A forma mais fácil e divertida para entender **os conceitos básicos e os problemas da pré-álgebra.**

Matemática Básica & Pré-Álgebra

PARA LEIGOS®

FOR DUMMIES®

2ª Edição Revisada

Mark Zegarelli
Monitor de matemática e escritor

Tornando tudo mais fácil!

Matemática/Álgebra
2ª Edição Revisada

Dicas para simplificar as operações complicadas

Obtenha o conhecimento que você precisa para resolver problemas e equações, e prepare-se para uma aula de álgebra

Se você é um estudante preparando-se para uma aula de álgebra ou um pai buscando recordar a matemática básica, este divertido guia é o livro certo para você . Dos números inteiros, negativos e positivos às frações, dos decimais às porcentagens, você estará pronto para abordar os tópicos mais avançados, tais como os números imaginários, as variáveis e as equações algébricas.

- ***Explicações em português de fácil entendimento***
- ***Informações fáceis de localizar e passo a passo***
- ***Ícones e outros recursos de identificação e memorização***
- ***Folha de cola para destacar, com informações práticas***
- ***Listas dos 10 mais relacionados ao assunto***
- ***Um toque de humor e diversão***

Abra este livro e descubra:

- **Como entender frações, decimais e porcentagens**
- **Como desvendar os problemas algébricos**
- **Como compreender números primos, fatores e múltiplos**
- **Como trabalhar com gráficos e medidas**
- **Como resolver equações com múltiplas variáveis e equações com uma única variável**

Acesse o site www.paraleigos.com.br para outros livros da série!

FOR DUMMIES

ALTA BOOKS
EDITORA
www.altabooks.com.br

ePUB

Mark Zegarelli é graduado em matemática e inglês pela Universidade de Rutgers e autor do livro *Logic for Dummies*.

Matemática Básica & Pre-Álgebra

PARA

LEIGOS®

por Mark Zegarelli

ALTA BOOKS
EDITORA

Rio de Janeiro 2009

Impresso no Brasil

Produção Editorial: Editora Alta Books

Gerência Editorial: Anderson Vieira

Produção de ePUB: Paulo Camerino e Iuri Santos

Geração de ePUB: Cumbuca Studio

ALTA BOOKS
EDITORA

Rua Viúva Cláudio, 291 – Bairro Industrial do Jacaré

CEP: 20970-031 – Rio de Janeiro – Tels.: 21 3278-8069/8419 Fax: 21 3277-1253

www.altabooks.com.br – e-mail: altabooks@altabooks.com.br

www.facebook.com/altabooks – www.twitter.com/alta_books

Sobre o Autor

Mark Zegarelli é o autor de Lógica para Leigos (Wiley). Ele se formou em Inglês e Matemática pela Rutgers University. Ele ganhou a vida durante muitos anos escrevendo enormes quantidades de quebra-cabeças sobre a lógica, uma documentação poderosa de software ou um eventual trabalho de revisão de livros ou de filmes. Durante este tempo, ele cobrou também algumas notas limpando casas, fazendo quadros decorativos e (por dez horas) vendas a varejo. Ele gosta de escrever melhor por sinal.

Na maioria do tempo, Mark morou em Long Branch, Nova Jersey e esporadicamente em San Francisco, California.

Dedicatória

Dedico este livro para a memória da minha mãe, Sally Ann Zegarelli (Joan Bernice Hanley).

Agradecimentos do Autor

Este é meu segundo livro da série Leigos e é ainda uma experiência reconfortante e inspiradora a ser cercada por uma equipe de gente talentosa comprometida em fazer este livro e minha experiência de escritor extraordinário, de fato. Agradeço a orientação editorial e a sabedoria das seguintes pessoas: Lindsay Lefevere, Natalie Harris, Danielle Voirol e Sarah Faulkner da Wiley Publications.

Meus agradecimentos à Sra Beardsley, da Escola Wanamassa, e ao Sr Mundy, da Escola de Long Branch, por me iniciarem na matemática, realizando um ensino bom, simples e sempre divertido. Agradeço ao Martin Gardner e à sua coluna "Jogos Matemáticos", na revista Scientific American, por me mostrar que os número são, de fato, coisas maravilhosas. Obrigado a meus professores de matemática na Faculdade da Brookdale Community: Barbara Tozzi, Eugene Jermael "Teach" Bowen e Greg Liano. E a todos os meus professores na Rutgers University, especialmente Holly Carley, Zheng-Chao Han, Richard Lyons e David Nacin, por seus apoios e incentivos.

E como sempre agradeço ao meu parceiro Mark Dembrowski, por seu amor infalível e incentivo; minha irmã Tami Pantella, por acreditar em mim até quando não dá pra acreditar, meu primo Ed Bremer por ter sido um bom amigo e um colega de matemática; a meus velhos amigos Chip DeCraene, David Feaster, Michael Konopko, Rick Kawala, Brian London, Mark O´Malley, Stanley Marcus, Tim O´Rourke, Robert Rubin, Alison Sigethy e Ken Wolfe.

Meus agradecimentos à Cafeteria Maxfield em San Francisco, pelo café consumido.

Sumário

Introdução

Uma vez no tempo, você gostou dos números. Este não é o primeiro trilho de um conto de fadas. Uma vez no tempo, você gostou realmente dos números. Lembra?

Talvez você tivesse 3 anos e seus avôs estivessem conversando. Você sentou perto deles no sofá e contou os números de 1 a 10. Eles ficaram orgulhosos de você e – para ser honesto – você foi orgulhoso de você também. Ou, talvez, você tivesse 5 anos e ao descobrir como escrever os números, tentando com dificuldade ter de volta os números 6 e 7.

Aprender foi divertido. Os números foram divertidos. Portanto, o que aconteceu? Talvez o problema começasse com uma longa divisão. Ou esclarecendo como mudar as frações em decimais. Poderia ser resolvido como somar 8 por cento de impostos no preço de uma compra? Lendo um Gráfico? Convertendo milhas em quilômetros? Tentando achar muito o valor assustador de x? Onde ele iniciou, você começou a achar que a matemática não gostava de você – e você não gostava muito da matemática por sinal.

Por que, geralmente, as pessoas entram na pré-escola despertadas em aprender a somar e deixam o colégio como adultos convencidos de que elas não podem estudar matemática? A resposta para esta pergunta levaria provavelmente a produzir 20 livros deste tamanho, mas a resolução do problema pode começar aqui.

Eu peço para você tirar todas as dúvidas. Lembra, apenas um momento, um tempo inocente – um tempo antes que a matemática inspirasse ataques de pânico ou induzisse a um sono irresistível. Neste livro, levo você de um entendimento básico para o lugar onde você estará pronto para entrar em qualquer classe de álgebra e ter sucesso.

Sobre Este Livro

Em algum lugar, ao longo do caminho entre a soma e a álgebra, muitas pessoas experimentam a Grande Falha da Matemática. Isso parece com alguma coisa como quando começa a sair muita fumaça de seu carro e o mesmo trepidando a 110 graus na alta estrada em algum lugar do nada!

Por favor leve em conta este livro como seu assistente pessoal na beira da estrada e pense em mim como se eu fosse seu amigável mecânico de matemática (mais barato apenas!). Encalhado na rodovia interestadual, você pode se sentir frustrado pelas circunstâncias e traido por seu veículo, mas, para o amigo que possui a caixa de ferramentas, é tudo em um dia de trabalho. As ferramentas para consertar o problema estão neste livro.

Este livro lhe ajuda não apenas a resolver as questões básicas de matemática, mas para acabar com qualquer desgosto que você sentir na matemática em geral! Tornei os conceitos mais fáceis para a compreensão das seções. E porque Matemática Básica & Pré-Álgebra Para Leigos é um livro de referência, você não deve ler os capítulos ou as seções na ordem

– você pode verificar apenas o que você precisa. Portanto, sinta-se livre e pule. Quando eu cobrir um assunto que exige uma informação anterior do livro, mencionarei aquela seção ou aquele capítulo para você, caso você queira recordar das questões básicas.

Aqui estão dois conselhos que dou para você o tempo todo – lembre-se deles, conforme você verifica os conceitos neste livro: ✓Tenha sempre intervalos nos seus estudos. De cada 20 a 30 minutos, levante-se e empurre sua cadeira. Alimente seu gato, lave a louça, faça um passeio, divirta-se com as bolas de tênis, experimente uma roupa para o Dia das Bruxas – faça alguma coisa para se distrair por alguns minutos. Você voltará mais produtivo para seus livros do que se você tivesse sentado horas e horas os olhos embaçando.

✓ Depois que você lê um exemplo e pensa que você o compreende, copie o problema, feche o livro e tente trabalhar com ele. Se você chegar num beco sem saída, olhe rapidamente para alguém ou algo sem perceber – mas depois experimente aquele mesmo exemplo de novo para ver se você pode passar o tempo sem abrir o livro (lembre-se que em todos os testes preparados por você, provavelmente espiar não é permitido!)

Regras Utilizadas Neste Livro

Para lhe ajuda-lhe a navegar neste livro, eu uso as seguintes regras: ✓O texto em itálico destaca as novas palavras e os termos definidos.

✓ O texto em **negrito** indica as palavras chaves nas listas com marcadores e a parte da ação dos passos numerados.

✓ O texto com fonte única destaca os endereços na internet.

✓ As variáveis tais como x e y são em itálico.

O que Você não Deve Ler

Embora todo autor sigilosamente (ou não apenas sigilosamente) acredite que cada palavra que ele escreve seja ouro puro, você não deve ler toda palavra neste livro, a menos que você queira, de fato. Sinta-se livre para passar por cima das barras laterais (aquelas caixas cinzas escurecidas) onde eu saio pela tangente – a menos que você encontre tangentes interessantes, evidentemente. Os parágrafos rotulados com o ícone do Material Técnico não são essenciais também.

Premissas Insensatas

Se você planejar ler este livro, você será provavelmente: ✓Um estudante que deseja um entendimento sólido sobre as questões básicas de matemática para a aula ou o teste que você está estudando.

✓ Um adulto que deseja melhorar suas habilidades em aritmética: frações; decimais;

porcentagens; pesos e medidas; geometria; álgebra e assim por diante; quando você tiver que usar a matemática no mundo real.

✓ Alguém que desejar recordar, portanto você pode ajudar uma outra pessoa a entender a matemática.

Minha única premissa sobre seu nível de habilidade é que você pode somar, subtrair, multiplicar e dividir. Portanto, para descobrir se você está preparado para este livro, usa este teste fácil: 5 + 6 = ___

10 – 7 = ___

3 x 5 = ___

20 ÷ 4 = ___

Se você puder responder para estas quatro perguntas, você estará preparado para começar.

Como Este Livro É Organizado

Este livro é organizado em seis partes, começando bem no início da matemática – com assuntos tais como cálculo e a reta numerada – e levando você ao objetivo da álgebra.

Parte I: Armando-se com os Fundamentos da Matemática Básica

Na Parte I, eu uso o que você já conhece sobre a matemática e colocá-lo em perspectiva.

O Capítulo I lhe dá um breve histórico sobre o que são números e de onde eles vieram. Discuto como as sequências dos números surgem. Mostro para você a importância dos conjuntos dos números – tais como os números contáveis, os números inteiros e os números racionais – todos apropriados para a reta numerada. Mostro para você também como usar a reta numerada para representar a aritmética básica.

O Capítulo 2 discute como os dígitos são unidades de números, o mesmo acontece com as letras que são unidades de palavras. Mostro para você como o sistema de numeração que você usa todo dia – o sistema de numeração Hindu-Arábico (chamado também de números decimais) – utiliza o valor posicional baseado no número 10 para criar dígitos nos números.

Por fim, o Capítulo 3 concentra-se no que eu chamo de as Quatro Grandes Operações – adição, subtração, multiplicação e divisão. Eu permito que você recorde como fazer a expressão da coluna de adição, a adoção da subtração, a multiplicação dos grandes números e a assustadora longa divisão.

Parte II: Obtendo um Controle sobre Números

Inteiros

Na parte II, você dá um grande salto para entender como trabalhar com as Quatro Grandes operações. No Capítulo 4, eu trato das operações inversas, das propriedades comutativa, associativa e distributiva e trabalhando com os números negativos. Você descobre como usar as desigualdades tais como superior a (>) e inferior a (<). Apresento também a você operações mais avançadas, tais como potências (expoentes), raízes quadradas e valor absoluto.

O Capítulo 5 apresenta o que chamo de as três letras da matemática: expressões, equações e cálculo. O restante do capítulo trata de uma habilidade muito importante: o cálculo das expressões matemáticas usando a ordem das operações. No Capítulo 6, você descobre como resolver os problemas matemáticos (chamados também de histórias matemáticas), criando equações com palavras.

O Capítulo 7 observa com atenção e detalhes a divisibilidade. Mostro a você um punhado de truques para descobrir se um número é divisível por outro. Trato também dos números primos e dos números compostos. Por fim, o Capítulo 8 trata dos fatores e dos múltiplos, mostrando-lhe como estes dois conceitos têm ligação. Mostro a você como decompor um número em seus fatores primos. Mostro também a você como achar o Maior Denominador Comum (MDC) e o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de dois ou mais números.

Parte III: Parte do Todo: das Frações, dos Decimais e das Porcentagens

A parte III trata como os matemáticos representam as partes de todos (as) as frações, os decimais e as porcentagens e como estas três ideias são ligadas.

Os Capítulos 9 e 10 tratam das frações inclusive multiplicando e simplificando os termos das frações. A partir daí, eu mostro a você como multiplicar e dividir as frações mais uma variedade de maneiras para somar e subtrair frações. Por fim, você sabe como trabalhar com os números mistos. No capítulo 11, o assunto é os decimais. Mostro a você como somar, subtrair, multiplicar e dividir decimais e como converter frações em decimais e vice-versa. Ofereço a você também um entendimento sobre os decimais repetitivos.

O Capítulo 12 trata das porcentagens. Mostro a você como converter as porcentagens em frações e decimais e vice-versa. Sigo vários caminhos para achar porcentagens inclusive uma simples, porém poderosa ferramenta chamada cercar a porcentagem. Por fim, o Capítulo 13 trata de resolver os problemas matemáticos que envolvem as frações, os decimais e as porcentagens.

Parte IV: Representação e Mensuração – Gráficos,

Medidas, Estatística e Números Inteiros

A parte IV contém uma variedade de assuntos que desenvolve as habilidades que você adquire nas três partes do livro.

No Capítulo 14, mostro a você como uma notação científica torna muito grandes e muito pequenos os números mais simples combinando os decimais e as potências de dez. No Capítulo 15, eu trato de dois sistemas importantes de pesos e medidas: o sistema Inglês (utilizado nos Estados Unidos) e o sistema métrico (utilizado no mundo). Ofereço a você algumas diretrizes para calcular as unidades métricas.

O Capítulo 16 trata da geometria, dando-lhe uma variedade de fórmulas para achar o perímetro e a área das formas básicas a área da superfície e o volume de alguns sólidos importantes.

O Capítulo 17 lhe apresenta o gráfico, primeiro mostrando a você três importantes tipos de gráficos – o gráfico de barras, o gráfico de setores circulares e o gráfico de linhas. Ofereço a você também as questões básicas do método gráfico mais comum usado em matemática, o gráfico Cartesiano. Mostro a você como traçar os pontos, desenhar as linhas e resolver os problemas usando este gráfico. O Capítulo 18 oferece a você mais prática ainda para resolver os problemas matemáticos, especialmente aqueles tratando de geometria, pesos e medidas.

O Capítulo 19 apresenta-lhe a você a estatística e a probabilidade. Você descobre a diferença entre os dados qualitativos e os dados quantitativos e como calcular a média. Mostro a você também como calcular a probabilidade considerando os possíveis e favoráveis resultados.

No Capítulo 20, ofereço a você as questões básicas de um conjunto de teorias inclusive como definir um conjunto, identificar os elementos e os sub-conjuntos e entender o conjunto vazio. Mostro a você também como representar algumas operações básicas nos conjuntos inclusive a união e a interseção de conjuntos.

Parte V: Os arquivos X: Introdução à Álgebra

A parte V é sua apresentação para a álgebra. O Capítulo 21 fornece uma visão geral da álgebra, mostrando a você as questões básicas para considerar uma variável (como x) e usá-la nas expressões, fazendo a ligação com o que você já conhece sobre as expressões do Capítulo 5.

O Capítulo 22 oferece a você várias as maneiras de resolver as equações algébricas. Por fim, o Capítulo 23 coloca tudo isso junto, mostrando a você como resolver os problemas matemáticos da álgebra do início até o final.

Parte VI: A Parte dos Dez

Apenas para diversão, esta parte do livro inclui a lista dos dez assuntos mais importantes entre vários inclusive os conceitos chaves da matemática e os conjuntos de números.

Ícones Usados Neste Livro

Através deste livro, eu uso quatro ícones para destacar o que é importante ou não: Lembre-se. Este ícone mostra as ideias chaves que você precisa conhecer. Tenha certeza de que você entende antes de ler! Lembre-se desta informação mesmo após fechar seu livro.

Dica. As dicas são úteis para lhe mostrar a maneira rápida e fácil para conseguir as coisas realizadas. Experimente-as, especialmente se você estiver estudando matemática.

Atenção! Os avisos mostram os erros mais comuns que você deseja evitar. Esclareça onde estas pequenas armadilhas estão escondidas para você não cair nelas.

Material Técnico. Este ícone mostra uma trivialidade interessante que você pode ler ou passar por cima, conforme você gosta.

Aonde Ir a Partir Daqui

Você pode usar este livro para alguns caminhos. Se você ler este livro sem a pressão do momento de um teste ou uma lição de casa, certamente você pode começar pelo início e continuar até o final. A vantagem deste método é poder constatar o quanto de matemática você conhece – os primeiros capítulos passam rapidamente. Você ganha uma autoconfiança, assim como um conhecimento prático que pode ajudá-lo depois, pois os primeiros capítulos lhe preparam também para entender o que segue.

Ou que tal quando você estiver pronto para trabalhar, leia o assunto que você está estudando. Deixe o livro na cabeceira e, antes de ir para cama, passe alguns minutos lendo o material acessível dos primeiros capítulos. Você seria surpreso como um pequeno material fácil para recordar e poder produzir, de repente, os conceitos mais avançados.

Se seu tempo for limitado – especialmente se você tiver aula de matemática e procurar ajuda para seu dever de casa ou para o próximo teste – passe diretamente para o assunto que você está estudando · Onde você abrir o livro você poderá achar uma explicação clara sobre o assunto em mão, assim como uma variedade de dicas e truques. Leia do começo ao fim os exemplos e tente praticá-los ou use-os como modelos para ajudá-los nos problemas designados.

Aqui está uma lista de assuntos que tende a apoiar os estudantes: ✓Número negativos (Capítulo 4) ✓Ordem das operações (Capítulo 5) ✓Problemas matemáticos (Capítulos 6, 13, 18 e 23) ✓Fatoração de números (Capítulo 8) ✓Frações (Capítulos 9 e 10) A maioria destes assuntos está nas Partes I e II, mas eles são fundamentais para o que é tratado depois no livro. Falando em geral, a qualquer momento que você passa a criar estas cinco habilidades é como dinheiro no banco, conforme você prossegue na matemática, portanto você pode querer visitar estas seções várias vezes. Logo que você se sente confortável para somar números negativos ou multiplicar frações, sua autoconfiança fica elevada. Além disso, tudo que eu trato no resto do livro deve parecer mais fácil.

Se você chegar a um impasse durante o caminho, faça uma pausa e volte ao problema; você pode achar a resposta de repente para você logo que você a lê de novo com uma mente revigorada. Se você se sentir ainda no impasse, poderá voltar para trás de algumas páginas e ler a partir do início da seção ou do capítulo. Às vezes, verificar alguns exemplos mais acessíveis é a melhor maneira para se preparar quando as condições tornam-se difíceis.

Parte I

Armando-se com os Fundamentos da Matemática Básica Iniciando

Nesta parte...

Você já sabe muito mais sobre a matemática do que você pensa. Aqui, você revisa e ganha uma perspectiva sobre as ideias da matemática básica, tais como os padrões de número, a reta numérica, como a adição de valor múltiplo de 10 torna dígitos em números e como o zero funciona como marcador de posição. Reapresento a você, também, o que chamo de As Quatro Grandes operações (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Capítulo 1

Jogando o Jogo dos Números

Neste Capítulo ► Descobrindo como os números foram inventados ► Observando algumas seqüências numéricas conhecidas ► Examinando a reta numérica ► Entendendo quatro importantes conjuntos de números

Uma das coisas mais úteis nos números é que eles são conceituais, o que significa em um sentido importante eles estão todos na sua cabeça (este fato, no entanto não lhe deixará saber provavelmente sobre eles – bela tentativa!) Por exemplo, você pode descrever três sobre tudo: três gatos, três beisebols, três canibais, três planetas. Mas tente apenas descrever todo o conceito de três em si, e você descobre que é impossível. Oh certamente você pode descrever o algarismo 3, mas o três em si – tal como amor ou beleza ou honra – é além do entendimento preciso. Mas depois de ter o conceito de três (ou quatro ou um milhão), você tem acesso a um incrível sistema poderoso para entender o mundo: a matemática.

Neste capítulo, ofereço a você uma breve história sobre sobre como os números vêm a existir. Discuto as sequências de alguns números comuns e mostro a você como estes se unem às operações elementares da matemática como a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão.

Depois disso, descrevo como algumas destas ideias convergem com uma simples poderosa ferramenta – a reta numerada. Discuto como os números são arrumados na reta numerada e mostro a você também como usar a reta numerada como uma calculadora para uma simples operações.

Por fim, descrevo como os números contáveis (1,2,3,.....) fazem começar a invenção de muitos tipos de números incomuns, tais como os números negativos, as frações e os números irracionais. Mostro a você também como estes conjuntos de números são encaixados – isto é, como um conjunto de números cabe dentro de um outro, que cabe dentro de um outro.

Inventando Números

Os historiadores acreditam que os primeiros sistemas de números vêm das pessoas no mesmo momento que a agricultura e o comércio. Antes disso, as pessoas na pré-história, as sociedades de caça e de coleta se contentavam em identificar várias coisas como "muito" ou "um pouco".

Mas, à medida que a agricultura desenvolvia-se e o comércio entre as comunidades começava, precisava-se de mais precisão. Portanto, as pessoas começavam a usar as pedras, os símbolos gravados na argila e os objetos similares para continuar a acompanhar suas cabras, seu rebanho, seu óleo, seus grãos ou qualquer mercadoria que elas tinham. Estes símbolos podem ser trocados pelos objetos que elas representaram em uma troca de um por um.

Por fim, os negociantes se deram conta de que eles podiam desenhar figuras em vez de usar os símbolos. Aquelas figuras evoluíram em cálculo e a tempo em sistemas mais complexos. Talvez eles não tenham percebido, mas a tentativa de controlar suas commodities tinha levado esses antigos humanos a inventar algo completamente novo: os números.

Através dos séculos, os Babilônios, os Egípcios, os Gregos, os Romanos, os Maias, os Árabes e os Chineses (para nomear apenas alguns) todos desenvolveram seus próprios sistemas de números escritos.

Embora os algarismos romanos ganhassem uma grande credibilidade como o Império Romano expandida através da Europa e das partes da Ásia e África, o sistema mais avançado que os Árabes inventaram mostrou ser mais útil. Nosso próprio sistema de números, os números hindu-arábicos (chamados também de números decimais) é derivado destes números Arábicos anteriores.

Entendendo as Sequências dos Números

Embora os números fossem inventados para somar as mercadorias, como eu explico na seção anterior, eles foram colocados logo em uma série ampla de aplicações. Os números podem ser úteis para medir as distâncias, somar dinheiro, reunir uma multidão (um exército), arrecadar impostos, construir pirâmides e muito mais.

Mas além de seus muitos usos para entender o mundo externo, os números têm também uma ordem interna. Portanto, os números não são apenas uma invenção mas também uma descoberta: uma paisagem que parece existir independente, com sua própria estrutura, seus mistérios e até seus perigos.

Um caminho neste mundo novo e, geralmente, estranho é a sequência de números: uma arrumação de números de acordo com uma regra. Nas seguintes seções, apresento a você uma sequência de vários números que são úteis para fazer sentido de números.

Nivelando as probabilidades

Uma das primeiras coisas que você provavelmente ouviu falar sobre os números é que todos eles são pares ou ímpares. Por exemplo, você pode dividir um número par de mármores em duas pilhas iguais. Mas, ao tentar dividir um número ímpar de mármores da mesma maneira, você tem sempre um ímpar restante da mármore. Aqui estão alguns primeiros números pares:

2 4 6 8 10 12 14 16...

Facilmente você pode manter a sequência de números pares que irá enquanto você gosta. Começando com o número 2 continue somando 2 para obter o próximo número.

Igualmente, aqui estão alguns primeiros números ímpares:

1 3 5 7 9 11 13 15...

A sequência dos números ímpares é bastante simples para gerar. Começando com o número 1, continua somando 2 para obter o próximo número.

Os modelos dos números pares ou ímpares são os modelos de número mais simples, razão pela qual as crianças sempre entendem a diferença entre os números pares e ímpares logo depois de aprender a somar.

Somando três, quatro, cinco, e assim por diante

Depois de acostumar-se ao conceito de somar números superior a um, você pode fazê-lo funcionar. Por exemplo, aqui está como somar três:

3 6 9 12 15 18 21 24...

Neste momento, o modelo é gerado ao começar com 3 e continuando a somar 3.

Igualmente, aqui está como somar quatro:

4 8 12 16 20 24 28 32...

E aqui está como somar cinco:

5 10 15 20 25 30 35 40...

Somando um dado número é uma boa maneira para começar a aprender a tabuada para aquele número, especialmente para os números incompletos (em geral, as pessoas parecem ter a maior dificuldade para multiplicar por 7, mas os números 8 e 9 são, também, impopulares). No Capítulo 3, mostro a você alguns truques para memorizar a tabuada uma vez e para todos.

Estes tipos de sequências são, também, úteis para o entendimento dos fatores e dos múltiplos que você pode contemplar, no Capítulo 8.

Obtendo o quadrado com números quadrados

Ao estudar matemática, mais cedo ou mais tarde você quer usar provavelmente ajudas visuais para ver o que os números estão lhe dizendo (mais adiante neste livro, mostro a você como uma figura pode ser equivalente a uma centena de números quando discuto a geometria, no Capítulo 16, e o gráfico, no Capítulo 17.) As ajudas visuais mais atraentes que você encontrará na vida são aquelas pequenas bolachas quadradas de queijo saboroso (Você tem, provavelmente uma caixa colocada em algum lugar na copa. Caso contrário, as bolachas salgadas ou qualquer outra comida quadrada também servem.) Sacuda um buquê fora de uma caixa e coloque os pequenos quadrados juntos para tornar maiores os quadrados. Figura 1-1 mostra alguns primeiros números quadrados:

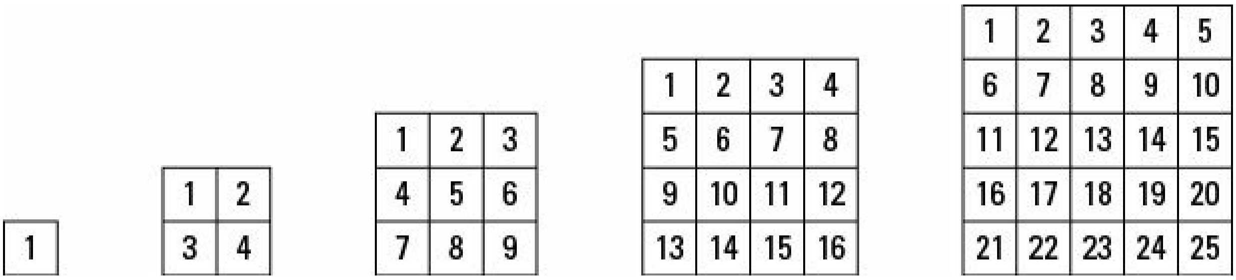


Figura 1-1: Números quadrados Eis! Os números quadrados

1 4 9 16 25 36 49 64...

Você obtém um número quadrado multiplicando um número por ele próprio, portanto conhecer os números quadrados é uma outra maneira conveniente para lembrar da parte da tabuada. Embora você lembre, provavelmente sem ajuda, que 2 x 2 = 4, você pode ter um conhecimento superficial nos números superiores tais como 7 x 7 = 49. Ao saber que os números quadrados oferecem-lhe uma outra maneira para registrar aquela tabuada para sempre na sua mente, como eu mostro para você no Capítulo 3.

Os números quadrados são, também, um primeiro passo ótimo na maneira de compreender os expoentes que apresentarei depois, neste capítulo, e explicarei com mais detalhes no Capítulo 4.

Escrevendo números compostos

Alguns números podem ser colocados em modelos retangulares. Os matemáticos talvez chamassem estes números de "números retangulares", mas, em vez disso, escolheram o termo números compostos. Por exemplo, 12 é um número composto porque você pode colocar 12 objetos em retângulos de duas formas diferentes, como mostrado na Figura 1-2.

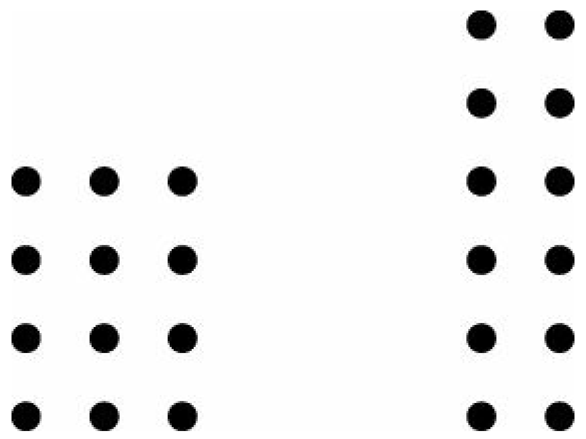


Figura 1-2: O número 12 ordenado em dois modelos retangulares.

Com os números quadrados, ao arrumar os números em modelos visuais como estes, informa a você algo sobre como funciona a multiplicação. Neste caso, ao somar os lados dos dois retângulos, você descobre o seguinte: 3 x 4 = 12

2 x 6 = 12

Do mesmo modo, os outros números, tais como 8 e 15 são arrumados também em retângulos, como mostrado na Figura 1-3.

Figura 1-3: Números compostos tais como 8 e 15 podem formar retângulos.

Como você pode ver, estes dois números são muito bem colocados em boxes com, pelo menos, duas fileiras e duas colunas. E estes modelos visuais mostram o seguinte: 2 x 4 = 8

3 x 5 = 15

A palavra composto significa que estes números são compostos de números menores. Por exemplo, o número 15 é composto de 3 e 5 – isto é, quando você multiplicar estes dois números menores, irá obter 15. Aqui estão todos os números compostos entre 1 e 16:

4 6 8 9 10 12 14 15 16

Perceba que todos os números quadrados (ver "Obtendo o quadrado com números quadrados") também somam como os números compostos, porque você pode arrumá-los em boxes com, pelo menos, duas fileiras e duas colunas. Além disso, muitos outros números não quadrados são, também, números compostos.

Tirando da caixa os números primos

Alguns números são teimosos. Como algumas pessoas que você pode conhecer, estes números – chamados números primos – resistem para ser colocados em qualquer tipo de box. Observe como o número 13 é representado na Figura 1-4, por exemplo.

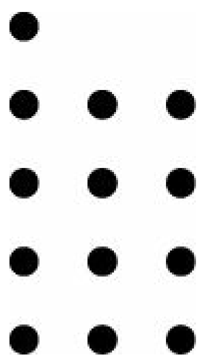


Figura 1-4: O desafortunado 13, um número primoexemplo de um número que recusa caber em um box.

Você pode tentar, mas não conseguirá fazer um retângulo com 13 objetos. (Esta pode ser razão pela qual o número 13 tem a má fama de dar azar.) Aqui estão os números primos inferiores a 20:

2 3 5 7 11 13 17 19

Como você pode ver, a lista dos números primos preenche as lacunas deixadas pelos números compostos (ver a seção anterior). Portanto, todo número contável é primo ou composto. A única exceção é o número 1 que nem é primo, nem composto. No Capítulo 8, ofereço a você muita informação sobre os números primos e mostro como decompor um número – isto é, desfazer um número composto em seus fatores primos.

Multiplicação rápida com os expoentes

Aqui está uma questão antiga que causa ainda surpresas imagine você trabalhando em um emprego que lhe paga 1 centavo de dólar no primeiro dia, 2 centavos no segundo dia, 4 centavos no terceiro dia e assim por diante, dobrando o valor todo dia assim:

2 4 8 16 32 64 128 256 512...

Como você pode ver, nos primeiros dez dias de trabalho, você teria ganho um pouco mais de \$ 10 (na verdade, \$ 10,23 – mas quem está somando?). Quanto você ganharia em 30 dias de trabalho? Sua resposta pode ser: "Eu não pegaria um trabalho ruim como aquele em primeiro lugar". À primeira vista, isso parece ser uma boa resposta, mas aqui está uma vista rápida nos ganhos dos segundos dez dias:

...1,024 2,048 4,096 8,192 16,384 32,768 65,536

131,072 262,144 524,288....

No final dos segundos 10 dias, o total de seus ganhos seria mais de $ 10.000. E, no final da terceira semana, seus ganhos alcançariam algo em torno de $ 10.000.000! Como isso acontece? Através da mágica dos expoentes (chamados também de potências). Todo novo número na sequência é obtido ao multiplicar o número anterior por 2: $2^1 = 2 = 2$

$2^2 = 2 \times 2 = 4$

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Como você pode ver, a anotação 2^4 significa *multiplicar 2 por ele mesmo 4 vezes*.

Você pode usar expoentes além de 2. Aqui está uma outra sequência com você pode se acostumar:

10 100 1.000 10.000 100.000 1.000.000....

Nesta sequência, todo número é 10 vezes superior ao número anterior.

Você pode gerar também estes números usando os expoentes: $10^1 = 10 = 10$

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$

Esta sequência é importante para definir o valor posicional, a base do sistema do número decimal que discuto no Capítulo 2. Ela aparece também quando discuto os decimais no Capítulo 11 e a notação científica no Capítulo 15. Você descobre mais sobre os expoentes no Capítulo 5.

Observando a Reta Numerada

Como as crianças crescem somando com seus dedos (e os usam apenas ao tentar lembrar dos nomes de todos os sete anões), os professores muitas vezes substituem uma figura dos primeiros dez números em ordem, como esta mostrada na Figura 1-5.

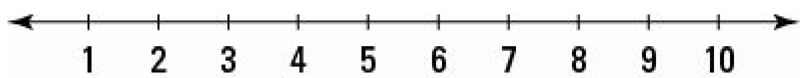


Figura 1-5: Reta numerada básica Esta maneira de organizar os números é chamada de reta numerada. As pessoas muitas vezes veem sua reta numerada – feita, em geral, de papel muito colorido – colada sobre o quadro negro da escola. A reta numerada básica fornece uma imagem visual dos números contáveis (chamados também de números naturais), os números superiores a 0. Você pode usar isso para mostrar como os números são maiores em uma direção e menores na outra.

Nesta seção, mostro a você como usar a reta numerada para entender poucas ideias básicas, mas importantes sobre os números.

Adição e subtração na reta numerada

Você pode usar a reta numerada para demonstrar uma simples adição ou subtração. Estes primeiros passos na matemática tornam-se muito mais concretos com uma ajuda no visual. Aqui está a principal coisa a ser lembrada: ✓Conforme você vai à direita, os números sobem, o que é adição (+) ✓Conforme você vai à esquerda, os números descem, o que é subtração (–) Por exemplo, 2 + 3 significa que você começa no 2 e pula 3 espaços para obter 5, como ilustrado na Figura 1-6.

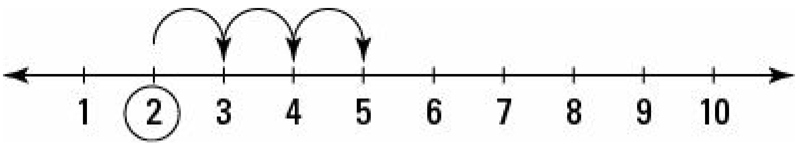


Figura 1-6: Movendo através da reta numerada da esquerda à direita.

Como outro exemplo, 6 – 4 significa começar no 6 e descer 4 espaços para obter 2. Isto é 6 – 4 = 2. Veja a Figura 1-7.

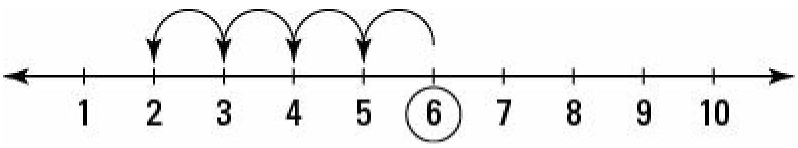


Figura 1-7: Movendo através da reta numerada da direita à esquerda.

Você pode usar estas regras simples de pular e descer com repetição para resolver uma série mais longa de números somados e subtraídos. Por exemplo, 3 + 1 – 2 + 4 – 3 – 2 significa 3, pular 1, descer 2, pular 4, descer 3 e descer 2. Neste caso, a reta numerada-lhe mostraria que 3 + 1 – 2 + 4 – 3 – 2 = 1.

Discuto a adição e a subtração com maiores detalhes, no Capítulo 3.

Obtendo um controle sobre nada ou zero

Uma adição importante para a reta numerada é o número 0, que significa “nada”, zilch. Para um pouco e considere o conceito bizarro de “nada”. Por definição – como mais de um filósofo notou – “nada” não existe! Ainda que rotineiramente nós o rotulemos com o número 0, como mostrado na Figura 1-8.

Na verdade, os matemáticos têm uma descrição mais precisa sobre o nada do que o zero. É chamado o conjunto vazio, que é um tipo de versão matemática de uma caixa contendo nada. Apresento a você alguma teoria do conjunto básico, no Capítulo 20.

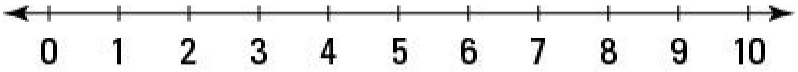


Figura 1-8: A reta numerada começando no 0 e continuando com 1, 2, 3, ...10.

Nada com certeza é uma grande viagem para oferecer às crianças, mas elas não parecem obedecer. Elas entendem rapidamente que tendo três caminhões brinquedos e uma pessoa retira todos os três, sobra zero caminhão. Isto é 3 – 3 = 0. Ou colocando este na reta numerada, 3 – 3 significa começar no 3 e descer 3, como mostrado na Figura 1-9.

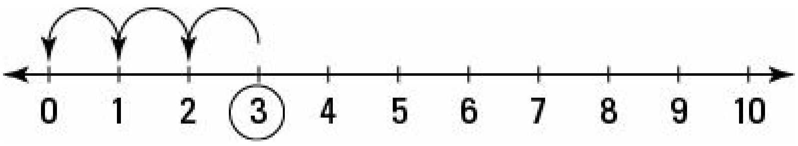


Figura 1-9: Começando no 3 e rebaixando para três.

No capítulo 2, mostro a você a importância de 0 como um marcador nos números e discuto como os zeros à esquerda podem ser anexados a um número sem mudar seu valor.

Infinito: Imaginando uma história contínua As setas das extremidades da reta numerada apontam para a frente, para um lugar chamado infinito, que não é, de fato, um lugar, apenas a ideia permanente, pois os números duram para sempre. Mas quanto a um milhão, bilhão, trilhão, quadrilhão – os números ficam superiores a esse? A resposta é sim, porque para qualquer número você pode somar 1 nele. O símbolo estranho ∞ representa o infinito. Lembre-se, embora ∞ não seja, de fato, um número, mas a ideia de que os números duram para sempre. Porque ∞ não é um número, tecnicamente você não pode somar o número 1 nele, mais que você pode somar o número a uma xícara de café ou a sua Tia Louise. Mas embora você pudesse, ∞ + 1 seria igual a ∞.

Levando um número negativo: Números negativos

Quando as pessoas descobrem a subtração primeiro, elas ouvem sempre que você não pode retirar mais do que você tem. Por exemplo, se você tiver quatro lápis, você pode retirar um, dois, três ou até os quatro lápis, mas não pode retirar mais do que isso.

Não é longo, embora, antes de você descobrir o que qualquer titular de cartão de crédito conhece muito bem: de fato, você pode retirar mais do que você tem – o resultado é um número negativo. Por exemplo, se você tiver $ 4,00 e deve ao seu amigo $ 7,00, você tem uma dívida de $ 3,00. Isto é: 4 – 7 = – 3. O sinal de menos na frente de 3 significa que o número de dólares que você tem é três vezes inferior a 0. A figura 1-10 mostra como você coloca os números inteiros negativos na reta numerada.

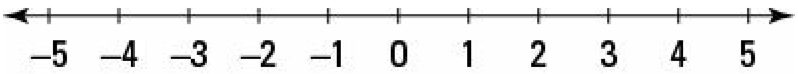


Figura 1-10: Números inteiros negativos na reta numerada.

A adição e a subtração na reta numerada funcionam praticamente da mesma meneira ou forma com os números negativos como nos números positivos. Por exemplo, a Figura 1-11 mostra como subtrair 4 – 7 na reta numerada.

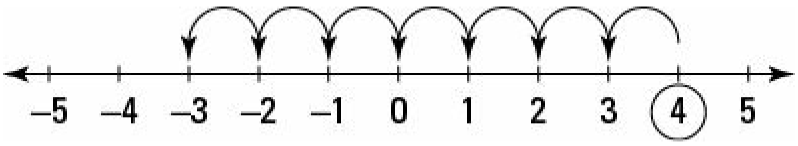


Figura 1-11: Subtração de 4 – 7 na reta numerada Você descobre tudo sobre o funcionamento dos números negativos no Capítulo 4.

DICA

Colocando 0 e os números contáveis negativos na reta numerada expande o conjunto dos números contáveis para o conjunto dos números inteiros. Discuto os números inteiros com mais detalhes depois desse capítulo.

Multiplicando as possibilidades

Imagine que você começa no 0 e circula os números alternadamente, na reta numérica como mostrado na Figura 1-12. Como você pode ver, todos os números pares agora estão circulados. Em outras palavras, você desenhou um círculo sobre todos os múltiplos de dois. (você pode descobrir mais sobre os múltiplos, no Capítulo 8.) Agora você pode usar esta reta numerada para multiplicar qualquer número por dois. Por exemplo, imagine que você queira multiplicar 5 x 2. Começa apenas no 0 e pula 5 espaços desenhados em círculo à direita.

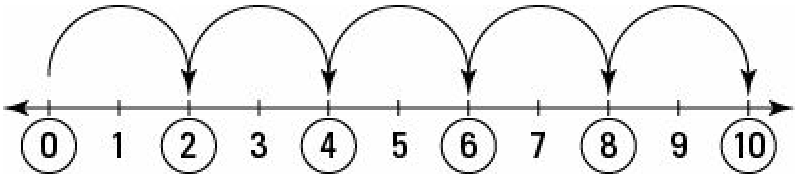


Figura 1-12: Multiplicando 5 x 2 usando a reta numerada.

Esta reta numerada mostra a você que 5 x 2 = 10

Do mesmo modo, para multiplicar –3 x 2, começa no 0 e pula 3 espaços desenhados em círculo à esquerda (isto é, na direção negativa). A Figura 1-13 mostra a você que –3 x 2 = –6. Além do mais, agora você pode ver por que ao multiplicar um número negativo por um número positivo lhe mostra sempre um resultado negativo. (Trato da multiplicação dos números negativos no Capítulo 4.)

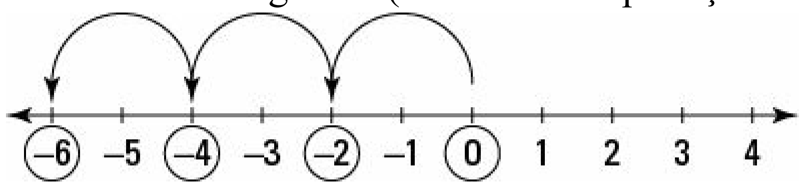


Figura 1-13: –3 x 2 = –6 como representado na reta numerada Multiplicando na reta numerada funciona não importa o número que você inclui. Por exemplo, na Figura 1-14 eu incluo 5.

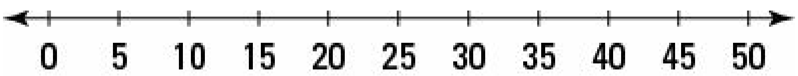


Figura 1-14: Reta numerada incluindo 5.

Neste momento, os únicos números que marquei são os múltiplos de 5, portanto posso usar este reta numerada para multiplicar qualquer número por 5. Por exemplo, a Figura 1-15 mostra como multiplicar 2 x 5.

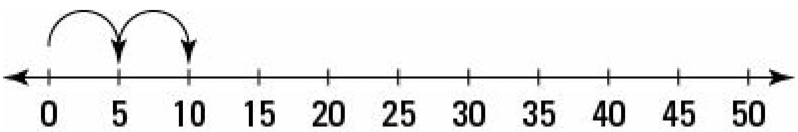


Figura 1-15: Multiplicando 2 x 5 com a reta numerada.

Portanto, 2 x 5 = 10 é o mesmo resultado que multiplicar 5 x 2. Este resultado é um exemplo da propriedade comutativa da multiplicação – você pode inverter a ordem de qualquer problema de multiplicação e obter ainda o mesmo resultado (discuto a propriedade comutativa no Capítulo 4).

Divisão das coisas

Você pode usar também a reta numerada para dividir. Por exemplo, imagine que você queira dividir 6 por um outro número. Primeiro, desenhe uma reta numerada que começa no 0 e termina no 6, como na Figura 1-16.

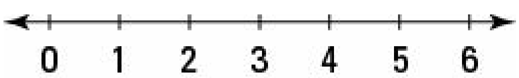


Figura 1-16: Reta numerada de 0 a 6.

Agora, para achar a resposta para 6 ÷ 2, apenas divida esta reta numerada em duas partes iguais, como mostrado na Figura 1-17. Esta separação (ou divisão) ocorre no 3, mostrando-lhe que 6 ÷ 2 = 3.

Figura 1-17: Obtendo a resposta 6 ÷ 2 ao dividir a reta numerada.

Do mesmo modo, para dividir 6 ÷ 3, divida a mesma reta numerada em três partes iguais, como na Figura 1-18. Neste momento, você tem duas divisões, portanto use a mais próxima de 0. Esta reta numerada mostra a você que 6 ÷ 3 = 2.

