跳出问题本身进行深入研究。比如，我们提出利用模型为拍卖中收益最小的竞标者提供可观的收益，用于发展海水淡化、太阳能发电、风力发电等技术和基础设施。我们的模型在理论上能够解释长期收益的存在，但如何实现利润最大化、在哪里选择最优建设地点等问题，仍未得到解决。这些问题与问题相关，但并非核心。但不可否认的是，这些问题的解决也有助于具体实施，这有待进一步研究。

9 结论

根据我们的工作，不难得出以下结论：由于科罗拉多河是美国西部最重要的通用水源和水力资源之一，因此需要采取必要的保护措施。此外，尽管美国是一个资源丰富的发达国家，但应该鼓励美国公民养成节水节电的良好习惯。作为补充，我们认为对浪费行为处以罚款是一种有效的方法。此外，为了长期的可持续发展，应该优先开发和建设新的可再生能源。只有这样，科罗拉多河才能焕发活力。只有这样，美国和墨西哥的权利才能同时得到保护。

参考

- [1] Layard R, Mayraz G, Nickell S. 收入的边际效用[J]. 公共经济学杂志, 2008, 92(8-9): 18 46-1857.
- [2] Kenway S J, Priestley A, Cook S 等. 澳大利亚和新西兰城市供水和消费中的能源使用[J]. 澳大利亚水务协会(WSAA): 悉尼, 澳大利亚, 2008。 [3] Censor Y. 多目标问题的帕累托最优性[J]. 应用数学与最优化, 1977, 4(1): 41-59。 [4] Osborne M J, Rubinstein A. 博弈论课程[M]. 麻省理工学院出版社, 1994。 [5] Krishna V. 拍卖理论[M]. Academic press, 20 09。 [6] Gayle W R, Richard J F. 非对称、第一价格、独立私人价值拍卖的数值解[J]. 计算经济学, 2008, 32(3): 245-278。 [7] Marshall R C, Meurer M J, Richard J F 等。 非对称首价拍卖的数值分析[J]. 博弈与经济行为, 1994, 7(2): 193-220。 [8] De Boor C, De Boor C. 样条函数实用指南[M]. 纽约: springer-verlag, 1978。 [9] 美国地质调查局。 <https://www.usgs.gov>
- [10]环境影响评估。 <http://www.eia.gov>



请注意：保存时间

作者：团队#2200084

关键词：干旱；水；优化；

过去22年是美国近1200年来最严重的旱灾，2000年至2022年，美国西南部旱灾形势愈演愈烈，尤其是近几年，图中颜色最深的部分，极度缺水地区占比持续扩大，依赖米德湖和鲍威尔湖供水和水力发电的亚利桑那州、加利福尼亚州、科罗拉多州、新墨西哥州和怀俄明州等5个州正面临资源优化配置的紧迫局面。

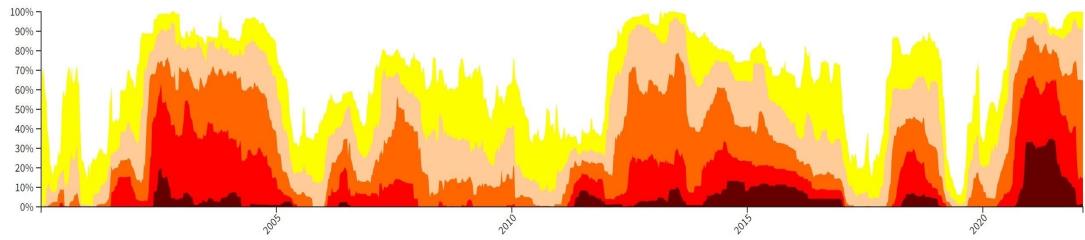


图1：美国西南部不同干旱程度的比例

我们建立RAN（资源分配网络）模型来模拟两座水坝的水和电的供给方向。我们认为水从上游流入鲍威尔湖，这部分水分别用于提供生活用水和发电。发电水流出大坝后，还会继续流向米德湖以供进一步使用。考虑到米德湖和鲍威尔湖的不同水位，我们对这些不同的情况进行计算和分析。我们发现在未来的某一时间段内，两座水坝可以同时满足这五个州的水和电的需求。然而，超过这个时间段之后，电力供应首先就出现了不足。

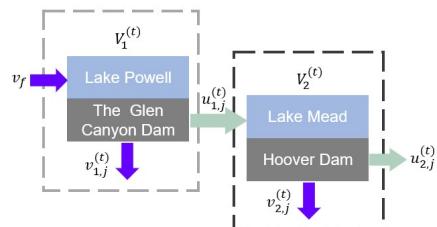


图2：双坝串联配置

根据边际效用递减理论，我们发现水资源与能源之间存在较强的相关性，我们预期通过水资源与水电的配比可以使两种资源的最终利用效果达到帕累托最优。

最重要的是，我们利用拍卖理论中的IPV(Independent Private Value)模型，在水资源不足的情况下，通过拍卖剩余水量获得的资金，来补偿或者帮助薄弱地区进行新能源的开发建设，从而在一定程度上缓解资源短缺的问题，整个过程可以形成闭环发展，能够给系统带来正反馈。

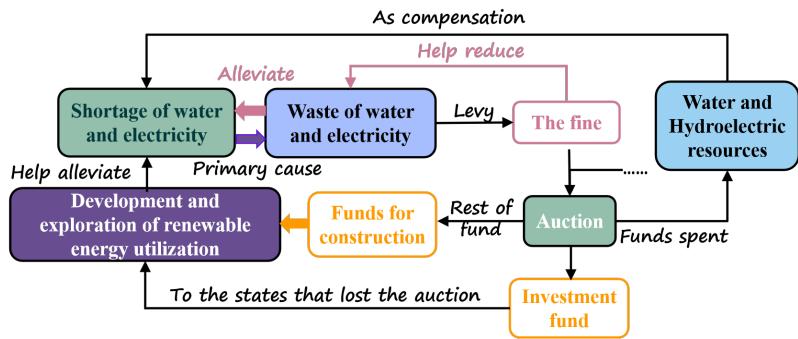


图3：IPV模型的理论

此外，我们希望通过建立合理的惩罚机制，进一步督促人们节约水电。

生态环境的持续恶化，时刻提醒我们要珍惜大自然赋予的资源，珍惜我们赖以生存的家园。