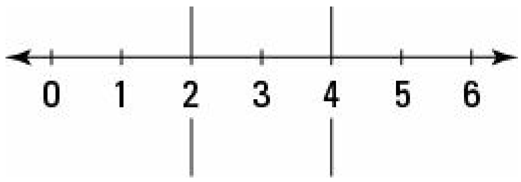


Figura 1-18: Dividindo 6 ÷ 3 com a reta numerada.

Mas imagine que você queira usar a reta numerada para dividir um número menor por um número maior. Por exemplo, talvez você queira conhecer a resposta para 3 + 4. Seguindo o método eu mostro a você antes, primeiro desenhe uma reta numerada de 0 a 3.Depois, divida em quatro partes iguais. Infelizmente, nenhuma destas divisões parou em um número. Isso não é um erro. Você deve somar apenas alguns números na reta numerada, como você pode ver na Figura 1-19.

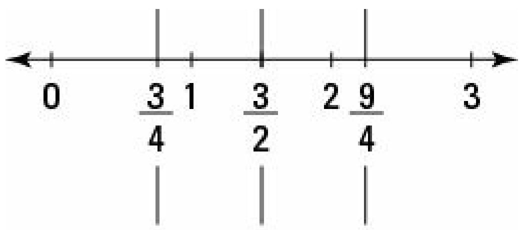


Figura 1-19: Frações na reta numerada.

Bem-vindo ao mundo das frações. Com a reta numerada rotulada corretamente, você pode ver que a divisão mais perto de 0 é ¾. Esta imagem informa-lhe que 3 ÷ 4 = ¾.

A semelhança da expressão 3 ÷ 4 com a fração ¾ não é por acaso. A divisão e as frações são identificadas de perto. Ao dividir, você corta as coisas em partes iguais e, muitas vezes, as frações são o resultado deste processo (explico a conexão entre a divisão e as frações com mais detalhes, no Capítulo 9 e 10.)

Preenchendo espaços: Frações

As frações ajudam-lhe a preencher muitos espaços na reta numerada que diminuem entre os números contáveis. Por exemplo, a Figura 1-20 mostra uma aproximação de uma reta numerada de 0 a 1.

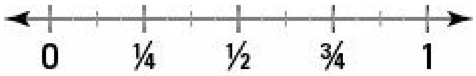


Figura 1-20: Reta numerada representando algumas fraçõesde 0 a 1.

Esta reta numerada pode lhe lembrar uma régua ou uma fita métrica, com muitas frações pequenas preenchidas. E, de fato, as réguas e as fitas métricas são retas numeradas móveis que permitem aos carpinteiros, engenheiros e “faz tudo” medirem o comprimento dos objetos com precisão.

A adição das frações na reta numerada expande o conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais. Discuto os números racionais com maiores detalhes, no Capítulo 25.

De fato, não importa o quanto as coisas são pequenas no mundo real, você pode achar sempre uma fração pequena para aproximá-la, conforme você precisar. Entre qualquer uma das frações na reta numerada, você pode achar sempre uma outra fração. Os matemáticos chamam este traço de densidade das frações na reta numerada real, e este tipo de densidade é um assunto em uma área muito avançada da matemática chamada análise real.

Quatro Conjuntos de Números Importantes

Na seção anterior, você vê como a reta numerada cresce nas duas direções (negativa e positiva) e preenche muitos números. Nesta seção, eu forneço uma viagem rápida dos números que cabem juntos como um conjunto de sistemas encaixados, um dentro do outro.

Quando converso sobre um conjunto de números, de fato eu estou conversando sobre um grupo de números. Você pode usar a reta numerada para lidar com os quatro conjuntos de números importantes: ✓Números contáveis (chamados também de números naturais): o conjunto de números começando com 1, 2, 3, 4...e em curso infinitamente.

✓ Números inteiros: o conjunto de números contáveis, zero e números contáveis negativos.

✓ Números racionais: o conjunto de números inteiros e de frações ✓Números reais: o conjunto de números racionais e irracionais.

Os conjuntos dos números contáveis, números inteiros, racionais e números reais são encaixados, um dentro do outro. Este conjunto encaixado dentro do outro é semelhante à maneira como uma cidade (por exemplo Boston) fica dentro de um estado (Massachusetts), que fica dentro de um país (os Estados Unidos), que fica dentro de um continente (América do Norte). O conjunto dos números contáveis fica dentro do conjunto dos números racionais, que fica dentro do conjunto dos números reais.

Contando com os números contáveis

O conjunto dos números contáveis é o conjunto dos números que você soma primeiro, começando com 1. Pelo fato de parecerem surgir naturalmente a partir da observação ao mundo, eles são chamados também de números naturais:

1 2 3 4 5 6 7 8 9...

Os números contáveis são infinitos, o que significa que eles duram para sempre.

Ao somar dois números contáveis, a resposta é sempre um outro número contável. Do mesmo modo, ao multiplicar dois números contáveis, a resposta é sempre um número contável. Uma outra maneira de dizer isso é que o conjunto dos números contáveis é fechado em relação à adição e à multiplicação.

Apresentando os números inteiros

O conjunto dos números inteiros surge quando você tenta subtrair um número maior a partir de um número menor. Por exemplo, 4 – 6 = –2. O conjunto dos números inteiros inclui o seguinte: ✓Os números contáveis ✓Zero ✓Os números contáveis negativos Aqui está uma lista parcial dos números inteiros:

... –4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 ....

Como os números contáveis, os números inteiros são fechados em relação à adição e à multiplicação. Do mesmo modo, ao subtrair um número inteiro a partir de um outro, a resposta é sempre um número inteiro. Isto é, os números inteiros são também fechados em relação à subtração.

Ficando racional

Aqui está o conjunto de números racionais: ✓Números inteiros

- Números contáveis
- Zero
- Números contáveis negativos

✓ Frações Como os números inteiros, os números racionais são fechados em relação à adição, à subtração e à multiplicação. Além disso, ao dividir um número racional por um outro, a resposta é sempre um número racional. Uma outra forma para dizer isso é que os números racionais são fechados em relação à divisão.

Tornando-se real

Embora você preenchesse todos os números racionais, você teria ainda pontos não rotulados sobrando na reta numerada. Estes pontos são números irracionais.

Um número irracional é um número que não é nem um número inteiro nem uma fração. De fato, um número irracional pode ser aproximado apenas como um decimal não repetitivo. Em outras palavras, não importa o número de casas decimais que você escreve, você pode escrever sempre mais; além disso, os dígitos neste decimal nunca se tornam repetitivos ou são incluídos em qualquer padrão (para obter maiores informações sobre os decimais repetitivos, consulte o Capítulo 11.) O número irracional mais famoso é π (você descobre mais sobre π quando discuto a geometria dos círculos, no Capítulo 17.): $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510...$

Juntos, os números racionais e irracionais constituem os números racionais que compreendem todo ponto na reta numerada. Neste livro, não gasto muito tempo nos números irracionais, mas lembre-se que eles estão ali para a referência no futuro.

Capítulo 2

Tudo está nos Dedos – Números e Dígitos

Neste Capítulo ► Entendendo como o valor posicional torna dígitos em números ► Distinguindo se os zeros são marcadores importantes ou zeros à esquerda sem sentido ► Lendo e escrevendo números longos ► Entendendo como arredondar números e avaliar valores.

Ao somar, o número dez parece ser um fim natural – um número preciso, redondo. O fato de que nossos dez dedos combinam com os números parece ser um feliz acaso. Mas evidentemente, não é um acaso de modo algum. Os dedos eram a primeira calculadora que os seres humanos possuíam. Nosso sistema numérico – números Hindu-Arábicos – é baseado no número dez porque os seres humanos têm dez dedos, em vez de oito ou doze. De fato, a palavra dígito mesmo tem dois significados: símbolo numérico e dedos.

Neste capítulo, mostro a você como o valor posicional torna dígitos em números. Mostro a você também quando 0 é um marcador importante em um número e por que zeros à esquerda não mudam o valor de um número. E mostro a você como ler e escrever números longos. Depois disso, discuto duas habilidades importantes: números arredondados e valores avaliados. Também menciono quando uma estimativa pode resultar em respostas equivocadas e mostro como evitar estimativas erradas, tornando-as melhores.

Dizendo a diferença entre números e dígitos Algumas vezes, as pessoas confundem números e dígitos. Para o registro, aqui está a diferença: ✓Um dígito é um único símbolo numérico, de 0 a 9.

✓ Um número é uma série de um ou mais dígitos.

Por exemplo, 7 é ambos, um dígito e um número. De fato, é um número de um dígito. Entretanto, 15 é uma série de dois dígitos, portanto é um número – um número de dois dígitos. E 426 é um número de três dígitos. Você tem a ideia. Em um sentido, um dígito é como uma letra de um alfabeto. Tem 26 letras. A a Z são limitadas (quanto você pode fazer com uma única letra tal como K ou W?) Apenas quando você começar a usar as séries das letras como blocos de material utilizados no trabalho de construção para soletrar palavras faz a potência das letras tornar-se aparente. Do mesmo modo, os dez dígitos, de 0 a 9, têm uma utilidade limitada até que você comece a construir as séries dos dígitos – isto é, números.

Conhecendo o Lugar do seu Valor

O sistema numérico com o qual você está mais acostumado – números Hindu-Arábicos – tem dez dígitos comuns.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ainda com apenas dez dígitos, você pode expressar números tão altos quanto você quer. Nesta seção, mostro a você como isso acontece.

Somando de dez em diante

Os dez dígitos do nosso sistema numérico permite-lhe somar de 0 a 9. Todos os números mais altos são produzidos usando o valor posicional. O valor posicional designa um valor maior ou menor dependendo de onde ele aparece em um número. Cada posição em um número é dez vezes maior do que a posição para sua direita imediata.

Para entender como um número inteiro tem seu valor, imagine que você escreva o número 45.019 claramente para a direita, na Tabela 2-1, um dígito por célula, e soma os números que você tem.

Tabela 2-1 – 45.019 Exibido na Tabela do Valor Posicional

Milhões			Milhares			Unidades		
Cem Milhões	Dez Milhões	Milhões	Cem Mil	Dez Mil	Mil	Cem	Dez	Um
				4	5	0	1	9

Você tem 40 dezenas de milhar, 5 unidades de milhar, nenhuma centena, 1 dezena e 9 unidades. A tabela mostra a você que o número é desfeito como segue: 45.019 = 40.000 + 5.000 + 0 + 10 + 9

Neste exemplo, perceba que a presença do dígito 0 na casa das centenas significa que zero é somado ao número.

Informando os marcadores a partir dos zeros seguintes

Embora o dígito 0 some nenhum valor ao número, ele age como um marcador para manter os outros dígitos nas suas próprias posições. Por exemplo, o número 5.001.000 pode ser quebrado em 5.000.000 + 1.000. Imagine que embora você decida deixar todos os zeros fora da tabela. A tabela 2-2 mostra o que você teria.

Tabela 2-2 – 5.001.000 Exibido Incorretamente sem os Zeros na Posição

Milhões			***Milhares***			***Unidades***		
Cem Milhões	Dez Milhões	Milhões	Cem Mil	Dez Mil	Mil	Cem	Dez	Um
							5	1

A tabela lhe diz que 5.001.000 = 50 + 1. Claramente, esta resposta está errada!

Como regra, quando um 0 aparece à direita de, pelo menos, um dígito além de 0, é um marcador. Os zeros na posição são importantes – os incluem sempre quando você escreve um número. Entretanto, quando um 0 aparece à esquerda de todo dígito, além de 0, é um zero à esquerda. Os zeros à esquerda não funcionam como propósito em um número portanto derrubando-los é comum. Por exemplo, coloque o número 003.040.070 na tabela (veja Tabela 2-3).

Tabela 2-3 – 3.040.070 Exibido com Dois Zeros à Esquerda

Milhões			***Milhares***			***Unidades***		
Cem Milhões	Dez Milhões	Milhões	Cem Mil	Dez Mil	Mil	Cem	Dez	Um
0	0	3	0	4	0	0	7	0

Os primeiros dois 0s no número são zeros à esquerda, porque eles aparecem à esquerda do 3. Você pode deixar cair estes 0s do número, deixando você com 3.040.070. Os 0s remanescentes estão todos à direita do 3, portanto eles são marcadores – tenha certeza de escrevê-los.

Lendo números longos

Ao escrever um número longo, você usa pontos para separar os períodos. Os períodos são, simplesmente, grupos de três números. Eles ajudam a facilitar a leitura dos números longos. Por exemplo, aqui está quanto longo é um número como você nunca irá ver.

234.845.021.349.23.467.304

A tabela 2-4 mostra uma versão maior da tabela do valor posicional.

Tabela 2-4 – Uma tabela do Valor Posicional Separado em Períodos

Quintilhões	Quadrilhões	Trilhões	Bilhões	Milhões	Milhares	Unidades
234	845	021	349	230	467	304

Esta versão da tabela ajuda-lhe a ler o número. Comece claramente à esquerda e leia “Duzentos e trinta e quatro quintilhões, oitocentos e quarenta e cinco quadrilhões, vinte e um trilhões, trezentos e quarenta e nove bilhões, duzentos e trinta milhões, quatrocentos e sessenta sete mil, trezentos e quatro.”

LEMBRE-SE Ao ler e escrever os números inteiros, não diga a conjunção e. Em matemática, a conjunção e significa que você tem um vírgula decimal. Razão pela qual, ao escrever um cheque, você economiza a palavra e para o número de centenas, que é expresso como um decimal ou uma fração (discuto os decimais no Capítulo 11.)

Perto o Suficiente para Rock´n´ Roll: Arredondando e Calculando

Conforme os números ficam mais longos, os cálculos tornam-se tediosos e, provavelmente, você deve cometer mais um erro ou apenas desistir. Ao trabalhar com números longos, simplificando seu trabalho ao arredondar os números e calculando os valores é sempre algo útil.Em outros momentos, você pode querer arredondar uma resposta depois de fazer seus cálculos.

Ao arredondar um número, você muda alguns de seus dígitos para posicionar os zeros. Os números redondos permitem-lhe mudar um número difícil para um número fácil. E, ao calcular um valor, você trabalha com números redondos para achar uma resposta aproximada para um problema. Nesta seção, você construiu duas habilidades. Mostro a você também quando, provavelmente, você deve fazer um cálculo ruim e como evitá-lo.

Números redondos

Os números redondos facilitam o trabalho com os números longos. Nesta seção, mostro a você como arredondar os números mais próximos das dezenas, centenas, milhares e além.

Números redondos mais próximos de dezenas

O tipo de arredondamento mais simples que você pode fazer é com os números de dois dígitos. Ao arredondar um número de dois dígitos mais próximos das dezenas, simplesmente você o eleva ou baixa para o número mais próximo que termina em 0. Por exemplo,

39 → 40   51 → 50   73 → 70

Embora os números terminando em 5 estejam no meio, sempre os arredonde para o próximo número mais alto que termina em 0:

15 → 20   35 → 40   85 → 90

Os números superiores a 94 são arredondados para 100:

99 → 100   95 → 100   94 → 90

Depois de você saber como arredondar um número de dois dígitos, você pode arredondar qualquer número. Por exemplo, para arredondar a maioria dos números longos mais próximos das dezenas, concentre-se nestes números e nos dígitos das dezenas:

734 → 730   1.488 → 1.490   12.345 → 12.350

Ocasionalmente, uma pequena mudança nestes números e nos dígitos de dez afeta os outros dígitos (não é muito igual quando um marcador de quilometragem no seu carro envolve um punhado de 9 sobre 0s.) Por exemplo:

899 → 900   1.097 → 1.100   9.995 → 10.000

Números redondos mais próximos de centenas e além

Para arredondar números mais próximos das centenas ou milhares ou além, concentre-se apenas em dois dígitos: o dígito no lugar que você está arredondando e o dígito de sua direita imediata. Mude todos os outros dígitos para a direita destes dois dígitos para 0s. Por exemplo, imagine que você queira arredondar 642 mais próximo das centenas. Concentre-se no dígito das centenas (6) e no dígito de sua direita imediata (4): $\underline{64}2$

Sublinhei estes dois dígitos. Agora arredonde estes dois dígitos como se você estivesse arredondando para a próxima dezena e mude o dígito para a direita deles para um 0.

$\underline{64}2 \rightarrow \underline{60}0$

Aqui estão alguns exemplos de números redondos mais próximos das centenas:

$7.\underline{89}1 \rightarrow 7.\underline{90}0$ $15.\underline{75}3 \rightarrow 15.\underline{80}0$ $99.\underline{96}1 \rightarrow 100.\underline{00}0$

Ao arredondar os números mais próximos de centenas, sublinhe os dígitos dos milhares e o dígito de sua imediata direita. Arredonde o número concentrando-se apenas nos dois dígitos sublinhados e ao fazer isso, mude todos os dígitos para a direita destes para 0s.

4.984 → 5.000 78.521 → 7.900 1.099.304 → 1.099.000

Até ao arredondar os números mais próximos de milhões, as mesmas regras se aplicam-se:

1.234.567 → 1.000.000 78.883.958 → 79.000.000

Calculando o valor para facilitar os problemas

Depois de saber como arredondar os números, você pode usar esta habilidade para calcular os valores. Com o cálculo, você poupa tempo, permitindo que você evite cálculos complicados e ter ainda uma resposta aproximada para um problema.

Ao obter uma resposta aproximada, você não usa um sinal de igualdade; ao invés de você usar o símbolo ondulado, o que significa aproximadamente igual a ≈.

Imagine que você queira somar estes números: 722 + 506 + 383 + 1.279 + 91 + 811. Este cálculo é tedioso, e você pode cometer um erro. Mas você pode tornar fácil a adição primeiro arredondando todos os números mais próximos de centenas e somando depois: ≈ 700 + 500 + 400 + 1300 + 100 + 800 = 3.800

A resposta aproximada é 3.800. Esta resposta não é muito longe da resposta exata, que é 3.792.

Do mesmo modo, imagine que você queira multiplicar 879 x 618. De novo, este cálculo não parece ser muito divertido. Ao invéz disso, você pode arredondar estes números mais próximos de centenas: ≈ 900 x 600 = 540.000

Neste momento, a resposta aproximada é 540.000 e a resposta exata é 543.222. De novo, não é um cálculo ruim.

O cálculo é útil mas ele pode lidar também com resultados que não são muito perto da resposta correta. Provavelmente, você deve chegar a um cálculo ruim quando você ✓Arredondar os números que estão perto do meio da extensão ✓Arredondar muitos números na mesma direção (para cima ou para baixo) ✓Multiplicar ou dividir os números redondos Por exemplo, imagine que você queira multiplicar 349 x 243. Você começa a arredondar ambos estes números: ≈ 300 x 200 = 60.000

Seu cálculo é 60.000 mas a resposta atual é 84.807 – não é uma aproximação muito boa. O que aconteceu? Primeiro, perceba que 349 é muito perto do meio da extensão entre 200 e 300. Portanto, quando você arredondou estes números, você mudou muito estes valores. Segundo, você arredondou os dois números para valores menores. Razão pela qual o cálculo terminou muito inferior à resposta real. Terceiro, você multiplicou. Em geral, a multiplicação e a divisão lançam mais cálculos do que a adição e a subtração fazem.

Capítulo 3

As Quatro Grandes: Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão

Neste Capítulo* ► *Revisando a adição* ► *Entendendo a subtração* ► *Olhando a multiplicação como uma maneira rápida para fazer uma adição repetida* ► *Esclarecendo a divisão

Quando a maioria das pessoas pensa em matemática, a primeira coisa que vem na cabeça são quatro (ou não apenas pequenas) palavras: adição, subtração, multiplicação e divisão. Chamo estas operações as Quatro Grande por todo o livro.

Neste capítulo, apresento a você (apresento de novo a você) estas pequenas joias. Embora eu suponha que você já se acostumou com as Quatro Grande Operações, este capítulo faz uma revisão destas operações, tomando o que você pode ter perdido, o que você precisa para ter sucesso como você se move em matemática para a frente e para cima.

Adição das coisas

A adição é a primeira operação que você descobre e ela é quase a favorita de todo mundo. Ela é simples, amigável e direta. Não importa o quanto você se preocupa com a matemática, provavelmente você nunca perdeu um minuto de permanecer a adição. A adição é sobre juntar coisas, o que é uma coisa positiva. Por exemplo, imagine você e eu ficando na fila para comprar ingressos para um filme. Tenho $ 15,00 e você tem apenas $ 5,00. Eu poderia dominar isso e fazer com que você se sinta inútil, porque posso ir ao cinema e você não. Ou, ao invés disso, você e eu podemos juntar forças, somando meus $ 15,00 e seus $ 5,00 para conseguir $ 20,00. Agora, não apenas podemos ver ambos o filme, mas podemos até comprar pipoca também.

A adição usa sempre um sinal – o sinal de mais (+): Sua equação pode ler 2 + 3 = 5 ou 12 + 2 = 14 ou 27 + 44 = 71, mas o sinal de mais significa sempre a mesma coisa.

Quando você soma dois números juntos, aqueles dois números são chamados de parcelas e o resultado é chamado de soma. Portanto, no primeiro exemplo, os adendos são 2 e a soma é 5.

Na linha: Adição de números maiores nas colunas

Quando você quiser somar números maiores, empilhe-os no topo de uns aos outros para que os dígitos das unidades alinhem-se em uma coluna, os dígitos das dezenas alinham-se em outra coluna e assim por diante (o Capítulo 1 trata dos dígitos e do valor posicional) depois soma coluna por coluna, começando pelas colunas das unidades da direita. Sem surpresa, este método é chamado adição de coluna. Aqui está como você soma 55 + 31 + 12. Primeiro, soma as colunas das unidades: 55

31

<u>+ 12</u>

8

Próximo passo, mova a coluna das dezenas: 55

31

<u>+ 12</u>

98

Este problema mostra para você que 55 + 31 + 12 = 98

Continua: Lidando com respostas de dois dígitos

Algumas vezes, ao somar uma coluna, a soma é um número de dois dígitos. Nesse caso, você precisa escrever os dígitos das unidades daquele número e transferir os dígitos das dezenas para a próxima coluna da esquerda – isto é, escreva este dígito sobre a coluna, portanto você pode somá-lo com o restante dos números naquela coluna. Por exemplo, imagine que você quer somar 376 + 49 + 18. Nas colunas das unidades, 6 + 9 + 8 = 23, portanto escreva o 3 e transfira o 2 no topo da coluna das dezenas: 2

376

49

<u>+ 18</u>

3

Agora continua a somar a coluna das dezenas. Nesta coluna, 2 + 7 + 4 + 1 = 14, portanto escreva o 4 e transfira o 1 no topo da coluna das centenas: 12

376

49

<u>+ 18</u>

43

Continua a somar a coluna das centenas: 12

376

49

+ 18

443

Este problema mostra para você que 376 + 49 + 18 = 443.

Retire o número: Subtração

Geralmente, a subtração é a segunda operação que você descobre e não é mais difícil do que a adição. Existe ainda alguma coisa negativa na subtração – trata de quem tem mais e quem tem menos. Imagine que você e eu estamos correndo na esteira da academia. Estou feliz porque corri 3 milhas, mas depois você começa a se gabar de ter corrido 10 milhas. Você subtrai e me diz que eu deveria estar muito impressionado porque você correu 7 milhas a mais do que as que eu fiz (mas, com uma atitude como essa, não se surpreenda se você voltar do chuveiro ou banho para encontrar seus sapatos de corrida cheios de sabão líquido!).

Como a adição, a subtração tem apenas um sinal: o sinal de menos (–). Você precisa terminar com as equações como, por exemplo, 4 – 1 e 14 – 13 = 1 e 93 – 74 = 19.

Ao subtrair um número de um outro, o resultado é chamado de "a diferença". Este termo faz sentido ao pensar nisso quando você subtrai, descobre a diferença entre um número mais alto e um número mais baixo.

Na subtração, o primeiro número é chamado de subtraendo e o segundo número de minuendo. Mas quase ninguém lembra qual é qual, portanto quando converso sobre a subtração, prefiro dizer o primeiro número e o segundo número.

Uma das primeiras coisas que você ouviu falar provavelmente sobre a subtração é que você não pode tirar mais do que você começa. Naquele caso, o segundo número não pode ser maior do que o primeiro. E, se os dois números forem iguais, o resultado será sempre igual a 0. Por exemplo, 3 – 3 = 0 e 11 – 11 = 0 e 1776 – 1776 = 0. Depois, alguém interrompe a notícia de que você pode tirar mais do que você tem. Ao fazer isso, você precisar coloca um sinal de menos na frente da diferença, para mostrar que você tem um número negativo, um número abaixo de 0: 4 – 5 = –1

10 – 13 = – 3

88 – 99 = –11

Ao subtrair um número maior de um número menor, lembre das palavras trocar e negar. Isto é, trocar a ordem de dois números e fazer a subtração como você faria normalmente, mas, no final, negar o resultado ao ligar um sinal de menos. Por exemplo, para achar 10 – 13, você troca a ordem destes dois números, dando a você 13 – 10, que é igual a 3; depois negar este resultado para ter –3. Razão pela qual 10 – 13 = –3.

O sinal de menos tem uma tarefa dupla, portanto não fique confuso. Ao fixar um sinal de menos entre dois números, significa o primeiro número menos o segundo número. Mas ao fixá-lo na frente de um número, significa que este número é um número negativo.

Veja o Capítulo 1, para ver como os números negativos funcionam na reta numerada. Entro também em mais detalhes nos números negativos e nas Quatro Grande Operações, no Capítulo 4.

Colunas e Pilhas: Subtração de números maiores

Para subtrair os números maiores, empilhe uns no topo dos outros como você faz com a adição (para a subtração, entretanto, não empilhe mais do que dois números – coloque o número maior no topo do número menor debaixo dele). Por exemplo, imagine que você queira subtrair 386 – 54. Para começar, empilhe os dois números e comece a subtrair a coluna das unidades: 6 – 4 = 2: 386

– 54

2

Próximo passo, mova-os para a coluna das dezenas e subtraia 8 – 5 para ter 3: 386

– 54

32

Finalmente, move-os para a coluna das centenas. Neste momento, 3 – 0 = 3: 386

– 54

332

Este problema mostra para você que 386 – 54 = 332.

Voce tem dez sobrando? Tomando emprestado para subtrair

Algumas vezes, o dígito do topo em uma coluna é menor que o dígito da parte inferior naquela coluna. Naquele caso, você precisa tomar emprestado da próxima coluna da esquerda. Tomando emprestado é um processo de dois passos: **1. Subtraia 1 do número do topo na coluna diretamente da esquerda.**

Tire o número que você tomou emprestado, subtraia 1 e escreva a resposta sobre o número que você tirou.

2. Some 10 ao número do topo na coluna com que você estava trabalhando.

Por exemplo, imagine que você queira subtrair 386 – 94. O primeiro passo é subtrair 4 de 6 na coluna das unidades, o que dá a você 2: 386

– 94

2

Ao mover-se para a coluna das dezenas, entretanto, você descobre que precisa subtrair 8 – 9. Porque 8 é menor que 9, você precisa tomar emprestado da coluna das centenas. Primeiro, tire o 3 e substitui-o com um 2, porque 3 – 1 = 2: **2**

386

– 94

2

Próximo passo, coloque um 1 na frente do 8, mudando-o para um 18, porque 8 + 10 = 18: 2

3**18**6

– 94

2

Agora, você pode subtrair na coluna das dezenas: 18 – 9 = 9: 2**18**6

– 94

92

O passo final é simples: 2 – 0 = 2: **2**186

– 94

2 92

Portanto, 386 – 94 = 292.

Em alguns casos, a coluna diretamente da esquerda pode não ter nada para emprestar. Imagine que, por exemplo, você queira subtrair 1002 – 398. Ao começar na colunas das dezenas, você descobre que precisa subtrair 2 – 8. Porque 2 é menor que 8, você precisa tomar emprestado da próxima coluna da esquerda. Mas o dígito na coluna das unidades é 0, portanto você não pode tomar emprestado dali porque o espaço para armazenar é descoberto, portanto para falar: 1.0**02**

– 398

Quando tomar emprestado da próxima coluna não for uma opção, você precisa tomar emprestado da coluna mais próxima não igual a zero da esquerda.

Neste exemplo, a coluna que você precisa tomar emprestada é a coluna de milhares. Primeiro, tire o 1 e substituia-o por 0. Depois, coloque 1 na frente do 0 na coluna das centenas: **0**

1 1002

– 398

Agora, tire o 10 e substituia-o com um 9. Coloque um 1 na frente do 0 na coluna das dezenas: 0 **9**

1 **101**02

– 3 98

Finalmente, tire o 10 na coluna das dezenas e substituia-o com um 9. Depois, coloque um 1 na frente do 2: 0 9 **9**

1 10 **10 1**2

– 3 9 8

Finalmente, você pode começar subtraindo na coluna das unidades: 12 – 8 = 4.

0 9 9

1 10 10 **12**

– 3 9 8

4

Depois subtraia na coluna das dezenas: 9 – 9 = 0: 0 9 **9**

1 10 10 **12**

– 3 9 8

0 4

Depois subtraia na coluna das centenas: 9 – 3 = 9: 0 **9** 9

1 10 10 12

– 3 9 8

6 0 4

Pelo fato de nada ser deixado na coluna das centenas, você não precisa subtrair nada mais. Portanto, 1002 – 398 = 604.

Multiplicação

Geralmente, a multiplicação é descrita como um tipo de taquigrafia para a adição repetida. Por exemplo, 4 x 3 significa somar 4 ele próprio 3 vezes: 4 + 4 + 4 = 12

9 x 6 significa somar 9 ele próprio 6 vezes: 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 54

100 x 2 significa somar 100 ele próprio 2 vezes: 100 + 100 = 200

Embora a multiplicação não seja tão querida e confusa quanto a adição, é um ótimo poupador de tempo. Por exemplo, imagine que você é treinador de um pequeno time da Liga de Baseball e ganhou apenas um jogo contra o time mais forte da liga. Como recompensa, você prometeu comprar três cachorros-quentes para cada um dos nove jogadores do time. Para descobrir quantos cachorros quentes você precisa, você poderia somar 3 juntos 9 vezes, ou você pode poupar 27 cachorros-quentes (mais muita mostarda e muito chucrute).

Ao multiplicar dois números, os dois números que você está multiplicando são chamados de fatores e o resultado é o produto.

Na multiplicação, o primeiro número é chamado também de multiplicando e o segundo número de multiplicador. Mas ninguém quase nunca lembra destas palavras.

Sinais de vezes

Ao ser apresentado primeiro para a multiplicação, você usa o sinal de vezes (x). Entretanto, a álgebra usa muito a letra x, o que parece ser similar ao sinal de vezes, portanto, geralmente, as pessoas escolhem usar outros símbolos da multiplicação para clareza. Como você se move para frente e para cima na sua jornada de matemática, você deve ficar ciente dos acordos que discuto nas seguintes seções.

Registrando o ponto

Na matemática, além da aritmética, o símbolo · substitui x. Por exemplo, 4 · 2 = 8 significa 4 x 2 = 8

6 · 7 = 42 significa 6 x 7 = 42

53 · 11 = 583 significa 53 x 11 = 583

Tudo isso existe para elas use apenas o · símbolo em qualquer lugar que você teria usado o símbolo de vezes padrão (x).

Falando das expressões de parênteses

Na matemática além da aritmética, usar os parênteses sem um outro operador representa a multiplicação. Os parênteses podem incluir o primeiro número, o segundo número ou os dois números. Por exemplo, 3(5) = 15 significa 3 x 5 = 15

(8)7= 56 significa 8 x 7 = 56

(9)(10)= 90 significa 9 x 10 = 90

Entretanto, perceba que ao colocar um outro operador entre um número e um parêntese, aquele operador assume o lugar. Por exemplo, 3 + (5) = 8 significa 3 + 5 = 8

(8) – 7 = 1 significa 8 – 7 = 1

(9) · (10) = 90 significa 9 x 10 = 90

Nota: No terceiro exemplo, realmente você não precisa do ., mas ele não está causando nenhum dano, por sinal.

Memorizando a tabuada

Você pode se considerar desafiado multiplicacionalmente. Isto é, você se considera sendo chamado para lembrar de 9 x 7 uma quantia insignificante menos agradável do que sendo derrubado de um avião enquanto você agarra um pára-quedas adquirido do porta-malas do carro de seu amigo. Se for o caso, então esta seção é para você.

Observando a antiga tabuada

Uma olhadinha na antiga tabuada, a Tabela 3-1 revela o problema. Se você visse o filme Amadeus, poderia lembrar que Mozart foi criticado por escrever uma música que tinha "muitas notas". Bem, na minha humilde opinião, a tabuada tem muitos números.

Tabela 3-1 – A Monstruosa Tabuada Padão

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Não gosto mais da tabuada como você. Observando apenas para ela faz meus olhos embaçarem. Com 100 números para memorizar, não pergunte por que tantas pessoas desistem apenas e carregam uma calculadora.

Apresentando a pequena tabuada

Se a tabuada da Tabela 3-1 fosse menor e um pouco mais manejável, eu gostaria dela muito mais. Portanto, aqui está minha pequena tabuada, na Tabela 3-2.

Tabela 3-2 – A Pequena Tabuada

	3	4	5	6	7	8	9
3	9	12	15	18	21	24	27
4		16	20	24	28	32	36
5			25	30	35	40	45
6				36	42	48	54
7					49	56	63
8						64	72
9							81

Como você pode ver, eu me livrei de um punhado de números. De fato, reduzi a tabuada de 100 números para 28. Eu escureci também 11 dos números que guardei.

É apenas cortando e queimando a sagrada e sábia tabuada? Será que é legal, por sinal? Bem, evidentemente é! Afinal de contas, a tabuada é apenas uma ferramenta, como um martelo. Se um martelo for muito pesado para pegar, então você deve comprar um martelo mais leve. Do mesmo modo, se a tabuada for muito grande para se trabalhar, então você precisa de uma tabuada menor. Além disso, removi apenas os números que você não precisa. Por exemplo, a tabuada condensada não inclui as fileiras e as colunas para 0, 1 ou 2. Aqui está porque: ✓Qualquer número multiplicado por 0 é igual a 0 (as pessoas chamam este traço de a propriedade da multiplicação com zero).

✓ Qualquer número multiplicado por 1 é igual ao próprio número– (é porque os matemáticos chamam 1 de a identidade multiplicativa).

✓ Multiplicando por 2 é razoavelmente fácil; se você puder somar por 2 – 2, 4, 6, 8, 10 e assim por diante – você pode multiplicar por 2.

O restante dos números do qual eu me livrei é redundante (e não apenas redundante, mas também repetido, acessório e desnecessário!) Por exemplo, de qualquer maneira você o divide, 3 x 5 e 5 x 3, ambos são iguais a 15 (você pode trocar a ordem dos fatores porque a multiplicação é comutativa – veja o Capítulo 4, para mais detalhes). Na minha tabuada condensada, simplesmente removi a desordem.

Portanto, o que sobra? Apenas os números que preciso. Estes números incluem uma fileira diagonal cinzenta. A fileira cinzenta é 5 vezes a tabuada, que você pode conhecer provavelmente muito bem (de fato, eles despertam uma memória de infância de correr para achar um lugar escondido em um dia quente de primavera enquanto um de seus amigos inclui uma voz alta: 5, 10,15, 20, ...) Os números na linha diagonal cinzenta são os números quadrados. Como discuto no Capítulo 1, quando você multiplica um número por ele próprio, o resultado é um número quadrado. Provavelmente, você conhece estes números melhor do que você pensa.

Conhecendo a pequena tabuada

Por volta de uma hora, você pode fazer grandes progressos memorizando a tabuada. Para começar, coloque os cartões de exibição que oferece o problema da tabuada na frente e a resposta por trás. Eles podem parecer com a Figura 3-1.

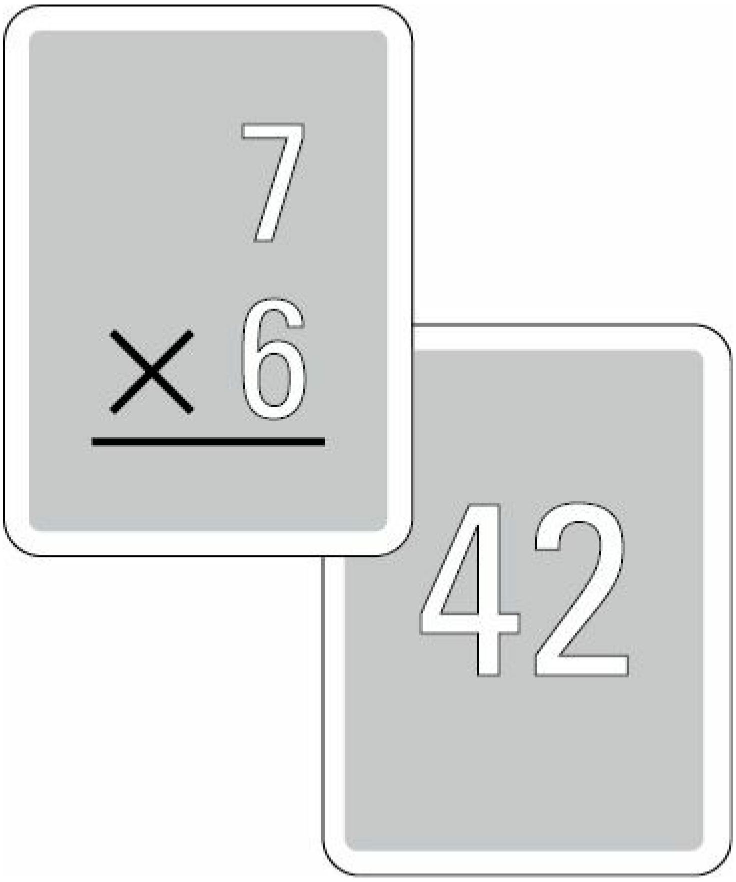


Figura 3-1: Os dois lados de um cartão de exibição, com 7 x 6 na frente e 42 na parte de trás.

Lembre-se que você precisa fazer apenas 28 cartões de exibição – um para todo exemplo na Tabela 3-2. Divida estes 28 em duas pilhas – uma pilha "cinzenta" com 11 cartões e uma pilha "branca" com 17 (você não precisa colorir os cartões cinzentos e brancos; Continue seguindo o tipo de pilha de acordo com as cores na Tabuada.) Então comece: **1. 5 minutos:** Trabalhe com a pilha cinzenta, levando-a a cabo um cartão em um momento. Se você tiver a resposta correta, coloque aquele cartão na parte inferior da pilha. Se você tiver a resposta errada, coloque-o no meio portanto você tem uma outra chance nela rapidamente.

2. 10 minutos: Troque para a pilha branca e trabalhe com ela da mesma maneira.

3. 15 minutos: Repita os Passos 1 e 2.

Agora, faça uma pausa. Realmente – a pausa é importante para descansar sua mente. Volte de novo depois no dia e faça a mesma coisa.

Depois de fazer este exercício, você não deve encontrar, resolvendoo todos os 28 cartões, quase nenhum erro razoavelmente fácil. Neste ponto, sinta-se livre para fazer cartões para o restante das tabuadas padrão – você conhece os cartões com todas as tabuadas do 0, 1, 2 e os problemas redundantes – misture todos os 100 cartões juntos e impressione sua família e seus amigos.

Nas tabuadas de nove: Uma brincadeira astuta

Aqui está uma brincadeira para ajudar-lhe a lembrar as tabuadas de 9. Para multiplicar qualquer número de um dígito por 9, 1. Subtraia 1 do número e anote rapidamente a resposta.

Por exemplo, imagine que você queira multiplicar 7 x 9. Aqui, 7 – 1 = 6

2. Anote rapidamente um segundo número para que a soma dos dois números escritos seja igual a 9. Você escreveu apenas a resposta que você estava procurando.

Somando você tem 6 + 3 = 9. portanto 7 x 9 = 63.

Como outro exemplo, imagine que você queira multiplicar 8 x 9: 8 – 1 = 7

7 + 2 = 8

Portanto 8 x 9 = 72. Esta brincadeira funciona para todo número com um dígito, exceto 0 (mas você já sabe que 0 x 9 = 0).

Dois dígitos: Multiplicação dos números maiores

A principal razão para conhecer a tabuada é que você pode multiplicar com mais facilidade os números maiores. Por exemplo, imagine que você queira multiplicar 53 x 7. Comece a empilhar estes números uns sobre os outros com uma linha abaixo e depois multiplique 3 por 7. Porque 3 x 7 = 21, escreva o 1 e carregue o 2: **2**

5**3**

x 7

1

Próximo passo, multiplique 7 por 5. Neste momento, 5 x 7 = 35. Mas você precisa também somar o 2 que você carregou para cima, o que faz o resultado ser 37 – você encontra que 53 x 7 = 371: 2

53

x 7

371

Ao multiplicar os números maiores, a ideia é similar. Por exemplo, imagine que você queira multiplicar 53 por 47. (Os poucos primeiros passos – multiplicando pelo 7 no número 47 – são iguais, portanto eu posso retomar o próximo passo.) Agora você está pronto para multiplicar pelo 4 no número 47. Mas lembre-se que este 4 está na coluna das dezenas, portanto ele significa de fato 40. Assim, para começar, coloque um 0 diretamente de baixo do 1 no número 371: 53

x 47

371

0

Este 0 age como um marcador para que esta fileira seja arrumada corretamente. (Veja o Capítulo 1, para mais detalhes sobre os zeros marcadores).

Ao multiplicar por números maiores com dois dígitos ou mais, use um zero na posição ao multiplicar pelo dígito das dezenas, dois zeros marcadores ao multiplicar o dígito das centenas, três zeros ao multiplicar pelo dígito das milhares e assim por diante.

Agora você multiplique 3 x 4 para ter 12, portanto, escreva o 2 e carregue o 1: **1**

5**3**

x 47

371

20

Continuando, multiplique 5 x 4 para ter 20 e depois soma o 1 que carregou para cima, dando um resultado de 21: **1**

5**3**

x 47

371

2120

Para terminar, some os dois produtos (os resultados da multiplicação): 53

x 47

371

+ 2120

2491

Portanto, 53 x 47 = 2491.

Fazendo divisões rápidas

A última das Quatro Grandes Operações é a divisão. Literalmente a divisão significa dividir coisas. Por exemplo, imagine um pai em um piquenique com seus três filhos. Ele levou 12 roscas pretzel como lanche e quer dividi-las entre eles, justamente para que cada um tenha o mesmo número de roscas (você não quer criar briga, certo?).

Cada filho tem quatro roscas pretzel. Este problema lhe diz que 12 ÷ 3 = 4

Como a multiplicação, a divisão tem mais de um sinal: o sinal da divisão (÷) e a barra diagonal de fração (/) ou a barra horizontal (–). Portanto, existem algumas outras formas para escrever a mesma informação: $\frac{12}{3} = 4$ e $\frac{12}{3} = 4$

Qualquer que seja a forma, a ideia é a mesma: Ao dividir 12 roscas pretzel de maneira igual para 3 pessoas, cada um receberá quatro roscas.

LEMBRE-SE Ao dividir um número por um outro, o primeiro é chamado o dividendo, o segundo de divisor e o resultado é o quociente. Por exemplo, na divisão do exemplo anterior, o dividendo é 12, o divisor é 3 e o quociente é 4.

O que aconteceu na tabuada da divisão?

Ao considerar quanto tempo os professores gastam com a tabuada da multiplicação, você pode se perguntar por que você nunca viu uma tabuada da divisão. Por uma coisa, a tabuada da multiplicação concentra-se em multiplicar todos os números de um dígito uns aos outros. Este foco não funciona muito bem para a divisão porque ela envolve, normalmente, pelo menos um número que tem mais de um dígito.

Além disso, você pode usar a tabuada da multiplicação para a divisão também, invertendo a forma como você usa normalmente a tabuada. Por exemplo, a tabuada da multiplicação lhe diz que: 6 x 7 = 42. Você pode inverter esta equação para obter estes dois problemas de divisão: 42 ÷ 6 = 7

42 ÷ 7 = 6

Usar a tabuada da multiplicação leva vantagem pelo fato de que a multiplicação e a divisão são operações inversas. Discutirei mais esta ideia importante, no Capítulo 4.

Criando um trabalho curto para a divisão longa

Nos velhos tempos, saber como dividir os números grandes – por exemplo , 62.997 + 843 – era importante. As pessoas usavam uma divisão longa, um método organizado para dividir um número grande por um outro número. O procedimento envolvia a divisão, a multiplicação, a subtração e a baixa dos números.

Mas encara esta – uma das razões principais para a invenção da calculadora de bolso era poupar os seres humanos do século XXI de ter que fazer uma divisão longa de novo.

Dito isso, preciso acrescentar que seu professor e seus amigos malucos por matemática podem não concordar. Talvez eles queiram ter a certeza apenas de que você não é completamente inútil se sua calculadora desaparecer em algum lugar na sua mochila ou na gaveta de sua mesa ou no Triângulo das Bermudas. Mas se eu fizer você chega a um impasse fazendo uma divisão longa de página em página contra sua vontade, você tem minha profunda simpatia.

Irei longe, entretanto: Entender como fazer uma divisão longa com alguns números não muito horrorosos é uma boa ideia. Nesta seção, ofereço para você uma boa partida com uma divisão longa e com sorte, seu professor não irá castigá-la em casa com vingança!

Divisores com um dígito

Lembre-se que o divisor em um problema de divisão é o número que você está dividindo. Ao fazer uma divisão longa, o tamanho do divisor é sua principal preocupação. Pequenos divisores são fáceis para trabalhar e os divisores grandes são uma dor real. Portanto, começo com um divisor de um dígito pequeno e legal. Imagine que você queira achar 860 ÷ 5. Começa a escrever o problema desta forma: $860\,\underline{|\,5\quad}$

Ao contrário das outras Quatro Grandes Operações, uma divisão longa move-se da esquerda para direita. Neste caso, com o número na colunas das centenas (8). Para começar, pergunte quantas vezes 5 entra no 8 – isto é, o que é 8 ÷ 5? A resposta é 1 (com um pouquinho sobrando), portanto escreve 1 diretamente acima do 8. Agora, multiplica 1 x 5 para ter 5, coloca a resposta diretamente abaixo do 8 e desenha uma linha debaixo dele:

$$\begin{array}{l|l} \;\;860 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{-5} & 1 \\ \;\;3 & \end{array}$$

Subtraia 8 – 5 para ter 3. (Nota: Depois de subtrair, o resultado deve ser sempre menor do que o divisor. Caso contrário, você precisa escrever um número maior acima do símbolo da divisão.) Depois baixe o 6 para criar o novo número 36: $$\begin{array}{r|l} 860 & 5 \\ \cline{2-2} -5 & 1 \\ \cline{1-1} 36 & \end{array}$$

Estes passos são um ciclo completo e, para completar o problema, você precisa apenas repeti-los. Agora, pergunte quantas vezes 5 entra no 36 – isto é, o que é 36 ÷ 5? A resposta é 7 (com um pouquinho sobrando). Escreva 7 apenas acima do 6 e, depois multiplique 7 x 5 para ter 35; escreva a resposta debaixo de 36: $$\begin{array}{r|l} 86'0 & 5 \\ \cline{2-2} -5 & 17 \\ \cline{1-1} 36 & \\ 35 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Agora subtraia para ter 36 – 35 = 1; baixe o 0 perto do 1 para criar o novo número 10:

$$\begin{array}{r|l} 860' & 5 \\ \cline{2-2} -5 & 172 \\ \cline{1-1} 36 & \\ 35 & \\ \cline{1-1} 10 & \\ 10 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Um outro ciclo completo, portanto comece o próximo ciclo perguntando quantas vezes 5 entra no 10 – isto é, 10 ÷ 5. A resposta neste momento é 2. Escreva o 2 na resposta acima do 0. Multiplique para ter 2 x 5 = 10, e escreve esta resposta abaixo do 10: $$\begin{array}{r|l} 860 & 5 \\ \cline{2-2} -5 & 172 \\ \cline{1-1} 36 & \\ 35 & \\ \cline{1-1} 10 & \\ -10 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Agora subtraia 10 – 10 = 0. Pelo fato de não ter mais números para baixar, você acabou e aqui está a resposta 9(isto é, o quociente): $$\begin{array}{r|l} 860 & 5 \\ \cline{2-2} -5 & 172 \leftarrow \text{Quociente} \\ \cline{1-1} 36 & \\ 35 & \\ \cline{1-1} 10 & \\ -10 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Portanto, 860 ÷ 5 = 172.

Este problema divide equilibradamente, mas muito não. A seguinte seção lhe diz o que fazer quando você espalha os números para baixar, e o Capítulo 11 explica como ter uma resposta decimal.

Obtendo os restos: Divisão com um número que

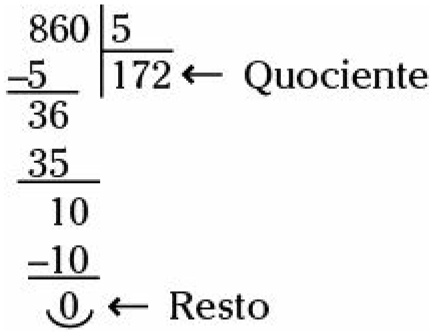
sobra

A divisão é diferente da adição, da subtração e da multiplicação, nisso ter um resto é possível. Um resto é simplesmente uma porção deixada pela divisão.

A letra r indica que o número que segue é o resto.

Por exemplo, imagine que você queira dividir equilibradamente barras de chocolate entre as pessoas sem quebrá-las em pedaços (muito bagunçados). Portanto, cada pessoa recebe três barras de chocolate e uma barra de chocolate sobra. Este problema mostra a você o seguinte: 7 ÷ 2 = 3 com um resto de 1, ou 3 r 1

Na divisão longa, o resto é o número que sobra quando você não tem mais números para baixar. A seguinte equação mostra que 47 ÷ 3 = 15 r 2:



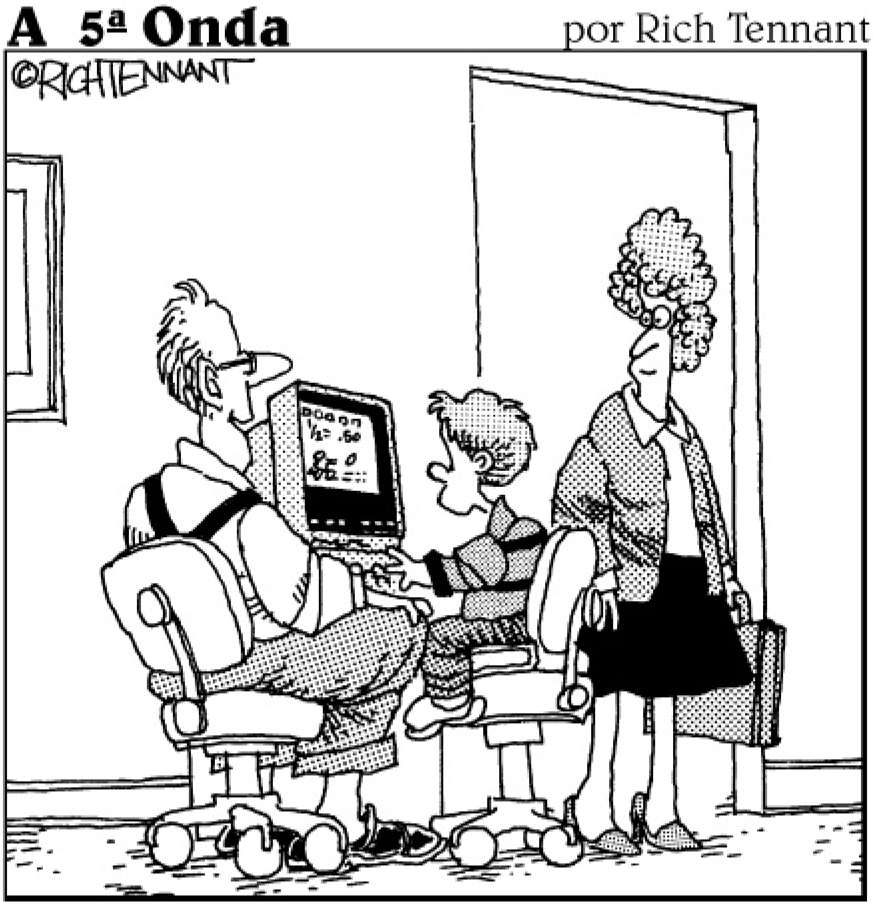
Perceba que ao fazer uma divisão com um dividendo pequeno e um divisor maior, você tem sempre um quociente de 0 e um resto do número que você começou: 1 ÷ 2 = 0 r 1

14 ÷ 23 = 0 r 14

2.000 ÷ 2.001 = 0 r 2.000

Parte II

Obtendo um Controle sobre Números Inteiros



"É um programa de futebol/matématica. Estamos abordando os problemas da multiplicação, da division e das frações."

Nesta parte...

Introdução de toda uma série de novos conceitos relacionados com a Quatro grandes operações (adição, subtração, multiplicação e divisão). Discuto operações inversas, comutativa e as propriedades associativa, números negativos, e desigualdades. Apresento tudo sobre as três questões de matemática –- expressões, equações e avaliação. Eu também mostrar-lhe como usar a ordem de precedência para transformar o futuro complexo expressões matemáticas em um único número. Você descobrirá como para resolver problemas de palavras (também chamados de problemas de história) por escrever equações de palavras que façam sentido do que você está lendo. Aponto um monte de truques para decidir se um número é divisível por outro, e mostrar-lhe menos como encontrar o Maior Divisor Comum (MDC) e Maior Múltiplo Comum (MMC) de dois números

Capítulo 4

Colocando as Quatro Grandes Operações para Funcionar

Neste Capítulo* ► *Identificando as operações inversas de uns aos outros* ► *Conhecendo as operações que são comutativa, associativa e distributiva* ► *Realizando as Quatro Grandes Operações nos números negativos* ► *Usando os quatro símbolos da desigualdade* ► *Entendendo os expoentes, as raízes e os valores absolutos

Ao entender as Quatro Grandes Operações que eu inclui no Capítulo 3 – adição, subtração, multiplicação e divisão – você pode começar a observar a matemática em um novo nível inteiro. Neste capítulo, você estende seu conhecimento das Quatro Grandes Operações e move-se além delas. Começo a me concentrar nas quatro propriedades importantes das Quatro Grandes Operações: operações inversas, operações comutativas, operações associativas e a distribuição. Depois, mostro a você como realizar as Quatro Grandes Operações nos números negativos.

Continuo a lhe apresentar alguns símbolos importantes da desigualdade. Afinal de contas, você está pronto para se mover além das Quatro Grandes Operações descobrindo três operações mais avançadas: os expoentes (chamados também as potências), as raíizes quadradas (chamadas também os radicais) e os valores absolutos.

Conhecendo as Propriedades das Quatro Grandes Operações

Ao saber como fazer as Quatro Grandes Operações – somar, subtrair, multiplicar e dividir – você está pronto para agarrar algumas propriedades importantes destas importantes operações. As propriedades são características das Quatro Grandes Operações que se aplicam sempre não importa os números com que você está trabalhando.

Nesta seção, apresento a você quatro ideias importantes: operações inversas, operações comutativas, operações associativas e a propriedade distributiva. Entender estas propriedades pode lhe mostrar as relações ocultas entre as Quatro Grandes operações, poupar seu tempo no cálculo e deixar-se confortável para trabalhar com os conceitos mais abstratos da matemática.

Operações inversas

Cada uma das Quatro Grandes operações tem uma operação inversa – uma operação que a desfaz. A adição e a subtração são operações inversas porque a adição desfaz a subtração e vice-versa. Por exemplo, aqui estão duas equações inversas: $1 + 2 = 3$

$3 - 2 = 1$

Na primeira equação, você começa com 1 e soma 2 nele, o que dá para você 3. Na segunda equação, você tem 3 e retira 2 dele, o que traz de volta 1 para você. A idéia principal aqui é que você está dando um número inicial – neste caso, 1 – e, ao somar um número e depois subtrair o mesmo número, você termina de novo com o número inicial. Isso lhe mostra que a subtração desfaz a adição.

Do mesmo modo, a adição desfaz a subtração – isto é, se você subtrai um número e depois soma o mesmo número, você termina onde você começou. Por exemplo, $184 - 10 = 174$

$174 + 10 = 184$

Neste momento, na primeira equação, você começa com 184 e retira 10 dele, o que dá para você 174. Na segunda equação, você tem 174 e soma 10 nele, o que traz de volta você no 184. Neste caso, começando com o número 184, ao subtrair um número e depois somar o mesmo número, a adição desfaz a subtração e você termina voltando para 184.

Da mesma maneira, a multiplicação e a divisão são operações inversas. Por exemplo, $4 \cdot 5 = 20$

$20 \div 5 = 4$

Neste momento, você começa com o número 4 e multiplica-o por 5 para ter 20. E depois você divide 20 por 5 para retornar para onde você começou no 4. Portanto, a divisão desfaz a multiplicação. Do mesmo modo, $30 \div 10 = 3$

$3 \cdot 10 = 30$

Aqui, você começa com 30, divide por 10 e multiplica por 10 para terminar voltando no 30. Isso lhe mostra que a multiplicação desfaz a divisão.

Operações comutativas

A adição e a multiplicação são ambas operações comutativas. Comutativa significa que você pode trocar a ordem dos números sem mudar o resultado. Esta propriedade da adição e da multiplicação é chamada de propriedade comutativa. Aqui está um exemplo de como a adição é comutativa: $3 + 5 = 8$ é a mesma coisa que $5 + 3 = 8$

Se você começa com 5 livros e soma 3 livros, o resultado é o mesmo como se você começa com 3 livros e soma 5. Em cada um dos casos, você termina com 8 livros.

E aqui está um exemplo de como a multiplicação é comutativa: $2 \cdot 7 = 14$ é a mesma coisa que $7 \cdot 2 = 14$

Se você tem dois filhos e quer dar a cada um deles sete flores, você precisa comprar o mesmo número de flores como alguém que tem sete filhos e quer dar a cada um deles duas flores. Em ambos os casos, alguém compra 14 flores.

Por contraste, a subtração e a divisão são operações não-comutativas. Ao trocar a ordem dos números, o resultado muda.

Aqui está um exemplo de como a subtração é não-comutativa: $6 - 4 = 2$ mas $4 - 6 = -2$

A subtração é não-comutativa, portanto se você tem $ 6,00 e gasta $ 4,00, o resultado não é o mesmo se você tem $ 4,00 e gasta $ 6,00. No primeiro caso, você tem, ainda, $ 2,00 sobrando. No segundo caso, você deve $ 2,00. Isto é, trocar os números t orna o resultado como um número negativo. (Discuto os números negativos depois, neste capítulo.) E aqui está um exemplo de como a divisão é não-comutativa: 10 ÷ 2 = 5 mas 5 ÷ 10 ¹ 5

Por exemplo, ao ter cinco biscoitos de cachorro para dividir entre dois cachorros, cada um tem dois biscoitos, e você tem um biscoito sobrando. Mas, ao trocar os números e tentar dividir dois biscoitos entre cinco cachorros, você não tem biscoitos suficientes para desviar, portanto cada cachorro tem nenhum, e você tem dois biscoitos sobrando.

Operações associativas

A adição e a multiplicação são operações associativas, o que significa que você pode agrupá-las diferentemente sem mudar o resultado. Esta propriedade da adição e da multiplicação é chamada também de propriedade associativa. Aqui está um exemplo de como a adição é associativa. Imagine que você queira somar $3 + 6 + 2$. Você pode resolver este problema de duas maneiras:

$(3 + 6) + 2$	$3 + (6 + 2)$
$= 9 + 2$	$= 3 + 8$
$= 11$	$= 11$

No primeiro caso, começo a somar $3 + 6$ e, depois, somar 2. No segundo caso, começo a somar $6 + 2$ e, depois, somar 3. Em qualquer uma das maneiras, a soma é igual a 11.

Aqui está um exemplo de como a multiplicação é associativa. Imagine que você queira multiplicar $5 \cdot 2 \cdot 4$. Você pode resolver este problema de duas maneiras:

$(5 \cdot 2) \cdot 4$	$5 \cdot (2 \cdot 4)$
$= 10 \cdot 4$	$= 5 \cdot 8$
$= 40$	$= 40$

No primeiro caso, começo a multiplicar 5 · 2 e depois multiplica por 4. No segundo caso, começo a multiplicar 2 · 4 e depois multiplicar por 5. Em qualquer uma das maneiras, o produto é 40. Por contraste, a subtração e a divisão são operações não-associativas. Isso significa que agrupá-las de diferentes maneiras muda o resultado.

Não confunda a propriedade comutativa com a propriedade associativa. A propriedade comutativa lhe diz que está tudo bem para trocar dois números que você está somando ou multiplicando. A propriedade associativa lhe diz que está tudo bem para reagrupar três números usando parênteses.

Levadas juntas, as propriedades associativa e comutativa permitem-lhe rearrumar completamente e reagrupar uma série de números que você está somando ou multiplicando sem mudar o resultado. Você encontrará que a liberdade para rearrumar as expressões como você gosta por elas serem muito úteis você se move para a álgebra na Parte V.

Distribuindo para facilitar a tarefa

Se você já tentou carregar uma bolsa pesada de mantimentos, você pode ter achado que distribuir os conteúdos em duas pequenas bolsas pode ser útil. Este mesmo conceito funciona também para a multiplicação.

Na matemática, a distribuição (chamada também de propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição) permite-lhe dividir um problema de multiplicação maior em dois pequenos problemas e somar os resultados para ter a solução.

Por exemplo, imagine que você queira multiplicar estes dois números: 17 x 101

Você pode multiplicá-los, mas a distribuição fornece uma maneira diferente de pensar o problema que você pode achar de forma mais fácil. Porque 101 = 100 + 1, você pode dividir este problema em dois problemas mais fáceis, conforme o seguinte: = 17 x (100 + 1) = (17 x 100) + (17 x 1) Você tira o número fora dos parênteses, multiplica-o por cada número dentro dos parênteses uma única vez, depois soma os produtos. Neste ponto, você pode resolver as duas multiplicações na sua cabeça e, depois, somá-las facilmente: = 1700 + 17 = 1717

A distribuição torna mais útil por sinal quando você entrar na parte VI da Álgebra.

Quatro Grandes Operações com Números Negativos

No Capítulo 2, mostro a você como usar a reta numerada para entender como os números negativos funcionam. Nesta seção, dou uma olhada mais perto para saber como realizar as Quatro Grandes operações com os números negativos. Os números negativos ocorrem quando você subtrai um número maior de um número menor. Por exemplo, 5 – 8 = –3

Nas aplicações do mundo real, os números negativos são usados para representar dívida. Por exemplo, se você tem apenas cinco cadeiras para vender, mas uma cliente paga para ter oito delas, você deve a ela mais três cadeiras. Embora possa ter problema em imaginar as 3 cadeiras, você precisa explicar ainda esta dívida, e os números negativos são a ferramenta correta para o trabalho.

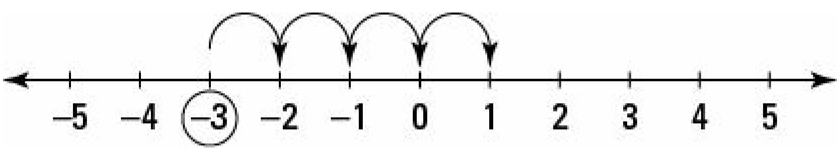
Adição e subtração com números negativos

O grande segredo para somar e subtrair os números negativos é tornar todo problema em séries de altos e baixos na reta numerada. Depois de saber como fazer isso, você nota que todos estes problemas são muito simples.

Portanto, nesta seção, explico como somar e subtrair os números negativos na reta numerada. Não se preocupe em memorizar todo um pouco deste procedimento. Ao invés disso, siga apenas em frente portanto você entende como os números negativos cabem na reta numerada. (Se você precisar de uma revisão rápida sobre como a reta numerada funciona, veja o Capítulo 1.)

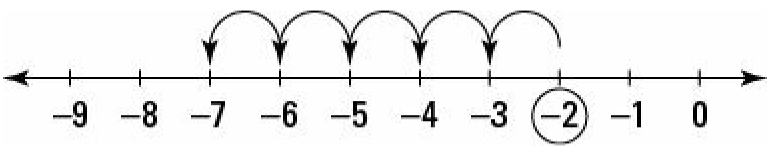
Começando com um número negativo

Ao somar e subtrair na reta numerada, começar com um número negativo não é muito diferente de começar com um número positivo. Por exemplo, imagine que você queira resolver –3 + 4. Usando as regras de altos e baixos, você tem o seguinte: Comece no –3, suba 4



Portanto, –3 + 4 = –1

Do mesmo modo, imagine que para resolver –2 – 5. De novo, as regras de altos e baixos ajudam-lhe. Você está subtraindo, portanto mova-o para a esquerda: Comece no –2, desça 5

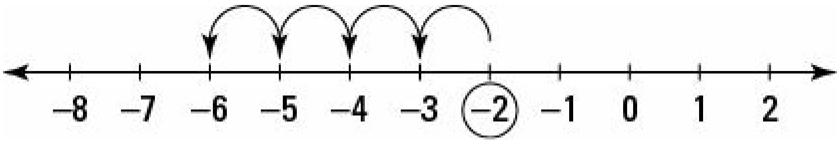


Portanto, –2 – 5 = –7.

Somando um número negativo

Imagine que você queira resolver –2 + 4. Você já sabe começar no –2, mas onde você vai a partir dali? Aqui está a regra de altos e baixos para somar um número negativo: Adicionando um número negativo é o mesmo que subtrair um número positivo – isto é, ir para baixo na linha de número.

Por esta regra, –2 + 4 é a mesma coisa que –2 – 4, portanto Comece no –2, desça 4



Portanto –2 + (–4) = –6

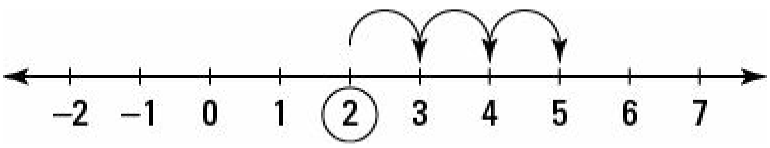
Se você reescrever o problema de uma subtração como um problema de uma adição – por exemplo, reescrevendo 3 – 7 como 3 + (–7) – você pode usar as propriedades comutativa e associativa da adição, que discuto antes, neste capítulo. Lembre-se apenas de manter o sinal negativo anexado ao número quando você rearruma: (–7) + 3.

Subtraindo um número negativo

A última regra que você precisa conhecer é como subtrair um número negativo. Por exemplo, imagine que você queira resolver 2 – (–3). Aqui está a regra de altos e baixos:

Subtraindo um número negativo é a mesma coisa que somando um número positivo – isto é subir na reta numerada.

Esta regra lhe diz que 2 – (–3) é a mesma coisa que 2 + 3, portanto Comece no 2, suba 3



Portanto, 2 – (–3) = 5.

Ao subtrair os números negativos, você pode pensar em dois sinais de menos que se cancelam para criar um sinal positivo.

Multiplicação e divisão com números negativos

A multiplicação e a divisão com os números negativos são virtualmente a mesma coisa com os números positivos. A presença de um sinal de menos (–) ou mais não muda a parte numérica da resposta. A única pergunta é se o sinal é positivo ou negativo: Lembre-se apenas que ao multiplicar ou dividir dois números, ✓Se os números têm o mesmo sinal, o resultado é sempre positivo.

✓ Se os números têm sinais opostos, o resultado é sempre negativo.

Por exemplo,

$2 \cdot 3 = 6 \qquad 2 \cdot -3 = -6$

$-2 \cdot -3 = 6 \qquad -2 \cdot 3 = -6$

Como você pode observar, a porção numérica da resposta é sempre igual a 6. A única pergunta é se a resposta completa é 6 ou –6 · É onde entra a regra dos sinais de igualdade e de desigualdade.

Uma outra forma de pensar nesta regra é que dois sinais negativos se anulam para dar um sinal positivo.

Do mesmo modo, observa estas equações de quatro divisões:

$10 \div 2 = 5 \qquad 10 \div -2 = -5$

$-10 \div -2 = 5 \qquad -10 \div 2 = -5$

Neste caso, a porção numérica da resposta é sempre 5. Quando os sinais são iguais, o resultado é positivo e quando os sinais são diferentes, o resultado é negativo.

Entendendo as Unidades

Tudo que pode ser somado é uma unidade. É uma categoria muito grande, porque quase tudo que você pode nomear pode ser somado. Você descobre mais sobre as unidades de medidas, no Capítulo 15. Por hora, entenda apenas que todas as unidades podem ser somadas, o que significa que você pode aplicar as Quatro Grandes operações nas unidades.

Adição e subtração das unidades

Somar e subtrair as unidades não é muito diferente de somar e subtrair números. Lembre-se apenas que você pode somar ou subtrair quando as unidades são iguais. Por exemplo, 3 cadeiras + 2 cadeiras = 5 cadeiras 4 laranjas – 1 laranja = 3 laranjas O que acontece quando você tenta somar ou subtrair diferentes unidades? Aqui está um exemplo: 3 cadeiras

+ 2 mesas = ?

A única maneira que você pode completar esta adição é tornar iguais as unidades: 3 móveis + 2 móveis = 5 móveis

Multiplicação e divisão das unidades

Você sempre pode multiplicar e dividir as unidades por um número. Por exemplo, imagine que você tenha quatro cadeiras, mas acha que você precisa de duas tanto quanto para uma festa. Aqui está como você representa esta idéia na matemática: 4 cadeiras · 2 = 8 cadeiras Do mesmo modo, imagine que você tenha 20 cerejas e quer dividi-las entre quatro pessoas. Aqui está como você representa esta idéia: 20 cerejas ÷ 4 = 5 cerejas Mas você deve ser cauteloso ao multiplicar ou dividir unidades por unidades. Por exemplo: 2 maçãs · 3 maçãs = ? ERRADO!

12 chapéus ÷ 6 chapéus = ? ERRADO!

Nenhuma destas equações tem sentido. Nestes casos, multiplicando ou dividindo por unidades é sem sentido.

Em muitos casos, entretanto, multiplicando e dividindo unidades está tudo bem. Por exemplo, multiplicando unidades de comprimento (tais como polegadas, milhas ou metros) resulta em unidades ao quadrado. Por exemplo, 3 polegadas · 3 polegadas = 9 polegadas ao quadrado 10 milhas · 5 milhas = 50 milhas ao quadrado 100 metros · 200 metros = 20.000 metros ao quadrado Você descobre mais sobre unidades de comprimento, no Capítulo 15. Do mesmo modo, aqui estão alguns exemplos de quando dividir unidades faz sentido: 12 pedaços de pizza ÷ 4 pessoas = 3 pedaços de pizza/pessoa 140 milhas ÷ 2 horas = 70 milhas/hora Nestes casos, você lê a fração diagonal (/) como por: pedaços de pizza por pessoa ou milhas por hora. Você descobre mais sobre multiplicar e dividir por unidades, no Capítulo 15, quando mostro a você como converter de uma unidade de medida para uma outra.

Entendendo as Desigualdades

Algumas vezes, você quer conversar quando duas quantidades são diferentes. Estas expressões são chamadas desigualdades. Nesta seção, discuto quatro tipos de desigualdades: # (não igual a) < (inferior a) e > (superior a) e ≈ (aproximadamente).

Diferente de([1])

A desigualdade mais simples é #, que você usa quando duas quantidades não são iguais. Por exemplo, 2 + 2 # 5

3 x 4 # 34

999.999 # 1.000.000

Você pode ler # como “não igual a” “ ou “diferente de “. Portanto, leia 2 + 2 # 5 como “dois mais dois não é igual a cinco.”

Menor que(<) e maior que (>)

O símbolo < significa inferior a.Por exemplo, as seguintes expressões são verdadeiras: 4 < 5

100 < 1.000

2 + 2 < 5

Do mesmo modo, o símbolo > significa superior a.Por exemplo, 5 > 4

100 > 99

2 + 2 > 3

Os dois símbolos < e > são similares e podem ser confundidos facilmente. Aqui está uma maneira para lembrar o que é o que: ✓Lembre que em qualquer expressão verdadeira, a grande boca aberta do símbolo está ao lado da maior quantia e o ponto pequeno está ao lado da menor quantia.

Aproximadamente igual (≈)

No Capítulo 2, mostro a você como os números redondos tornam mais fáceis os grandes números para trabalhar. Naquele capítulo, apresento também ≈ que significa aproximadamente igual.

Por exemplo, 49 ≈ 50

1.024 ≈ 1.000

999.999 ≈ 1.000.000

Você pode usar ≈ quando você avalia a resposta de um problema: 1.000.487 + 2.001.932 + 5.000.032

≈ 1.000.000 + 2.000.000 + 5.000.000 ≈ 8.000.000

Além das Quatro Grandes: Potenciação, Raízes Quadradas e Valor Absoluto

Nesta seção, apresento a você três novas operações que você precisa, conforme se move com a matemática: potenciação, raízes quadradas e valor absoluto. Com as Quatro Grandes operações, estas três operações pegam os números e ajustam-nos de várias maneiras.

Para dizer a verdade, estas três operações têm menos aplicações de rotina do que as Quatro Grandes operações. Mas você verá muito mais sobre elas conforme você evolui nos seus estudos de matemática. Felizmente elas não são difíceis, portanto este é um bom momento para acostumar-se com elas.

Entendendo os Expoentes

Os expoentes (chamados também de potências) são uma taquigrafia para a multiplicação repetida. Por exemplo 2 elevado a três significa multiplicar 2 por ele mesmo 3 vezes. Para fazer isso, use a seguinte anotação: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Neste exemplo, 2 é o número da base e 3 é o expoente. Você pode ler “2 elevado a três” ou “2 elevado à potência 3” (ou até “2 ao cubo”, utilizado para achar o valor de um cubo – ver Capítulo 16, para maiores detalhes).

Aqui está um outro exemplo: 10^5 significa multiplicar 10 por ele mesmo 5 vezes Funciona desta forma: $10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000$

Neste momento, 10 é o número da base e 5 é o expoente. Leia 10^5 como “ 10 elevado a 5” ou “ 10 elevado à potência 5”

Quando o número da base é 10, imagine qualquer número é fácil. Escreva apenas um 1 e muitos 0s depois dele.

$10^2 = 100$	(1 com dois 0s)
$10^7 = 10.000.000$	(1 com sete 0s)
$10^{20} = 100.000.000.000.000.000.000$	(1 com vinte 0s)

Os expoentes cujo número da base é 10 são muito importantes na notação científica, que incluo no Capítulo 14.

O expoente mais comum é o número 2. Ao elevar qualquer número inteiro à potência 2, o resultado será um número ao quadrado. (Para maiores informações sobre os números quadrados, veja o Capítulo 1.) Por este motivo, elevando um número à potência de 2 é chamado de colocar ao quadrado aquele número. Você pode ler 3^2 como “três elevado ao quadrado”, 4^2 como “quatro elevado ao quadrado” e assim por diante. Aqui estão alguns números quadrados: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

LEMBRE-SE Qualquer número elevado à potência 0 é igual a 1. Portanto, 1^0, 37^0, e 999.999^0 são equivalentes ou iguais.

Descobrindo suas raízes

Antes neste capítulo, em "Conhecendo as Propriedades das Quatro Grandes Operações", mostro a você como a adição e a subtração são operações inversas. Mostro a você também como a multiplicação e a divisão são operações inversas. Da mesma maneira, as raízes são a operação inversa dos expoentes.

A raiz mais comum é a raiz quadrada. Uma raiz quadrada desfaz um expoente de 2. Por exemplo,

$$3^2 = 3\ .\ 3 = 9,\ \text{portanto}\ \sqrt{9} = 3$$

$$4^2 = 4\ .\ 4 = 16,\ \text{portanto}\ \sqrt{16} = 4$$

$$5^2 = 5\ .\ 5 = 25,\ \text{portanto}\ \sqrt{25} = 5$$

Você pode ler o símbolo $\sqrt{\ }$ como "a raiz quadrada de" ou como "radical". Portanto, leia raiz de $\sqrt{9}$ como "a raiz quadrada de 9" ou "radical de 9".

Como você pode ver, ao elevar a raiz quadrada de qualquer número ao quadrado, o resultado é o número que você multiplicou por ele mesmo, para ter aquele número ao quadrado em primeiro lugar. Por exemplo, para achar a raiz de $\sqrt{100}$ você faz a seguinte pergunta, "Qual é o número que quando multiplicado por ele mesmo é igual a 100?" A resposta neste caso é 10 porque $10 \cdot 10 = 100$ portanto $\sqrt{100} = 10$

Provavelmente, você não usará muito as raiízes do quadrado até entender a álgebra, mas naquele ponto elas se tornam muito úteis.

Calculando o valor absoluto

O valor absoluto de um número é o valor positivo daquele número. Ele informa a você o quanto longe do 0 é um número da reta numerada. O símbolo de um valor absoluto é um conjunto de barras verticais.

Elevando o valor absoluto de um número positivo não muda aquele valor do número. Por exemplo, $|3| = 3$

$|12| = 12$

$|145| = 145$

Entretanto, elevando o valor absoluto de um número negativo muda o mesmo para um número positivo.

$|-5| = 5$

$|-10| = 10$

$|-212| = 212$

Capítulo 5

Uma questão de valores: Avaliando Expressões Aritméticas

Neste Capítulo* ► *Entendendo as Três Palavras da matemática – equações, expressões e avaliações* ► *Usando a ordem de precedência para avaliar as expressões contendo as Quatro Grandes operações* ► *Trabalhando com expressões qui contêm expoentes* ► *Avaliando as expressões com parênteses

Neste capítulo, apresento a você o que chamo de as Três Palavras da matemática: equações, expressões e avaliação.

As Três Palavras da Matemática: Equações, Expressões e Avaliações

Você deve achar as Três Palavras mais comuns da matemática, porque se você compreendeu isso ou não, está usando as mesmas durante um longo tempo. Quando você soma o custo de vários itens da loja, cuidado com seu talão de cheques ou resolve a área do seu quarto, você está avaliando expressões e colocando equações. Nesta seção, esclarecei estas coisas e lhe dei uma nova forma de observá-las.

Provavelmente você já sabe que uma equação é uma expressão matemática que tem um sinal de igualdade (=) – por exemplo, 1 +1 = 2. Uma expressão é uma série de símbolos matemáticos que podem ser colocados em um lado de uma equação – por exemplo, 1 + 1. E a avaliação é descobrir o valor de uma expressão como um número – por exemplo, ao descobrir que a expressão 1 + 1 é igual ao número 2.

Durante todo o restante do capítulo, mostro a você como tornar expressões em números, usando um conjunto de regras chamado de ordem das operações (ou ordem de precedência). Estas regras parecem ser complicadas, mas consigo desfazê-las, portanto você pode ver o que fazer depois em qualquer situação.

Igualdade para Tudo: Equações

Uma equação é uma expressão matemática que informa a você que duas coisas têm o mesmo valor – em outras palavras, é uma expressão com um sinal de igualdade. A equação é um dos conceitos mais importantes da matemática, pois ela lhe permite concentrar um punhado de informações complicadas em um único número.

As equações matemáticas vêm com muitas variedades: equações aritméticas, equações algébricas, equações diferenciais e muito mais. Neste livro, eu observo apenas dois tipos: equações aritméticas e equações algébricas.

Neste capítulo, discuto apenas as equações aritméticas que são equações envolvendo os números, as Quatro Grandes Operações e as outras operações básicas que apresento no Capítulo 4 (valores absolutos, expoentes e raíizes). Na Parte V, apresento a você as equações algébricas. Aqui, estão alguns exemplos de equações aritméticas simples: $2 + 2 = 4$

$3 \cdot 4 = 12$

$20 \div 2 = 10$

Três propriedades de igualdade As três propriedades de igualdade são chamadas de reflexidade, simetria e transitividade: A Reflexidade informa que tudo é igual a si próprio. Por exemplo, $1 = 1$ $23 = 23$ $1.000.007 = 1.000.007$

A **Simetria** informa que você pode trocar a ordem na qual as coisas são iguais. Por exemplo, $4 \cdot 5 = 20$ portanto, $20 = 4 \cdot 5$

A **Transitividade** informa que se alguma coisa é igual a duas outras coisas, então aquelas duas outras coisas são iguais. Por exemplo, $3 + 1 = 4$ e $4 = 2 \cdot 2$ – portanto, $3 + 1 = 2 \cdot 2$

Porque a igualdade tem todas estas três propriedades, os matemáticos chamam a igualdade uma relação de equivalência. As desigualdades que apresento no Capítulo 4 ($\neq$, $>$, $<$ e $\approx$) não compartilham necessariamente todas estas propriedades.

E aqui estão alguns exemplos de equações aritméticas mais complicadas:

$$1.000 - 1 - 1 - 1 = 997$$

$$(1.1) + (2.2) = 5$$

$$4^2 - \sqrt{256} = (791 - 842).0$$

Ei, é apenas uma expressão

Uma expressão é qualquer série de símbolos matemáticos que pode ser colocada em um lado de uma equação. As expressões matemáticas como as equações vêm com muitas variedades. Neste capítulo, concentro-me apenas nas expressões aritméticas que contêm números, as Quatro Grandes operações e algumas outras operações básicas (veja Capítulo 4). Na Parte V, apresento a você as expressões algébricas. Aqui estão alguns exemplos de expressões simples: 2 + 2

–17 + (–1) 14 + 7

E aqui estão alguns exemplos de expressões mais complicadas:

$$(88-23)\div 13$$
$$100+2-3\ .\ 17$$
$$\sqrt{441}+\left|-2^{3}\right|$$

Avaliando a situação

Na raiz da palavra avaliação tem a palavra valor. Em outras palavras, quando você avalia alguma coisa, você acha seu valor. Avaliando uma expressão é também referente a simplificando, resolvendo ou achando o valor de uma expressão. As palavras podem mudar, mas a ideia é a mesma – concentrando uma série de números e símbolos matemáticos em um único número.

Quando você avalia uma expressão aritmética, você a simplifica em um único valor numérico – isto é, você acha o número que é igual a. Por exemplo, avalie a seguinte expressão aritmética: 7 · 5

Como? Simplifica-o em um único número: 35

Colocando as Três Palavras juntas

Tenho certeza de que você quer saber como as Três Palavras – igualdade, expressões e avaliação – são todas conectadas. A avaliação permite-lhe pegar uma expressão contendo mais de um número e reduzi-la a um único número. Portanto, você pode fazer uma equação, usando um sinal de igualdade para conectar a expressão e o número. Por exemplo, aqui está uma expressão contendo quatro números: 1 + 2 + 3 + 4

Quando você avalia a expressão você a reduz a um único número: 10

E, agora você pode fazer uma equação conectando a expressão e o número com um sinal de igualdade: 1 + 2 + 3 + 4 = 10

Apresentando a Ordem das Operações

Quando você era criança, você já tentou colocar seus sapatos primeiro e depois suas meias? Se fosse o caso, provavelmente você descobriu esta simples regra: **1. Colocar suas meias.**

2. Colocar seus sapatos.

Assim você tem uma ordem das operações: As meias devem ficar nos pés antes dos sapatos; portanto no ato de colocar seus sapatos e suas meias, suas meias têm uma precedência em relação a seus sapatos. Uma simples regra para seguir, certo?

Nesta seção, faço o resumo de um conjunto de regras similares para avaliar as expressões chamadas de ordem das operações (algumas vezes chamadas a ordem de precedência). Não deixe que o nome longo derruba você. A ordem das operações é apenas um conjunto de regras para ter certeza de que você tem suas meias e seus sapatos na ordem correta matematicamente falando, portanto, você tem sempre a resposta correta.

Nota: Na maior parte deste livro, apresento temas indicados no início de cada seção e depois os explico nos capítulos seguintes em vez de construí-los e por fim revelando o resultado. Mas a ordem das operações é um pouco confuso para apresentar aquele caminho. Em substituição, começo com uma lista de quatro regras e entro em maiores detalhes sobre elas, depois no capítulo. Não deixe que a complexidade destas regras assuste antes que você passa por elas!

LEMBRE-SE Avalie as expressões aritméticas da esquerda à direita de acordo com a seguinte ordem das operações: **1. Parênteses**

2. Expoentes

3. Multiplicação e divisão

4. Adição e subtração

Não se preocupe em memorizar esta lista agora. Eu a divido para você lentamente nas seções restantes deste capítulo, começando da parte mais baixa até a parte mais alta, como segue: ✓Em "Aplicando a ordem das operações para as Quatro Grandes expressões," mostro os Passos 3 e 4 – como avaliar as expressões com qualquer combinação de adição, subtração, multiplicação e divisão.

✓ Em "Usando a ordem das operações nas expressões com expoentes,", mostro para você como o Passo 2 serve – como avaliar as expressões com Quatro Grandes operações mais expoentes, raízes quadradas e valor absoluto.

✓ Em "Entendendo a ordem das operações em expressões com parênteses," mostro para você como o Passo 1 serve – como avaliar todas as expressões que explico mais as expressões com os parênteses.

Aplicando a ordem das operações nas Quatro

Grandes Expressões

Como explico antes neste capítulo, avaliar uma expressão é, apenas, simplificá-la em um único número. Agora, começo nas bases da avaliação das expressões que contêm qualquer combinação das Quatro Grandes operações – adição, subtração, multiplicação e divisão. (Para mais informações sobre as Quatro Grandes operações, veja o Capítulo 3). Falando em geral, as Quatro Grandes expressões entram nos três tipos delineados na Tabela 5-1.

Tabela 5-1 – Os Três Tipos de Quatro Grandes Expressões

Expressões	*Exemplo*	*Regra*
Contém apenas adição e subtração	$12 + 7 - 6 - 3 + 8$	Avaliar da esq. à direita
Contém apenas multiplicação e divisão	$18 \div 3 \cdot 7 \div 14$	Avaliar da esq à direita
Expressões de operador misto: contém uma combinação de adição/subtração e multiplicação/divisão	$9 + 6 \div 3$	1.Avalia a multiplicação e a divisão da esq à direita. 2.Avalia a adição e a subtração da esquerda à direita.

Nesta seção, mostro para você como identificar e avaliar todos os três tipos de expressões.

Expressões com apenas adição e subtração

Algumas expressões contêm apenas a adição e a subtração. Quando este é o caso, a regra para avaliar a expressão é simples.

LEMBRE-SE Quando uma expressão contêm apenas a adição e a subtração, faça um cálculo passo a passo da esquerda para a direita. Por exemplo, imagine que você queira calcular esta expressão: $17 - 5 + 3 - 8$

Como as únicas operações são a adição e a subtração, você pode calcular da esquerda para a direita, começando com $17 - 5$: $= 12 + 3 - 8$

Como você pode observar,o número 12 substitui $17 - 5$. Agora a expressão tem três números em vez de quatro. Depois, calcula $12 + 3$: $= 15 - 8$

Isso divide a expressão em dois números, que você pode calcular facilmente: $= 7$

Portanto, $17 - 5 + 3 - 8 = 7$.

Expressões com apenas a multiplicação e a divisão

Algumas expressões contêm apenas a multiplicação e a divisão. Quando for o caso, a regra para avaliar a expressão é muito simples.

Quando uma expressão contém apenas a multiplicação e a divisão, avalie a mesma passo a passo da esquerda à direita. Imagine que você queira avaliar esta expressão: $9 \cdot 2 \div 6 \div 3 \cdot 2$

De novo, a expressão contém apenas a multiplicação e a divisão, portanto você pode se mover da esquerda à direita, começando com $9 \cdot 2$: $= 18 \div 6 \div 3 \cdot 2$

$= 3 \div 3 \cdot 2$

$= 1 \cdot 2$

$= 2$

Note que a expressão reduz um número em um momento até que tudo que está à esquerda seja igual a 2. Portanto, $9 \cdot 2 \div 6 \div 3 \cdot 2 = 2$.

Aqui está um outro exemplo rápido: $-2 \cdot 6 \div 4$

Embora esta expressão tenha alguns números negativos, as únicas operações que ela contém são a multiplicação e a divisão. Portanto, você pode avaliá-la em dois passos da esquerda à direita (lembrando as regras para a multiplicação e a divisão com os números negativos que mostro para você, no Capítulo 4): $= -12 \div -4$

$= 3$

Portanto, $-2 \cdot 6 \div -4 = 3$

Expressões de operador misto

Geralmente, uma expressão contém ✓Pelo menos um operador de adição ou de subtração ✓ Pelo menos um operador de multiplicação ou de divisão Chamo estas expressões de operador misto. Para avaliá-las, você precisa de um remédio forte. Aqui está a regra que você quer seguir.

Avalie as expressões de operador misto como segue: **1. Avalie a multiplicação e a divisão da esquerda à direita.**

2. Avalie a adição e a subtração da esquerda à direita.

Por exemplo, imagine que você queira avaliar a seguinte expressão: $5 + 3 \cdot 2 + 8 \div 4$

Como você pode ver, esta expressão contém a adição, a multiplicação e a divisão, portanto é uma expressão de operador misto. Para avaliá-la, comece a sublinhar a multiplicação e a divisão na expressão: $5 + \underline{3 \cdot 2} + \underline{8} \div \underline{4}$

Agora, avalie o que você sublinhou da esquerda à direita: $= 5 + 6 + \underline{8} \div \underline{4}$

$= 5 + 6 + 2$

Neste ponto, sobra uma expressão que contém apenas a adição, portanto você pode avaliá-la da esquerda à direita: = 11 + 2

= 13

Portanto, $5 + 3 \cdot 2 + 8 \div 4 = 13$.

Usando a ordem das operações em expressões com expoentes

Aqui, está o que você precisa saber para avaliar as expressões que têm expoentes (veja o Capítulo 4, para informações sobre expoentes).

Avalia, os expoentes da esquerda à direita antes de você começar a avaliar as Quatro Grandes operações (adição, subtração, multiplicação e divisão).

O truque aqui é tornar a expressão em uma Quarta Grande expressão e, depois, usar o que mostro para você depois antes, em "Aplicando a ordem das operações para as Quatro Grandes expressões". Por exemplo, imagine que você queira avaliar o seguinte: $3 + 5^2 – 6$

Primeiro, avalia o expoente: = 3 + 25 – 6

Neste ponto, a expressão contém apenas a adição e subtração, portanto você pode avaliá-la da esquerda à direita em dois passos: = 28 – 6

= 22

Portanto $3 + 5^2 – 6 = 22$

Entendendo a ordem de precedência em expressões com parênteses

Em matemática, os parênteses – ( ) – são usados geralmente para agrupar as partes de uma expressão. Quando o assunto é avaliar as expressões, aqui está o que você precisa saber sobre os parênteses.

Para avaliar as expressões que contêm os parênteses.

1. Avalie os conteúdos dos parênteses, de dentro para fora.

2. Avalie o resto da expressão.

Quatro Grandes expressões com parênteses

Do mesmo modo, imagine que você queira avaliar (1+15+5)+(3 – 6).5. Esta expressão contém dois conjuntos de parênteses, portanto, avalie estes da esquerda à direita. Note que o primeiro conjunto de parênteses contém uma expressão de operador misto, portanto avalie esta em dois passos começando com a divisão: $= (1 + 3) + (3 – 6) \cdot 5$

$= 4 + (3 – 6) \cdot 5$

Agora, avalie os conteúdos do segundo conjunto de parênteses: $= 4 + (– 3) \cdot 5$

Agora você tem uma expressão de operador misto, portanto avalie a multiplicação $(–3 \cdot 5)$ primeiro: $= 4 + (–15)$ Por fim, avalie a adição: $= –11$

Portanto $(1 + 15 \div 5) + (3 – 6) \cdot 5 = –11$.

Expressões com expoentes e parênteses

Como outro exemplo, experimente esta: $1 + (3 – 6^2 \div 9) \cdot 22$

Comece a trabalhar com apenas o que está dentro dos parênteses. A primeira coisa para avaliar é o expoente 6^2: $= 1 + (3 – 36 \div 9) \cdot 22$

Continue trabalhando dentro dos parênteses, avaliando a divisão $36 \div 9$: $= = 1 + (3 – 4) \cdot 22$

Agora você pode suprimir os parênteses completamente: $= 1 + – 1 \cdot 22$

Neste ponto, o que sobra é uma expressão com um expoente. Esta expressão tem três passos, começando com o expoente: $= 1 + –1 \cdot 4$

$= 1 + –4$

$= –3$

Portanto, $1 + (3 – 62 \div 9) \cdot 22 = – 3$

Expressões com parênteses elevados a um expoente

Algumas vezes, os conteúdos inteiros de um conjunto de parênteses são elevados a um expoente. Neste caso, avalie os conteúdos dos parênteses antes de avaliar o expoente como é comum. Aqui está um exemplo: $(7 – 5)^3$

Primeiro, avalie $7 – 5$: $= 2^3$

Com os parênteses removidos, você está pronto para avaliar o expoente: $= 8$

Às vezes, o próprio expoente contém parênteses. Como sempre, avalie o que está nos parênteses primeiro. Por exemplo, $21^{(19 + \underline{3 \cdot –6})}$ Neste momento, a expressão menor dentro dos parênteses é uma expressão de operação mista. Sublinhei a parte que você precisa calcular primeiro: $= 21^{(19 – 18)}$ Agora você pode terminar com o que está dentro dos parênteses: $= 21^1$

Neste ponto, tudo o que sobra é um expoente muito simples: $= 21$

Portanto $21^{(19 + 3 \cdot -6)} = 21$.

Nota: Tecnicamente, você não precisa colocar os parênteses em volta do expoente. Se você vir uma expressão no expoente, trate-a como se ela tivesse parênteses em volta dele. Em outras palavras, $21^{19 + 3 \cdot -6}$ significa a mesma coisa que $21^{(19 + 3 \cdot -6)}$.

Expressões com with parênteses encaixados

Expressões com parênteses colocados uns dentro de outros: um ou mais conjuntos de parênteses dentro do outro conjunto. Aqui, ofereço para você a regra para controlar os parênteses colocados uns dentro de outros.

LEMBRE-SE

Ao avaliar uma expressão com parênteses colocados uns dentro de outros, avalie o que está dentro do conjunto de parênteses interno primeiro e trabalhar seu caminho para os parênteses externos.

Por exemplo, imagine que você queira avaliar a seguinte expressão: $2 + (9 - \underline{(7 - 3)})$ Sublinhei os conteúdos do conjunto interno dos parênteses, portanto avalie estes conteúdos primeiro: $= 2 + (9 - 4)$ Em seguida, avalie o que está dentro do conjunto de parênteses remanescente: $= 2 + 5$

Agora você pode terminar com as coisas facilmente: $= 7$

Portanto, $2 + (9 - (7 - 3)) = 7$

Como um exemplo final, aqui está uma expressão que requer tudo deste capítulo: $4 + (-7 \cdot (2\underline{(5 - 1)} - 4 \cdot 6))$ Esta expressão é tão complicada quanto você já viu provavelmente na pré-álgebra: um conjunto de parênteses contendo outro conjunto que contém um terceiro conjunto. Para começar com você, sublinhei o que está profundamente dentro deste terceiro conjunto de parênteses. Esta é onde você começa a avaliar: $= 4 + (-7 \cdot (2^4 \underline{- 4 \cdot 6}))$ Agora, o que sobra é um conjunto de parênteses dentro de um outro conjunto. De novo, trabalha de dentro para fora. A menor expressão aqui é $2^4 - 4 \cdot 6$, portanto avalia o expoente primeiro, depois a multiplicação e por fim a subtração: $= 4 + (-7 \cdot (\underline{16 - 4 \cdot 6})) = 4 + (-7 \cdot (\underline{16 - 24})) = 4 + (-7 \cdot -8)$ Apenas mais um conjunto de parênteses para funcionar: $= 4 + 56$

Neste ponto, é fácil terminar: $= 60$

Portanto, $4 + (-7 \cdot (2^{(5 - 1)} - 4 \cdot 6)) = 60$.

Como eu disse antes nesta seção, este problema é tão difícil neste estágio da matemática. Copie-o e tente resolvê-lo passo a passo mantendo o livro fechado.

Capítulo 6

Dizer o quê? Transformando Palavras em Números

Neste Capítulo* ► *Dissipando mitos sobre os problemas de palavras* ► *Conhecendo os quatro passos para resolver um problema de palavras* ► *Escrevendo equações de palavras simples que condensam a informação importante* ► *Escrevendo mais equações de palavras complexas* ► *Colocando números nas equações de palavras para resolver o problema* ► *Atacando os problemas de palavras mais complexos com segurança

Só a palavra "problemas" – ou as estórias de palavras, como são chamados algumas vezes – é suficiente para enviar um terror frio nos ossos da média dos estudantes de matemática. A maioria prefere nadar através de um fosso cheio de crocodilos famintos a "calcular o número de alqueires de milho da Fazenda dos Brown" ou "ajudar a tia Sylvia a decidir o número de biscoitos para fazer". Mas os problemas de palavras ajudam-lhe a entender a lógica por trás da colocação das equações nas situações do mundo real, tornando a matemática útil, de fato – embora os cenários dos problemas de palavras que você pratica sejam muito artificiais.

Neste capítulo, dissipo alguns mitos sobre os problemas de palavras. Portanto, eu mostro para você como resolver um problema de palavras em quatro passos simples. Depois de entender as questões básicas, mostro para você como resolver os problemas mais complexos. Alguns destes problemas têm números longos para calcular e outros podem ter estórias mais complicadas. Em qualquer um dos dois casos, você pode observar como passar por eles passo a passo.

Dispersando dois Mitos sobre Problemas de Palavras

Aqui estão dois mitos comuns sobre os problemas de palavras: ✓Problemas de palavras são sempre difíceis.

✓ Problemas de palavras são apenas para a escola – depois disso, você não precisa deles.

Estas duas ideias não são verdadeiras. Mas elas são tão comuns que quero enviá-las para frente.

Os problemas de palavras não são sempre difíceis

Os problemas de palavras não devem ser difíceis. Por exemplo, aqui está um problema de palavras que você pode ter encontrado na primeira série: Adam tinha 4 maçãs. Depois, Brenda lhe deu mais 5 maçãs. Quantas maçãs Adam tem agora?

Provavelmente você pode fazer matemática na sua cabeça mas quando você estava iniciando a matemática você pode ter escrito: $4 + 5 = 9$

Por fim, se você tivesse um daqueles professores que fez você escrever sua resposta em frases completas, você escreveria “Adam tem 9 maçãs.” (Evidentemente, se você fosse o palhaço da classe, provavelmente você escreveria, “Adam não tem maçãs porque ele comeu todas.”) Os problemas de palavras parecem ser difíceis quando eles ficam muito complexos para resolver na sua cabeça e você não tem um sistema para resolvê-los. Neste capítulo, ofereço-lhe um sistema e mostro para você como aplicá-lo aos problemas aumentando a dificuldade. E nos Capítulos 13, 18 e 24 eu lhe ofereço mais prática para resolver os problemas de palavras mais difíceis.

Os problemas de palavras são úteis

No mundo real, raramente a matemática entra na forma de equações. Ela entra na forma de situações que são muito similares aos problemas de palavras.

Quando você for pintar um quarto, preparar um orçamento, colocar no forno um lote duplo de biscoitos de aveia, calcular o custo das férias, comprar madeira para construir a prateleira, calcular seus impostos ou pesa os para os e contras para comprar um carro ou arrendar um carro, você precisa da matemática. E a prática da matemática que você mais precisa é entender como tornar a situação que você está enfrentando em números que você calcula.

Os problemas de palavras oferecem a você uma prática para tornar situações – isto é, estórias – em números.

Resolvendo Problemas de Palavras Básicos

LEMBRE-SE

Em geral, resolver um problema de palavras envolve quatro passos: **1. Leia o problema e coloque as equações de palavras – isto é, as equações que contêm palavras e números.**

2. **Coloque números no lugar de palavras, onde é possível estabelecer uma equação matemática regular.**
3. **Use a matemática para resolver a equação.**

4. Responda a pergunta do problema.

A maior parte deste livro trata do Passo 3. Este capítulo e os Capítulos 13, 18 e 24 tratam dos Passos 1 e 2. Mostro para você como desfazer um problema de palavras frase por frase, escreva a informação que você precisa para resolver o problema e, depois, substitua os números em palavras para estabelecer uma equação.

Quando você souber como tornar um problema de palavras em uma equação, a parte mais difícil é feita. Assim você pode usar o restante que você acha neste livro para descobrir como fazer o Passo 3 – resolver a equação. A partir daí, geralmente o Passo 4 é muito fácil, embora, no final de cada exemplo meu, tenha a certeza de que você entende como fazer isso.

Tornando problemas de palavras em equações de palavras

O primeiro passo para resolver um problema de palavras é lê-lo e colocar a informação que você acha de forma útil. Nesta seção, mostro para você como espremer o suco de um problema de palavras e deixar para trás os caroços!

Escrevendo a informação como equações de palavras

A maioria dos problemas de palavras informa-lhe sobre os números, dizendo a você exatamente quanto, quantos, quão rápido, quão grande e assim por diante. Aqui estão alguns exemplos: Nunu está girando 17 pratos.

A largura de uma casa é de 80 pés.

Se o trem local corre 25 milhas por hora....

Você precisa desta informação para resolver o problema. E o papel é barato, portanto não tema em utilizá-lo. (Se você está preocupado com as árvores, escreva na parte de trás daquela carta que você recebeu.) Tenha um pedaço de papel de rascunho na mão e escreva algumas notas, conforme você lê um problema de palavras do começo ao fim.

Por exemplo, aqui está como você pode escrever “Nunu está girando 17 pratos”: Nunu = 17

Aqui está como notar que “...a largura da casa é de 80 pés”: Largura = 80

O terceiro exemplo lhe informar-lhe, “Se o trem local corre 25 milhas por hora.....”. Portanto, você pode escrever o seguinte: Local = 25

Não deixa a palavra confundir-lhe. Quando um problema diz “Se fulano de tal fosse verdadeiro....” e, depois faz-lhe uma pergunta, suponha que ele seja verdadeiro e use esta informação para responder a pergunta.

Ao escrever a informação desta forma, de fato você está tornando palavras de forma mais útil chamada equação de palavras. Uma equação de palavras tem um sinal de igualdade como uma equação matemática, mas ela contém palavras e números.

Escrevendo relações: Tornando expressões mais complexas em equações de palavras

Quando você começa a executar problemas de palavras, você nota que algumas palavras e algumas frases se destacam o tempo todo. Por exemplo: Bobo está girando cinco pratos a menos do que Nunu.

> A altura de uma casa é a metade de sua largura.
>
> O trem expresso está se movendo três vezes mais rápido do que o trem local.

Provavelmente, você viu algumas expressões como estas nos problemas de palavras desde que você fizesse matemática primeiro. As expressões parecem com as de português, mas, de fato, elas são de matemática, portanto reconhecê-las é importante. Você pode representar cada um destes tipos de expressões como equações de palavras que usam também as Quatro Grandes operações. Observe de novo o primeiro exemplo: Bobo está girando cinco pratos a menos do que Nunu.

Você não conhece o número de pratos que Bobo ou Nunu está girando. Mas sabe que estes dois números são relatados.

Você pode expressar esta relação da seguinte forma: Bobo = Nunu – 5

Esta equação de palavra é mais curta do que a expressão original. E como você observa na próxima seção, as equações de palavras são fáceis de tornarem-se equações de matemática que você precisa resolver o problema.

Aqui está um outro exemplo: A altura de uma casa é a metade de sua largura.

Você não conhece a largura nem a altura da casa, mas você sabe que estes dois números são conectados.

Você pode expressar esta relação entre a largura e a altura da casa conforme a seguinte equação de palavras: Altura = largura ÷ 2

Com o mesmo tipo de pensamento, você pode expressar que o trem expresso está se movendo três vezes mais rápido do que o trem local conforme esta equação de palavras:

Expresso = 3 · local Como você pode observar, cada um dos exemplos lhe permite estabelecer uma equação de palavras usando uma das Quatro grande operações — adição, subtração, multiplicação e divisão.

Entendendo o que o problema está pedindo

O final de um problema de palavras contém, geralmente, a pergunta que você precisa responder para resolver o problema. Você pode usar as equações de palavras para esclarecer esta pergunta, portanto conhece do começo o que você está procurando.

Por exemplo, você pode escrever a pergunta: “De uma vez, quantos pratos Bobo e Nunu estão girando?”, como: Bobo + Nunu = ?

Você pode escrever a pergunta “Qual é o tamanho da casa!”, como: Altura = ?

Por fim, você pode criar uma nova frase para a pergunta “Qual é a diferença de velocidade entre o trem expresso e o trem local?”, desta forma: Expresso – Local = ?

Entrando com números no lugar de palavras

Depois de escrever um punhado de equações de palavras, você tem os fatos que você precisa de uma forma que você pode usar. Agora, geralmente, você pode resolver o problema, colocando números a partir de uma equação de palavras em uma outra. Nesta seção, mostro para você como usar as equações de palavras que você criou na última seção para resolver três problemas.

Exemplo: Que entrem os palhaços

Alguns problemas envolvem uma adição simples ou uma subtração. Aqui está um exemplo: Bobo está girando cinco pratos a menos do que Nunu (Bobo deixou cair alguns). Nunu está girando 17 pratos. De uma vez, quantos pratos Bobo e Nunu estão girando?

Aqui está o que você já tem, apenas a partir da leitura do problema: Nunu = 17

> Bobo + 5 = Nunu Colocar a informação oferece a você o seguinte: Bobo + 5 = Nunu 17

Se você observar muitos pratos que Bobo está girando, sinta-se livre para pular na frente. Caso contrário, aqui está como você reescreve a equação da adição como uma equação da subtração (veja Capítulo 4 para maiores detalhes): Bobo = 17 – 5 = 12

O problema quer que você descubra quantos pratos os dois palhaços estão girando juntos. Isto é, você precisa descobrir o seguinte: Bobo + Nunu = ?

Coloque apenas os números, substituindo 12 por Bobo e 17 por Nunu: Bobo 12 + Nunu 17 = 29

Portanto, Bobo e Nunu estão girando 29 pratos.

Exemplo: Nossa casa no meio da rua

Às vezes, um problema pode constatar relações que exigem de você o uso da multiplicação ou da divisão. Aqui está um exemplo: A altura de uma casa é a metade de sua largura, e a largura da casa é de 80 pés. Qual é o altura da casa?

Você já tem uma vantagem a partir do que você determinou antes: Largura = 80

Altura = Largura ÷ 2

Você pode colocar a informação como segue, substituindo 80 pela palavra largura: Altura: Largura 80 ÷ 2 = 40

Portanto você pode saber que a altura da casa é de 40 pés.

Exemplo: Eu ouço o trem chegando

Preste atenção na pergunta. Você pode ter que colocar mais de uma pergunta. Aqui está um exemplo: O trem expresso está se movendo três vezes mais rápido do que o trem local. Se o trem local correr 25 milhas por hora, qual é a diferença de velocidade entre o trem expresso e o trem local?

Aqui está o que você tem até agora: Local = 25

Expresso = 3 · Local Portanto, coloque a informação que você precisa: Expresso = 3 · 25 Local = 75

Neste problema, a pergunta no final é achar a diferença de velocidade entre o trem expresso e o trem local. Achando a diferença entre dois números é a subtração, portanto aqui está o que você quer achar: Expresso – Local = ?

Você pode obter o que você precisa saber ao colocar a informação que você já achou: Expresso 75 – Local 25 = 50

Portanto, a diferença de velocidade entre o trem expresso e o trem local é de 50 milhas por hora.

Resolvendo Problemas Matemáticos Mais Complexos

As práticas que eu mostro para você anteriormente em “Resolvendo Problemas de Palavras Básicos” são importantes para resolver qualquer problema de palavras elas simplificam o processo e torna mais simples. E, além do mais, você pode usar aquelas mesmas práticas para achar seu caminho através dos problemas mais complexos. Os problemas tornam-se mais complexos quando: ✓Os cálculos ficam mais difíceis. (Por exemplo, ao invés de um vestido custar $ 30,00, agora ele custa $ 29,95.) ✓A quantidade de informação do problema aumenta. (Por exemplo, ao invés de dois palhaços agora são cinco).

Não deixa que os problemas como estes lhe assustam. Nesta seção, mostro para você como usar seu novo problema resolvendo as práticas e os problemas de palavras mais difíceis.

Quando os números ficam mais sérios

Um monte de problemas que parecem duros não são mais difíceis que os problemas que mostro para você, nas seções anteriores. Por exemplo, considere este problema: Tia Effie tem $ 732,84 escondidos em uma fronha e Tia Jezebel tem $ 234,19 a menos que Tia Effie tem. Que valor as duas mulheres têm juntas?

Sua pergunta é como estas mulheres já tiveram sono com toda aquela mudança tilintando suas cabeças. Mas, ao avançar na matemática, embora os números sejam maiores, o princípio é, ainda, o mesmo, como nos problemas das seções anteriores. Começa a ler a partir do início: "Tia Effie tem $ 732,84..." Este texto é apenas uma informação para escrever como uma simples equação de palavras: Effie = $ 732,84

Continuando, você lê: "...Tia Jezebel tem $ 234,19 a menos do que Tia Effie". É uma outra expressão que você pode escrever como uma equação de palavras.

Jezebel = Effie – $ 234,19

Agora você pode colocar o número $ 732,84, onde vê o nome da Tia Effie na equação: Jezebel = Effie $ 732,84 – $ 234,19

Até agora, os grandes números não tiveram nenhum problema. Neste ponto, embora você precise provavelmente parar de fazer a subtração.

$$\begin{array}{r} \$732{,}84 \\ \underline{-\$234{,}19} \\ \$498{,}65 \end{array}$$

Agora, você pode escrever ainda esta informação assim: Jezebel = $498,65

A questão no final do problema é descobrir quanto dinheiro as duas mulheres têm juntas. Aqui está como representar esta pergunta como uma equação: Effie + Jezebel = ?

Você pode colocar a informação nesta equação: Effie $ 732,84 + Jezebel $ 498,65 = ?

De novo, pelos números serem maiores, provavelmente você deve parar de fazer matemática:

$$\begin{array}{r} \$732{,}84 \\ \underline{+\$498{,}65} \\ \$1.231{,}49 \end{array}$$

Portanto, todas juntas, Tia Effie e Tia Jezebel têm $ 1.231,49.

Como você pode observar, o procedimento para resolver este problema é, basicamente, o mesmo, nos problemas mais simples das seções anteriores. A única diferença é que você deve parar de fazer adição e subtração.

Muita informação

Quando as condições ficam difíceis, conhecer o sistema para escrever as equações de palavras torna-se, de fato, útil. Aqui está um problema de palavras para assustar-lhe – mas com novas práticas você está pronto para isso: Quatro mulheres juntam dinheiro para salvar o besouro ameaçado em Salt Creek. Keisha juntou $ 160, Brie acumulou $ 50 a mais que

Keisha, Amy levantou duas vezes mais dinheiro que Brie e, juntas, Amy e Sophia juntaram $ 700. Quanto dinheiro as quatro mulheres coletaram juntas?

Se você tentar fazer este problema todo em sua cabeça, provavelmente você ficará confuso. Em substituição, pegue-o linha por linha e escreve apenas as equações de palavras conforme discuto antes, neste capítulo.

Primeiro, “Keisha juntou $ 160”. Portanto, escreve o seguinte: Keisha = 160

Próximo passo, “Brie acumulou $ 50 dólares a mais que Keisha,” portanto escreva Brie = Keisha + 50

Depois disso, “Amy cobrou duas vezes tanto quanto a Brie”: Amy = Brie · 2

Depois disso, “Amy e Sophia juntaram $ 700”: Amy + Sophia = 700

São todas as informações que o problema oferece para você, portanto, agora, você pode começar a trabalhar com ele. Keisha juntou $ 160, portanto você pode colocar 160 em algum lugar onde tiver o nome dela: Brie = Keisha 160 + 50 = 210

Agora você sabe quanto Brie juntou, portanto você pode colocar esta informação na próxima equação: Amy = Brie 210 · 2 = 420

Esta equação informa a você quanto Amy juntou, portanto você pode colocar este número na última equação: Amy 420 + Sophia = 700

Para resolver este problema, mude esta equação da adição para a subtração, usando as operações inversas, como mostro para você, no Capítulo 4: Sophia = 700 – 420 = 280

Agora que você sabe quanto dinheiro cada mulher juntou, você pode responder à pergunta no final do problema: Keisha + Brie + Amy + Sophia = ?

Você pode colocar esta informação facilmente: Keisha 160 + Brie 210 + Amy 420 + Sophia 280 = 1070

Portanto você pode concluir que as quatro mulheres juntaram $ 1.070,00.

Colocando-o de uma vez

Aqui está um exemplo final para colocar tudo junto, a partir deste capítulo. Tente escrever este problema e verifique-o passo a passo. Se você chegar a um impasse, volte aqui. Quando você puder resolvê-lo do início ao fim com o livro fechado, terá um bom domínio sobre como resolver os problemas de palavras: Em um recente passeio de compras, Travis comprou seis camisas por $ 19,95 cada e dois pares de sapatos por $ 34,60 cada. Depois ele comprou uma jaqueta que custa $ 37,08 menos que ele pagou para as duas calças. Se ele pagou ao caixa com três notas de $ 100, quanto de troco ele recebeu?

Na primeira leitura do começo ao fim, você pode se perguntar como Travis achou uma loja que põe preços em jaquetas daquela forma. Acredite em mim – foi quase um desafio. De qualquer modo, volte ao problema. Você pode escrever as seguintes equações de palavras: Camisas = $ 19,95 · 6

Calças = $ 34,60 · 2

Jaqueta = Calças – $ 37,08

Os números deste problema são, provavelmente, mais longos do que você pode resolver na sua cabeça, portanto eles exigem alguma atenção:

$$\begin{array}{r} \$19{,}95 \\ \underline{\times \quad\quad 6} \\ \$119{,}70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \$34{,}60 \\ \underline{\times \quad\quad 2} \\ \$69{,}20 \end{array}$$

Depois de fazer isso, você pode preencher algumas informações: Camisas = $ 119,70

Calças = $ 69,20

Jaqueta = Calças – $ 37,08

Agora você pode colocar $69,20 a calças: Jacket = Pants $69,20 – $37,08

De novo, porque os números são longos, você precisa resolver esta equação separadamente:

$$\begin{array}{r} \$69{,}20 \\ \underline{-\$37{,}08} \\ \$32{,}12 \end{array}$$

Esta equação lhe oferece o preço da jaqueta: Jaqueta = $ 32,12

Agora que você tem o preço das camisas, das calças e da jaqueta, você pode descobrir quanto dinheiro Travis gastou: Valor gasto pelo Travis = Shirts $ 119,70 + Pants $ 69,20 + Jacket $ 32,12

De novo, você tem uma outra equação para resolver:

$$\begin{array}{r} \$119{,}70 \\ \$69{,}20 \\ \underline{+\ \$32{,}12} \\ \$221{,}02 \end{array}$$

Portanto, você pode escrever o seguinte: Valor gasto pelo Travis = $ 221,02

O problema é descobrir quanto de troco Travis recebeu dos $ 300, portanto escreva o seguinte: Troco = $ 300 = Valor gasto pelo Travis Você pode colocar a quantia que Travis gastou: Troco = $300 – $221,02

E faça apenas mais uma equação:

$$\begin{array}{r} \$300{,}00 \\ \underline{-\$221{,}02} \\ \$78{,}98 \end{array}$$

Você pode colocar o valor gasto pelo Travis: Troco = $ 78,98

Portanto, Travis recebeu $ 78,98 de troco.

Capítulo 7

Divisibilidade

Neste Capítulo ► Descobrindo se um número é divisível por 2, 3, 5, 9, 10 ou 11

► Observando a diferença entre os números primos e os números compostos

Quando um número é divisível por um outro, você pode dividir o primeiro número pelo segundo número sem obter o resto (veja Capítulo 3, para mais detalhes sobre a divisão). Neste capítulo eu exploro a divisibilidade a partir de vários ângulos.

Para começar, mostro para você um punhado de truques úteis para descobrir se um número é divisível por um outro sem, de fato, fazer a divisão. (De fato, não existe uma divisão longa neste capítulo!). Depois disso eu falo sobre os números primos e os números compostos (que apresento brevemente, no Capítulo 1).

Esta discussão mais o que segue no Capítulo 8 podem lhe ajudar a ter um encontro mais amigável com as frações na Parte III.

Conhecendo os Truques da Divisibilidade

Como você como começa a trabalhar com frações na Parte III, a pergunta se um número é divisível por um outro número vem muito à tona. Nesta seção, eu lhe ofereço um punhado de truques para ganhar tempo, a fim de descobrir se um número é divisível por um outro número sem que você faça de fato a divisão.

Considerando todos: Números que você pode dividir tudo por

Todo número é divisível por 1. Como você pode observar, quando você divide um número por 1, a resposta é o mesmo número, sem nenhum resto: 2 ÷ 1 = 2

17 ÷ 1 = 17

431 ÷ 1 = 431

Do mesmo modo, todo número (exceto 0) é divisível por ele mesmo. De forma clara, quando você divide qualquer número por ele mesmo, a resposta é 1.: 5 ÷ 5 = 1

28 ÷ 28 = 1

873 ÷ 873 = 1

Você não pode dividir nenhum número por 0. Os matemáticos dizem que dividir por 0 é indefinido.

No final: Observando os dígitos finais

Você pode dizer se um número é divisível por 2, 5, 10, 100 ou 1000 simplesmente observando como os números terminam. Os cálculos não são exigidos.

Divisível por 2

Ainda todo número – isto é, todo número que termina com 2, 4, 6, 8 ou 0 – é divisível por 2. Por exemplo, os seguintes números colocados em negrito são divisíveis por 2:

6 ÷ 2 = 3	**538** ÷ 2 = 269	**77.144** ÷ 2 = 38.572
22 ÷ 2 = 11	**6790** ÷ 2 = 3395	**212.116** ÷ 2 = 106.058

Divisível por 5

Todo número que termina com 5 ou 0 é divisível por 5. Os seguintes números colocados em negrito são divisíveis por 5:

15 ÷ 5 = 3	**6970** ÷ 5 = 1394	**511.725** ÷ 5 = 102.345
625 ÷ 5 = 125	**44.440** ÷ 5 = 8.888	**9.876.630** ÷ 5 = 1.975.326

Divisível por 10, 100 ou 1000

Todo número que termina com 0 é divisível por 10. Os seguintes números colocados em negrito são divisíveis por 10:

20 ÷ 10 = 2   **170** ÷ 10 = 17   **56.720** ÷ 10 = 5.672

Todo número que termina com 00 é divisível por 100:

300 ÷ 100 = 3   **8300** ÷ 100 = 83   **634.900** ÷ 100 = 6349

E todo número que termina com 000 é divisível por 1000:

6000 ÷ 1000 = 6   **99.000** ÷ 1000 = 99   **1.234.000** ÷ 1000 = 1234

Em geral, todo número que termina com uma série de zeros é divisível pelo número que você tem quando você escreve 1 seguido de muitos zeros. Por exemplo, 900.000 é divisível por 100.000

235.000.000 é divisível por 1.000.000

820.000.000.000 é divisível por 10.000.000.000

Quando os números começam aumentar, em geral os matemáticos os trocam pela notação científica para escrevê-los de forma mais eficiente. No Capítulo 14, mostro para você tudo sobre como trabalhar com a notação científica.

Somar o número: Verificando a divisibilidade ao somar dígitos

Às vezes você pode verificar a divisibilidade somando tudo ou alguns dos dígitos em um número. A soma dos dígitos de um número é chamada de raízes digitais. Achar a raiz digital de um número é fácil, e ela é útil de saber.

Para achar a raiz digital de um número, some apenas os dígitos e repetir este procedimento até você ter um número de um dígito. Aqui tem alguns exemplos: A raiz digital de 24 é 6 porque $2 + 4 = 6$

A raiz digital de 143 é 8 porque $1 + 4 + 3 = 8$

A raiz digital de 51.111 é 9 porque $5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$.

Algumas vezes, você precisa fazer este procedimento mais de uma vez. Aqui está como achar a raiz digital do número 87.482. Você deve repetir o procedimento três vezes, mas, eventualmente, você descobre que a raiz digital é 2: $8 + 7 + 4 + 8 + 2 = 29$

$2 + 9 = 11$

$1 + 1 = 2$

Leia para descobrir como as somas de dígitos podem lhe ajudar a verificar a divisibilidade de 3, 9 ou 11.

Divisível por 3

Todo número cuja raiz digital é 3, 6 ou 9 é divisível por 3.

Primeiro, ache a raiz digital de um número somando seus dígitos até você ter um número com um único dígito. Aqui estão as raizesraízes digitais de 18, 51 e 975: $18 \div (1 + 8) = 9$

$51 \div (5 + 1) = 6$

$975 \div 3$ $(9 + 7 + 5 = 21; 2 + 1 = 3)$ Com os números 18 e 51, somar os dígitos leva imediatamente às raízes digitais 9 e 6 respectivamente. Com o número 975, quando você soma os dígitos, primeiro você obtém o número 21, portanto, você soma depois os dígitos de 21 para ter a raiz digital 3. Portanto, todos estes números são divisíveis por 3. Se você fizer a divisão atual, descobrirá que 18 ÷ 3 = 6, 51 ÷ 3 = 17, e 975 ÷ 3 = 325, portanto o método confere.

Entretanto, quando a raiz digital de um número não for 3, 6 ou 9, o número não é divisível por 3: 1037 ÷ 1 + 0 + 3 + 7 = 11; 1 + 1 = 2

Como a raiz digital de 1037 é 2, 1037 não é divisível por 3. Se você tentar dividir por 3, você terminará com 345 r 2.

Divisível por 9

Todo número cuja raiz digital é 9 é divisível por 9.

Para testar se um número é divisível por 9, procure sua raiz digital somando seus dígitos até você ter um número com um dígito. Aqui tem alguns exemplos: 36 ÷ 3 + 6 = 9

243 ÷ 2 + 4 + 3 = 9

7587 ÷ 7 + 5 + 8 + 7 = 27; 2 + 7 = 9

Com os números 36 e 243, somar os dígitos leva imediatamente às raízes digitais de 9, nos dois casos. Com 7,587, entretanto, quando você soma os dígitos você obtém o número 27, portanto depois você soma os dígitos de 27 para obter a raiz digital de 9. Portanto, todos estes números são divisíveis por 9. Você pode verificar este fazendo a divisão: 36 ÷ 9 = 4, 243 ÷ 9 = 27 e 7857 ÷ 9 = 873.

Entretanto, quando a raiz digital de um número não é 3, 6 ou 9, o número não divisível por 3. Aqui está um exemplo: 706 ÷ 7 + 0 + 6 = 13; 1 + 3 = 4

Como a raiz digital de 706 é 4, o número 706 não é divisível por 9. Se você tentar dividir 706 por 9, você terá 78 r 4.

Divisível por 11

Os números com dois dígitos que são divisíveis por 11 são difíceis de perder porque eles repetem simplesmente os mesmos dois dígitos. Aqui tem alguns números inferiores a 100 que são divisíveis por 11:

11 22 33 44 55 66 77 88 99

Para os números entre 100 e 200, usa esta regra: Todo número com três dígitos cuja soma do primeiro e do terceiro dígito é igual ao segundo dígito é divisível por 11. Por exemplo, imagine que você queira decidir se o número 154 é divisível por 11. Some apenas o primeiro e o terceiro dígito: 1 + 4 = 5

Como a soma destes dois números são iguais ao segundo dígito 5, o número 154 é divisível por 11. Se você divide você obtém 154 ÷ 11 = 14, um número inteiro.

Agora, imagine que você queira entender se 136 é divisível por 11. Some o primeiro e o terceiro dígito: 1 + 6 = 7

Como a soma do primeiro e do terceiro dígito é igual a 7 ao invés de 3, o número 136 não é divisível por 11. Você pode descobrir que 136 ÷ 11 = 12 r 4

Para os números de qualquer comprimento, a regra é um pouco mais complicada, mas ainda mais fácil do que fazer uma longa divisão. Um número é divisível por 11 quando seus dígitos substitutos: ✓Somam-se ao mesmo número ou ✓Somam-se a dois números que, quando um número é subtraído de um outro, resulta em um número divisível por 11.

Por exemplo, imagine que você queira descobrir se o número 15.983 é divisível por 11. Para começar, sublinhe os dígitos substitutos (todo outro dígito): $\underline{1}5.\underline{9}8\underline{3}$

Agora, some os dígitos sublinhados e os dígitos não sublinhados: $$\underline{1}5{,}\underline{9}8\underline{3} \begin{cases} \underline{1}+\underline{9}+\underline{3}=\underline{13} \\ 5+8=13 \end{cases}$$

Como a soma destes dois conjuntos de dígitos é igual a 13, o número 15.983 é divisível por 11. Se você verificar a divisão, 15.983 ÷ 1453.

Agora imagine que você queira descobrir se 9.181.909 é divisível por 11. De novo, sublinhe os dígitos substitutos e some os dois grupos: $$\underline{9}{,}1\underline{8}1{,}\underline{9}0\underline{9} \begin{cases} \underline{9}+\underline{8}+\underline{9}+\underline{9}=\underline{35} \\ 1+1+0=2 \end{cases}$$

Obviamente, 35 e 2 não são iguais. Mas note que 35 – 2 = 33. Como 33 é divisível por 11, o número 9.181.909 é também divisível por 11. A resposta atual é 9.181.909 ÷ 11 = 834.719

Identificando Números Compostos e Primos

Antes, na seção chamada “Considerando todos: Números que você pode dividir tudo por”, mostro para você que todo número (exceto 0 e 1) é divisível por dois números, pelo menos: 1 e ele próprio. Nesta seção, exploro os números primos e os números compostos (que apresento para você, no Capítulo 1).

No Capítulo 8, você precisa saber como diferenciar os números primos dos números compostos para desfazer um número nos seus fatores primos. Isso, alternadamente, é importante, quando você começa a trabalhar com as frações.

Um número primo é divisível por exatamente dois números inteiros positivos: 1 e o próprio número. Um número composto é divisível por três números, pelo menos.

Por exemplo, 2 é um número primo, porque quando você o divide por qualquer número, exceto 1 e 2, você obtém um resto. Portanto, existe apenas uma forma de multiplicar dois números contáveis juntos e obter 2 como um produto: $1 \cdot 2 = 2$

Do mesmo modo, 3 é um número primo porque quando você divide por qualquer número exceto 1 ou 3, você obtém um resto. Portanto, a única forma de dividir dois números juntos e obter 3 como um produto é o seguinte: $1 \cdot 3 = 3$

Do outro lado, 4 é um número composto porque é divisível por três números: 1, 2 e 4. Neste caso, você tem duas formas de multiplicar dois números contáveis e obter um produto de 4: $1 \cdot 4 = 4$

$2 \cdot 2 = 4$

Mas 5 é um número primo, porque ele é divisível apenas por 1 e 5. Aqui está a única forma de multiplicar dois números contáveis juntos e obter 5 como um produto: $1 \cdot 5 = 5$

E 6 é um número composto, porque ele é divisível por 1, 2, 3 e 6. Aqui estão duas formas de multiplicar os números contáveis e obter um produto de 6: $1 \cdot 6 = 6$

$2 \cdot 3 = 6$

Todo número contável, exceto 1, é um número primo ou composto. Porque 1 é divisível por apenas um número 1.

Aqui está uma lista dos números primos que são inferiores a 30: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Lembre-se dos quatro primeiros números primos: 2, 3, 5 e 7. Todo número composto inferior a 100 é divisível por um destes números, pelo menos. Este fato torna-o mais fácil para testar se um número abaixo de 100 é primo: Faça um teste simples para saber se ele é divisível por 2, 3, 5 e 7. Se ele é divisível por qualquer um destes números, ele é um número composto – caso contrário, ele é um número primo.

Por exemplo, imagine que você queira descobrir se o número 79 é um número primo ou composto sem fazer a divisão, de fato. Aqui está como você planeja isso usando os truques que mostro para você antes, em “Conhecendo os Truques da Divisibilidade”: ✓79 é um número ímpar portanto ele não é divisível por 2.

- ✓ 79 Não é divisível por 3, pois a soma de seus algarismos (7 + 9 = 16) não é divisível por 3.
- ✓ O número 79 não termina com 5 ou 0, portanto ele não é divisível por 5.
- ✓ Embora não exista nenhum truque para a divisibilidade por 7, você sabe que 77 é divisível por 7. Portanto, 79 + 7 teria como resto 2 que lhe diz que 79 não divisível por 7.

Como 79 é inferior a 100 e não é divisível por 2, 3, 5 ou 7, você sabe que 79 é um número primo.

Agora teste se 93 é um número primo ou composto: ✓93 é um número ímpar, portanto ele não é divisível por 2.

- ✓ 93 tem uma raiz digital de 3 (porque 9 + 3 = 12 e 1 + 2 = 3) portanto 93 é divisível por 3.

Você não precisa olhar mais longe. Porque 93 ser divisível por 3, você sabe que ele é um número composto.

Capítulo 8

Fatores Fabulosos e Múltiplos Maravilhosos

Neste Capítulo* ► *Entendendo como os fatores e os múltiplos relacionam-se* ► *Listando todos os fatores de um número* ► *Desfazendo um número nos seus fatores primos* ► *Gerando múltiplos de um número* ► *Descobrindo o Máximo Divisor Comum (MDC) e o Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

No Capítulo 2, apresento para você sequências de números baseadas na tabuada. Neste capítulo, informo para você duas formas importantes para pensar sobre estas sequências: como fatores e múltiplos. Os fatores e os múltiplos são, de fato, duas faces de uma mesma moeda. Aqui mostro para você o que precisa saber sobre estes dois conceitos importantes.

Para os iniciantes, mostro como decompor (dividir) qualquer número nos seus fatores primos. Ao longo do caminho, ofereço para vocês um punhado de truques úteis para descobrir se um número é um fator de um outro número. Para terminar com os fatores, mostro para vocês como descobrir o Máximo Divisor Comum (MDC) de qualquer conjunto de números. Depois disso, eu abordo os múltiplos mostrando para vocês duas formas de descobrir o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de um conjunto de números.

Conhecendo Seis Formas de Dizer a Mesma Coisa

Nesta seção, apresento para você os fatores e os múltiplos e como estes dois conceitos importantes relacionam-se. Como discuto no Capítulo 4, a multiplicação e a divisão são operações inversas. Por exemplo, a seguinte equação é verdadeira: $5 \cdot 4 = 20$

Portanto, a equação inversa é verdadeira também: $20 \div 4 = 5$

Você pode ter notado que, em matemática, você tende a bater na mesma ideia de novo. Por exemplo, os matemáticos têm seis formas diferentes para falar desta relação.

As seguintes três expressões concentram a relação entre 5 e 20, a partir da perspectiva da multiplicação: ✓5 multiplicado por algum número é igual a 20

✓ 5 é um fator de 20

✓ 20 é um múltiplo de 5

Nos dois exemplos, você pode observar a relação expressa nas palavras multiplicado e múltiplo. Para o exemplo restante, coloque em mente que dois fatores são multiplicados para ser igual a um produto.

Do mesmo modo, todas as seguintes três expressões concentram-se na relação entre 5 e 20 a partir da perspectiva da divisão: ✓20 dividido por um número é igual a 5

✓ 20 é divisível por 5

✓ 5 é um divisor de 20

Por que os matemáticos precisam de todas estas palavras para expressar a mesma coisa? Talvez para a mesma razão que os Esquimós precisam de um punhado de palaveas para a neve. De qualquer forma, neste capítulo, me concentro nas palavras fator e múltiplo. Quando você entende os conceitos, a palavra que você escolhe não importa.

Conectando Fatores e Múltiplos

Quando um número é um fator de um segundo número, o segundo número é um múltiplo do primeiro número. Por exemplo, 20 é divisível por 5, portanto ✓5 é um fator de 20

✓ 20 é um múltiplo de 5

Não misture o número do fator com o do múltiplo. O fator é sempre o menor número e o múltiplo é sempre o número superior.

Se você tem problema para lembrar do fator e do múltiplo, escreva-os na ordem de inferior a superior e anote as letras F e M na ordem alfabética delas.

Por exemplo, 10 divide 40 equilibradamente, portanto escreva:

10	40
F	M

Este arranjo deve lhe lembrar que 10 é um fator de 40 e que 40 é um múltiplo de 10.

Fatores Fabulosos

Nesta seção, apresento para você os fatores. Primeiro, mostro-lhe como descobrir se um número é um fator de um outro. Depois mostro para você como listar os fatores de um número. Depois disso, apresento a ideia-chave dos fatores de um número primo. Toda esta informação leva a uma habilidade essencial: descobrir o Máximo Divisor Comum (MDC) de um conjunto de números.

Decidindo quando um número é um fator do outro

Você pode dizer facilmente se um número é um fator de um segundo número: Divide apenas o segundo número pelo primeiro. Se ele divide equilibradamente (sem resto), o número é um fator; caso contrário, ele não é um fator.

Por exemplo, imagine que você queira saber se 7 é um fator de 56. Aqui está como você descobre: $56 \div 7 = 8$

Como 7 divide 56 sem deixar um resto, 7 é um fator de 56.

E aqui está como você descobre se 4 é um fator de 34: $34 \div 4 = 8$ r 2

Como 4 divide 34 com um resto 2, 4 não é um fator de 34.

Este método funciona não importa o tamanho dos números.

Alguns professores usam os problemas da fatoração para testar você na divisão longa. Para refrescar sua cabeça sobre como fazer a divisão longa, veja o Capítulo3.

Gerando fatores de um número

O maior fator de qualquer número é o mesmo número, portanto você pode listar sempre todos os fatores de qualquer número porque você tem uma conclusão. Aqui está como listar todos os fatores de um número: **1. Começar a lista com 1, deixar algum espaço para outros números e terminar a lista com o mesmo número.**

2. Testar se 2 é um fator – isto é, ver se o número é divisível por 2 (para os truques sobre o teste para divisibilidade, veja o Capítulo 7).

Se for o caso, some 2 à lista aqui com o número original dividido por 2, assim como o segundo ao último número na lista.

3. Teste o número 3 da mesma forma.

4. Continue testando os números até que o início da lista esteja com o final da lista.

Um exemplo deve ajudar a esclarecer isso. Imagine que você queira listar todos os fatores de um número 18. De acordo com o Passo 1, inicie a lista com 1 e termine com 18.

1 18

Lembre do Capítulo 7 que todo número – se for primo ou composto – é divisível por ele mesmo e por 1. Portanto, automaticamente, 1 e 18 são dois fatores de 18.

Próximo passo, teste se o número 2 é um fator de 18: 18 ÷ 2 = 9

Como 2 divide 18 sem um resto, 2 é um fator de 18. (Para um punhado de truques sobre divisibilidade fácil, verifique o Capítulo 3.) Portanto, ambos, 2 e 9, são fatores de 18, e você pode somá-los junto à lista: 1 2 ... 9 18

Note que eu somo 9, assim como o segundo ao último número da lista. Fazer isso lembra você que você não deve verificar nenhum número superior a 9.

Agora teste 3 da mesma forma: 18 ÷ 3 = 6

Portanto, ambos, 3 e 6, são fatores de 18: 1 2 3 ... 6 9 18

Neste ponto, você fez quase tudo. Você deve verificar apenas os números entre 3 e 6 – isto é, os números 4 e 5: 18 ÷ 4 = 4 r 2

18 ÷ 5 = 3 r 2

Portanto, 4 e 5 não são fatores de 18, portanto esta é uma lista dos fatores de 18: 1 2 3 6 9 18

Fatores Primos

No Capítulo 7, discuto os números primos e os números compostos. Um número primo é divisível apenas por 1 e pelo mesmo número – por exemplo, o número 7 é divisível apenas por 1 e 7. Do outro lado, um número composto é divisível por, pelo menos, mais de um número, além de 1 e por ele mesmo – por exemplo, o número 9 é divisível não apenas por 1 e 9 mas também por 3.

Os fatores de um número primo são o conjunto dos números primos (inclusive repete) igual àquele número quando ele é multiplicado junto. Por exemplo, aqui estão os fatores primos dos números 10, 30 e 72: 10 = 2 · 5

30 = 2 · 3 · 5

72 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3

No último exemplo, os fatores primos de 72 incluem o número 2 repetido três vezes e o números 3 repetido duas vezes.

A melhor forma de desfazer um número composto nos fatores primos é usar a árvore de fatoração. Aqui está como ela funciona: **1. Dividir o número em dois fatores de alguma forma escreve o número original.**

2. Se um destes números é um número primo cercado.

3. **Repete os passos 1 e 2 para qualquer número que nem é cercado nem verificado.**
4. **Quando todo número na árvore é verificado ou cercado, a árvore está completa, e os números cercados são os fatores primos do número original.**

Por exemplo, para desfazer o número 56 nos seus fatores primos, tente descobrir dois números (além de 1 ou 56) que, quando multiplicados ofereçam a você um produto de 56. Neste caso, lembre daquele produto 7 · 8 = 56. Veja Figura 8-1.

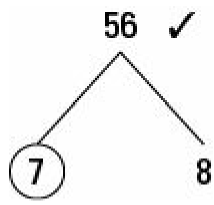


Figura 8-1: Descobrindo dois fatores de 56; 7 é um número primo.

Como você pode observar, desfaço 56 em dois fatores e escrevo-o. Cerco o número no 7, porque ele é um número primo. Agora, o número 8 não é nem verificado nem cercado, portanto repito o procedimento, assim como mostrado na Figura 8-2.

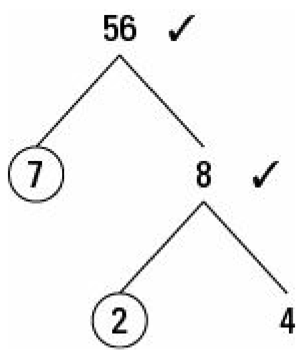


Figura 8-2: Continuando a desfazer o número com 8

Neste momento, desfaço 8 em dois fatores (2 · 4 = 8) e escrevo-o. Neste momento, 2 é um número primo, portanto cerco o número. Mas 4 permanece não verificado e não cercado, portanto continuo com Figura 8-3.

Neste ponto, todo número na árvore é cercado ou verificado, portanto a árvore está completa. Os quatro números cercados – 2, 2, 2 e 7 – são os fatores primos de 56. Para verificar este resultado, multiplique apenas os fatores primos juntos: 2 · 2 · 2 · 7 = 56

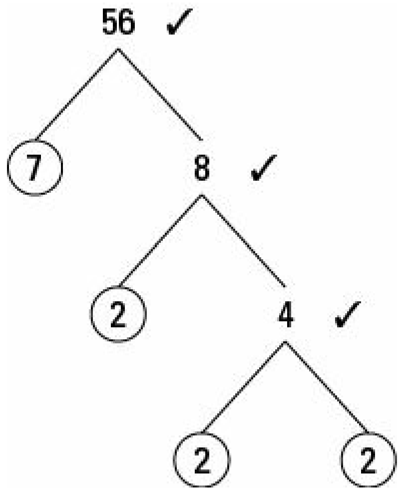


Figura 8-3: A árvore completa a partir da figura 8-1.

Você pode observar porque ele é chamado de árvore. Começando no topo, os números ramificam-se como uma árvore de cima para baixo.

O que acontece quando você tenta construir uma árvore começando com um número primo – por exemplo, 7? Bem, você não deve ir muito longe (veja Figura 8-4).

Figura 8-4: Começando com um número primo.

Isto é – você está pronto! Este exemplo mostra para você que todo número primo é seu próprio fator primo.

Aqui está uma lista de números inferiores a 20 com suas fatorações primas. (Como você por ser, no Capítulo 2, 1 não é nem um número primo nem composto, portanto ele não tem uma fatoração prima).

2	8 = 2 . 2 . 2	14 = 2 . 7
3	9 = 3 . 3	15 = 3 . 5
4 = 2 . 2	10 = 2 . 5	16 = 2 . 2 . 2 . 2
5	11	17
6 = 2 . 3	12 = 2 . 2 . 3	18 = 2 . 3 . 3
7	13	19

Como você pode observar, os oito números primos que eu listo aqui são suas próprias fatorações primas. Os números remanescentes são compostos, portanto todos eles podem ser desfeitos em menores fatores primos.

Todo número tem uma única fatoração prima. Este fato é importante – tão importante que ele é chamado o Teorema Fundamental da Aritmética. De um modo, a fatoração prima de um número é como uma impressão digital – um modo único e garantido para identificar um número.

Conhecer como desfazer um número de sua fatoração prima é uma habilidade útil para se ter. Usar a árvore de fatoração permite-lhe “fatorar” um número após o outro até todo o restante dos números primos.

Descobrindo as fatorações primas para os números iguais ou inferiores a 100

Ao construir uma árvore de fatoração, o primeiro passo é sempre o mais difícil. Por isso conforme você procede os números ficam menores e mais fáceis para funcionar. Com bastante números pequenos, a árvore de fatoração é sempre fácil de usar.

Como o número que você tenta “fatorar” aumenta, você pode achar o primeiro passo um pouco mais difícil. É especialmente verdadeiro quando você não reconhece o número na tabuada. O truque é descobrir algum lugar para começar.

DICA Quando for possível, “fatore” primeiro os números 5 e 2. Como eu discuto no Capítulo 7, você pode dizer facilmente quando um número é divisível por 2 ou por 5.

Por exemplo, imagine que você queira a fatoração prima do número 84. Como você sabe que 84 é divisível por 2, você pode fatorar um 2 como mostrado na Figura 8-5.

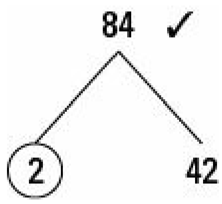


Figura 8-5: Fatorando 2 a partir de 84.

Neste ponto, você deve reconhecer 42 a partir da tabuada ($6 \cdot 7 = 42$).

Esta árvore é, agora, facil de completar (veja Figura 8-6).

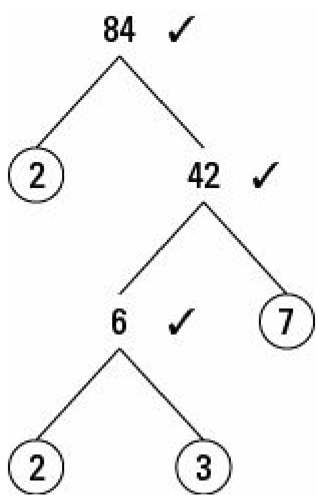


Figura 8-6: Completando a fatoração de 84.

O resultado da fatoração prima de 84 é o seguinte: $84 = 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3$

Se você quiser, não obstante, poderá rearrumar os fatores do inferior ao superior: $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

De longe, a situação mais difícil ocorre quando você tenta descobrir os fatores primos de um número primo mas você não sabe disso. Por exemplo, iamagine que você queira descobrir a fatoração prima do número 71. Neste momento, você não reconhece o número a partir das tabuadas, e ele não é divisível por 2 ou 5. O que vem depois?

Se um número é inferior a 100 (de fato, inferior a 121) não é divisível por 2, 3, 5 ou 7, é um número primo.

Ao testar a divisibilidade de 3 e descobrir a raiz digital de 71 (isto é, somar os dígitos) é fácil. Como eu explico no Capítulo 7, os números divisíveis por 3 têm como raízes digitais 3, 6 ou 9.

$$7 + 1 = 8$$

Como a raiz digital de 71 é 8, 71 não é divisível por 3. Divida para testar se 71 é divisível por 7: $71 \div 7 = 10$ r 1

Portanto agora você sabe que 71 não é divisível por 2, 3, 5 ou 7. 71 é um número primo então você está pronto.

Descobrindo as fatorações primas dos números superiores a 100

Na maioria das vezes, você não deve se preocupar em descobrir as fatorações primas de números superiores a 100. Por precaução, não obstante, aqui está o que você precisa saber.

Como eu menciono na seção anterior, fatore primeiro os números 2 e 5. Um caso especial é quando o número que você está fatorando termina em um ou mais zeros. Neste caso, você pode pode fatorarfatorar um 10 para todo 0. Por exemplo, a Figura 8-7 mostra o primeiro passo.

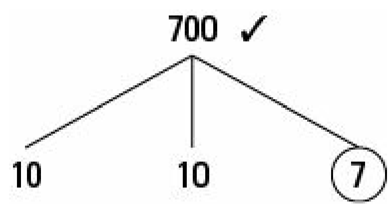


Figura 8-7: O primeiro passo para fatorarfatorar 700.

Depois de você fazer o primeiro passo, o resto da árvore torna-se muito fácil (veja a Figura

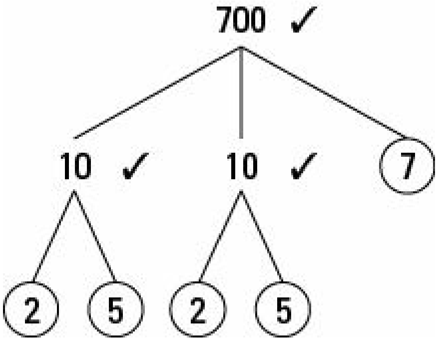
8-8): 

Figura 8-8: Completando a fatoração de 700.

Isso mostra que a fatoração prima de 700 é $700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$

Se o número não for divisível por 2 ou 5, use seu truque de divisibilidade para o número 3 (veja Capítulo 7) e fatore quantos 3 você puder. Então, fatore os números 7, se possível (desculpe, não tenho um truque para os 7) e, finalmente, os 11.

Se um número inferior a 289 não é divisível por 2, 3, 5, 7, 11 ou 13, é um número primo. Como sempre, todo número é sua própria fatoração prima, portanto, ao saber que um número é primo, você está pronto. Na maioria das vezes, com números maiores, uma combinação de truques pode ser útil para o trabalho.

Encontrando o Máximo Divisor Comum (MDC)

Depois de você entender como descobrir os fatores de um número (veja “Gerando fatores de um número”), você está pronto para mover-se ao principal evento: encontrando o Máximo Divisor Comum (MDC) de vários números.

O Máximo Divisor Comum (MDC) de um conjunto de números é o maior número que é um fator de todos aqueles números. Por exemplo, o MDC dos números 4 e 6 é 2, porque o número 2 é o maior número que é um fator dos números 4 e 6. Nesta seção, mostro para você duas formas de descobrir o MDC.

Usando uma lista de fatores para descobrir o MDC

O primeiro método para encontrar o MDC é mais rápido quando você está lidando com números menores.

Para descobrir o MDC de um conjunto de números, liste todos os fatores de cada número, como mostro para você em “Gerando fatores de um número”. O maior fator que aparece em toda lista é o MDC. Por exemplo, para descobrir o MDC de 6 e 15, liste primeiro todos os fatores de cada número.

Fatores de 6: 1, 2, 3, 6

Fatores de 15: 1, 3, 5, 15

Como 3 é o Maior Divisor que aparece nas duas listas, 3 é o MDC de 6 e 15.

Como outro exemplo, imagine que você queira descobrir o MDC de 9, 20 e 25. Começe listando os fatores de cada: Fatores de 9: 1, 3, 9

Fatores de 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20

Fatores de 25: 1, 5, 25

Neste caso, o único fator que aparece em todas as três listas é 1, portanto 1 é o MDC de 9, 20 e 25.

Usando a fatoração prima para descobrir o MDC

Você pode usar a fatoração para descobrir o MDC de um conjunto de números. Muitas vezes isso funciona melhor para os números maiores onde gerar listas de todos os fatores podem ser demorados.

LEMBRE-SE Aqui está como descobrir o MDC de um conjunto de números usando a fatoração prima: **1. Liste os fatores primos de cada número (veja a seção anterior "Fatores primos").**

2. Cerque todo fator primo comum – isto é, todo fator primo que é um fator de todo número do conjunto.

3. Multiplica todos os números cercados.

O resultado é o MDC.

Por exemplo, imagine que você queira descobrir o MDC de 28, 42 e 70. O passo 1 pede para listar os fatores primos de cada número. O passo 2 pede para cercar todo fator primo que é comum a todos os três números (como mostrado na Figura 8-9).

$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

Figura 8-9: Descobrindo o MDC de 28, 42 e 70.

Como você pode observar, os números 2 e 7 são fatores comuns de todos estes números. Multiplique junto estes números cercados: $2 \cdot 7 = 14$

Portanto, o MDC de 28, 42 e 70 é 14

Conhecer como descobrir o MDC de um conjunto de números é importante quando você começa a reduzir as frações em termos inferiores. (Para mais detalhes sobre a redução de frações, veja Capítulo 9).

Múltiplos Maravilhosos

Embora os múltiplos tendam a ser números maiores do que os fatores, a maioria dos estudantes acham mais fáceis para se trabalhar. Continua a ler.

Gerando os múltiplos

A seção anterior, "Fatores Fabulosos", informa-lhe como descobrir todos os fatores de um número. É possível descobrir todos os fatores porque os fatores de um número são sempre inferiores ou iguais ao mesmo número. Portanto, não importa o quanto maior é um número, ele tem sempre um número de fatores finito (limitado).

Ao contrário dos fatores, os múltiplos de um número são superiores ou iguais ao mesmo número. (A única exceção é o número 0, que é múltiplo de todo número).

Por causa disso, os múltiplos de um número duram para sempre – isto é, eles são infinitos. Porém, gerar uma lista geral de múltiplos para qualquer número é simples.

Para listar os múltiplos de qualquer número, escreve aquele número e, depois, multiplica-o por 2, 3, 4 e assim por diante.

Por exemplo, aqui estão os primeiros poucos múltiplos positivos de 7: 14 21 28 35 42

Como você pode observar, esta lista de múltiplos é simplesmente parte da tabuada para o número 7. (Para a tabuada até 9.9, veja Capítulo 3.)

Encontrando o Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

O Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de um conjunto de números é o menor número positivo que é um múltiplo de todo número naquele conjunto.

Por exemplo, o MMC dos números 2, 3 e 5 é 30, porque ✓30 é um múltiplo de 2 ($2 \cdot 15 = 30$) ✓30 é um múltiplo de 3 ($3 \cdot 10 = 30$) ✓30 é múltiplo de 5 ($5 \cdot 6 = 30$) ✓Nenhum número inferior a 30 é um múltiplo de todos estes três números Nesta seção, ofereço para você duas formas de descobrir o MMC de dois ou mais números.

Usando a tabuada para descobrir o MMC

Para descobrir o MMC de um conjunto de números, pegue cada número no conjunto e escreva uma lista dos primeiros vários múltiplos na ordem. O MMC é o primeiro número que aparece em toda lista.

Ao procurar o MMC de dois números, comece a listar os múltiplos do maior número, mas para a lista quando o número de múltiplos que você escreveu é igual ao menor número. Depois, comece a listar os múltiplos do menor número até que um deles combine com a primeira lista.

Por exemplo, imagine que você queira descobrir o MMC de 4 e 6. Comece a listar os múltiplos do maior número, que é o 6. Neste caso, liste apenas quatro destes múltiplos porque o menor número é 4.

Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, ...

Agora, comece a listar os múltiplos de 4: Múltiplos de 4: 4, 8, 12, ...

Como 12 é o primeiro número a aparecer nas duas listas de múltiplos, 12 é o MMC de 4 e 6.

Este método funciona especialmente bem quando você quer descobrir o MMC de dois números, mas ele pode levar mais tempo se você tiver mais números. Ao trabalhar com três números, primeiro multiplique os dois números menores. Para o segundo maior número, descobra o produto dos dois outros números e liste aquele com muitos múltiplos. Repeta para o menor número.

Imagine, por exemplo, você quer descobrir o MMC de 2, 3 e 5. De novo, começa com o maior número – neste caso, o 5 – listando seis números (o produto dos dois outros números, $2 \cdot 3 = 6$): Múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, ..

Depois, liste os múltiplos de 3 organizando dez deles (porque $2 \cdot 5 = 10$): Múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...

Os únicos números repetidos nas duas listas são 15 e 30. Neste caso, você pode se poupar do problema de criar a última lista, porque 30 é, obviamente, um múltiplo de 2 e 15 não é. Portanto, 30 é O MMC de 2, 3 e 5.

Usando a fatoração prima para descobrir o MMC

Um segundo método para descobrir o MMC de um conjunto de números é usar as fatorações primas daqueles números. Aqui está: **1. Listar os fatores primos de cada**

número.

Mostro para você como descobrir os fatores primos de um número antes, neste capítulo, em “Fatores primos.”

Imagine que você queira descobrir o MMC de 18 e 24. Liste os fatores primos de cada número: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

2. Para cada número primo listado, sublinhe a ocorrência mais repetida deste número em qualquer fatoração prima.

O número 2 aparece uma vez na fatoração prima de 18 mas três vezes naquela fatoração de 24, portanto sublinhe os três dois: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$24 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3$

Do mesmo modo, o número 3 aparece duas vezes na fatoração prima de 18, mas apenas uma vez naquela fatoração prima de 24, portanto sublinhe os dois três: $18 = 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3}$

$24 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3$

3. Multiplique todos os números sublinhados.

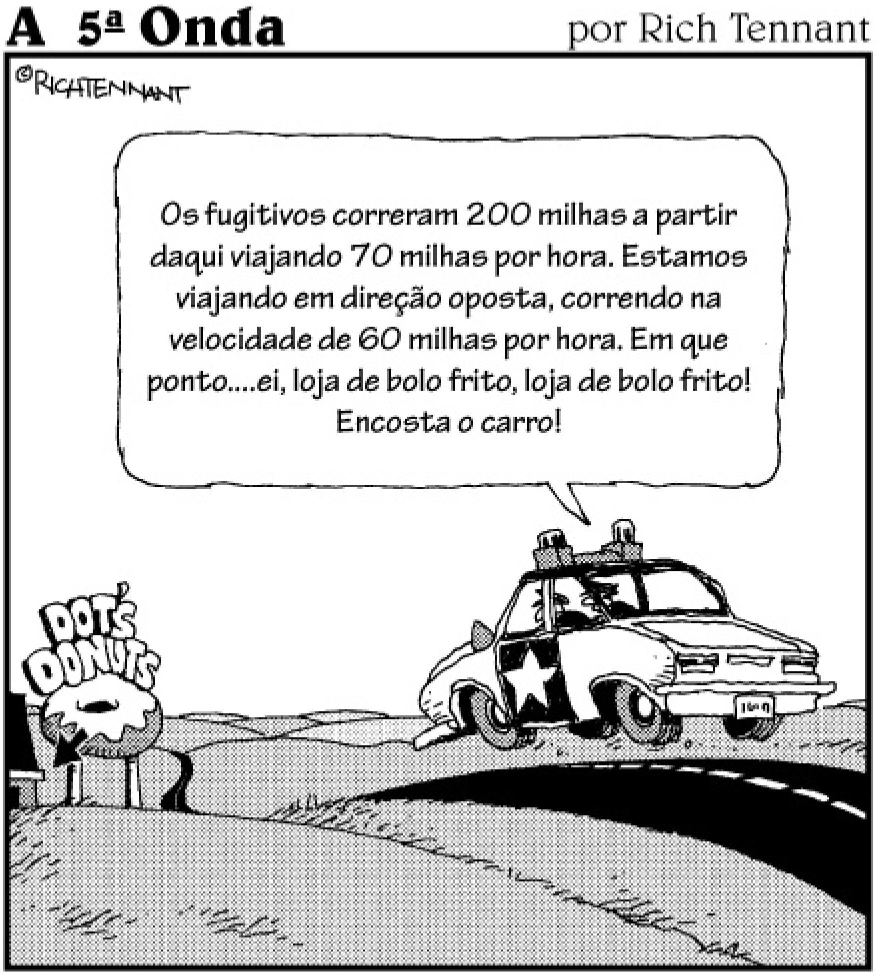
Aqui está o produto: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$

Portanto, o MMC de 18 e 24 é 72. Isso confere, porque $18 \cdot 4 = 72$

$24 \cdot 3 = 72$

Parte III

Parte do Todo: das Frações, dos Decimais e das Porcentagens



Nesta parte...

A matemática representa partes do todo como as frações, os decimais e as porcentagens. Embora eles pareçam diferentes, todos estes três conceitos relacionam-se de perto com a divisão. Nestes capítulos, você observa como aplicar as Quatro Grandes Operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) para as frações, os decimais e as porcentagens. Discuto as frações próprias e impróprias e como reduzir e aumentar os termos das frações e como trabalhar com os números mistos. Converso também sobre os decimais terminativos e não-terminativos e repetitivos. Mostro para você como usar o círculo da porcentagem para resolver três tipos de problemas de porcentagem comuns. Explico também como traduzir as frações, os decimais e as porcentagens em cada uma das duas outras formas.

Capítulo 9

Brincando com Frações

Neste Capítulo

► Observando as frações básicas ► Conhecendo o numerador a partir do denominador ► Entendendo as frações próprias, as frações impróprias e os números mistos ► Aumentando e reduzindo os termos das frações ► Convertendo entre frações impróprias e números mistos ► Usando a multiplicação cruzada para comparar as frações

Imagine que hoje seja seu aniversário e seus amigos estão preparando para você uma festa surpresa. Depois de abrir todos seus presentes, você acaba de soprar as velas no seu bolo, mas você tem apenas um bolo. Várias soluções são propostas: ✓Todos podem entrar na cozinha e assar mais sete bolos.

✓ No lugar de comer bolo, todo mundo pode comer aipo.

✓ Como é seu aniversário, você pode comer o bolo inteiro e todo mundo pode comer aipo. (Isso foi a ideia).

✓ Você pode cortar o bolo em oito pedaços iguais para que todo mundo possa apreciá-lo Depois de uma minuciosa consideração, você escolhe a última opção. Com aquela decisão, você abriu a porta do mundo emocionante das frações. As frações representam as partes de uma coisa que pode ser cortada em pedaços. Neste capítulo, ofereço para você algumas informações básicas sobre as frações que você precisa conhecer, inclusive os três tipos de frações básicas: frações próprias, frações impróprias e números mistos.

Movo-me para aumentar e reduzir os termos das frações que você precisa quando você começa a aplicar as Quatro Grandes operações nas frações do Capítulo 10. Mostro para você também como converter entre as frações impróprias e os números mistos. Por fim, mostro para você como comparar as frações usando a multiplicação cruzada. No momento, você está pronto para este capítulo, você irá observar como as frações podem ser um pedaço de bolo, de fato!

Dividindo um Bolo em Frações

Aqui está um simples fato: Quando você corta um bolo em dois pedaços iguais, cada pedaço é a metade do bolo. Como uma fração, você escreve ½. Na Figura 9-1, o pedaço escurecido é metade do bolo.

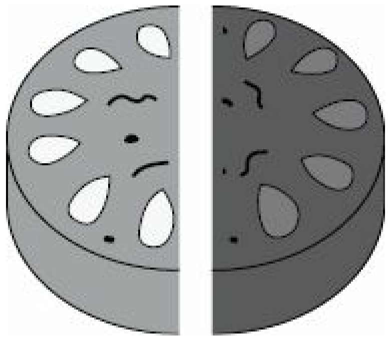


Figura 9-1: Duas metades de um bolo.

Toda fração é composta de dois números separados por uma linha ou uma barra de fração. A linha pode ser diagonal ou horizontal – portanto, você pode escrever esta fração em uma das seguintes duas formas: $\frac{1}{2}$ $\quad$ $^1/_2$

O número acima da linha é chamado de numerador. O numerador informa-lhe quantos pedaços você tem. Neste caso, você tem um pedaço muito escurecido de bolo, portanto o numerador é 1.

O número abaixo da linha é chamado de denominador. O denominador informa-lhe em quantos pedaços iguais todo o bolo foi cortado. Neste caso, o denominador é 2.

Do mesmo modo, quando você corta um bolo em três pedaços iguais, cada pedaço é um terço do bolo (veja Figura 9-2).

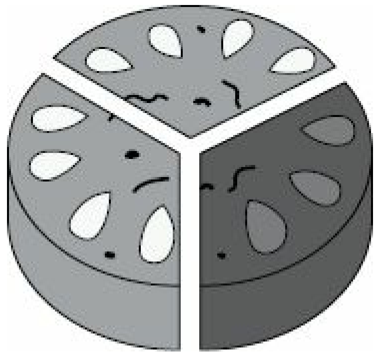


Figura 9-2: Corte do bolo em terços.

Neste momento, o pedaço escurecido é um terço (1/3) do bolo. De novo, o numerador informa-lhe quantos pedaços você tem e o denominador lhe informa em quantos pedaços iguais todo o bolo foi cortado.

A Figura 9-3 mostra um pouco mais de exemplos para representar as partes do todo com as frações.

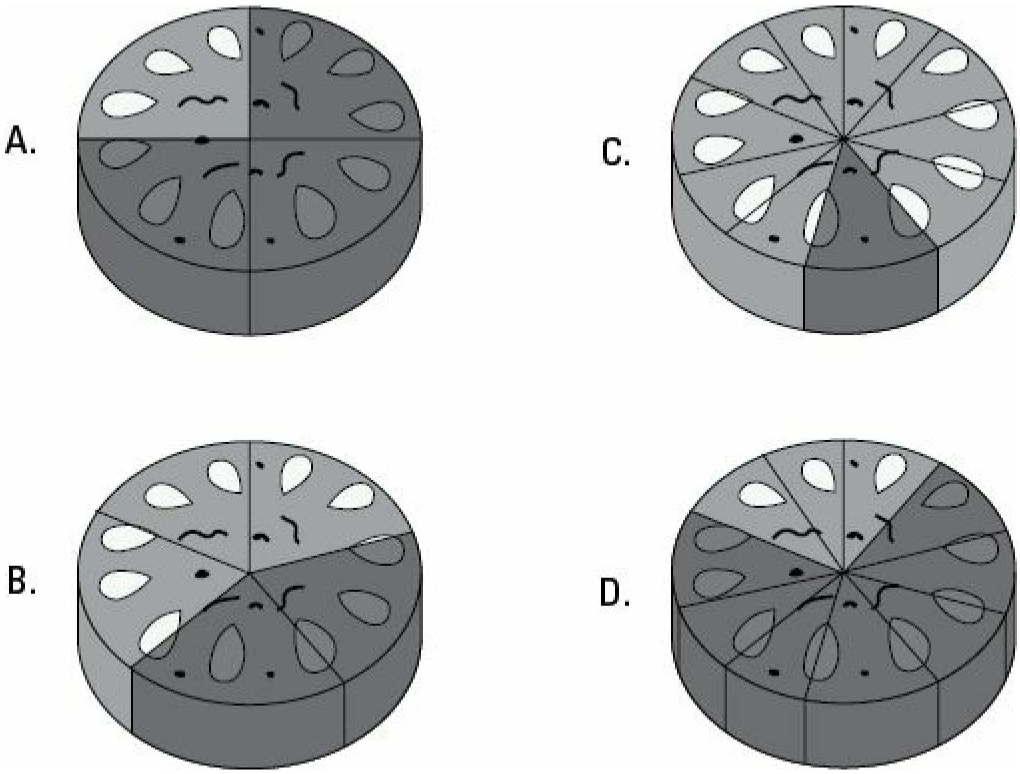


Figura 9-3: Corte de bolos e bolos escurecidos em (A) 3/4, (B) 2/5, (B) 1/10, (D) 1/10.

Em cada caso, o numerador informa-lhe quantos pedaços são escurecidos e o denominador lhe informa quantos pedaços existem juntos.

A barra de fração pode significar também um sinal de divisão. Em outras palavras, ¾ significa 3 ÷ 4. Se você pegar três bolos e dividi-los para quatro pessoas, cada pessoa recebe ¾ de um bolo.

Conhecendo os Fatos da Vida da Fração

As frações têm seu próprio e especial vocabulário e algumas propriedades importantes que vale a pena conhecer desde o começo. Ao conhecê-las, você descobre que é muito fácil trabalhar com as frações.

Informando o numerador a partir do denominador

O número na parte superior de uma fração é chamado de numerador e o número na parte inferior é chamado de denominador. Por exemplo, observa a seguinte fração: $\frac{3}{4}$

Neste exemplo, o número 3 é o numerador e o número 4 é o denominador. Do mesmo modo, observe esta fração: $\frac{55}{89}$

O número 55 é o numerador e o número 89 é o denominador.

Virando depressa os inversos multiplicativos

Quando você vira uma fração, você tem seu inverso multiplicativo. Por exemplo, os seguintes números são inversos multiplicativos:

$\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$

$\frac{11}{14}$ e $\frac{14}{11}$

$\frac{19}{19}$ é seu próprio inverso mutiplicativo

Usando os números as unidades e os zeros

Quando o denominador (o número na parte inferior) de uma fração é 1, a fração é igual ao próprio numerador. Ou, do contrário você pode tornar qualquer número inteiro em uma fração desenhando uma linha e colocando o número 1 debaixo dela.

Por exemplo,

$$\frac{2}{1}=2 \qquad \frac{9}{1}=9 \qquad \frac{157}{1}=157$$

Quando o numerador e o denominador combinam, a fração é igual 1. É porque se você corta um bolo em oito pedaços e você guarda todos os oitos, você tem o bolo inteiro. Aqui estão algumas frações iguais a 1.

$$\frac{8}{8}=1 \qquad \frac{11}{11}=1 \qquad \frac{365}{365}=1$$

Quando o numerador de uma fração é 0, a fração é igual a 0. Por exemplo,

$$\frac{0}{1}=0 \qquad \frac{0}{12}=0 \qquad \frac{0}{113}=0$$

O denominador de uma fração pode ser nunca 0. As frações com 0 no denominador são indefinidas – isto é, elas não têm nenhum sentido matemático, pois não podemos dividir um número diferente de 0 por 0

Lembre-se antes, neste capítulo, que colocar um número no denominador é similar a cortar um bolo, conforme aquele número de pedaços. Você pode cortar um bolo em dois ou dez ou mesmo um milhão de pedaços. Você pode até cortá-lo em um pedaço (isto é, não o corte de modo algum). Mas você não pode cortar um bolo em zero pedaços. Por esta razão, colocar 0 no denominador é alguma coisa que você nunca, nunca deve fazer.

Misturando coisas

Um número misto é uma combinação de um número inteiro e de uma fração própria somados juntos. Aqui estão alguns exemplos: $1\frac{1}{2} \qquad 5\frac{3}{4} \qquad 99\frac{44}{100}$

Um número misto é sempre igual ao número inteiro, mais a fração anexada a ele. Isto é, 1 + ½, 5 3 significa 5 + ¾ e assim por diante.

Conhecendo a fração própria a partir da fração imprópria

Quando o numerador e o denominador são iguais, a fração é igual a 1:

$$\frac{2}{2}=1 \qquad \frac{5}{5}1 \qquad \frac{78}{78}=1$$

Quando o numerador (número na parte superior) é inferior ao denominador (número na parte inferior), a fração é inferior a 1: $\frac{1}{2}<1 \qquad \frac{3}{5}<1 \qquad \frac{63}{73}<1$

As frações como estas são chamadas de frações próprias. As frações próprias positivas são sempre entre 0 e 1. Entretanto, quando o numerador é superior ao denominador, a fração é superior a 1. Dê uma olhada: $\frac{3}{2}>1 \qquad \frac{7}{4}>1 \qquad \frac{98}{97}>1$

Qualquer fração que é superior a 1 é chamada de fração imprópria. É normal converter uma fração imprópria em um número misto, especialmente quando é a resposta final para um problema.

Uma fração imprópria é sempre muito pesada, como se ele fosse instável e quisesse cair. Para estabilizá-la, converta-a em um número misto. Do outro lado, as frações próprias são sempre estáveis.

Depois neste capítulo, eu discuto as frações impróprias com mais detalhes quando mostro para você como converter entre as frações impróprias e os números mistos.

Aumentando e Reduzindo os Termos das Frações

Dê uma olhada nestas três frações: $\frac{1}{2} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{6}$

Se você cortar três bolos (como faço antes, neste capítulo) nestas três frações, exatamente metade do bolo será escurecida como na Figura 9-1, não importa como você o corta. (Entendeu? Não importa como você o corta? Você pode rir também nas piadas ruins – é de graça.) A coisa importante aqui não é o humor ou a falta dele, mas a ideia sobre as frações.

As frações 1/2, 2/4 e 3/6 são todas iguais em valor. De fato, você pode escrever muitas frações que são, também, iguais a estas. Enquanto o numerador é exatamente metade do denominador, as frações são todas iguais a ½ – por exemplo, $\frac{11}{22} \quad \frac{100}{200} \quad \frac{1.000.000}{2.000.000}$

Estas frações são iguais a ½, mas seus termos (o numerador e o denominador) são diferentes. Nesta seção, mostro para você como os dois aumentam e reduzem os termos de uma fração sem mudar seu valor.

Aumentando os termos das frações

LEMBRE-SE Para aumentar os termos de uma fração por um certo número, multiplica ambos, o numerador e o denominador, por aquele número.

Por exemplo, para aumentar os termos da fração ¾ por 2, multiplique ambos, o numerador e o denominador, por 2: $\frac{3}{4} = \frac{3 \,.\, 2}{4 \,.\, 2} = \frac{6}{8}$

Do mesmo modo, para aumentar os termos da fração 5/11 por 7, multiplique ambos, o numerador e o denominador, por 7: $\frac{5}{11} = \frac{5 \,.\, 7}{11 \,.\, 7} = \frac{35}{77}$

LEMBRE-SE Aumentar os termos de uma fração não muda seu valor. Porque você estar multiplicando o numerador e o denominador pelo mesmo número, essencialmente você está multiplicando a fração por uma fração que é igual a 1.

Uma coisa chave para saber é como aumentar os termos de uma fração para que o denominador torne-se um número pré-ajustado. Aqui está como você faz isso: **1. Divide o novo denominador pelo velho denominador.**

> Para manter as frações iguais, você deve multiplicar o numerador e o denominador da velha fração pelo mesmo número. Este primeiro passo lhe informa com que o velho denominador foi multiplicado por ter o novo.

Por exemplo, imagine que você queira aumentar os termos da fração 4/7 para que o denominador seja 35. Isto é, você tentará preencher o ponto de interrogação aqui:

$$\frac{4}{7}=\frac{7}{35}$$

Divida 35 por 7, o que informa a você que o denominador foi multiplicado por 5.

2. Multiplique este resultado pelo velho denominador para ter o novo numerador.

Agora você sabe como os dois denominadores relacionam-se. Os numeradores precisam ter a mesma relação, portanto multiplique o velho numerador pelo número que você achou no Passo 1.

Multiplique 5 por 4, o que dá para você 20. Portanto, aqui está a resposta:

$$\frac{4}{7}=\frac{4\,.\,5}{7\,.\,5}=\frac{20}{35}$$

Reduzindo as frações para termos menores

Reduzir as frações é similar a aumentar frações, exceto quando envolve a divisão ao invés da multiplicação. Mas por você não dividir sempre, reduzindo leva um pouco mais de delicadeza.

Na prática, reduzir as frações é similar a fatorar números. Por esta razão, se você não estiver preparado para a fatoração, você pode revisar este tópico, no Capítulo 8.

Nesta seção, mostro para você o modo formal de reduzir as frações, que funciona em todos os casos. Depois, mostro para você um modo mais informal que você pode usar depois de você estar mais confortável.

Reduzindo as frações de modo formal

Reduzir as frações de modo formal conta com o entendimento de como desfazer um número no seus fatores primos. Discuto isso em detalhes no Capítulo 8. Portanto, se você tiver dúvida neste conceito, pode revisá-lo primeiro.

Aqui está como reduzir uma fração: **1. Desfazer ambos, o numerador (número na parte superior) e o denominador (número na parte inferior), nos seus fatores primos.**

Por exemplo, imagine que você queira reduzir a fração 12/30. Desfaça ambos os números, 12 e 30, nos seus fatores primos: $\frac{12}{30}=\frac{2\,.\,2\,.\,3}{2\,.\,3\,.\,5}$

2. Riscar quaisquer fatores comuns.

Como você pode observar, eu risco um 2 e um 3, porque eles são fatores comuns – isto é, eles aparecem ambos no numerador e no denominador: $\frac{12}{30}=\frac{\cancel{2}\,.\,2\,.\,\cancel{3}}{\cancel{2}\,.\,\cancel{3}\,.\,5}$

3. **Multiplicar os números remanescentes para obter o numerador reduzido e o denominador reduzido.**

Isso mostra para você que a fração 12/30 é reduzida para 2/5: $\frac{12}{30}=\frac{\cancel{2}\,.\,2\,.\,\cancel{3}}{\cancel{2}\,.\,\cancel{3}\,.\,5}=\frac{2}{5}$

Como outro exemplo, aqui está como você reduz a fração 32/100:

$$\frac{32}{100}=\frac{\cancel{2}\,.\,\cancel{2}\,.\,2\,.\,2\,.\,2}{\cancel{2}\,.\,\cancel{2}\,.\,5\,.\,5}=\frac{8}{25}$$

Neste momento, riscar dois números 2 nas partes superior e inferior como fatores comuns. Os 2 remanescentes na parte superior e os 5 na parte inferior não são fatores comuns. Portanto, a fração 32/100 é reduzida para 8/25.

Reduzindo as frações de modo informal

Aqui está um modo fácil para reduzir as frações depois de você estar confortável com o conceito: **1. Se o numerador (número na parte superior) e o denominador (número na parte inferior) são, ambos, divisíveis por 2 – isto é, se os dois são constantes – dividem por 2.**

Por exemplo, imagine que você queira reduzir a fração 24/60. O numerador e o denominador são dois, por sinal, portanto dividem-nos por 2: $\frac{24}{60}=\frac{12}{30}$

2. **Repetir o Passo 1 até o numerador ou o denominador (ou os dois) não seja mais divisível por 2**.

   Na fração resultante, os dois números são ainda constantes, portanto repeta o primeiro passo de novamente: $\frac{12}{30}=\frac{6}{15}$

3. **Repetir o passo 1 usando o número 3 e depois 5 e depois 7 continuando testando os números primos até você ter a certeza de que o numerador e o denominador não têm fatores comuns.**

   Agora, o numerador e o denominador são todos os dois divisíveis por 3 (veja Capítulo 7 para modos mais fáceis para dizer se um número é divisível por um outro), portanto divide os dois por 3: $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

Nem o numerador e nem o denominador são divisíveis por 3, portanto este passo é completo. Neste ponto, você pode se mover para testar a divisibilidade por 5, 7 e assim por diante, mas, de fato, você não precisa. O numerador é 2, e obviamente, ele não é divisível por qualquer número maior, portanto você sabe que a fração 24/60 é reduzida para 2/5.

Convertendo Entre Frações Impróprias e Números Mistos

Em "Conhecendo os fatos de vida da fração", digo para você que qualquer fração cujo numerador é superior ao seu denominador é uma fração imprópria. As frações impróprias são muito úteis e fáceis para funcionar, mas, for por alguma razão, as pessoas não gostam delas. (A palavra imprópria deve ter apontada você). Especialmente os professores não gostam delas e, de fato, eles não gostam de uma fração imprópria para aparecer como a resposta de um problema. Entretanto, eles gostam dos números mistos. Uma razão para a qual eles gostam delas é que estimar o tamanho aproximado de um número misto é fácil.

Por exemplo, se eu disser para você colocar 31/3 de um galão de gasolina no meu carro, você provavelmente achar que é difícil estimar aproximadamente o quanto isto é: 5 litros, 10 litros, 20 litros?

Mas se eu disser para você ter 10 1/3 galões de gasolina, imediatamente você sabe que esta quantidade é um pouco maior que 10, mas inferior a 11 galões. Embora 10 1/3 seja igual a 31/3, conhecer o número misto é muito mais útil na prática. Por esta razão, em geral, você deve converter as frações impróprias em números mistos.

Conhecendo as partes de um número misto

Todo número misto tem ambos uma parte de número inteiro e uma parte fracional. Portanto os três números em um número misto são: ✓O número inteiro ✓O numerador ✓O denominador Por exemplo, no número misto 3 ½, a parte do número inteiro é 3 e a parte fracional é ½. Portanto, este número misto é composto de três números: o número inteiro (3), o numerador (1) e o denominador (2). Conhecer estas três partes de um número misto é útil para converter de trás para frente entre os números mistos e as frações impróprias.

Convertendo um número misto em uma fração imprópria

Para converter um número misto em uma fração imprópria: **1. Multiplique o denominador da parte fracional pelo número inteiro e somar o resultado ao numerador.**

Por exemplo, imagine que você queira converter o número misto 5 2/3 em uma fração imprópria. Primeiro, multiplique 3 por 5 e soma 2: $(3 \cdot 5) + 2 = 17$

2. Use este resultado como seu numerador e coloque-o sobre o denominador que você acabou de ter.

Coloque este resultado sobre o denominador: $\frac{17}{3}$

Portanto, o número misto 5 2/3 é igual à fração imprópria 17/3. Este método funciona para todos os números mistos. Além disso, se você começar com a parte fracional reduzida, a resposta será reduzida também (veja na seção anterior “Aumentando e Reduzindo Termos das Frações”).

Convertendo uma fração imprópria em um número misto

Para converter uma fração imprópria em um número misto, divida o numerador pelo denominador (veja Capítulo 3). Depois escreve o número misto deste modo: ✓O quociente (resposta) é parte do número inteiro.

✓ O resto é o numerador.

✓ O denominador da fração imprópria é o denominador.

Por exemplo, imagine que você queira escrever a fração imprópria 19/5 como um número misto. Primeiro, divida 19 por 5: 19 ÷ 5 = 3 r 4

Depois escreva o número misto como segue: $3\frac{4}{5}$

Este método funciona para todas as frações impróprias. E como é uma conversão verdadeira na outra direção, se você começar com uma fração reduzida, você não deve reduzir sua resposta (veja “Aumentando e reduzindo os termos das frações”).

Entendendo a multiplicação cruzada

A multiplicação cruzada é uma algo útil para conhecer. Você pode usar poucas diferentes formas, portanto eu explico isso aqui e depois mostro para você uma aplicação imediata.

Para cruzar a multiplicação de duas frações, **1. Multiplique o numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração e escrever a resposta.**

2. Multiplique o numerador da segunda fração pelo denominador da primeira fração e escrever a resposta.

Por exemplo, imagine que você tenha estas duas frações: $\frac{2}{9} \qquad \frac{4}{7}$

Quando você cruzar a multiplicação, terá estes dois números: 2 · 7 = 14 4 · 9 = 36

Você pode usar a multiplicação cruzada para comparar as frações e descobrir o que é maior. Quando você faz também, tenha certeza que você começa com o numerador da primeira fração.

LEMBRE-SE Para descobrir qual das duas frações é maior, cruze a multiplicação e coloque os dois números que você tem na ordem, de baixo das duas frações. O maior número está sempre debaixo da maior fração.

Por exemplo, imagine que você queira descobrir qual das três seguintes frações é a maior:

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{5}{9} \qquad \frac{6}{11}$$

A multiplicação cruzada funciona apenas com duas frações em um momento, portanto

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{5}{9}$$

escolha as primeiras duas: $3 \,.\, 9 = 27$ $\qquad 5 \,.\, 5 = 25$

Como 27 é maior que 25, agora você sabe que 3/5 é maior que 5/9. Portanto você pode jogar fora 5/9.

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{6}{11}$$

Agora, faça a mesma coisa para 3/5 e 6/11: $3 \,.\, 11 = 33$ $\qquad 6 \,.\, 5 = 30$

Como 33 é maior que 30, 3/5 é maior que 6/11. Muito simples, certo? E é tudo que você deve saber a partir de agora. Mostro para você um punhado de coisas ótimas que você pode fazer com esta habilidade simples, no próximo capítulo.

Capítulo 10

Separando Modos: Frações e as Quatro Grandes Operações

Neste Capítulo

► Observando a multiplicação e a divisão das frações ► Somando e subtraindo as frações em um punhado de modos diferentes ► Aplicando as quatro operações nos números mistos

Neste capítulo, o foco é aplicar as Quatro Grandes operações para as frações. Começo a mostrar para você como multiplicar e dividir as frações, o que não é muito mais difícil do que multiplicar os números inteiros. Surpreendentemente, somar e subtrair frações é um pouco mais complicado. Mostro para você uma variedade de métodos, cada um com suas próprias forças e fraquezas e recomendo como escolher o método que irá funcionar melhor, dependendo do problema que você deve resolver.

Depois no capítulo, eu vou para os números mistos. De novo, a multiplicação e a divisão não devem apresentar muito a um problema porque o procedimento em cada caso é quase o mesmo como a multiplicação e a divisão das frações. Eu salvo a adição e a subtração dos números mistos até bem o final. Enquanto isso, você deve ficar muito mais confortável com as frações e estar pronto para o desafio.

Multiplicando e Dividindo Frações

Uma das pequenas e estranhas ironias da vida é que multiplicar e dividir frações é mais fácil do que somar ou subtraí-las – apenas dois passos fáceis e você está pronto! Por esta razão, mostro para você como multiplicar e dividir frações antes mostro para você como somar ou subtraí-las. De fato, você pode ter achado a multiplicação das frações fácil do que a multiplicação dos números inteiros porque os números com que você está trabalhando são sempre pequenos. A boa notícia é que dividir frações é quase tão fácil quanto multiplicá-las. Portanto não estou lhe desejando mesmo boa sorte – você não precisa disso!

Multiplicando numeradores e denominadores imediatamente

Tudo na vida deve ser tão simples quanto multiplicar frações. Tudo que você precisa para multiplicar as frações é de uma caneta ou um lápis, alguma coisa para escrever (de preferência não sua mão) e um conhecimento básico da tabuada. (Veja Capítulo 3, para refrescar-se da multiplicação.) **1. Multiplique os numeradores (os números na parte**

superior) juntos para obter o numerador da resposta.

2. **Multiplique os denominadores (os números na parte inferior) juntos para obter o denominador da resposta.**

Por exemplo, aqui está como multiplicar 2/5 · 3/7: $\frac{2}{5} . \frac{3}{7} = \frac{2 . 3}{5 . 7} = \frac{6}{35}$

Algumas vezes, quando você multiplica as frações, você pode ter uma oportunidade para reduzir os termos menores. (Para mais detalhes sobre quando e como reduzir uma fração, veja Capítulo 9). Como regra, as pessoas que gostam de matemática são loucas pelas frações reduzidas, e os professores, às vezes, tiram pontos de uma resposta certa se você puder ter reduzi-la mas não o fiz. Aqui está um problema de multiplicação que termina com uma resposta que não está nos seus termos menores.

$$\frac{4}{5} . \frac{7}{8} = \frac{4 . 7}{5 . 8} = \frac{28}{40}$$

Como o numerador e o denominador são dois números constantes, esta fração pode ser reduzida. Comece a dividir os dois números por 2: $\frac{28 \div 2}{40 \div 2} = \frac{14}{20}$

De novo, o numerador e o denominador são constantes, portanto faça a mesma coisa:

$$\frac{14 \div 2}{20 \div 2} = \frac{7}{10}$$

Esta fração é completamente reduzida agora.

Ao multiplicar as frações, em geral, você pode tornar seu trabalho mais fácil, cancelando fatores iguais no numerador e no denominador. Cancelar os fatores iguais torna menor o número que você está multiplicando e mais fácil para se trabalhar, e isso salva você do problema da redução até o final. Aqui está como funciona: ✓Quando o numerador de uma fração e o denominador da outra fração são iguais, troque estes dois números por 1. (Veja a mais próxima barra lateral para que isso funciona.) ✓Quando o numerador de uma fração e o denominador da outra fração são divisíveis pelo mesmo número, fatore este número com os dois. Em outras palavras, divida o numerador e o denominador por aquele fator comum. (Para mais detalhes sobre como descobrir os fatores, veja Capítulo 8.) Por exemplo, imagine que você queira multiplicar os seguintes dois números: $\frac{5}{13} = \frac{13}{20}$

Você pode tornar este problema mais fácil, cancelando o número 13 como segue:

$$\frac{5}{1\ \cancel{13}} . \frac{\cancel{13}\ 1}{20} = \frac{5 . 1}{1 . 20} = \frac{5}{20}$$

Você pode torná-lo mais fácil notando que 20 = 5 · 4, portanto você pode fatorar o número

5 como segue: $\frac{1\,\cancel{5}}{1}.\frac{1}{\cancel{20}\,4}=\frac{1\,.\,1}{1\,.\,4}=\frac{1}{4}$

Um é o número mais fácil Como nas frações, a relação entre os números, não os próprios números atuais, é mais importante. Entender como multiplicar e dividir as frações pode lhe dar um entendimento mais profundo sobre por que você pode aumentar ou diminuir os números dentro de uma fração sem mudar o valor da fração inteira.

Quando você multiplica ou divide qualquer número por 1, a resposta é o mesmo número. Esta regra aplica-se para as frações, portanto:

$$\frac{3}{8}.1=\frac{3}{8} \text{ e } \frac{3}{8}\div 1=\frac{3}{8}$$

$$\frac{5}{13}.1=\frac{5}{13} \text{ e } \frac{5}{13}\div 1=\frac{5}{13}$$

$$\frac{67}{70}.1=\frac{67}{70} \text{ e } \frac{67}{70}\div 1=\frac{67}{70}$$

E como discuto no Capítulo 9, quando uma fração tiver o mesmo número no numerador e no denominador, seu valor é 1. Em outras palavras, as frações 2/2, 3/3 e 4/4 são todas iguais a 1. Olha o que acontece quando você multiplica a fração ¾ por 2/2: $\frac{3}{4}.\frac{2}{2}=\frac{3\,.\,2}{4\,.\,2}=\frac{6}{8}$

O último efeito é que você aumentou os termos da fração original por 2. Mas tudo que você fez foi multiplicar a fração por 1, portanto o valor da fração não mudou. A fração 6/8 é igual a ¾.

Do mesmo modo, reduzir a fração 6/9 por um fator de 3 é o mesmo que dividir aquela fração por 3/3 (que é igual a 1): $\frac{6}{9}\div\frac{3}{3}=\frac{6\div 3}{9\div 3}=\frac{2}{3}$

Portanto, 6/9 é igual a 2/3.

Fazendo uma virada para dividir as frações

Dividir frações é tão fácil quanto multiplicá-las. De fato, quando você divide frações, você transforma o problema realmente em uma multiplicação.

Para dividir uma fração por uma outra, multiplique a primeira fração pela equivalente da segunda. (Como discuto no Capítulo 9, a equivalente de uma fração é simplesmente aquela fração virada de cima para baixo).

Por exemplo, aqui está como você transforma a divisão de uma fração em multiplicação:

$$\frac{1}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{1}{3} . \frac{5}{4}$$

Como você pode observar, eu viro 4/5 para sua equivalente – 5/4 – e muda o sinal da divisão para o sinal da multiplicação. Depois disso, multiplique apenas as frações como descrevo em “Multiplicando numeradores e denominadores imediatamente”:

$$\frac{1}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{1}{3} . \frac{5}{4} = \frac{5}{12}$$

Como na multiplicação, em alguns casos você pode ter que reduzir seu resultado no final. Mas você pode tornar também seu trabalho mais fácil cancelando fatores iguais. (Veja a seção anterior.)

Todos Juntos Agora: Somando Frações

Quando você soma frações, uma coisa importante para notar é se seus denominadores (os números na parte inferior) são iguais. Se eles forem iguais – woohoo! Somando frações que têm o mesmo denominador é um caminho no parque. Mas quando as frações têm diferentes denominadores, as somas tornam mais complexa.

Para tornar as matérias piores, muito professores fazem a soma das frações até mais difícil exigindo de você o uso de um método longo e complicado quando, em muitos casos, um método curto e fácil irá funcionar.

Nesta seção, primeiro mostro para você como somar as frações com o mesmo denominador. Depois mostro para você um método de impressão digital para somar as frações quando os denominadores são diferentes. Ele sempre funciona e é usualmente a forma mais simples para ficar. Depois disso, mostro para você um método rápido que você pode usar apenas para certos problemas. Por fim, mostro para você o quão longo e complicado é o caminho para somar as frações que é sempre ensinado.

Descobrindo a soma das frações com o mesmo denominador

LEMBRE-SE Para somar duas frações que têm o mesmo denominador (número na parte inferior), soma os numeradores (números na parte superior) juntos e deixa o denominador inalterado.

Por exemplo, considere o seguinte problema: $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}$

Como você pode observar, para somar estas duas frações, você soma os numeradores (1 + 2) e mantém o denominador (5).

Por que isso funciona? O capítulo 9 informa-lhe que você pode pensar nas frações como pedaços de bolo. O denominador, neste caso, informa-lhe que o bolo inteiro foi cortado em cinco pedaços. Portanto, quando você soma 1/5 + 2/5, de fato você está somando um pedaço mais dois pedaços. A resposta, evidentemente, é três pedaços – isto é 3/5.

Embora você deva somar mais do que duas frações, enquanto os denominadores são todos iguais, você soma apenas os numeradores e deixa o denominador inalterado:

$$\frac{1}{17}+\frac{3}{17}+\frac{4}{17}+\frac{6}{17}=\frac{1+3+4+6}{17}=\frac{14}{17}$$

Algumas vezes, quando você soma frações com o mesmo denominador, você pode ter o reduzido para menores termos (para descobrir mais sobre redução, vira para o Capítulo 9) · Veja este problema por exemplo.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+1}{4}=\frac{2}{4}$$

O numerador e o denominador são dois constantes, portanto você sabe que eles podem ser reduzidos: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Em outros casos, a soma das duas frações próprias é uma fração imprópria. Você tem um numerador maior do que o denominador quando as duas frações somam mais de 1, como neste caso: $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{8}{7}$

Se você estiver tendo mais trabalho para resolver esta fração, deixe-a como uma fração imprópria para que seja mais fácil de resolve-la. Mas se esta for sua resposta final, você pode precisar torná-la um número misto (Eu cubro os números mistos no Capítulo 9):

$$\frac{8}{7} = 8 \div 7 = 1 \text{ r } 1 = 1\frac{1}{7}$$

Quando duas frações têm o mesmo numerador, não faça a soma delas somando os denominadores e deixando o numerador inalterado.

Somando frações com diferentes denominadores

Quando as frações que você quer somar têm diferentes denominadores, somá-las não é tão fácil. Ao mesmo tempo, não deve ser tão difícil quanto a maioria dos professores o faz.

Agora, eu estou remexendo um membro frágil aqui, mas isso precisa ser dito: Existe um modo mais simples de somar frações. Ele sempre funciona. Fica mais difícil somar frações do que multiplicá-las. E como você move a cadeia alimentar da matemática em álgebra, ele se torna o método mais útil.

Por que ninguém fala sobre isso? Acho que é um caso claro de tradição mais forte que o senso comum. O modo tradicional de somar frações é mais difícil, mais demorado e pode causar mais erros. Mas geração após geração foi ensinada que é o caminho certo para somar frações. É um ciclo vicioso.

Mas, neste livro, eu estou quebrando a tradição. Primeiro, mostro para você o caminho mais fácil para somar frações. Depois, mostro para você um truque rápido que funciona em poucos casos especiais. E, por fim, mostro para você o caminho tradicional para somar frações.

Usando o caminho fácil

Em algum ponto de sua vida, penso que algum professor em algum lugar informou-lhe que estas palavras douradas de sabedoria: “Você não pode somar duas frações com diferentes denominadores.” Seu professor estava errado! Aqui está o caminho para fazer isso: **1. Cruze a multiplicação nas duas frações e soma os resultados juntos para ter o numerador da resposta.**

Imagine que você queira somar as frações 1/3 e 2/5. Para ter o numerador da resposta, cruze a multiplicação. Em outras palavras, multiplique o numerador de cada fração pelo denominador da outra:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

$$1 \,.\, 5 = 5$$

$$2 \,.\, 3 = 6$$

Some os resultados para ter o numerador da resposta: 5 + 6 = 11

2. **Multiplique os dois denominadores juntos para ter o denominador da resposta.**

Para ter o denominador, multiplique apenas os denominadores de duas frações: 3 · 5 = 15

O denominador da resposta é 15.

3. **Escreva sua resposta como uma fração.**

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}$$

Como você descobre na seção anterior, “Descobrindo a soma das frações com o mesmo denominador”, quando você soma as frações, às vezes você precisa reduzir a resposta que você tem. Aqui está um exemplo: $\frac{5}{8}+\frac{3}{10}=\frac{5\,.\,10+3\,.\,8}{8\,.\,10}=\frac{50+24}{80}=\frac{74}{80}$

Como o numerador e o denominador são dois números constantes, você sabe que a fração pode ser reduzida. Portanto, tente dividir os dois números por 2: $\frac{74\div 2}{80\div 2}=\frac{37}{40}$

Esta fração não pode ser reduzida de longe, portanto 37/40 é a resposta final.

Como você descobre também em “Descobrindo a soma das frações com o mesmo denominador,” às vezes quando você soma duas frações próprias, sua resposta é uma fração imprópria.

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{7}=\frac{4\,.\,7+3\,.\,5}{5\,.\,7}=\frac{28+15}{35}=\frac{43}{35}$$

Se você tem mais trabalho para fazer com esta fração, deixe-a como uma fração imprópria para que ela seja mais fácil de se trabalhar. Mas se esta é sua resposta final, você pode precisar transformá-la em um número misto (veja Capítulo 9 para detalhes).

$$\frac{43}{35}=43\div 35=1\text{ r }8=1\frac{8}{35}$$

Em alguns casos, você pode ter que somar mais de uma fração. O método é similar, com um pequeno puxão. Por exemplo, imagine que você queira somar ½ + 3/5 + 4/7: **1. Comece a multiplicar o numerador da primeira fração pelos denominadores de todas as outras frações.**

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$$
$$(1\,.\,5\,.\,7)=35$$

2. **Faça o mesmo com a segunda fração e some este valor à primeira fração.**

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$$
$$35+(3\ .\ 2\ .\ 7)=35+42$$

3. Faça o mesmo com a (s) fração (ões) remanescente (s)

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$$
$$35+42+(4\ .\ 2\ .\ 5)=35+42+40=117$$

Quando estiver resolvido, você já tem o numerador da resposta.

4. Para ter o denominador, multiplica apenas todos os denominadores juntos:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$$
$$\frac{35+42+40}{2\ .\ 5\ .\ 7}=\frac{177}{70}$$

Como é comum, você pode precisar reduzir ou mudar uma fração imprópria em um número misto. Neste exemplo, você precisa apenas mudar para um número misto (veja Capítulo 9 para detalhes): $\frac{117}{70}=117\div 70=\ \text{i r } 47=1\frac{47}{70}$

Tentando um truque rápido

Mostro para você um caminho para somar frações com diferentes denominadores, na seção anterior. Ele é fácil e sempre funciona e ele é fácil. Portanto, por que eu quero lhe mostrar um outro caminho? Parece algo já visto.

Em alguns casos, você pode se poupar de muito esforço com um pouco de reflexão inteligente. Você não pode usar sempre este método, mas para pode usá-lo quando um denominador é um múltiplo do outro. (Para mais detalhes sobre os múltiplos, veja Capítulo 8.). Observe o seguinte problema: $\frac{11}{12}+\frac{19}{24}$

Primeiro, resolvo isso da forma que mostro para você na seção anterior:

$$\frac{11}{12}+\frac{19}{24}=\frac{11\ .\ 24+19\ .\ 12}{12\ .\ 24}=\frac{264+228}{288}=\frac{492}{288}$$

Aqueles são alguns grandes números, e eu não estou ainda pronto porque o numerador é maior que o denominador. A resposta é uma fração imprópria. Pior ainda, o numerador e o denominador são dois números constantes, portanto a resposta precisa ainda ser reduzida.

Como nos problemas de adição de uma certa fração, ofereço para você um caminho mais inteligente para trabalhar. O truque é tornar um problema com diferentes denominadores em um problema muito mais fácil com o mesmo denominador.

Antes de você somar duas frações com diferentes enominadores, verifique os denominadores para ver se um é múltiplo do outro (para mais detalhes sobre os múltiplos, vá ao o Capítulo 8). Se for o caso, você pode usar o truque rápido: **1. Aumente os termos da fração com o menor denominador, para que ela tenha o maior denominador.**

Observe o problema anterior neste novo caminho: $\frac{11}{12} + \frac{19}{24} =$

Como você pode observar, 12 divide por 24 sem um resto. Neste caso, você quer elevar os termos de 11/12 para que o denominador seja 24: $\frac{11}{12} + \frac{?}{24} =$

Mostro para você como resolver este tipo de problema no Capítulo 9. Para preencher o ponto de interrogação, o truque é dividir 24 por 12 para descobrir como os denominadores se relacionam-se; depois multiplicar o resultado por 11:

$? = (24 \div 12) \,.\, 11 = 22$

Portanto 11/12 = 22/24.

2. Reescreva o problema, substituindo esta versão aumentada da fração e some conforme apresentado para você antes, em "Descobrindo a soma das frações com o mesmo denominador."

Agora você pode reescrever o problema desta forma: $\frac{22}{24} + \frac{19}{24} = \frac{41}{24}$

Agora, como você pode observar, os números neste caso são muito menores e mais fáceis para se trabalhar. A resposta aqui é uma fração imprópria; mudá-lo para um número misto é fácil: $\frac{41}{24} = 41 \div 24 = 1 \text{ r } 17 = 1\frac{17}{24}$

Confiando no caminho tradicional

Nas duas seções anteriores, mostro para você dois caminhos para somar frações com diferentes denominadores. As duas funcionam muito bem dependendo das circunstâncias. Portanto, por que eu quero lhe mostrar, ainda, um terceiro caminho? Parece ser algo já visto.

A verdade é que não quero lhe mostrar este caminho. Mas elas não estão me forçando. E você conhece quem são elas, não é? O homem – o sistema – as potências podem ser. Aqueles que querem manter você numa lama rastejando seus pés. Ok, portanto eu estou exagerando um pouco. Mas deixa me registrar que você não deve somar frações neste caminho a menos que você queira de fato (ou a menos que seu professor insista nisso).

Aqui está o caminho tradicional para somar frações com dois diferentes denominadores: **1. Descobra o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) dos dois denominadores (para mais detalhes sobre descobrir o MMC de dois números, veja Capítulo 8).**

Imagine que você queira somar as frações ¾ + 7/10. Primeiro, descobra o MMC dos dois denominadores, 4 e 10. Aqui está como descobrir o MMC usando o método da tabuada:

- **Múltiplos de 10**: 10, 20, 30, 40
- **Múltiplos de 4:** 4, 8, 12, 16, 20

Portanto o MMC de 4 e 10 é 20.

2. Aumente os termos de cada fração para que o denominador de cada seja igual ao MMC (para mais detalhes sobre como fazer isso, veja Capítulo 9).

Aumente cada fração para ter termos maiores, para que o denominador de cada seja 20: $\frac{3}{4} = \frac{3\,.\,5}{4\,.\,5} = \frac{15}{20}$ e $\frac{7}{10} = \frac{7\,.\,2}{10\,.\,2} = \frac{14}{20}$

3. Substitua estas duas novas frações para as originais e some conforme foi apresentado para você antes, em "Descobrindo a soma das frações com o mesmo denominador".

Neste ponto, você tem duas frações que têm o mesmo denominador: $\frac{15}{20} + \frac{14}{20} = \frac{29}{20}$

Quando a resposta é uma fração imprópria, você precisa ainda mudá-la para um número misto: $\frac{29}{20} = 29 \div 20 = 1 \text{ r } 9 = 1\frac{9}{20}$

Como um outro exemplo, imagine que você queira somar os números 5/6 + 3/10 + 2/15.

1. Descobra o MMC de 6, 10 e 15.

Neste momento, eu uso o método da fatoração prima (veja Capítulo 8, para detalhes sobre como fazer isso). Comece a decompor os três denominadores em seus fatores primos: $6 = \underline{2} \cdot \underline{3}$

$10 = 2 \cdot \underline{5}$

$15 = 3 \cdot 5$

Estes denominadores têm um total de três fatores primos diferentes – 2, 3 e 5. Cada fator primo aparece apenas uma vez em alguma decomposição, portanto o MMC de

6, 10 e 15 é: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

2. Você precisa aumentar os termos de todas as três frações para que seus denominadores sejam 30:

$$\frac{5}{6} = \frac{5 . 5}{6 . 5} = \frac{25}{30}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{3 . 3}{10 . 3} = \frac{9}{30}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{2 . 2}{15 . 2} = \frac{4}{30}$$

3. Simplesmente, some as três novas frações:

$$\frac{25}{30} + \frac{9}{30} + \frac{4}{30} + \frac{38}{30}$$

Você precisa mudar novamente esta fração para um número misto:

$$\frac{38}{30} = 38 \div 30 = \ 1 \text{ r } 8 = 1\frac{8}{30}$$

Como os dois números são divisíveis por 2, você pode reduzir a fração: $1\frac{8}{30} = 1\frac{4}{15}$

Pega seu truque: Escolhendo o melhor método

Como eu conto antes neste capítulo, penso que o caminho tradicional para somar as frações é mais difícil que o caminho fácil ou o truque rápido. Seu professor pode pedir para você usar o caminho tradicional mas depois de você dominar, ficará mais fácil. Mas dada a escolha. Aqui está minha recomendação.

✓ Use o caminho fácil quando os numeradores e os denominadores são pequenos (dizer , 15 ou abaixo).

✓ Use o truque rápido com numeradores e denominadores maiores quando um denominador é um múltiplo do outro.

✓ Use o caminho tradicional apenas quando você não pode usar nenhum dos outros métodos (ou quando você conhece o MMC apenas observando os denominadores).

Retire o número: Subtraindo Frações

Subtrair frações não é, de fato, muito diferente de fazer a adição delas. Como na adição, quando os denominadores são iguais, a subtração é fácil. E quando os denominadores são diferentes, os métodos que lhe mostro para somar as frações podem ser arrancados para a subtração delas.

Portanto, para entender como subtrair as frações, você pode ler a seção “Todos Juntos

Agora: Somando Frações” e substituir um sinal de menos (–) para cada sinal de mais (+). Mas seria apenas uma coisa inútil se eu esperasse você fazer isso. Portanto nesta seção, mostro para você quatro caminhos para subtrair as frações que refletem o que discuto antes, neste capítulo, sobre a adição delas.

Subtraindo frações com o mesmo denominador

Como na adição, subtrair as frações com o mesmo denominador é sempre fácil. Quando os denominadores são iguais, você pode pensar apenas nas frações como pedaços de bolo.

Para subtrair uma fração a partir de uma outra quando as duas têm o mesmo denominador (número na parte inferior), subtraia o numerador (número na parte superior) da segunda fração a partir do numerador da primeira fração e matenha o denominador igual. Por exemplo: $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{3-2}{5}=\frac{1}{5}$

Às vezes, quando você soma frações, você pode ter que reduzir: $\frac{3}{10}-\frac{1}{10}=\frac{3-1}{10}=\frac{2}{10}$

Como o numerador e o denominador são constantes, você pode reduzir esta fração por um fator de 2: $\frac{2}{10}=\frac{2\div 2}{10\div 2}=\frac{1}{5}$

Em oposição à adição, quando você subtrai uma fração própria a partir da outra, você nunca tem uma fração imprópria.

Subtraindo frações com diferentes denominadores

Apenas como na adição, você tem uma escolha dos métodos ao subtrair frações. Estes três métodos são similares aos métodos que mostro para você para somar as frações: o caminho fácil, o truque rápido e o caminho tradicional.

O caminho fácil sempre funciona, e eu recomendo este método para a maioria de sua fração é preciso subtrair. O truque rápido é um ótimo poupador de tempo, portanto use-o quando você pode. E como para o caminho tradicional – bem, embora eu não goste disso, seu professor e os outros puristas de matemática provavelmente gostam.

Conhecendo o caminho fácil

Este caminho de subtrair as frações funciona em todos os casos e é fácil. (Na próxima seção, mostro para você um caminho rápido para subtrair frações quando um denominador é um múltiplo do outro.) Aqui está o caminho fácil para subtrair frações que têm denominadores diferentes: **1. Cruze a multiplicação das duas frações e subtraia o segundo número a partir do primeiro para ter o numerador da resposta:**

Por exemplo, imagine que você queira subtrair 6/7 – 2/5. Para ter o numerador, cruze a multiplicação das duas frações e, depois, subtraia o segundo número a partir do primeiro número (veja Capítulo 9, para informações sobre a multiplicação

$$\frac{6}{7}-\frac{2}{5}$$

cruzada): $(6\,.\,5)-(2\,.\,7)=30-14=16$

Depois de cruzar a multiplicação, tenha certeza de subtrair na ordem correta. (O primeiro número é o numerador da primeira fração vezes o denominador da segunda fração.) **2. Multiplique os dois denominadores juntos para ter o denominador da resposta:**

$7 \cdot 5 = 35$

3. Colocar o numerador sobre o denominador oferece a você sua resposta.

$$\frac{16}{35}$$

Aqui está um outro exemplo para trabalhar: $\frac{9}{10}-\frac{5}{6}$

Neste tempo, coloco todos os passos juntos: $\frac{9}{10}-\frac{5}{6}=\frac{9\,.\,6-5\,.\,10}{10\,.\,6}$

Com o problema estabelecido desta forma, você deve apenas simplificar o resultado:

$$=\frac{54-50}{60}=\frac{4}{60}$$

Neste caso, você pode reduzir a fração: $\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$

Cortando a fração com um caminho rápido

O caminho fácil que mostro para você na seção anterior funciona melhor quando os numeradores e os denominadores são pequenos. Quando eles são maiores, você pode ser capaz de pegar um atalho.

Antes de você subtrair as frações com diferentes denominadores, verifique os denominadores para ver se um é múltiplo do outro (para mais detalhes sobre os múltiplos, veja Capítulo 8). Se for o caso, você pode usar o truque rápido: **1. Aumente os termos da fração com o menor denominador para que ele tenha o maior denominador.**

Por exemplo, imagine que você queira descobrir 17/20 – 31/80. Se você cruza a multiplicação estas frações, seus resultados irão ser maiores do que você quer trabalhar. Mas felizmente, 80 é múltiplo de 20, portanto você pode usar o caminho rápido.

Primeiro, aumente os termos de 17/20 para que o denominador seja 80 (para mais detalhes sobre aumentar os termos das frações, veja Capítulo 9):

$$\frac{17}{20} = \frac{?}{80}$$

$$? = 80 \div 20 \ . \ 17 = 68$$

Portanto, 17/20 = 68/80.

2. **Reescreva o problema, substituindo esta versão aumentada da fração e subtraia como eu mostro para você antes em "Subtraindo as frações com o mesmo denominador."**

Aqui está o problema de como uma subtração de frações com o mesmo denominador, que é mais fácil para resolver: $\frac{68}{80} - \frac{31}{80} = \frac{37}{80}$

Neste caso, você não deve reduzir os termos menores, embora em outros problemas você pode reduzi-lo. (Veja Capítulo 9 para mais informações sobre reduzir frações.)

Mantendo seu professor feliz com o caminho tradicional

Como você descreve antes, neste capítulo, em "Todos Juntos Agora: Somando Frações," você deve usar o caminho tradicional apenas como um local de férias. Recomendo que você o use apenas quando o numerador e o denominador forem muito grandes para usar o caminho fácil e quando você não poder usar o truque rápido.

Para usar o caminho tradicional para subtrair as frações com dois denominadores diferentes, siga estes passos: **1. Descobra o mínimo múltiplo comum (MMC) dos dois denominadores (para mais detalhes sobre descobrir o MMC de dois números, veja Capítulo 8).**

Por exemplo, imagine que você queira subtrair 7/8 – 11/14. Aqui está como descobrir o MMC de 8 e 14 usando o método da fatoração prima: $8 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2}$

$14 = 2 \cdot \underline{7}$

Sublinho o caso onde cada fator primo aparece com mais frequência: 2 aparece três vezes e 7 aparece uma vez. Portanto o MMC de 8 e 14 é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 56$

2. **Aumente para termos maiores cada fração para que o denominador de cada seja igual ao MMC (para mais detalhes sobre como fazer isso, veja Capítulo 9).**

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \ . \ 7}{8 \ . \ 7} = \frac{49}{56}$$

O denominador dos dois deve ser 56: $\frac{11}{14} = \frac{11 \ . \ 4}{14 \ . \ 4} = \frac{44}{56}$

3. **Substitua estas duas novas frações para as originais e subtraia como mostro para você antes em "Subtraindo frações com o mesmo denominador."**

$$\frac{49}{56}-\frac{44}{56}=\frac{5}{56}$$

Neste momento, você não precisa reduzir, porque 5 é um número primo e 56 não é divisível por 5. Em alguns casos, entretanto, você deve reduzir a resposta para termos menores.

Trabalhando Corretamente com Números Mistos

Todos os métodos que descrevo antes, neste capítulo, funcionam para ambas as frações própria e imprópria. Infelizmente, os números mistos são pequenas criaturas intratáveis, e você precisa entender como lidar com eles nos seus próprios termos. (Para mais detalhes sobre os números mistos, veja o Capítulo 9.)

Multiplicando e dividindo números mistos

Não posso oferecer a você um método direto para a multiplicação e a divisão dos números mistos. O único caminho para converter os números mistos em frações impróprias e multiplicar ou dividir como é comum. Aqui está como multiplicar ou dividir os números mistos: **1. Converta todos os números mistos em frações impróprias (veja Capítulo 9, para detalhes).**

Por exemplo, imagine que você queira multiplicar 1 3/5 · 2 1/3. Primeiro converta 1 3/5 e 2 1/3 em frações impróprias:

$$1\frac{3}{5}=\frac{5\,.\,1+3}{5}=\frac{8}{5}$$

$$2\frac{1}{3}=\frac{3\,.\,2+1}{3}=\frac{7}{3}$$

2. **Multiplique estas frações impróprias (como mostro para você antes, neste capítulo, em "Multiplicando e Dividindo Frações).**

$$\frac{8}{5}.\frac{7}{3}=\frac{8\,.\,7}{5\,.\,3}=\frac{56}{15}$$

3. **Se a resposta é uma fração imprópria, tem convertê-la novamente em um número misto (veja Capítulo 9).**

$$\frac{56}{15}=56\div 15=3\text{ r }11=3\frac{11}{15}$$

Neste caso, a resposta já está nos termos inferiores, portanto você não deve reduzi-la.

Como um segundo exemplo, imagine que você queira dividir 3 2/3 por 1 4/7.

1. Converta 3 2/3 e 1 4/7 em frações impróprias:

$$3\frac{2}{3}=\frac{3\,.\,3+2}{3}=\frac{11}{3}$$

$$1\frac{4}{7}=\frac{7\,.\,1+4}{7}=\frac{11}{7}$$

2. Divida estas frações impróprias.

Divida as frações multiplicando a primeira fração pela equivalente da segunda fração (veja a seção anterior "Multiplicando e Dividindo Frações"):

$$\frac{11}{3}\div\frac{11}{7}=\frac{11}{3}.\frac{7}{11}$$

Neste caso, antes de você multiplicar, você pode cancelar os fatores de 11 no numerador e no denominador: $\frac{\cancel{11}}{3}\div\frac{7}{\cancel{11}}=\frac{1\,.\,3}{3\,.\,1}=\frac{7}{3}$

3. Converta a resposta em um número misto

$$\frac{7}{3}=7\div 3=2\text{ r }1=2\frac{1}{3}$$

Somando e subtraindo números mistos

Um modo para somar e subtrair os números mistos é convertê-los em frações impróprias, embora eu descreva antes, neste capítulo em "Multiplicando e dividindo números mistos" e, depois, para somar ou subtraí-los usando um método a partir de "Todos Juntos Agora: Somando Frações" ou a seção "Retire o número: Subtraindo Frações". Fazendo portanto é um caminho perfeito e válido para ter a resposta correta sem aprender um novo método.

Infelizmente, os professores gostam apenas que as pessoas somem e subtraiam os números mistos no próprio caminho especial deles. A boa notícia é que muita gente acha este caminho fácil do que todo o material de conversão.

Dois por dois: Somando dois números mistos

Somar números mistos parece muito com somar números inteiros: Você os acumula um sobre o outro, desenha uma linha e soma. Por esta razão, alguns estudantes sentem-se mais confortáveis para somar números mistos do que somar frações. Aqui está como somar dois números mistos: **1. Soma as partes fracionais usando qualquer método que você gosta e, se necessário, muda a soma em número misto e reduza-a.**

2. Se a resposta que você descobriu no Passo 1 for uma fração imprópria, mude-a

para um número misto, escreva a parte fracional e use a parte do número inteiro na coluna do número inteiro.

3. **Some as partes do número inteiro (inclusive qualquer número usado).**

Sua resposta pode precisar ser reduzida também em termos menores (veja Capítulo 9). Nos exemplos que seguem, mostro para você tudo que você precisa saber.

Somando números mistos quando os denominadores são iguais

Como em qualquer problema envolvendo frações, somar é sempre mais fácil quando os denominadores são iguais. Por exemplo, imagine que você queira somar. Resolver os problemas do número misto é, em geral, mais fácil se você colocar um número sobre o outro:

$$\begin{array}{r} 3\frac{1}{3} \\ + \; 5\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

Como você pode observar, esta arrumação é similar como você somar os números inteiros, mas ela inclui uma coluna extra para frações. Aqui está como você soma estes dois números mistos passo a passo: **1. Some as frações**

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

2. **Troque as frações impróprias para os números mistos; escreva sua resposta.**

Como 2/3 é uma fração própria, você não deve mudá-la.

3. **Some as partes do número inteiro.**

3 + 5 = 8

Aqui está como seu problema parece na forma da coluna:

$$\begin{array}{r} 3\frac{1}{3} \\ + \; 5\frac{1}{2} \\ \hline 8\frac{2}{3} \end{array}$$

Este problema é tão simples quanto eles pensam. Neste caso, todos estes três passos são muito fáceis. Mas às vezes, o Passo 2 exige mais atenção. Por exemplo, imagine que você queira somar 8 3/5 + 6 4/5. Aqui está como você faz isso: **1. Some as frações.**

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$$

2. **Troque as frações impróprias para os números mistos, escreva a parte fracional e usa o número inteiro.**

Como a soma é uma fração imprópria, converta em número misto 1 2/5 (vá ao Capítulo 9 para mais detalhes sobre conversão de frações impróprias em números mistos). Escreva 2/5 e usa o 1 na coluna do número inteiro.

3. **Some as partes do número inteiro, inclusive quaisquer números inteiros que você usou quando você trocou para um número misto.**

   1 + 8 + 6 = 15

Aqui está como o problema resolvido aparece na forma da coluna. (Tenha certeza de alinhar os números inteiros em uma coluna e as frações em uma outra.)

$$\begin{array}{r} 1\phantom{^{3}/_{5}} \\ 8\,^{3}/_{5} \\ +\;6\,^{4}/_{5} \\ \hline 15\,^{2}/_{5} \end{array}$$

Como em quaisquer outros problemas envolvendo frações, às vezes você precisa reduzir no final do Passo 1.

A mesma ideia básica funciona não importa o número de números mistos que você quer somar. Por exemplo, imagine que você queira somar 5 4/9 + 11 7/9 + 3 : **1. Some as frações.**

$$\frac{4}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}+\frac{5}{9}=\frac{24}{9}$$

2. **Troque as frações impróprias para números mistos, escreva a parte fracional e use o número inteiro.**

   Como o resultado é uma fração imprópria, converta em número misto 2 6/9 e, depois, reduza para 2 2/3 (para mais detalhes sobre a conversão e a redução de frações, veja Capítulo 9). Recomendo fazer estes cálculos em uma pedaço de papel de rascunho.

   Escreva 2/3 e usa o 2 na coluna do número inteiro.

3. **Some os números inteiros**

   2 + 5 + 11 + 3 + 1 = 22

Aqui está como o problema parece depois de ser resolvido por você:

$$\begin{array}{r} 2\phantom{\frac{4}{9}} \\ 5\frac{4}{9} \\ 11\frac{7}{9} \\ 3\frac{8}{9} \\ +\ 1\frac{5}{9} \\ \hline 22\frac{2}{3} \end{array}$$

Somando os números mistos quando os denominadores são diferentes

O tipo mais difícil de adição do número misto é quando os denominadores das frações são diferentes. Esta diferença não muda os Passos 2 ou 3, mas ela torna mais difícil o Passo 1.

Por exemplo, imagine que você queira somar 16 3/5 e 7 7/9.

1. Some as frações

Some 3/5 e 7/9. Você pode usar qualquer método antes neste capítulo. Aqui, uso o caminho fácil: $\frac{3}{5}+\frac{7}{9}=\frac{3.9+7.5}{5.9}=\frac{27+35}{45}=\frac{62}{45}$

2. Troque as frações impróprias para números mistos, escreva a parte fracional e use o número inteiro.

Esta fração é imprópria, portanto muda para o número misto . Felizmente, a parte fracional deste número misto não é redutível.

Escreva a fração 17/45 e usa o 1 na coluna do número inteiro.

Some os números inteiros.

1 + 16 + 7 = 24

Aqui está como o problema completo parece:

$$\begin{array}{r} 1\phantom{\frac{3}{5}} \\ 16\frac{3}{5} \\ +\ 7\frac{7}{9} \\ \hline 24\frac{17}{45} \end{array}$$

Subtraindo números mistos

O caminho básico para subtrair números mistos é perto do caminho que você os soma. De novo, a subtração parece muito mais com o que você tem costume nos números mistos. Aqui está como subtrair dois números mistos: **1. Descubra a diferença das partes fracionais**

usando qualquer método que você gosta.

2. Descubra a diferença das partes dos dois números inteiros.

Ao longo do caminho embora você possa encontrar algumas distorções e vezes. Mantenho você no caminho para que no final desta seção você possa resolver qualquer problema de subtração do número misto.

Retirando os números mistos quando os denominadores são iguais

Como na adição, a subtração é muito mais fácil quando os denominadores são iguais. Por exemplo, imagine que você queira subtrair 7 3/5 – 3 1/5. Aqui está com que o problema parece na forma da coluna:

$$\begin{array}{r} 7\frac{3}{5} \\ -\;3\frac{1}{5} \\ \hline 4\frac{2}{5} \end{array}$$

Neste problema, eu subtraio 3/5 – 1/5 = 2/5. Depois subtraio 7 – 3 = 4. Não é muito ruim, você concorda?

Uma complicação surge quando você tenta subtrair uma parte fracional maior a partir de uma menor. Imagine que você queira descobrir 11 1/6 – 2 5/6. Neste momento, se você tenta subtrair as frações, você tem: 1/6 – 5/6 = – 4/6

Obviamente, você não quer terminar com um número negativo na sua resposta. Você pode lidar com este problema tomando emprestado a coluna da esquerda. Esta ideia é muito similar ao emprestado que você usa na subtração regular com uma diferença chave.

Ao tomar emprestado na subtração de um número misto **1. Tome emprestado 1 da porção do número inteiro e somá-lo à porção fracional, tornando a fração em um número misto.**

Para descobrir 11 1/6 – 2 5/6, tome emprestado 1 de 11 e somá-lo a 1/6, tornando-o o número misto 1 1/6: $11\frac{1}{6} = 10 + 1\frac{1}{6}$

2. Mude este novo número misto em uma fração imprópria.

Aqui está o que você tem quando você muda 1 1/6 em uma fração imprópria:

$$10+1\frac{1}{6}=10\frac{7}{6}$$

O resultado é 10 7/6. Esta resposta é uma combinação estranha entre um número misto e uma fração imprópria, mas é o que você precisa para lidar com o trabalho.

3. Use o resultado na sua subtração

$$\begin{array}{r} 10\frac{7}{6} \\ -\ 2\frac{5}{6} \\ \hline 8\frac{2}{6} \end{array}$$

Neste caso, você deve reduzir a parte fracional da resposta: 8 2/6 = 8 1/3

Subtraindo os números mistos quando os denominadores são diferentes

Subtrair os números mistos quando os denominadores são diferentes é apenas a coisa mais cabeluda que você nunca deverá fazer em pré-álgebra. Não obstante, infelizmente, se você trabalhar através deste capítulo, você tem todas as habilidades que você precisa.

Imagine que você queira subtrair 15 4/11 – 12 3/7. Como os denominadores são diferentes, subtrair as frações torna-se mais difícil. Mas você tem uma outra questão para pensar: Neste problema, você precisa tomar emprestado? Se 4/11 for maior que 3/7, você não deve tomar emprestado. Mas se 4/11 for menor que 3/7, você toma emprestado. (Para mais detalhes sobre tomar emprestado na subtração do número misto, veja a seção anterior.) No Capítulo 9, mostro para você como testar duas frações para ver o que é maior pela multiplicação cruzada:

$$\frac{4}{11} \qquad\qquad \frac{3}{7}$$
$$4\,.\,7 = 28 \qquad\qquad 3\,.\,11 = 33$$

Como 28 é menor que 33, 4/11 é menor que 3/7, portanto você deve tomar emprestado.

Apresento o emprestado primeiro: $15\frac{4}{11} = 14 + 1\frac{4}{11} = 14\frac{15}{11}$

O primeiro passo, subtrair as frações deve ser o mais demorado, portanto, como mostro para você antes, em “Subtraindo as frações com diferentes denominadores”, você pode tomar cuidado com o seguinte ao lado: $\frac{15}{11} - \frac{3}{7} = \frac{5\,.\,7 - 3\,.\,11}{11\,.\,7} = \frac{105 - 33}{77} = \frac{72}{77}$

Agora o problema parece com o seguinte: $14\frac{15}{11} - 12\frac{3}{7}$

A boa notícia é que esta fração não pode ser reduzida. (Elas não podem ser reduzidas porque 72 e 77 não têm fatores comuns: 72 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 e 77 = 7 · 11.) Portanto, a parte difícil do problema é resolvida, e o resto segue facilmente:

$$
\begin{array}{r}
14\frac{15}{11} \\
-\ 12\frac{3}{7} \\
\hline
2\frac{72}{77}
\end{array}
$$

Este problema é tão difícil quanto o problema da subtração de um número misto. Verifique passo a passo. Ou melhor ainda, copie o problema e, depois, feche o livro e tente passar pelos seus próprios passos. Se você chega a um impasse, está ok. Melhor agora do que uma prova!

Capítulo 11

Representando Decimais

Neste Capítulo ► Entendendo as bases decimais ► Aplicando os decimais nas Quatro Grandes operações ► Observando o decimal e as conversões de fração ► Fazendo sentido os decimais repetitivos

Como no início os seres humanos usavam seus dedos para contar, o sistema de números é baseado no número 10. Razão pela qual os números entram em unidades, dezenas, centenas e milhares e assim por diante. Um decimal – com seu vírgula decimal útil – permite que as pessoas trabalhem com números menores do que: décimos, centésimos e milésimos.

Aqui estão algumas notícias envolventes: Os decimais são mais mais fáceis para se trabalhar do que as frações (que discuto nos Capítulos 9 e 10). Os decimais parecem mais com os números inteiros do que as frações, portanto, ao trabalhar com os decimais, você não deve se preocupar sobre a redução e o aumento dos termos, as frações impróprias, os números mistos e muitos outros materiais.

Realizar as Quatro Grandes operações – adição, subtração, multiplicação e divisão – nos decimais é muito perto de realizá-las nos números inteiros (que eu cobro na Parte II do livro). Os numerais de 0 a 9 funcionam como eles fazem sempre. Enquanto você tem a vírgula decimal no lugar certo, você está livre.

Neste capítulo, mostro para vocês tudo sobre como trabalhar com os decimais. Mostro para você também como converter as frações em decimais e os decimais em frações. Por fim, ofereço para você uma espiada no mundo estranho dos decimais repetitivos.

Material Decimal Básico

A boa notícia sobre os decimais é que eles parecem muito com os números inteiros do que as frações. Portanto, muito sobre o que você descobre nos números inteiros, no Capítulo, 2 aplica-se aos decimais também. Nesta seção, apresento para você aos decimais, começando com o valor posicional.

Quando você entende os valores posicionais dos decimais, muito é incluído em uma posição. Depois, discuto a sequência de zeros e o que acontece quando você move a vírgula decimal à esquerda ou à direita.

Somando dólares e decimais

Você usa os decimais o tempo todo quando você soma dinheiro. E uma ótima maneira para começar a pensar sobre os decimais é com os dólares e o centavos. Por exemplo, você sabe que $ 0,50 é metade de um dólar (veja Figura 11-1), portanto esta informação lhe diz: 0,5 = ½

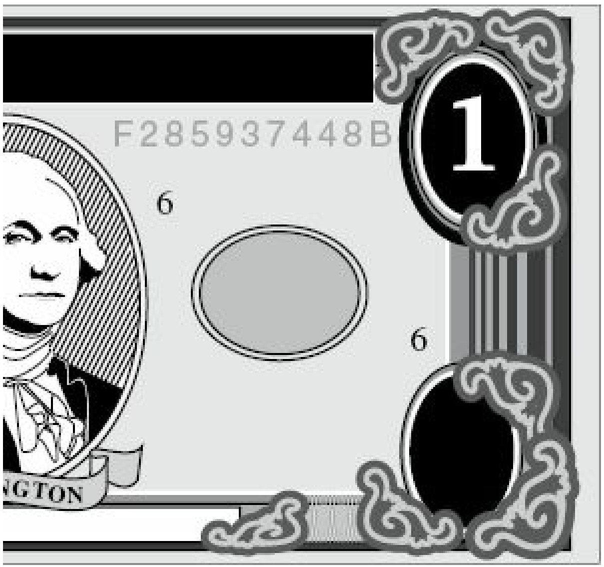


Figura 11-1: Metade (0,5) da nota de um dólar.

Note que no decimal 0,5 eu escrevo o zero no final. Esta é uma prática comum com decimais.

Você sabe também que $ 0,25 é um quarto – isto é, um quarto de um dólar (veja Figura 11-2) – portanto: 0,25 = ¼

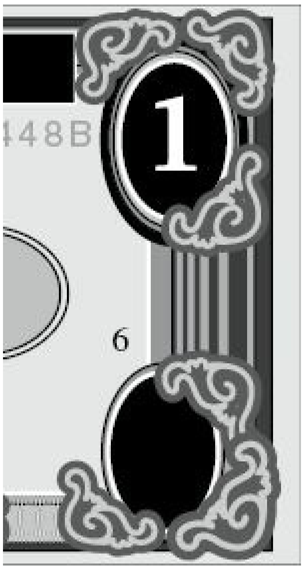


Figura 11-2: Um quarto (0,25) da nota de um dólar.

Do mesmo modo, você sabe que $ 0,75 é igual a três quartos, ou três quartos de um dólar (veja Figura 11-3), portanto: 0,75 = ¾

Figura 11-3: Três quartos (0,75) da nota de um dólar.

Levando mais esta ideia mais adiante, você pode usar o restante dos valores de moedas – dime, níquel, penny e centavos – para criar mais relações entre decimais e frações.

Um dime = $ 0,10 = 1/10 de um dólar, portanto 1/10 = 0,1

Um níquel = $ 0,05 = 1/20 de um dólar, portanto 1/20 = 0,05

Um penny = $ 0,01 = 1/100 de um dólar, portanto 1/100 = 0,01

Note que eu escrevo de novo o zero no decimal 0,1, mas mantenho os zeros nos decimais 0,05 e 0,01. Você pode escrever os zeros a partir do final de um decimal, mas não pode escrever os zeros que vêm entre a vírgula decimal e o outro dígito.

Os decimais são tão bons quanto cortar um bolo ou cortar dinheiro. A figura 11-4 oferece para você um olhar nos quatro cortes dos bolos que mostro para você, no Capítulo 9. Neste momento, dou para você os decimais que lhe informam o número de bolos que você tem. As frações e os decimais realizam a mesma tarefa, permitindo a você cortar um objeto inteiro em pedaços e mostra quanto você tem.

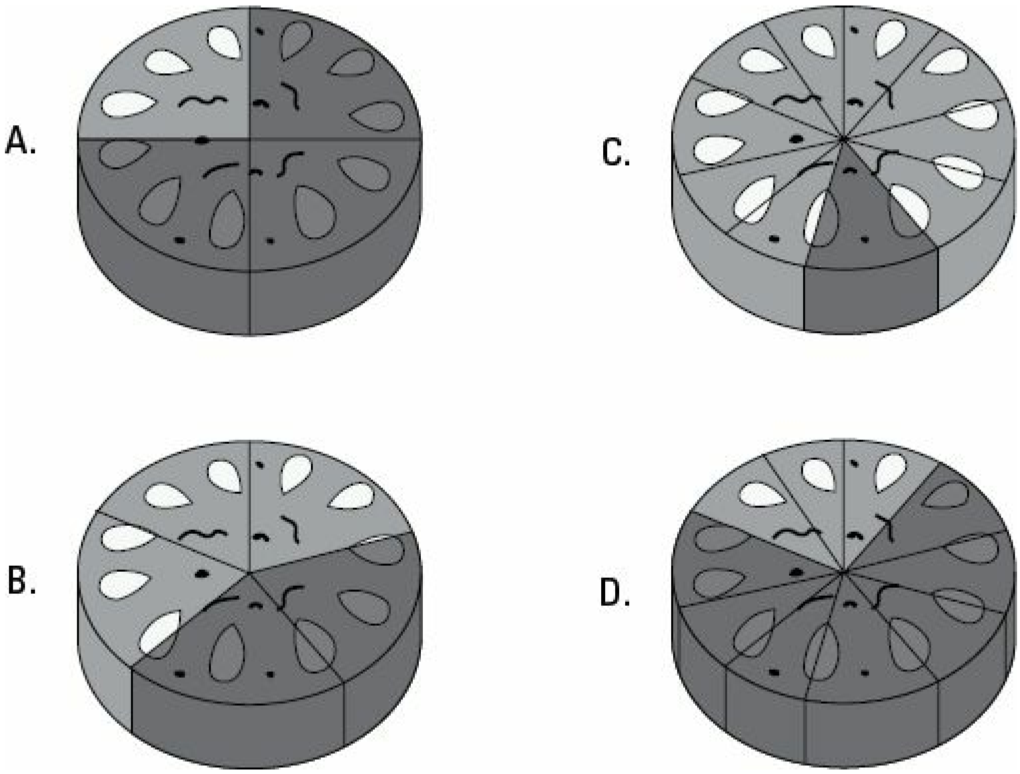


Figura 11-4: Bolos cortados e escurecidos em 0.75 (A), 0,4 (B), 0,1 (C) e 0,7 (D).

Valor posicional dos decimais

No Capítulo 2, você descobre o valor posicional de todos números inteiros. Por exemplo, a Tabela 11-1 mostra como o número inteiro 4,672 é decomposto em termos de valor posicional.

Tabela 11-1 – Decompor 4672 em Termos de Valor Posicional

Milhares	*Centenas*	*Dezenas*	*Unidades*
4	6	7	2

Este número significa 4000 + 600 + 70 + 2

Com os decimais, a ideia é estendida. Primeiro, um vírgula decimal é colocado à direita do lugar das unidades em um número inteiro. Depois, mais números são acrescentados à direita da vírgula decimal.

Por exemplo, o decimal 4672,389 é decomposto como mostrado na Tabela 11-2:

Tabela 11-2 – Decompor o Decimal 4672, 389

Milhares	*Centenas*	*Dezenas*	*Unidades*	*Vírgula Decimal*	*Décimos*	*Centésimos*	*Milésimos*
4	6	7	2	,	3	8	9

Este decimal significa 4000 + 70 + 2 + 3/10 + 8/100 + 9/1000.

A relação entre as frações e os decimais torna-se óbvia quando você observa o valor posicional. Os decimais, de fato, são uma anotação de taquigrafia para as frações. Você pode representar qualquer fração com um decimal.

Conhecendo os fatos de vida do decimal

Depois de entender como funciona o valor posicional nos decimais (como eu explico na seção anterior), muitos fatos inteiros sobre decimais começam a fazer sentido. Duas ideias chaves são a sequência de zeros e o que acontece quando você move um vírgula decimal da esquerda para a direita.

Sequência de zeros

Provavelmente você sabe que pode anexar zeros no início de um número inteiro sem mudar seu valor. Por exemplo, estes três números são todos iguais em valor: 27 027 0,000,027

A razão para isso se torna clara quando você conhece o valor posicional de todos números. Veja Tabela 11-3:

Tabela 11-3 – Exemplo para Anexar os Zeros à Esquerda

Milhões	*Cem Mil*	*Dez Mil*	*Milhares*	*Centenas*	*Dezenas*	*Unidades*
0	0	0	0	0	2	7

Como você pode observar, 0,000,027 simplesmente significa 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 20 + 7. Não importa a quantidade de zeros que você soma no começo de um número, o número 27 não muda.

Os zeros anexados ao começo de um número desta maneira são chamados zeros à esquerda.

Nos decimais, esta ideia de zeros que não somam valor a um número podem ser estendidos à sequência de zeros.

Uma *sequência* de zeros é qualquer número que aparece à direita da vírgula decimal e todo dígito além do zero.

Por exemplo: 34,8 34,80 34,8000

Todos estes três números são iguais. A razão torna-se clara quando você entende como funciona o valor posicional nos decimais. Veja Tabela 11-4.

Tabela 11-4 – Exemplo para Anexar a Sequência de Zeros

Dezenas	*Unidades*	*P. Decimal*	*Décimos*	*Centésimos*	*Milésimos*	*Dez Milésimos*
3	4	.	8	0	0	0

Neste exemplo, 34,8000 significa 30 + 4 + 8/10 + 0 + 0 + 0

Você pode anexar ou remover tanta sequência de zeros quanto você quiser sem mudar o valor de um número.

Quando você entende a sequência dos zeros, pode observar que todo número inteiro pode ser mudado para um decimal facilmente. Anexe apenas um vírgula decimal e um 0 ao final dele. Por exemplo: 4 = 4,0

20 = 20,0

971 = 971,0

Tenha certeza de que você não anexa ou remove qualquer zero que não seja à esquerda ou qualquer sequência que não seja de zeros, porque fazer isso muda o decimal.

Por exemplo, observa este número: 0450,0070

Neste número, você pode remover os zeros à esquerda e a sequência de zeros sem mudar o valor, como segue: 450,007

Os zeros restantes, entretanto, precisam permanecer nos espaços reservados entre a vírgula decimal e os dígitos além de zero. Veja Tabela 11-5.

Tabela 11-5 – Exemplo de Zeros como Espaços Reservados

Mil.	*Cent.*	*Dezenas*	*Unidades*	*V. Dec*	*Décimos*	*Centésimo*	*Milésimos*	*Dez Milésimos*
0	4	5	0	,	0	0	7	0

Continuo a discutir os zeros como espaços reservados na próxima seção.

Movendo a vírgula decimal

Quando você está trabalhando com os números inteiros, você pode multiplicar qualquer número por 10, acrescentando apenas um zero ao final dele. Por exemplo: 45.971 · 10 = 459.710

Para ver por que a resposta é assim, pense novamente sobre o valor posicional dos dígitos de observa a Tabela 11-6:

Tabela 11-6 – Exemplo, Vírgulas Decimais e Valor Posicional de Dígitos

Milhões	*Cem Mil*	*Dez Mil*	*Milhares*	*Centenas*	*Dezenas*	*Unidades*
		4	5	9	7	1

4	5	9	7	1	0

Aqui está o que estes dois números significam, de fato: 45.971 = 40.000 + 5000 + 900 + 70 + 1

459.710 = 400.000 + 50.000 + 9000 + 700 + 10 + 0

Como você pode observar, aquele pequeno 0 faz uma grande diferença porque ele preenche o resto dos números para mudar um lugar.

Este conceito faz mais sentido quando você pensa sobre a vírgula decimal. Veja Tabela 11-7.

Tabela 11-7 – Exemplo, Números Mudando de Lugar

Cem Mil	*Dez Mil*	*Milhares*	*Centenas*	*Dezenas*	*Unidades*	*V. Dec*	*Décimos*	*Centésimos*
	4	5	9	7	1	.	0	0
4	5	9	7	1	0	.	0	0

Com efeito, somar um 0 ao final de um número inteiro move a vírgula decimal de um lugar à direita, você multiplica aquele número por 10. Isso se torna claro quando você começa com um número simples como 7:

70↴
70.0↴
700.0↴
7.000.0

Neste caso, o último efeito é que você moveu a vírgula decimal de três lugares para a direita, que é mesmo que multiplicar 7 por 1000.

Do mesmo modo, para dividir qualquer número por 10, mova a vírgula decimal de um lugar para a esquerda. Por exemplo: 7,0

0,7

0,07

0,007

Neste momento, o último efeito é que você moveu o decimal de três lugares para a esquerda, que é mesmo que dividir 7 por 1000.

Arredondando decimais

Arredondar os decimais funciona quase exatamente como arredondar números. Você irá usar esta habilidade ao dividir os decimais depois, no capítulo.

Normalmente, você precisa arredondar um decimal um número inteiro ou uma ou duas casas decimais.

Para arredondar um decimal em um número inteiro, concentre-se no dígito das unidades e no dígito dos décimos. Arredonde o decimal para cima ou para baixo mais perto do número inteiro, escrevendo a vírgula decimal:

7,1 –> 7   32,9 –> 33   184,3 –> 184

Quando o dígito dos décimos é 5, arredonde o decimal para cima:

83,5 –> 84   296,5 –> 297   1788,5 –> 1789

Se o decimal tem outros dígitos decimais, escreva-os apenas:

18,47 –> 18   21,618 –> 22   3,1415927 –> 3

Ocasionalmente, uma pequena mudança nos dígitos de unidades afeta os outros dígitos. (Isso pode lhe lembrar quando o marcador de quilometragem do seu carro roda um punhado de 9 sobre zeros):

99,9 –> 100   999,5 –> 1000   99.999,712 –> 100.000

A mesma ideia básica aplica-se para arredondar um decimal em qualquer número de lugares. Por exemplo, para arredondar um decimal em uma casa decimal, concentre-se na primeira e segunda casa decimal (isto é os lugares dos décimos e dos centésimos):

76,543 –> 76,5   100,6822 –> 100,7   10,10101 –> 10,1

Para arredondar um decimal em duas casas decimais, concentre-se nas segunda e terceira casas decimais (isto é, os lugares dos centésimos e dos milésimos):

444,4444 –> 444,44   26,55555 –> 26,56   99,997 –> 100,00

Realizando as Quatro Grandes operações com os Decimais

Tudo que você já conhece sobre adição, subtração, multiplicação e divisão dos números inteiros (veja Capítulo 3) continua quando você trabalha com os decimais. De fato, em cada caso existe realmente uma diferença chave: como lidar com aquele pequena vírgula decimal irritante. Nesta seção, mostro para você como realizar as Quatro Grandes operações com os decimais.

O uso mais comum para somar e subtrair decimais é quando você está lidando com dinheiro – por exemplo, o saldo de seu talão de cheques. Depois, neste livro, você descobre que multiplicar e dividir por decimais é útil para o cálculo das porcentagens (veja Capítulo 12), usando a notação científica (veja Capítulo 14) e a medição com o sistema métrico (veja Capítulo 15).

Somando decimais

Somar decimais é quase tão fácil quanto somar números inteiros. Enquanto você estabelece corretamente o problema, você está em boa forma. Para somar os decimais, siga estes passos: **1. Alinhe as vírgulas decimais.**

2. Some com é comum da direita à esquerda, coluna por coluna.

3. Coloque a vírgula decimal da resposta na linha com os outros vírgulas decimais do problema.

Por exemplo, imagine que você queira somar os números 14,5 e 1,89. Alinhe as vírgulas decimais de uma maneira ordenada como segue:

$$\begin{array}{r} 14{,}5 \\ \underline{+\ \ 1{,}89} \end{array}$$

Comece a somar a partir da coluna direita. Use o espaço em branco depois de 14,5 como 0 – você pode escrever isso como uma sequência de 0 (veja antes neste capítulo para ver por que somar zeros ao final de um decimal não muda seu valor). Somar esta coluna oferece a você 0 + 9 = 9.

$$\begin{array}{r} 14{,}50 \\ \underline{+\ \ 1{,}89} \\ 9 \end{array}$$

Continue para a esquerda, 5 + 8 = 13, portanto coloque para baixo o 3 e leva o 1:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14{,}50 \\ \underline{+\ \ 1{,}89} \\ 39 \end{array}$$

Complete o problema coluna por coluna e, no final, coloque a vírgula decimal diretamente de baixo dos outros no problema:

$$\begin{array}{r} 1\phantom{{,}39} \\ 14{,}50 \\ \underline{+\ \ 1{,}89} \\ 16{,}39 \end{array}$$

Quando você soma mais de um decimal, as mesmas regras são aplicadas. Por exemplo, imagine que você queira somar 15,1 + 0,005 + 800 + 1,2345. A ideia mais importante é alinhar as vírgulas decimais corretamente:

$$\begin{array}{r} 15{,}1 \\ 800{,}0 \\ \underline{+\ \ \ \ 1{,}2345} \end{array}$$

Para evitar os erros, seja especialmente organizado quando você soma muitos decimais.

Como o número 800 não é um decimal, eu coloco um vírgula decimal e um 0 no final dele para ser claro quanto a como alinhá-lo. Se você gostar, você pode ter certeza de que todos os números têm o mesmo número de casas decimais (neste caso, 4) somando a sequência de zeros. Depois de você estabelecer corretamente o problema, a adição não é mais difícil do que qualquer outro problema de adição:

$$\begin{array}{r} 15{,}1000 \\ 800{,}0000 \\ \underline{+\quad 1{,}2345} \\ 816{,}3395 \end{array}$$

Subtraindo decimais

A subtração dos decimais usa o mesmo truque que a adição deles (que discuto na seção anterior). Aqui está como você subtrai os decimais: **1. Alinhe as vírgulas decimais.**

2. Subtraia como é comum da direita à esquerda, coluna por coluna.

3. Quando você estiver pronto, coloque a vírgula decimal da resposta em linha com os outras vírgulas decimais do problema.

Por exemplo, imagine que você queira entender 144,87 – 0,321. Primeiro, alinhe as vírgulas decimais:

$$\begin{array}{r} 144{,}87 \\ \underline{-\quad 0{,}321} \end{array}$$

Neste caso, eu somo um zero no final do primeiro decimal. Este espaço reservado lembra a você que, na coluna da direita, você precisa tomar emprestado para ter a resposta de 0 – 1:

$$\begin{array}{r} \mathbf{6} \\ 144{,}8\cancel{7}10 \\ \underline{-\quad 0{,}32\ \ 1} \\ 4\ \ 9 \end{array}$$

O resto do problema é muito simples. Acaba apenas com a subtração e escreve a vírgula decimal:

$$\begin{array}{r} \mathbf{6} \\ 144{,}8\cancel{7}10 \\ \underline{-\quad 0{,}32\ \ 1} \\ 144{,}54\ \ 9 \end{array}$$

Como na adição, a vírgula decimal da resposta vai diretamente debaixo de onde ele aparece no problema.

Multiplicando decimais

Multiplicar os decimais é diferente de somar e subtraí-los, você não precisa se preocupar com o alinhamento das vírgulas decimais (veja as seções anteriores). De fato, a única diferença entre multiplicar os números inteiros e os decimais vem no final: Aqui está como multiplicar os decimais: **1. Realize a multiplicação como você faria para os números inteiros.**

2. **Quando você estiver pronto, some o número de dígitos à direita da vírgula decimal em cada fator e soma o resultado.**
3. **Coloque a vírgula decimal na sua resposta para que ela tenha o mesmo número de dígitos depois da vírgula decimal.**

Este procedimento parece complicado, mas a multiplicação dos decimais pode ser mais simples, de fato, do que somar ou subtraí-los. Imagine, por exemplo, que você queira multiplicar 23,5 por 0,16. O primeiro passo pretende que você multiplique os números sem as vírgulas decimais:

```
  23,5
x 0,16
  1410
  2350
  3760
```

Esta resposta não é completa, no entanto, porque você precisa ainda descobrir para onde a vírgula decimal vai. Para fazer isso, note que 23,5 tem um dígito depois da vírgula decimal e aquele 0,16 tem dois dígitos depois da vírgula decimal. Como 1 + 2 = 3, coloque a vírgula decimal na resposta para que ele tenha três dígitos depois da vírgula decimal. (Você pode colocar seu lápis no 0 no final de 3760 e mover a vírgula decimal de três lugares para a esquerda.)

```
  23,5    1 dígito depois da vírgula decimal
x 0,16    2 dígitos depois da vírgula decimal
  1410
  2350
 3,760    3 dígitos depois da vírgula decimal
```

Embora o último dígito na resposta seja um 0, você precisa ainda somar este como um dígito, colocando a vírgula decimal. Depois que a vírgula decimal estiver no seu lugar, você pode escrever a sequência de zeros (veja antes para "Material Básico do Decimal" neste capítulo para ver por que os zeros no final de um decimal que não muda o valor do número).

Portanto, a resposta é 3,760 que é igual a 3,76.

Dividindo decimais

Uma longa divisão nunca agradou às pessoas. Dividir os decimais é quase a mesma coisa que dividir os números inteiros, razão pela qual muitas pessoas não gostam, particularmente, de dividir os decimais.

Mas, pelo menos, você pode ter um conforto pelo fato de quando você sabe como fazer uma longa divisão (que discuto no Capítulo 3) entender como dividir decimais é fácil. A principal diferença vem no começo antes de você começar a divisão.

Aqui está como dividir os decimais: **1. Transforme o divisor (o número que você está dividindo por) em um número inteiro, movendo a vírgula decimal completamente à direita; ao mesmo tempo, mova a vírgula decimal no dividendo (o número que você está dividindo), o mesmo número de lugares à direita.**

Por exemplo, imagine que você queira dividir 10,274 por 0,11. Escreva o problema como é comum:

$$\begin{array}{r|l} 10{,}274 & 0{,}11 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Transforme 0,11 em um número inteiro, movendo a vírgula decimal em 0,11 de dois lugares à direita, dando você 11. Ao mesmo tempo, move a vírgula decimal em 10,274 de dois lugares à direita, dando você 1027,4:

$$\begin{array}{r|l} 1027{,}4 & 11 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

2. Coloque um vírgula decimal no quociente (a resposta) logo acima onde a vírgula decimal aparece agora no dividendo.

Aqui está com que parece este passo:

$$\begin{array}{r|l} 1027{,}4 & 11 \\ \cline{2-2} -99\phantom{7{,}4} & 9 \\ \cline{1-1} 37\phantom{{,}4} & \end{array}$$

3. Divide como é comum, tomando cuidado para alinhar o quociente para que a vírgula decimal termine no lugar.

Para começar, perceba que 11 é muito grande para entrar no 1 ou 10. Entretanto, 11 entra no 102 (9 vezes). Portanto, escreva o primeiro dígito do quociente acima do 2 e continua:

$$\begin{array}{r|l} 1027{,}4 & 11 \\ \cline{2-2} -99\phantom{7{,}4} & 9 \\ \cline{1-1} 37\phantom{{,}4} & \end{array}$$

Exclua após baixar o próximo número 7. Neste momento, 11 entra no 37 três vezes. O importante é colocar o próximo dígito na resposta acima do 7:

$$\begin{array}{r|l} 1027{,}4 & 11 \\ \cline{2-2} -99\phantom{7{,}4} & 93 \\ \cline{1-1} 37\phantom{{,}4} & \\ 33\phantom{{,}4} & \\ \cline{1-1} 44 & \end{array}$$

Exclua após baixar o próximo número 4. Agora 11 entra no 44 quatro vezes. De novo, seja cauteloso para colocar o próximo dígito no quociente acima do 4 e complete a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 1027{,}4 & 11 \\ \cline{2-2} -99\phantom{7{,}4} & 93{,}4 \\ \cline{1-1} 37\phantom{{,}4} & \\ 33\phantom{{,}4} & \\ \cline{1-1} 44 & \\ 44 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Portanto, a resposta é 93,4. Como você pode observar, enquanto você toma cuidado quando você coloca a vírgula decimal e os dígitos, a resposta correta aparece com a vírgula decimal na posição correta.

Lidando com mais zeros no dividendo

Às vezes, você deve somar uma ou mais de uma sequência de zeros ao dividendo. Como discuto antes, neste capítulo, você pode somar tanta sequência de zeros quanto você gosta a um decimal sem mudar seu valor. Por exemplo, imagine que você queira dividir 67,8 por 0,333: $\begin{array}{r|l} 67{,}8 & 0{,}333 \\ \hline & \end{array}$

1. **Mude 0,333 em um número inteiro, movendo a vírgula decimal de três lugares à direita; ao mesmo tempo, mova a vírgula decimal em 67,8 de três lugares à direita:**

   $$\begin{array}{r|l} 67800 & 333 \\ \hline & \end{array}$$

   Neste caso, quando você move a vírgula decimal em 67,8 você desloca do lugar, portanto você deve somar alguns zeros ao dividendo. Este passo é perfeitamente válido, e você precisa fazer isso quando o divisor tiver mais casas decimais que o dividendo.

2. **Coloca a vírgula decimal no quociente diretamente acima de onde ele aparece no dividendo:**

   $$\begin{array}{r|l} 67800 & 333 \\ \hline & \end{array}$$

3. **Divide como é de costume, seja cauteloso para alinhar os números do quociente corretamente. Neste momento, 333 não entra no 6 ou 67, mas ele não entra no 678 (duas vezes). Portanto coloca o primeiro dígito do quociente diretamente acima do 8:**

   $$\begin{array}{r|l} 67800 & 333 \\ \cline{2-2} -666 & 2 \\ \cline{1-1} 120 & \end{array}$$

   Passei para frente da divisão para colocar o primeiro 0. Neste ponto, 333 não entra no 120, portanto você precisa colocar um 0 acima do primeiro 0 no 67.800 e trazer o segundo 0. Agora, 333 não entra no 1200, portanto coloca o próximo dígito na resposta (3) sobre o segundo 0: $\begin{array}{r|l} 67800 & 333 \\ \cline{2-2} -666 & 203 \\ \cline{1-1} 1200 & \\ 999 & \\ \cline{1-1} 201 & \end{array}$

Neste momento, a divisão não dá certo uniformemente. Se isso fosse um problema com os números inteiros, você terminaria escrevendo um resto de 201. (Para mais detalhes sobre restos da divisão, veja Capítulo 1.) Mas os decimais são outra história. A próxima seção explica por que com os decimais o show deve continuar.

Completando a divisão do decimal

Quando você divide os números inteiros, pode completar o problema simplesmente escrevendo o resto. Mas os restos nunca são permitidos na divisão do decimal.

Um modo comum de completar um problema de uma divisão decimal é arredondar a resposta. Na maioria dos casos, você será instruído para arredondar sua resposta mais perto dos números inteiros ou uma ou duas casas decimais (veja antes, neste capítulo, para descobrir como arredondar os decimais.) Para completar o problema de uma divisão decimal arredondando-o, você precisa somar pelo menos uma sequência de zeros ao dividendo. Para arredondar um decimal em ✓um número inteiro soma uma sequência de zero ✓uma casa decimal soma duas sequências de zeros ✓duas casas decimais soma três sequências de zeros Veja com que parece o problema com uma sequência de zero anexada:

```
 67800 |333
-666   |203,
  1200
   999
   2010
```

Anexar uma sequência de zero não muda um decimal, mas permite que você baixe mais de um número, mudando 201 no 2010. Agora você pode dividir 333 no 2010:

```
 67800 |333
-666   |203,6
  1200
   999
   2010
   1998
     12
```

Neste ponto, você pode arredondar a resposta mais perto do número inteiro 204. Ofereço para você mais exercício para dividir os decimais mais adiante neste capítulo.

Convertendo entre Decimais e Frações

As frações (veja Capítulos 9 e 10) e os decimais são similares, os dois permitem-lhe representar as partes do todo – isto é, estes números atacam a reta numerada entre os números inteiros.

Na prática, no entanto, às vezes uma dessas opções ser mais desejável do que a outra. Por exemplo, as calculadoras gostam dos decimais, mas elas não são tão loucas para as frações. Para sua calculadora, você pode ter que mudar as frações em decimais.

Como outro exemplo, algumas unidades de medição (tais como polegadas) usam frações, enquanto outras (tais como metros) usam decimais. Para mudar as unidades, você pode precisar converter entre as frações e os decimais.

Nesta seção, mostro para você como converter de trás para frente entre as frações e os decimais. (Se você precisa se refrescar com as frações, reveja os capítulos 9 e 10 antes de proceder.)

Fazendo conversões simples

Alguns decimais são tão comuns que você deve memorizar como representá-los como as frações. Aqui está como converter uma casa de todos os decimais em frações:

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1/10	1/5	3/10	2/5	1/2	3/5	7/10	4/5	9/10

E aqui estão alguns decimais mais comuns que traduzem facilmente as frações:

0,125	0,25	0,375	0,625	0,75	0,875
1/8	1/4	3/8	5/8	3/4	7/8

Mudando decimais em frações

Converter um decimal em uma fração é muito simples. A única parte complicada entra quando você deve reduzir a fração ou mudá-la para um número misto.

Nesta seção, primeiro mostro para você o caso fácil, quando não é mais necessário trabalhar. Depois, mostro para você o caso mais difícil, quando você precisa arrancar a fração. Mostro para você também um ótimo truque para poupar tempo.

Fazendo uma conversão básica de decimais para frações

Aqui está como converter um decimal para uma fração: **1. Desenhe uma linha (barra de fração) de baixo do decimal e coloca um 1 abaixo dela.**

Imagine que você queira tornar o decimal 0,3763 em uma fração. Desenhe uma linha de baixo de 0,3763 e coloque um 1 debaixo dela.

$$\frac{0{,}3763}{1}$$

Este número parece com uma fração, mas, tecnicamente, ele não é igual a 1 porque o número na parte superior (o numerador) é um decimal.

2. Mova a vírgula decimal de um lugar para a direita e soma um 0 depois de 1.

$$\frac{3{,}763}{10}$$

3. **Repita o passo 2 até a vírgula decimal mover-se completamente para a direita. Portanto, você pode escrever a vírgula decimal totalmente:**

Neste caso, este é o procedimento de passo três: $\frac{37,63}{100} = \frac{376,3}{1.000} = \frac{3.763}{10.000}$

Como você pode observar no último passo, a vírgula decimal no numerador move-se completamente ao final do número, portanto está tudo bem para escrever a vírgula decimal.

Nota: Mover um vírgula decimal de um lugar para a direita é a mesma coisa que multiplicar um número por 10. Quando você move a vírgula decimal de quatro lugares neste problema, essencialmente você está multiplicando o 0,3763 e o 1 por 10.000. Note que o número de dígitos depois da vírgula decimal no decimal original é igual ao número de zeros que acabam seguindo o 1.

4. **Se necessário, mude a fração resultante para um número misto e/ou reduza.**

A fração 3763/10.000 pode parecer um grande número, mas ela é menor que 1, porque o numerador é inferior ao denominador (número na parte inferior). Portanto, esta fração é uma fração própria e não pode ser mudada em um número misto (veja Capítulo 10, para descobrir mais detalhes sobre os números mistos). Esta fração está também nos menores termos possíveis (você não pode reduzi-la – veja Capítulo 9), portanto este problema é completo.

Na seguinte seção, mostro para você como converter os decimais em frações quando você deve trabalhar com os números mistos e reduzir os termos.

Nos melhores termos: Misturando números e reduzindo frações

Em alguns casos, você pode ter que reduzir uma fração para termos menores depois de convertê-la (veja Capítulo 9, para mais detalhes sobre a redução das frações). Reduzir, nestes casos, é, em geral, fácil, porque não importa o tamanho do denominador, é um múltiplo de 10 que tem apenas dois fatores primos: 2 e 5 (veja Capítulo 8, para mais detalhes sobre os fatores primos).

LEMBRE-SE Quando você está convertendo um decimal para uma fração, se o decimal termina em um número ímpar ou no número 5, você pode reduzir a fração; senão você não pode. Também, se você tiver um número maior que 0 em algum lugar antes da vírgula decimal, você terminará com um número misto.

Imagine que você queira converter o decimal 12,16 para uma fração. Faça o seguinte: **1. Desenhe uma linha (barra de fração) debaixo de 12,16 e coloque um 1 abaixo dela:**

$$\frac{12,16}{1}$$

2. **Mova a vírgula decimal de um lugar para a direita e soma um 0 depois de 1:**

$$\frac{121,6}{10}$$

3. Repita o Passo 2:

$$\frac{1.216}{100}$$

4. Se necessário, mude a fração 1216/100 para um número misto e reduza para termos menores.

Neste momento, o numerador é maior que o denominador, portanto $\frac{1.216}{100}$ é uma fração imprópria e deve ser mudada para um número misto.

Depois de mudar um decimal para uma fração imprópria, você pode convertê-la em um número misto, "retirando" a parte do número inteiro original do decimal a partir da fração.

Neste caso, o decimal original era 12,16, portanto a parte de seu número original era 12.

Fazer o que se segue é perfeitamente correto: $\frac{1.216}{100} = 12\frac{16}{100}$

O truque funciona apenas quando você mudou um decimal para uma fração – não tente isso com as outras frações, ou você terá uma resposta errada.

O número misto pode ser reduzido também como segue (se este último passo não parece claro, verifique o Capítulo 9, para mais detalhes sobre a redução das frações):

$$12\frac{16}{100} = 12\frac{8}{50} = 12\frac{4}{25}$$

Mudando frações em decimais

Converter as frações em decimais não é difícil, mas, para fazer isso, você precisa conhecer a divisão de decimal. Se você precisar aumentar a velocidade nisso, verifique, antes, neste capítulo em "Dividindo decimais".

Para converter uma fração em um decimal: 1. Estabeleça a fração como a divisão de um decimal, dividindo o numerador (número na parte superior) pelo denominador (número na parte inferior).

2. Anexe uma sequência de zeros suficiente ao numerador para que você possa continuar a dividir até que você descubra que a resposta é um decimal terminativo

ou um decimal repetitivo.

Não se preocupe, eu explico os decimais terminativos e repetitivos depois.

A última parada: Decimais Terminativos

Às vezes, quando você divide o numerador de uma fração pelo denominador, eventualmente a divisão dá certo uniformemente. O resultado é um decimal de terminação.

Por exemplo, imagine que você queira mudar a fração 2/5 para um decimal. Aqui está seu primeiro passo:

$$\begin{array}{r|l} 2 & \underline{5} \\ & \end{array}$$

Uma olhada neste problema e parece que você é condenado desde o início, porque 5 não entra no 2. Mas observe o que acontece quando você soma alguma sequência de zeros. Note que eu coloco também um zero e uma vírgula decimal na resposta. Este passo é importante – você pode ler mais sobre isso em "Dividindo decimais":

$$\begin{array}{r|l} 20 & \underline{5} \\ & 0, \end{array}$$

Agora você pode dividir, embora 5 não entre no 2, 5 entra no 20 quatro vezes:

$$\begin{array}{r|l} 20 & \underline{5} \\ \underline{-20} & 0{,}4 \\ 0 & \end{array}$$

Você está pronto! Como foi apresentado, você precisou acrescentar uma sequência de zero, portanto você pode ignorar o resto: $\frac{2}{5} = 0{,}4$

Como a divisão deu certo uniformemente, a resposta é um exemplo de um decimal terminativo.

Como outro exemplo, imagine que você queira descobrir como representar 7/16 como um decimal. Como antes, anexo uma sequência de zeros:

$$\begin{array}{r|l} 70 & \underline{16} \\ \underline{-64} & 0{,}4375 \\ 60 & \\ \underline{48} & \\ 120 & \\ \underline{112} & \\ 80 & \\ \underline{80} & \\ 0 & \end{array}$$

Por último, a divisão dá certo uniformemente, portanto a resposta é um decimal terminativo de novo. Então, 7/16 = 0,4375.

O passeio contínuo: Decimais Repetitivos

Às vezes, quando você tenta converter uma fração para um decimal, a divisão nunca dá certo uniformemente. O resultado é um decimal repetitivo – isto é, um vírgula decimal que repete o mesmo modelo de número para sempre.

Você pode reconhecer estas pequenas criaturas inoportunas, a partir de sua calculadora, quando um simples problema de divisão aparentemente produz uma longa série de números.

Por exemplo, para mudar 2/3 em um decimal, comece a dividir 2 por 3. Como na última seção, comece a somar três sequências de zeros e veja onde ela conduz:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{-18} & 0,666 \\ 20 & \\ \underline{18} & \\ 20 & \\ \underline{18} & \\ 2 & \end{array}$$

Neste ponto, você não achou ainda uma resposta exata. Mas você pode notar que um modelo repetitivo desenvolveu na divisão. Não importa o número de sequências de zeros que você anexa ao número 2, o mesmo modelo continuará para sempre. Esta resposta 0,666... é exemplo de um decimal repetitivo. Você pode escrever 2/3, como: $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$

A barra sobre o 6 significa que neste decimal o número 6 repete infinitamente. Você pode representar muitas frações simples como os decimais repetitivos. De fato, toda fração pode ser representada como um decimal repetitivo ou como um decimal terminativo – isto é, como um decimal ordinário que termina.

Agora, imagine que você queira descobrir a representação decimal de 5/11. Aqui está como este problema esgota:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 11 \\ \cline{2-2} \underline{-44} & 0,4545 \\ 60 & \\ \underline{55} & \\ 50 & \\ \underline{44} & \\ 60 & \\ \underline{55} & \\ 5 & \end{array}$$

Neste momento, o modelo repete todo outro número – 4 depois 5, depois 4 de novo e depois 5 de novo infinitamente. Anexar mais uma sequência de zeros ao decimal original vai enfileirar este modelo indefinidamente. Portanto, você pode escrever $\frac{5}{11} = 0,\overline{45}$

Neste momento, a barra está sobre o 4 e o 5 dizendo a você que estes dois números alternam infinitamente.

Os decimais repetitivos são uma esquisitice, mas eles não são difíceis de se trabalhar. De fato, enquanto você pode mostrar que a divisão de um decimal é repetitiva, você descobriu sua resposta. Lembre apenas de colocar a barra sobre os números que continuam repetitivos.

Alguns decimais nunca terminam e nunca se repetem. Você não pode escrevê-los como frações. Portanto os matemáticos desenvolveram alguns caminhos curtos para nomeá-los.

Capítulo 12

Jogando com Porcentagens

Neste Capítulo* ► *Entendendo o que as porcentagens são* ► *Convertendo as porcentagens de trás para frente entre os decimais e as frações* ► *Resolvendo os dois problemas de porcentagem simples e difícil* ► *Usando a porcentagem para resolver três tipos diferentes de problemas de porcentagem

Assim como números inteiros e decimais, porcentagens são modos de representar partes de um todo. A palavra porcentagem significa "de 100." Portanto, se você tem 50 % de alguma coisa, você tem 50 de 100. Se você tem 25% dela, você tem 25 de 100. Evidentemente, se você tem 100% de qualquer coisa, você tem tudo.

Neste capítulo, mostro para você como trabalhar com porcentagens e como as porcentagens se parecem com os decimais. Primeiro, mostro para você como converter os números de trás para frente entre as porcentagens e os decimais. Não se preocupe – esta troca é muito fácil de fazer. Depois, mostro para você como converter de trás para frente entre as porcentagens e as frações – também não muito ruim. Quando você entende como as conversões funcionam, mostro para você os três tipos de problemas de porcentagem básicos mais um método que torna simples os problemas.

Sentido das Porcentagens

A palavra porcentagem significa, literalmente, "por cem," mas na prática ela significa "de 100." Por exemplo, imagine que uma escola tenha exatamente 100 crianças – 50 meninas e 50 meninos. Você pode dizer que "50 de 100" crianças são meninas – ou você pode abreviá-lo para, simplesmente, " 50 por cento." Embora mais curto do que aquele, você pode usar o símbolo %, que significa por cento.

Dizer que 50% dos estudantes são meninas é igual a dizer que ½ deles são meninas. Ou se você prefere os decimais, é a mesma coisa dizer que 0,5 de todos os estudantes são meninas. Este exemplo mostra para você que as porcentagens como as frações e os decimais são apenas um outro modo de discutir as partes do todo. Neste caso, o todo é o número total de crianças na escola.

Literalmente, você não deve ter 100 de alguma coisa para usar uma porcentagem. Provavelmente, você nunca cortará um bolo em 100 pedaços, mas isso não importa. Os valores são iguais. Se você discute um bolo, um dólar ou um grupo de crianças, 50 % é ainda metade, 25 % é ainda um quarto e 75% é ainda três quartos e assim por diante.

Qualquer porcentagem menor que 100 % significa inferior ao todo – quanto menor a porcentagem, menos você tem. Provavelmente você conhece bem este fato a partir do sistema de classificação da escola. Se você consegue 100 %, você obtém um resultado perfeito. E 80 % é nota B, 70 % é um C e, bem, você sabe o resto.

Evidentemente, 0 % significa “0 de 100” – de qualquer maneira você o divide, você tem nada.

Lidando com Porcentagens Maiores que 100%

100 % significa – “100 de 100” – em outras palavras tudo. Portanto, quando digo que tenho 100 % de confiança em você, quero dizer que tenho confiança completa em você.

O que acontece com as porcentagens maiores que 100 %? Bem, algumas vezes porcentagens como estas não fazem sentido. Por exemplo, você pode gastar mais de 100 % do seu tempo jogando basquete não importa o quanto você ama o esporte; 100 % é o tempo todo que você tem e nada mais.

Mas muitas vezes, as porcentagens maiores que 100 % são perfeitamente razoáveis. Por exemplo, imagine que eu tenho uma carroça de hot dog e vendo o seguinte: 10 hot dogs de manhã 30 hot dogs de tarde O número de hot dogs que vendo de tarde é 300 % do número que vendi de manhã. São três vezes mais.

Aqui está um outro caminho para observar: eu vendo 20 hot dogs a mais de tarde do que de manhã, portanto são 200 % de aumento de tarde – 20 é duas vezes 10.

Gaste um pouco de tempo pensando neste exemplo até ele fazer sentido. Você visita algumas destas ideias de novo, no Capítulo 13, quando mostro para você como resolver os problemas de palavras envolvendo porcentagens.

Convertendo Porcentagens para Decimais e Frações e vice-versa

Para resolver muitos problemas de porcentagem, você precisa mudar a porcentagem em decimal ou em fração. Então, você pode aplicar o que você sabe sobre resolver os problemas de decimais e frações. Razão pela qual mostro para você como converter para porcentagens e a partir de porcentagens antes mostro para você como resolver os problemas de porcentagem.

As porcentagens e os decimais são formas similares de expressar as partes de um todo. Esta similaridade torna possível a conversão das porcentagens em decimais e vice-versa na maioria das vezes um caso de mover a vírgula decimal. É tão simples que, provavelmente, você pode fazer isso durante seu sono (mas, provavelmente, você deve ficar atento quando você lê sobre o conceito primeiro).

As porcentagens e as frações expressam a mesma ideia – partes de um todo – de diferentes formas. Portanto converter de trás para frente entre porcentagens e frações não é tão simples quanto mover a vírgula decimal de trás para frente. Nesta seção, discuto as formas de converter para as porcentagens, os decimais e as frações e vice-versa, começando com a conversão das porcentagens em decimais.

Partindo das porcentagens para decimais

LEMBRE-SE Para converter uma porcentagem em um decimal, escreva o sinal de porcentagem (%) e mova a vírgula decimal de dois lugares para a esquerda. É tudo que existe nela. Lembre-se que em um número inteiro, a vírgula decimal aparece no final. Por exemplo, 2,5 % = 0,025

4 % = 0,04

36 % = 0,36

111 % = 1,11

Mudando os decimais em porcentagens

LEMBRE-SE Para converter um decimal em uma porcentagem, mova a vírgula decimal de dois lugares para a direita e acrescente o sinal de porcentagem (%): 0,07 = 7 %

0,21 = 21 %

0,375 = 37,5 %

Trocando as porcentagens para as frações

Converter as porcentagens em frações é bastante simples. Lembre-se que a palavra porcentagem significa “de 100”. Portanto, mudar as porcentagens em frações naturalmente envolve o número 100.

LEMBRE-SE Para converter uma porcentagem em uma fração, use o número na porcentagem como seu numerador (número na parte superior) e o número 100 como seu denominador (número na parte inferior): $39\% = \frac{39}{100}$ $\quad 86\% = \frac{86}{100}$ $\quad 217\% = \frac{217}{100}$

Sempre como nas frações, você pode precisar reduzir os termos menores ou converter uma fração imprópria em um número misto (vá ao Capítulo 9, para mais detalhes nestes tópicos).

Nos três exemplos, 39/100 não pode ser reduzida ou convertida para um número misto. Entretanto, 86/100 pode ser reduzida porque o numerador e o denominador são ambos números ímpares: $\frac{86}{100} = \frac{43}{50}$

E 217/100 pode ser convertida em um número misto porque o numerador (217) é maior que o denominador (100): $\frac{217}{100} = 2\frac{17}{100}$

Uma vez num momento, você pode começar com uma porcentagem que é um decimal tal como 99,9 %. A regra é ainda a mesma mas agora você tem um decimal no numerador (número na parte superior) que a maioria das pessoas não gosta de ver. Para suprimi-lo, mova a vírgula decimal de um lugar para a direita no numerador e no denominador:

$$39{,}9\% = \frac{99{,}9}{100} = \frac{999}{1.000}$$

Então, 99,9 % converte para a fração 999/1000.

Tornando frações em porcentagens

Converter uma fração em uma porcentagem é, realmente, um processo de dois passos. Aqui está como converter uma fração em uma porcentagem: **1. Converta a fração em um decimal**

Por exemplo, imagine que você queira converter a fração 4/5 em uma porcentagem. Para converter 4/5 em um decimal, você pode dividir o numerador pelo denominador, como mostrado no Capítulo 11: 4/5 = 0,8

2. Converta este decimal em uma porcentagem

Converta 0,8 em uma porcentagem, movendo a vírgula decimal de dois lugares para a direita e acrescentando o sinal de uma porcentagem (como mostro para você antes, em “Mudando os decimais em porcentagens”).

0,8 = 80 %

Agora, imagine que você queira converter a fração 5/8 em uma porcentagem. Siga estes passos: **1. Converta 5/8 em um decimal dividindo o numerador pelo denominador:**

```
 50  |8
-48  |0,625
  20
  16
   40
   40
    0
```

Portanto, 5/8 = 0,625

2. **Converta 0,625 em uma porcentagem, movendo a vírgula decimal de dois lugares para a direita e acrescentando o sinal de uma porcentagem (%):**

   0,625 = 62,5 %

Resolvendo Problemas das Porcentagens

Quando você conhece a relação entre as porcentagens e as frações, que discuto antes, em “Convertendo Porcentagens para Decimais e Frações vice-versa”, você pode resolver muitos problemas de porcentagem com alguns truques simples. Outros, entretanto, exigem um pouco mais de trabalho. Nesta seção, mostro para você como notar facilmente o problema de uma porcentagem a partir de um problema difícil e dou para você as ferramentas para resolver todos eles.

Resolvendo os problemas simples da porcentagem

DICA Muitos problemas de porcentagem parecem ser fáceis quando você dá a eles um pouco de atenção. Em muitos casos, lembre-se apenas da relação entre as porcentagens e as frações, e você está na metade do caminho para sua casa: ✓**Descobrindo 100 % de um número:** lembre-se que 100 % significa tudo, portanto 100 % de qualquer número é, simplesmente, o mesmo número: 100 % de 5 é 5 100 % de 91 é 91 100 % de 732 é 732

✓ **Descobrindo 50 % de um número:** Lembre-se que 50 % significa a metade, portanto, para descobrir 50 % de um número, divida-o apenas por 2: 50 % de 20 é 10 50 % de 88 é 44

$$50\% \text{ de } 7 \text{ é } \frac{7}{2} \left(\text{ou } 3\frac{1}{2} \text{ ou } 3{,}5\right)$$

✓ **Descobrindo 25 % de um número:** Lembre-se que 25 % é igual a ¼, portanto, para descobrir 25 % de um número, divida-o por 4: 25 % de 40 é 10 25 % de 88 é 22

$$25\% \text{ de } 15 \text{ é } \frac{15}{4} \left(\text{ou } 3\frac{3}{4} \text{ ou } 3{,}75\right)$$

- **Descobrindo 20 % de um número:** Descobrir 20 % de um número é útil se você gosta dos serviços que você fez em um restaurante porque uma boa gorjeta é 20 % da conta. Como 20 % é igual a 1/5, você pode descobrir 20 % de um número dividindo-o por 5. Mas posso lhe mostrar um caminho mais fácil: Para descobrir 20 % de um número, mova a vírgula decimal de um lugar para a esquerda e dobra o resultado: 20 % de 80 = 8 · 2 = 16 20 % de 300 = 30 · 2 = 60 20 % de 41 = 4,1 · 2 = 8,2
- **Descobrindo 10 % de um número:** Descobrir 10 % de qualquer número é igual a descobrir 1/10 daquele número. Para fazer isso, mova apenas a vírgula decimal de um lugar para a esquerda: 10 % de 30 é 3

    10 % de 41 é 4,1

    10 % de 7 é 0,7
- **Descobrindo 200 %, 300 % e assim por diante de um número:** Trabalhar com as porcentagens que são múltiplos de 100 é fácil. Escreva apenas os dois zeros e multiplique pelo número que é à esquerda: 200 % de 7 = 2 · 7 = 14

    300 % de 10 = 3 · 10 = 30

    1000 % de 45 = 10 · 45 = 450

(Veja a seção anterior, “Lidando com as Porcentagens Maiores que 100 %” para mais detalhes sobre ter mais de 100 % significa de fato.)

Virando o problema

Aqui está um truque que torna alguns problemas de porcentagem aparentemente difíceis mas são tão fáceis que você poderá resolvê-los na sua cabeça. Simplesmente, mova o sinal de porcentagem de um número para o outro e mude a ordem dos números.

Imagine que alguém queira que você entenda o seguinte: 88 % de 50

Descobrir 88 % de alguma coisa não é uma atividade que alguém deseja. Mas um caminho fácil para resolver o problema é invertê-lo: 88 % de 50 = 50 % de 88

Isso torna-se perfeitamente válido, e o problema fica mais fácil. Como discuto na seção anterior, “Resolvendo problemas simples de porcentagem,” 50% de 88 é simplesmente metade de 88: 88 % de 50 = 50 % de 88 = 44

Como um outro exemplo, imagine que você queira descobrir 7 % de 200

De novo, descobrir 7 % é complicado, mas descobrir 200 % é simples portanto inverta o problema: 7 % de 200 = 200 % de 7

Na seção anterior, eu mostro, como descobrir 200 % de qualquer número, você multiplica apenas aquele número por 2: 7 % de 200 = 200 % de 7 = 2 · 7 = 14

Decifrando os problemas mais difíceis da porcentagem

Você pode resolver muitos problemas de porcentagem usando os truques que mostro para você antes, neste capítulo. Mas o que acontece com este problema?

35 % de 80 = ?

Ai – neste momento, os números com que você está trabalhando não são tão amigáveis. Quando os números do problema de uma porcentagem tornam-se um pouco mais difíceis, os truques não funcionam mais, portanto você quer saber como resolver todos os problemas da porcentagem.

Aqui está como descobrir qualquer porcentagem de qualquer número: **1. Mude a palavra de pelo sinal de uma multiplicação e a porcentagem por um decimal (como mostro para você antes neste capítulo).**

Mudar a palavra de pelo sinal de multiplicação é um exemplo simples de virar palavras em números, como discuto nos Capítulos 6 e 13. Esta mudança torna alguma coisa incomum em uma forma que você sabe como se trabalhar.

Imagine que você queira descobrir 35 % de 80. Aqui está como você começa: 35 % de 80 = 0,35 · 80

2. Resolva o problema usando a multiplicação do decimal (veja Capítulo 11).

Veja como se parece com o exemplo:

$$\begin{array}{r} 0{,}35 \\ \underline{\times \;\; 80} \\ 28{,}00 \end{array}$$

Portanto, 35 % de 80 é 28.

Como outro exemplo, imagine que você queira descobrir 12 % de 31. De novo, comece a mudar a porcentagem por um decimal e a palavra pelo sinal de uma multiplicação: 12 % de 31 = 0,12 · 31

Agora você pode resolver o problema com a multiplicação do decimal:

$$\begin{array}{r} 0{,}12 \\ \underline{\times \;\; 31} \\ 12 \\ \underline{360} \\ 3{,}72 \end{array}$$

Portanto, 12 % de 31 é 3,72.

Colocando Todos os Problemas da Porcentagem Juntos

Na seção anterior, "Resolvendo os Problemas da Porcentagem,", dou para você alguns caminhos para descobrir qualquer porcentagem de qualquer número. Este tipo de problema de porcentagem é o mais comum – razão pela qual ele fica em evidência.

Mas as porcentagens são usadas normalmente em larga escala nas aplicações financeiras, tais como as atividades bancárias, os bens imóveis, a folha de pagamento e os impostos. (Mostro para você algumas aplicações no mundo real quando eu discuto os problemas de palavras, no Capítulo 13.) E, dependendo da situação, dois outros tipos de porcentagem comuns podem se apresentar.

Nesta seção, mostro para você estes dois tipos de problemas tradicionais de porcentagem e como eles se relacionam ao tipo que você sabe como resolver agora. Dou para você também uma ferramenta simples para fazer um trabalho rápido de todos os três tipos.

Identificando os três tipos de problemas da porcentagem

Antes neste capítulo, mostro para você como resolver os problemas que parecem como este: 50 % de 2 é ?

E a resposta, evidentemente, é 1. (Veja em "Resolvendo os Problemas da Porcentagem" para mais detalhes sobre como ter esta resposta.) Dar duas partes da informação – a porcentagem e o número para começar – você pode entender o número com que você termina.

Agora imagine, apesar de excluir a porcentagem, dou para você o início e o final dos números: ? % de 2 é 1

Você pode preencher ainda o espaço em branco sem muito problema. Do mesmo modo, imagine que eu exclua o número inicial mas dou a porcentagem e o número final: 50 % de ? É 1

De novo, você pode preencher o espaço em branco.

Se você tem esta ideia básica, você está pronto para resolver os problemas de porcentagem. Quando você se concentra neles, todos os problemas de porcentagem são parecidos com um dos três tipos que mostro para você na Tabela 12-1.

Tabela 12-1 – Os Três Principais Tipos de Problemas de Porcentagem

Tipo de Problema	*O que Descobrir*	*Exemplo*
Tipo #1	O número final	50 % de 2 é <u>o que</u>?
Tipo #2	A porcentagem	<u>Qual</u> porcentagem de 2 é 1?
Tipo #3	O número inicial	50 % <u>do que</u> é 1?

Em cada caso, o problema lhe dá duas ou três partes da informação, e seu trabalho deve ser entender a parte remanescente. Na próxima seção, dou para você uma simples ferramenta para ajudar-lhe a resolver todos estes três tipos de problemas de porcentagem.

Apresentando a porcentagem em círculo

A porcentagem em círculo é uma simples assistência visual que lhe ajuda a dar sentido aos problemas de porcentagem para que você possa resolvê-los facilmente. O truque para usar uma porcentagem em círculo deve ser escrever a informação nela. Por exemplo, a Figura 12-1 mostra como registrar a informação de que 50 % de 2 é 1.

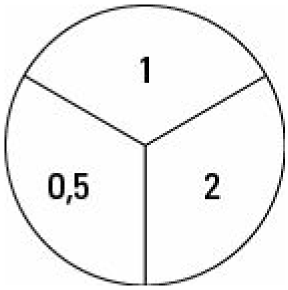


Figura 12-1: Na porcentagem em círculo, o número final está na parte superior, a porcentagem está na esquerda, e o número inicial está na direita.

Note que como preencho a porcentagem em círculo, mudo a porcentagem 50 % para seu decimal equivalente 0,5 (para mais detalhes sobre mudança de porcentagens para decimais, veja em “Partindo das porcentagens para os decimais” antes neste capítulo).

LEMBRE-SE Aqui estão as duas principais características da porcentagem em círculo: ✓Quando você multiplica os dois números da parte inferior, eles se igualam ao número da parte superior: $0,5 \cdot 2 = 1$

✓ Se você escrever uma fração do número da parte superior e por sinal do número da parte inferior do número, aquela fração é igual ao número da parte inferior:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \text{e} \quad \frac{1}{0{,}5} = 2$$

Estas características são o coração e a alma da porcentagem em círculo. Elas possibilitam que você resolva qualquer um dos três tipos de problemas de porcentagem rápida e facilmente.

A maioria dos problemas de porcentagem dá para você informação suficiente para preencher duas das três seções da porcentagem em círculo. Mas não importa qual das duas seções você preenche, você pode descobrir o número na terceira seção.

Descobrindo o número final

Imagine que você queira descobrir a resposta deste problema: O que é 75 % de 20 ?

Você deu a porcentagem e o número inicial e pediu para descobrir o número final. Para usar a porcentagem em círculo neste problema, preencha a informação como mostrado na Figura 12-2.

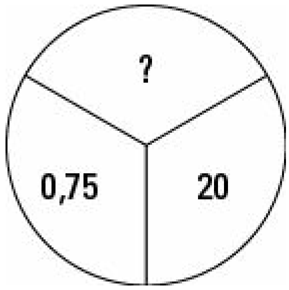


Figura 12-2: Colocar 75 % de 20 dentro de uma porcentagem em círculo Como 0,75 e 20 são, ambos, números da parte inferior do círculo, multiplique-os para ter a resposta: $\begin{array}{r} 0{,}75 \\ \underline{\times\ \ 20} \\ 15{,}00 \end{array}$

Portanto, 75 % de 20 é 15.

Como você pode observar, este método é, essencialmente o mesmo que mostro para você antes, neste capítulo, em "Decifrando os problemas mais difíceis da porcentagem", onde você traduz a palavra de como o sinal de uma multiplicação. Você usa ainda a multiplicação para ter sua resposta, mas, com a porcentagem em círculo, você tem menos confusão.

Descobrindo a porcentagem

No segundo tipo do problema, dou para você os números inicial e final e peço a você para descobrir a porcentagem. Aqui está um exemplo: Qual porcentagem de 50 é 35?

Neste caso, o número inicial é 50 e o número final é 35. Coloque o problema da porcentagem em círculo como mostrado na Figura 12-3.

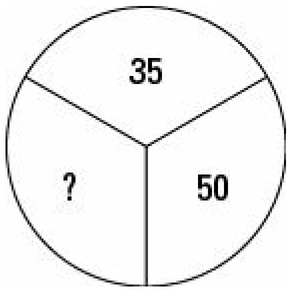


Figura 12-3: Determinar o que por cento de 50 é 35.

Neste momento, 35 está sobre 50, portanto, escreva uma fração destes dois números: $\frac{35}{50}$

Esta fração é sua resposta, e tudo que você deve fazer é converter a fração em uma porcentagem como discuto antes neste capítulo em "Tornando frações em porcentagens".

Primeiro, converta 35/50 em um decimal:

$$\begin{array}{r|l} 350 & 50 \\ \underline{-350} & 0{,}7 \\ 0 & \end{array}$$

Agora, converta 0,7 em uma porcentagem: 0,7 = 70 %

Descobrindo o número inicial

No terceiro tipo de problema, você tem a porcentagem e o número final, e deve descobrir o número inicial. Por exemplo, 15 % do número que é 18 ?

Neste momento, a porcentagem é 15 % e o número final é 18, portanto preenche a porcentagem em círculo, como mostrado na Figura 12-4.

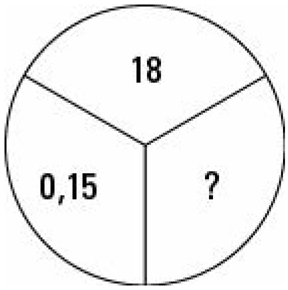


Figura 12-4: Resolve a resposta para 15 % do que é 18?

Como 18 é sobre 0,15 no círculo, escreva a fração destes dois números: $\frac{18}{0{,}15}$

Esta fração é sua resposta, e você precisa apenas converter para um decimal como mostro para você, no Capítulo 11:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 0{,}15 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 1800 & 15 \\ \underline{-15} & 120 \\ 30 & \\ \underline{30} & \\ 00 & \end{array}$$

Neste caso, o "decimal" que você descobre o número inteiro 120, portanto 15 % de 120 é 18.

Capítulo 13

Problemas de Palavras com Frações, Decimais e Porcentagens

Neste Capítulo

► Somando e subtraindo frações, decimais e porcentagens nas equações de palavras ► Traduzindo problemas de palavra como a multiplicação ► Mudando as porcentagens para decimais nos problemas de palavras ► Abordando os problemas de negócio envolvendo aumento e redução de porcentagem

No Capítulo 6, mostro para você como resolver os problemas de palavras (chamados também os problemas de estórias), colocando as equações de palavras que usam as Quatro Grandes operações (adição, subtração, multiplicação e divisão). Neste capítulo, mostro para você como estender estas habilidades para resolver os problemas de palavras com frações, decimais e porcentagens.

Primeiro, mostro para você como resolver relativamente os problemas fáceis nos quais tudo que você precisa fazer é somar ou subtrair frações, decimais ou porcentagens. Depois, mostro para você como resolver os problemas que exigem que você multiplique as frações. Tais problemas são fácil de reconhecer porque eles contêm sempre quase a palavra de. Depois disso, você descobre como resolver os problemas de porcentagem, colocando uma equação de palavras e mudando a porcentagem em um decimal. Por fim, mostro para você como lidar com os problemas de aumento e redução de porcentagem. Estes problemas são, em geral problemas práticos de dinheiro nos quais você resolve a questão sobre aumentos e salários, custos e descontos ou quantias antes e depois dos impostos.

Somando e Subtraindo Partes de Todos os Problemas de Palavras

Alguns problemas de palavras envolvendo frações, decimais e porcentagens são, de fato, problemas de adição e subtração. Você pode somar frações, decimais, 194 Parte III: Parte do Todo: das Frações, dos Decimais e das Porcentagens ou porcentagens numa variedade de contextos do mundo real que contam com pesos e medidas – tais como culinária e marcenaria. (No Capítulo 15, discuto estas aplicações de maneira profunda.) Para resolver estes problemas, você pode usar as habilidades que você recolhe nos Capítulos 10 (para somar e subtrair frações), 11 (para somar e subtrair decimais) e 12 (para somar e subtrair porcentagens).

Partilhando uma pizza: Frações

Você pode ter que somar ou subtrair as frações nos problemas que envolvem dividir a parte de um todo. Por exemplo, considere o seguinte: Joan comeu 1/6 de uma pizza. Tony comeu 1/4 e Sylvia comeu 1/3. Qual é a fração de pizza que sobrou quando eles acabaram de comer?

Neste problema, escreva apenas a informação que é dada como equação de palavras:

$$\text{Joan} = \frac{1}{6} \qquad \text{Tony} = \frac{1}{4} \qquad \text{Sylvia} = \frac{1}{3}$$

Estas frações são parte de uma pizza inteira. Para resolver o problema, você precisa descobrir quanto todas as pessoas comeram, portanto forme a seguinte equação de palavras:

$$\text{Todos os três} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

Agora você pode substituir como segue: $\text{Todos os três} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$

O Capítulo 10 dá para você vários caminhos para somar estas frações. Aqui está um caminho: $\text{Todos os três} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Entretanto, a pergunta é qual é a fração da pizza que sobrou depois que eles terminaram de comer, portanto você deve subtrair aquela quantidade a partir do todo: $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Portanto, as três pessoas deixaram ¼ de uma pizza.

Comprando pela libra: Decimais

Frequentemente, você trabalha com decimais quando lida com dinheiro, medições métricas (veja Capítulo 15) e alimentos vendido por quilos. O seguinte problema exige que você some e subtraia decimais, como discuto no Capítulo 11. Embora os decimais pareçam intimidar, é muito simples estabelecer o problema: Antonia comprou 4,53 libras de carne de vaca e 3,1 libras de carne de cordeiro. Lance comprou 5,24 libras carne de frango e 0,7 libra de carne de porco. Qual delas comprou mais carne e quanto mais?

Para resolver este problema, primeiro você descobre quanto cada pessoa comprou: Antonia = 4,53 + 3,1 = 7,63

Lance = 5,24 + 0,7 = 5,94

Você já pode observar que Antonia comprou mais do que Lance. Para descobrir quanto a mais ela comprou, subtraia: 7,63 – 5,94 = 1,69

Portanto, Antonia comprou 1,69 libras a mais do que Lance.

Separando o voto: Porcentagens

Quando as porcentagens representam pesquisas de opinião, votos de uma eleição, ou partes de um orçamento, o total deve somar sempre 100 %. Na vida real, você pode observar tal informação organizada como um gráfico de setores (que discuto no Capítulo 17). Resolver os problemas deste tipo de informação envolve sempre nada mais do que a adição e a subtração das porcentagens. Aqui está um exemplo: Em uma eleição para prefeito, cinco candidatos disputaram as eleições. Faber obteve 39 % dos votos, Gustafson recebeu 31 %, Ivanovich teve 18 %. Dixon venceu 7 % dos votos e Obermayer conseguiu 3 % e o restante dos votos foi para os candidatos por voto escrito. Qual é a porcentagem dos eleitores que se inscreveram na eleição?

Os candidatos participaram de uma eleição única, portanto todos os votos devem somar 100 %. O primeiro passo aqui é somar apenas as cinco porcentagens. Depois, subtrair aquele valor de 100 %: 39 % + 31 % + 18 % + 7 % + 3 % = 98 %

100 % – 98 % = 2 %

Como 98 % dos eleitores votaram em um dos cinco candidatos, os 2 % restantes inscreveram-se nas suas eleições.

Problemas sobre a Multiplicação das Frações

Nos problemas de palavras, a palavra de quase sempre significa multiplicação. Portanto quando você observa a palavra de seguindo uma fração, um decimal ou uma porcentagem, você pode substituí-la com o sinal de vezes.

Quando você pensa nisso, a palavra significa multiplicação mesmo quando você não está discutindo as frações. Por exemplo, quando você aponta para um item em uma loja e diz: “Eu levarei três daqueles”, em um sentido você está dizendo: “Eu pegarei aquele um multiplicado por três.”

Os seguintes exemplos dá para você uma prática de tornar os problemas de palavras que incluem a palavra de em problemas de multiplicação que você pode resolver com a multiplicação da fração.

Quando você divide uma única coisa – tal como uma pizza ou um morto por bolo de chocolate – a palavra de significa ainda multiplicar; tecnicamente, você está multiplicando cada fração por 1. Por exemplo, a fração que representa metade de uma pizza – isto é ½ de 1 pizza – é ½ · 1 = ½. Como qualquer número vezes 1 é igual a ele mesmo, você não deve escrever o 1 – você pode somar apenas as frações, como faço antes, em "Partilhando uma pizza: Frações."

Protestar contra a mercearia: Comprando menos do que eles lhe dizem

Depois de entender que a palavra de significa multiplicação, você tem uma ferramenta poderosa para resolver os problemas de palavras. Por exemplo, você pode calcular quanto você gastará se você não comprar comida nas quantidades listadas nos sinais. Aqui está um exemplo: Se a carne de vaca custa $ 4 a libra, quanto custa 5/8 de uma libra?

Aqui está o que você tem se você muda simplesmente a palavra de para o sinal de uma multiplicação: $\frac{5}{8}$. 1 libra de carne de vaca

Isto é quanto de carne de vaca você está comprando. Entretanto, você quer conhecer o preço. Como o problema lhe diz que 1 libra = $ 4, você pode substituir 1 libra de carne de vaca por $ 4.

$$\frac{5}{8} . \$4$$

Agora, você tem uma expressão que você pode avaliar. Use as regras de multiplicação das frações do Capítulo 10 e resolva: $= \frac{5 . \$4}{8 . 1} = \$\frac{20}{8}$

Esta fração é reduzida para $ 5/2. Entretanto, a resposta parece estranha porque os dólares são, em geral, expressos em decimais e não em frações. Portanto, converta esta fração em um decimal usando as regras que mostro para você, no Capítulo 11: $\$\frac{5}{2} = \$5 + 2 = \$2.5$

Neste ponto, reconheça que $ 2,5 é normalmente, escrito como $ 2,50 e você tem sua resposta.

Fácil como uma torta: Calculando o que sobrou do seu prato

Às vezes, quando você está partindo algo como uma torta, ninguém pega seu pedaço ao mesmo tempo. Por exemplo, os ávidos amantes de torta pegam o primeiro pedaço não se aborrecendo em dividir a torta em iguais porções e as pessoas que foram mais lentas ou mais pacientes ou não apenas aquele esfomeado corta suas próprias porções do que sobrou.

Quando alguém participa dos restos, você pode fazer um pouco de multiplicação para observar quanto do total da torta aquela porção representa.

Considere o seguinte exemplo: Jerry comprou uma torta e comeu 1/5 dela. Depois sua esposa Doreen comeu 1/6 do que sobrou. Quanto sobrou do bolo inteiro?

Para resolver este problema, comece a escrever o que a primeira frase lhe pergunta:

$$\text{Jerry} = \frac{1}{5}$$

Doreen comeu parte do que sobrou, portanto escreva uma equação de palavras que lhe diz quanto sobrou da torta, depois que Jerry terminou. Ele começou com uma torta inteira, portanto subtraia sua porção de 1: $\text{Bolo que sobrou depois de Jerry} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Depois, Doreen comeu 1/6 desta quantidade. Reescreva a palavra como multiplicação e resolva como segue. Esta resposta informa-lhe quanto Doreen comeu da torta inteira:

$$\text{Doreen} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{30}$$

Para tornar um pouco menores os números antes de você continuar, note que você pode reduzir a fração: Doreen = 2/15

Agora você sabe quanto Jerry e Doreen comeram, portanto você pode somar estas quantidades juntas: $\text{Jerry} + \text{Doreen} = \frac{1}{5} + \frac{2}{15}$

Resolva este problema como mostro para você no Capítulo 10: $= \frac{3}{5} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15}$

Esta fração é reduzida para 1/3. Agora você sabe que Jerry e Doreen comeram 1/3 da torta, mas o problema lhe diz quanto sobrou. Portanto, termine com a subtração e escreva a resposta: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

A quantidade de torta que sobrou foi 2/3.

Multiplicando Decimais e Porcentagens dos Problemas de Palavras

Na seção anterior, "Problemas sobre Multiplicação das Frações" mostro para você como a palavra de dentro do problema de uma equação de palavras significa, em geral, multiplicação. Esta ideia é verdadeira também nos problemas de palavras, envolvendo decimais e porcentagens. O método para resolver estes dois tipos de problemas é similar, portanto eu os junto nesta seção.

Facilmente, você pode resolver os problemas de palavras envolvendo as porcentagens mudando as porcentagens em decimais (veja Capítulo 12, para detalhes). Aqui estão algumas poucas porcentagens comuns e seus equivalentes decimais:

25% = 0,25   50% = 0,5   75% = 0,75   99% = 0,99

No final: Resolvendo quanto dinheiro sobrou

Um tipo de problema comum dá para você uma quantia inicial – e um punhado de outras informações – e, depois, pede-lhe para calcular quanto você tem. Aqui está um exemplo: Os avós da Maria deram a ela \$ 125 para seu aniversário. Ela colocou 40 % do dinheiro no banco, gastou 35 % do que sobrou num par de sapatos e depois gastou o resto com um vestido. Qual é o preço do vestido?

Comece do início, formando uma equação de palavras para descobrir quanto dinheiro Maria colocou no banco: Dinheiro no banco = 40% de \$ 125

Para resolver esta equação de palavras, muda a porcentagem em decimal e a palavra de por um sinal de multiplicação; depois multiplica: Dinheiro no banco = 0,4 de \$125 = \$50

Preste atenção se você está calculando quanto alguém usou ou quanto sobrou para alguém. Se você precisa trabalhar com a porção que resta, você pode ter que subtrair a quantia utilizada da quantia inicial.

Como Maria começou com \$ 125, ela tinha \$ 75 sobrando para gastar: Dinheiro que sobrou para gastar = Dinheiros dos avós – Dinheiro do banco = \$ 125 – \$ 50 + \$ 75

O problema diz que ela gastou 35 % desta quantia com um par de sapatos. De novo, mude a porcentagem para um decimal e a palavra para um sinal de multiplicação: Sapatos = 35 % de \$ 75 = 0,35 · \$ 75 = \$ 26,25

Ela gastou o resto do dinheiro com um vestido, portanto Vestido = \$ 75 – \$ 26,25 = \$ 48,75

Portanto, Maria gastou \$ 48,75 com o vestido.

Descobrindo com quanto dinheiro você começou

Alguns problemas lhe dão a quantia que você tem no final e pedem-lhe para descobrir com quanto você começou. Em geral, estes problemas são mais difíceis porque você não tem costume de pensar para trás. Aqui está um exemplo e é um tipo de um problema duro, portanto aperte seu cinto de segurança: Maria recebeu um dinheiro para seu aniversário da sua tia. Ela colocou seus habituais 40 % no banco, gastou 75 % do resto com uma carteira e, quando estava pronta, ela tinha $ 12 sobrando para gastar com jantar. Quanto dinheiro sua tia lhe deu?

Este problema é similar a um problema na seção anterior, mas você precisa começar no final e trabalhar para trás. Nota que a única quantia de dólar no problema vem depois de duas quantias em porcentagem. O problema lhe diz que ela termina com $ 12 depois duas transações – colocando dinheiro no banco e comprando uma carteira – e pede-lhe para descobrir com quanto dinheiro ela começou.

Para resolver este problema, coloque duas equações de palavras para descrever as duas transações: Dinheiro da tia – dinheiro para o banco = dinheiro após o banco Dinheiro após o banco – dinheiro para carteira = $ 12

Note o que estas duas equações de palavras estão dizendo. A primeira lhe diz que Maria pegou o dinheiro de sua tia, subtraiu algum dinheiro para colocar no banco e deixou o banco com uma nova quantia de dinheiro, o que estou chamando de dinheiro após o banco. A segunda equação de palavras começa onde a primeira para. Ela lhe diz que Maria pegou o dinheiro que sobrou do banco, subtraiu algum dinheiro para uma carteira e terminou com $ 12.

Esta segunda equação já tem uma quantia de dinheiro preenchida, portanto comece aqui. Para resolver este problema, note que Maria gastou 75 % do seu dinheiro naquele tempo com a carteira – isto é, 75 % do dinheiro que ela tinha ainda após o banco: Dinheiro após o banco – 75 % de dinheiro após o banco = $ 12

Irei fazer uma pequena mudança nesta equação, portanto você pode observar o que ela está dizendo de fato: 100 % de dinheiro após o banco – 75 % de dinheiro após o banco = $ 12

Somar 100 % não muda a equação porque ela significa apenas, de fato que você está multiplicando por 1. De fato, você pode transcorrer estas duas palavras em qualquer lugar sem mudar o que você quer dizer, embora você possa parecer ridículo dizendo: “Noite passada, dirigi 100 % do meu carro do trabalho até minha casa, levei para andar 100 % do meu cachorro, depois peguei 100 % de minha esposa para assistir 100 % de um filme”.

Neste caso particular, entretanto, estas palavras ajudam-lhe a criar uma relação porque 100 % – 75 % = 25 %; aqui está um melhor caminho para escrever esta equação: 25 % · dinheiro após o banco = $ 12

Antes de se mover-se, tenha certeza de que você entende os passos que trouxeram você aqui. A porcentagem em círculo (veja Capítulo 12) lhe diz que $ 12 ÷ 0,25 dá para você a quantia restante de $ 48.

Ok, você sabe quanto Maria tinha após o banco, portanto você pode colocar este número na primeira equação: Dinheiro da tia – dinheiro para o banco = \$ 48

Agora você pode usar o mesmo tipo de pensamento para resolver esta equação (e ela fica muito mais rápida neste momento!). Primeiro, Maria colocou 40 % do dinheor de sua tia no banco: Dinheiro da tia – 40 % de dinheiro da tia = \$ 48

De novo, reescreva esta equação para criar o que ela está dizendo de forma mais clara: 100 % do dinheiro da tia – 40 % do dinheiro da tia = \$ 48

Agora, como 100 % – 40 % = 60 %, reescreva de novo: 60 % · dinheiro da tia = \$ 48

Neste ponto, você pode usar a porcentagem em círculo, que mostro para você, no Capítulo 12, para resolver a equação (veja Figura 13-1). Neste caso, a porcentagem em círculo lhe diz que \$ 48 ÷ 0,6 dá para você a quantia restante de \$ 80. Portanto, a tia da Maria deu a ela \$ 80 para seu aniversário.

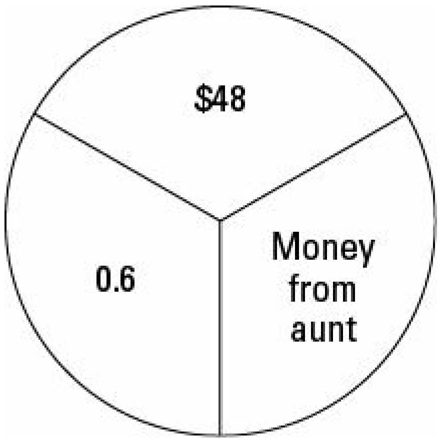


Figura 13-1: Dinheiro da tia = \$ 48 ÷ 0,6 = \$ 80

Lidando com Aumentos e Reduções das Porcentagens nos Problemas de Palavras

Os problemas de palavras que envolvem aumento ou redução de uma porcentagem acrescentam um giro final aos problemas de porcentagem. Problemas típicos de aumento de porcentagem envolvem cálculo da quantia de um salário mais um aumento, o preço de mercadoria mais imposto ou uma quantia de dinheiro mais juros ou dividindo. Problemas típicos de redução de porcentagem envolvem a quantia de um salário menos impostos ou o preço de mercadoria menos um desconto.

Para dizer-lhe a verdade, você já pode ter resolvido os problemas deste tipo antes, em “Multiplicando os Decimais e as Porcentagens nos Problemas de Palavras.” Mas as pessoas são confundidas em geral, pela linguagem destes problemas – que, a propósito, é a linguagem dos negócios – portanto, quero lhe dar alguma prática para resolvê-los.

Passando os olhos na grana: Descobrindo aumentos salariais

Um pouco de dores agudas na rua deve lhe dizer que as palavras aumento de salário ou aumento significam mais dinheiro, portanto esteja pronto para fazer a adição. Aqui está um exemplo: O salário de Alison era $ 40.000 ano passado e no final do ano ela recebeu um aumento de 5 %. O que ela ganhará este ano?

Para resolver este problema, primeiro note que Alison conseguiu um aumento. Portanto, o que ela ganha este ano será muito mais do que ela ganhou ano passado. A chave para estabelecer este tipo de problema é pensar sobre o aumento da porcentagem como “100 % do salário do ano passado mais 5 % do salário do ano passado”. Aqui está a equação de palavras: O salário deste ano = 100 % do salário do ano passado + 5 % do salário do ano passado

Um rápido olhar na propriedade distributiva A propriedade distributiva diz que multiplicar um número pela soma de dois outros números em parênteses é a mesma coisa que multiplicar pelos números em parênteses individualmente e, depois, somar seus produtos. Em outras palavras, 3 (1 + 5) = 3 (1) + 3 (5) Se você avaliar os dois lados da equação, aqui está o que você tem. Você pode ver que eles são iguais: 3 (6) = 3 + 15

18 = 18

A propriedade funciona também para a subtração: 5 (6 – 4) = 5 (6) – 5 (4) 5 (2) = 30 – 20

10 = 10

Em termos de porcentagem, você pode dizer que as seguintes expressões são verdadeiras: Salário (100 % + 5 %) = Salário (100 %) + Salário (5 %) Salário (100 % – 5 %) = Salário (100 %) – Salário (5 %) Qual é o ponto? Bem, você pode resolver os problemas de porcentagem de qualquer jeito, mas ajustar primeiro as porcentagens é, em geral, mais fácil. Você pode fazer a adição ou a subtração na sua cabeça enquanto você faz a multiplicação você tem sua resposta.

Veja Capítulo 4, para mais detalhes sobre a propriedade distributiva.

Agora você pode somar apenas as porcentagens (veja a barra lateral mais perto para este trabalho): Salário deste ano = (100 % + 5 %) do salário do ano passado = (105 % do salário do ano passado Mude a porcentagem para um decimal e a palavra de para um sinal de multiplicação; depois, preencha a quantia do salário do ano passado: Salário deste ano = 1,05 · $ 40.000

Agora você está pronto para multiplicar: Salário deste ano = $ 42.000

Portanto o novo salário de Alison é $ 42.000.

Lucrando com juros no ponto mais alto dos juros

A palavra juros significa mais dinheiro. Quando você recebe os juros do banco, você ganha mais dinheiro. E quando você paga juros de um empréstimo, você paga mais dinheiro. Às vezes, as pessoas ganham juros sobre juros que elas ganharam antes, o que faz a quantia de dólar aumentar mais rapidamente. Aqui está um exemplo: Bethany, colocou $ 9500 em um investimento CD que pagou 4 % de juros. No ano seguinte, ela botou o dinheiro em uma obrigação financeira que pagou 6 % ao ano. Quanto a Bethany ganhou no seu investimento naqueles três anos?

Este problema envolve juros, portanto é um outro problema referente ao aumento de porcentagem, apenas neste momento, você deve lidar com duas transações. Pega-as em fila única.

A primeira transação é um aumento de porcentagem de 4 % sobre $ 9500. A seguinte equação de palavras faz sentido: Dinheiro após o primeiro ano = 100 % do depósito inicial + 4% do depósito inicial Dinheiro após o primeiro ano = (100 % + 4 %) de $ 9500 = 104% de $ 9,500

Agora mude a porcentagem para um decimal e a palavra de para um sinal de multiplicação: Dinheiro após o primeiro ano = 1,04 · $ 9500

A multiplicação lhe dá este resultado: Dinheiro após o primeiro ano = $ 9880

Neste ponto, você está pronto para a segunda transação. Este é um aumento de porcentagem de 6 % sobre $ 9880: Quantia final = 106 % de $ 9880

De novo, mude a porcentagem para um decimal e a palavra de para um sinal de multiplicação: Quantia final = 1,06 · $ 9880 = $ 10.472,80

Depois subtraia o depósito inicial da quantia final: Ganhos = quantia final – depósito inicial = $ 10.472,80 – $ 9500 = $ 972,80

Portanto, Bethany ganhou $ 972,80 no seu investimento.

Conseguindo um negócio: Calculando descontos

Quando você ouve as palavras desconto ou preço de venda, você pensa em subtração. Aqui está um exemplo: Greg está de olho numa televisão com um preço afixado de \$ 2100. O vendedor oferece-lhe um desconto de 30 % se ele comprar a mercadoria hoje. Quanto custará a televisão com o desconto?

Neste problema, você precisa notar que o desconto baixa o preço da televisão, portanto você deve subtrair: preço de venda = 100 % do preço normal – 30 % do preço normal Agora, subtraia as porcentagens: Preço da venda = (100 % – 30 %) do preço normal = 70 % do preço normal Neste ponto, você pode preencher os detalhes, como mostro para você durante todo este capítulo: Preço de venda = 0,7 · \$ 2100 = \$ 1470

Portanto, a televisão custará \$ 1470 com o desconto.

Parte IV

Representação e Mensuração — Gráficos, Medidas, Estatística e Números Inteiros

"Ele trabalhou com algumas equações lineares, acrescentou alguns teoremas e antes de conhecer isso eu estava comprando material à prova de ferrugem."

Nesta parte...

Apresento para você uma notação científica como um modo conveniente para representar números muito pequenos e muito grandes. Discuto dois sistemas importantes de medição – o sistema inglês e o sistema métrico – e mostro para você como converter de um para o outro. Você usa a geometria e descobre como achar o perímetro e a área de formas importantes, tais como os quadrados, os retângulos e os triângulos. Forneço uma informação rápida sobre como ler uma variedade de gráficos e apresentar o gráfico Cartesiano. Você começou com um conjunto básico de teoria, estatísticas e probabilidade. Por fim, mostro para você como aplicar estas habilidades para resolver os problemas de palavras envolvendo medição e geometria.

Capítulo 14

Um Dez Perfeito: Números Condensados com Notação Científica

Neste Capítulo* ► *Conhecendo como expressar as potências de dez na forma exponencial* ► *Apreciando como e por que a notação científica funciona* ► *Entendendo a ordem de magnitude* ► *Multiplicando os números na notação científica

Muitas vezes, os cientistas trabalham com medições muito pequenas ou muito grandes – a distância para a próxima galáxia, o tamanho de um átomo, a massa da Terra ou o número de células da bactéria crescendo da semana passada nos restos do restaurante self-service chinês. Para poupar tempo e espaço – e fazer cálculos mais fáceis – as pessoas desenvolveram um tipo de taquigrafia chamada notação científica.

A notação científica usa uma sequência de números conhecida como as potências de dez, que apresento no Capítulo 2:

1 10 100 1000 10.000 100.000 1.000.000 10.000.000 ...

Cada número na sequência é 10 vezes maior que o número anterior.

As potências de dez são fáceis para se trabalhar, especialmente quando você está multiplicando ou dividindo porque você pode somar ou tirar zeros ou mover a vírgula decimal. Elas são fáceis também para se representar na forma exponencial (como mostro para você no Capítulo 4):

10^0 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7...

A notação científica é um sistema útil para escrever números muito pequenos ou muito grandes sem escrever um punhado de zeros. Ela usa os decimais e os expoentes (portanto se você precisa lembrar um pouco dos decimais, vá ao para o Capítulo 11).

Neste capítulo, apresento a você este método poderoso para escrever números. Explico, também, a ordem de grandeza de um número. Por fim, mostro para você como multiplicar os números escritos na notação científica.

Primeiro, as Primeiras Coisas: Potências de

Dez como Expoentes

A notação científica usa potências de dez expressas como expoentes, portanto você precisa de um pouco de experiência antes de você poder passar por cima. Nesta seção, eu preencho seu conhecimento de expoentes que apresento primeiro, no Capítulo 4.

Somando zeros e escrevendo expoentes

Os números começando com um 1 e seguidos por zeros apenas (como 10, 100, 1000, 10.000 e assim por diante) são chamados potências de dez e são fáceis para se representar como expoentes. As potências de dez são o resultado de multiplicar 10 vezes ele mesmo qualquer número de vezes.

Para representar um número que é uma potência de 10 como um número exponencial, some os zeros e eleve 10 para aquele expoente. Por exemplo, 1000 tem três zeros, portanto $1000 = 10^3$ (10^3 significa pegar 10 vezes ele mesmo três vezes, portanto ele é igual a $10 \cdot 10 \cdot 10$). A tabela 14-1 mostra uma lista de algumas potências de dez.

Tabela 14-1 – Potências de Dez Expressas como Expoentes

Número	*Expoente*
1	10^0
10	10^1
100	10^2
1000	10^3
10.000	10^4
100.000	10^5
1.000.000	10^6

Depois de você conhecer este truque, representar muito números grandes como potências de dez é fácil – some apenas os zeros! Por exemplo, o número 1 trilhão – 1.000.000.000.000 – é um 1 com doze zeros depois dele, portanto $1.000.000.000.000 = 10^{12}$

Este truque pode não parecer um grande negócio, mas, quanto maiores os números, mais espaço você poupa usando os expoentes. Por exemplo, um mesmo longo número é um googol, que é 1 seguido por uma centena de zeros. Você pode escrever o seguinte:
10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.0

Como você pode observar, um número deste tamanho é praticamente não é incontrolável.

Você pode se poupar de problemas e escrever 10^{100}.

Um 10 elevado a um número negativo é também uma potência de 10.

Você pode representar também decimais usando expoentes negativos. Por exemplo,

$10^{-1} = 0.1 \qquad 10^{-2} = 0.01 \qquad 10^{-3} = 0.001 \qquad 10^{-4} = 0.0001$

Embora a ideia de expoentes negativos possa parecer estranha, ela faz sentido quando você pensa nela ao lado do que você conhece sobre os expoentes positivos. Por exemplo, para descobrir o valor de 10^7, comece com 1 e torne-o maior movendo a vírgula decimal 7 espaços para a direita: $10^7 = 10.000.000$

Do mesmo modo, para descobrir o valor de 10^{-7}, comece com 1 e torne-o menor movenda vírgula decimal 7 espaços para a esquerda: $10^{-7} = 0.0000001$

As potências negativas de 10 sempre têm menos 0 entre o 1 e a vírgula decimal do que a potência indica. Neste exemplo, note que 10^{-7} tem seis zeros entre eles.

Como nos grandes números, usar expoentes para representar os decimais muito pequenos tem sentido prático. Por exemplo, $10^{-23} = 0.00000000000000000000001$

Como você pode observar, este decimal é fácil de se trabalhar na sua forma exponencial, mas quase impossível para ler fora disso.

Somando expoentes para multiplicar

Uma vantagem de usar a forma exponencial para representar as potências de dez é que esta forma é uma coisa fácil para multiplicar. Para multiplicar duas potências de dez na forma exponencial, soma seus expoentes. Aqui estão alguns exemplos: ✓ $\mathbf{10^1 \cdot 10^2 = 10^{1+2} = 10^3}$

Aqui, multiplico simplesmente estes números: $10 \cdot 100 = 1000$

✓ $\mathbf{10^{14} \cdot 10^{15} = 10^{14+15} = 10^{29}}$

Aqui está o que eu estou multiplicando: $100.000.000.000.000 \cdot 1.000.000.000.000.000$

$= 100.000.000.000.000.000.000.000.000.000$

Você pode verificar que esta multiplicação é correta somando os zeros.

✓ $\mathbf{10^{100} \cdot 10^0 = 10^{100+0} = 10^{100}}$

Aqui eu estou multiplicando um googol por 1 (qualquer número elevado a um expoente de 0 é igual a 1), portanto o resultado é um googol.

Em cada um destes casos, você pode pensar em multiplicar as potências de dez como somar zeros extra no número.

As regras para multiplicar potências de dez somando expoentes aplicam-se também aos expoentes negativos. Por exemplo, $10^3 \cdot 10^{-5} = 10^{(3-5)} = 10^{-2} = 0{,}01$

Trabalhando com Notação Científica

A notação científica é um sistema para escrever números muito pequenos ou muito grandes que os torna mais fáceis para se trabalhar. Todo número pode ser escrito em notação científica como o produto de dois números (dois números multiplicados juntos): ✓Um decimal superior ou igual a 1 e inferior a 10 (veja Capítulo 11, para mais detalhes sobre decimais) ✓Uma potência de dez escrita como um expoente (veja a seção anterior)

Escrevendo Notação Científica

LEMBRE-SE Aqui está como escrever qualquer número com notação científica: **1. Escreva o número como um decimal (se ele não é um ainda)**

Imagine que você queira mudar o número 360.000.000 para uma notação científica. Primeiro, escreva-o como um decimal: 360.000.000,0

2. Mova a vírgula decimal apenas para lugares suficientes para mudar este número em um novo número que fica entre 1 e 10.

Mova a vírgula decimal para a direita ou para a esquerda para que apenas um dígito não zero venha antes da vírgula decimal. Retire qualquer zero à esquerda ou sequência de zeros quando necessário.

Ao usar 360.000.000,0 apenas o 3 deve vir antes da vírgula decimal. Portanto, mova a vírgula decimal de oito lugares para a esquerda, retire a sequência de zeros e consiga 3,6: 360.000.000,0 torna-se 3,6

3. Multiplique o novo número por 10 elevado ao número de lugares que você moveu a vírgula decimal no Passo 2.

Você moveu a vírgula decimal de oito lugares, portanto multiplique o novo número por 10^8: $3 \cdot 6 \cdot 10^8$

4. Se você moveu a vírgula decimal para a direita no Passo 2, coloque um sinal de menos no expoente.

Você moveu a vírgula decimal para a esquerda, portanto você não deve tomar nenhuma ação aqui. Portanto, 360.000.000 na notação científica é $3{,}6 \cdot 10^8$.

Mudar um decimal para uma notação científica basicamente segue o mesmo procedimento. Por exemplo, imagine que você queira mudar o número 0,00006113 para uma notação científica.

1. **Escreva 0,00006113 como um decimal (este passo é fácil porque ele já é um decimal):**

   0,00006113

2. **Para mudar 0,00006113 para um novo número entre 1 e 10, mova a vírgula decimal de cinco lugares para a direita e retira os zeros à esquerda:**

   6,113

3. **Como você moveu a vírgula decimal de cinco lugares, multiplique o novo número por 10^5**

   $6{,}113 \cdot 10^5$

4. **Como você moveu a vírgula decimal para a direita, coloque um sinal de menos no expoente:**

   $6{,}113 \cdot 10^{-5}$

   Portanto, 0,00006113 na notação científica é $6{,}113 \cdot 10^{-5}$.

Depois de ter costume em escrever os números na notação científica, você pode fazer tudo isso usando um passo. Aqui estão alguns exemplos: $17.400 = 1.7400 \cdot 10^4$

$212.04 = 2.1204 \cdot 10^2$

$0.003002 = 3.002 \cdot 10^{-3}$

Por que a notação científica funciona

Depois de entender como a notação científica funciona, você está em uma posição melhor para entender por que ela funciona. Imagine você trabalhando com o número 4500. Em primeiro lugar, você pode multiplicar qualquer número por 1 sem mudá-lo, portanto aqui está uma equação válida: $4500 = 4500 \cdot 1$

Como 4500 termina com 0, ele é divisível por 10 (veja Capítulo 7, para mais informações sobre divisibilidade). Portanto, você pode fatorar um 10 como segue: $4500 = 450 \cdot 10$

Também, como 4500 termina com dois zeros, ele é divisível por 100, portanto você pode fatorar 100: $4500 = 45 \cdot 100$

Em cada caso, você retira um outro zero depois do 45 e coloca-o depois do 1. Neste ponto, você não tem mais zeros para retirar, mas você pode continuar o modelo, movendo a vírgula decimal de um lugar para a esquerda: $4.500 = 4{,}5 \cdot 1000$

$4.500 = 0{,}45 \cdot 10.000$

$4.500 = 0,045 \cdot 100.000$

O que você estava fazendo desde o início era movendo a vírgula decimal de um lugar para a esquerda e multiplicando por 10. Mas você pode facilmente mover também a vírgula decimal de um lugar para a direita e multiplicar por 0,1, dois lugares à direita multiplicando por 0,01 e três lugares multiplicando por 0,001: $4.500 = 45.000 \cdot 0,1$

$4.500 = 450.000 \cdot 0,01$

$4.500 = 4.500.000 \cdot 0,001$

Como pode observar, você tem total flexibilidade para expressar 4500 como um decimal multiplicado por uma potência de dez. Como acontece na notação científica, o decimal deve ser entre 1 e 10, portanto a seguinte forma é a equação de escolha: $4.500 = 4,5 \cdot 1,000$

O passo final é mudar 1000 em forma exponencial. Some apenas os zeros no 1000 e escreva aquele número como o expoente sobre 10: $4.500 = 4.5 \cdot 10^3$

O último efeito é que você moveu a vírgula decimal de três lugares para a esquerda e elevou 10 para um expoente de 3. Você pode observar que esta ideia pode funcionar qualquer número, não importa o tamanho.

Entendendo a ordem de magnitude

Uma boa pergunta para saber por que a notação científica usa sempre um decimal entre 1 e 10. A resposta tem que fazer com a ordem de magnitude. A ordem de magnitude é um caminho simples para manter com dificuldade quanto grande um número é mais você pode comparar os números com mais facilidade. A ordem de magnitude de um número é seu expoente na notação científica. Por exemplo, $703 = 7,03 \cdot 10^2$ – ordem de magnitude é 2

$600.000 = 6 \cdot 10^5$ – ordem de magnitude é 5

$0,00095 = 9,5 \cdot 10^{-4}$ – ordem de magnitude é – 4

Todo número que começa com 10, mas inferior a 100 tem uma ordem de magnitude de 1. Todo número que começa com 100, mas inferior a 1000 tem uma ordem de magnitude de 2.

Multiplicando com notação científica

Multiplicar números com notação científica é bastante simples porque multiplicar potências de dez é fácil, como você observa antes, neste capítulo, em "Somando os expoentes para multiplicar". Aqui está como multiplicar dois números com notação científica: **1. Multiplique as partes dos dois decimais dos números.**

Imagine que você queira multiplicar o seguinte: $(4.3 \cdot 10^5)\ (2 \cdot 10^7)$ A multiplicação é comutativa (veja Capítulo 4), portanto você pode mudar a ordem dos números sem mudar o resultado. E, por causa da propriedade associativa, você pode mudar, também, como agrupe os números. Portanto, você pode reescrever este problema assim: (4.3 · 2) (10^5 · 10^7) Multiplique o que está no primeiro conjunto de parênteses – 4,3 · 2 – para descobrir o decimal parte da solução: 4,3 · 2 = 8,6

2. Multiplique as duas parte dos exponenciais somando seus expoentes.

Agora multiplica 10^5 por 10^7: $10^5 \cdot 10^7 \cdot = 10^{5+7} = 10^{12}$

3. Escreva a resposta como o produto dos números que você descobriu nos Passos 1 e 2.

$8{,}6 \cdot 10^{12}$

4. Se a parte do decimal da solução é igual a ou maior que 10, mova a vírgula decimal de um lugar para a esquerda e some 1 ao expoente.

Como 8,6 é menor que 10, você não deve mover a vírgula decimal de novo, portanto a resposta é $8{,}6 \cdot 10^{12}$

Nota: Este número é igual a 8.600.000.000.000

Como a notação científica usa decimais positivos inferiores a 10, quando você multiplica dois destes decimais, o resultado é sempre um número positivo inferior a 10. Portanto, no Passo 4, você nunca deve mover a vírgula decimal mais de um lugar para a esquerda.

Este método funciona mesmo quando um ou os dois expoentes são números negativos. Por exemplo, imagine que você queira multiplicar o seguinte: ($6.02 \cdot 10^{23}$) ($9 \cdot 10^{-28}$) **1. Multiplique 6,02 por 9 para descobrir a parte decimal da resposta:**

6,02 · 9 = 54,18

2. Multiplique 10^{23} por 10^{-28} somando os expoentes (verifique Capítulo 4 se você precisar de informações sobre adição dos números negativos):

$10^{23} \cdot 10^{-28} = 10^{23+-28} = 10^{-5}$

3. Escreva a resposta como o produto dos dois números:

$54.18 \cdot 10^{-5}$

4. Como 54,18 é maior que 10, mova a vírgula decimal de um lugar para a esquerda e some 1 ao expoente:

$5{,}418 \cdot 10^{-4}$

Nota: Na forma decimal, este número é igual a 0,0005418

A notação científica realmente dá resultado quando você está multiplicando números muito pequenos e números muito grandes. Se você tentasse multiplicar os números no exemplo anterior usando o caminho comum, você estaria errado: 602.000.000.000.000.000.000.000 · 0.0000000000000000000000000009

Como você pode observar, a notação científica torna muito mais fácil o trabalho.

Capítulo 15

Quanto Você Conseguiu? Pesos e Medidas

Neste Capítulo* ► *Medindo coisas que funcionam juntos* ► *Descobrindo diferenças entre os sistemas Inglês e métrico* ► *Avaliando e calculando as conversões do sistema Inglês e do sistema métrico

No Capítulo 4, apresento para você as unidades que são coisas que pode ser somadas, tais como maçãs, moedas ou chapéus. As maçãs, as moedas e os chapéus são fáceis para somar porque eles são discretos – isto é, facilmente você pode ver onde um termina e o outro começa. Mas tudo não tão fácil. Por exemplo, como você soma água – pela gota? Embora você tente, qual é exatamente o tamanho de uma gota?

É onde as unidades de medida entram. Uma unidade de medida permite –lhe somar alguma coisa que não discreta: uma quantidade de um líquido ou sólido, a distância de um lugar ao outro, uma duração de tempo, a velocidade na qual você está viajando ou a temperatura do ar.

Neste capítulo, discuto dois sistemas de medida importante: Inglês e métrico. Provavelmente, você está familiarizado ainda com o sistema Inglês e pode conhecer mais do que você pensa sobre o sistema métrico. Cada um destes sistemas de medida fornece um modo diferente para medir distância, volume, peso (ou massa), tempo e velocidade. Depois, mostro para você como avaliar as quantidades métricas nas unidades Inglesas. Por fim, mostro para você como converter das unidades Inglesas para as unidades métricas e vice-versa.

Examinando Diferenças entre os Sistemas Métricos e os Sistemas Ingleses

Hoje, os dois sistemas de medida mais comuns são o sistema Inglês e o sistema métrico.

A maioria dos americanos aprende as unidades do sistema Inglês – por exemplo, libras e onças, pés e polegadas e assim por diante – e as usa todo dia.

Infelizmente, o sistema Inglês é difícil para ser usado em matemática. As unidades inglesas tais como polegadas e onças de líquido são, muitas vezes, medidas em frações que (como você conhece nos Capítulos 9 e 10) podem ser difíceis para se trabalhar.

O sistema métrico foi inventado para simplificar a aplicação da matemática na medida. As unidades métricas são baseadas no número 10 que as torna muito mais fáceis para se trabalhar. Partes das unidades são expressas como decimais que (como o Capítulo 11 mostra para você) são muito mais amigáveis do que as frações.

Apesar destas vantagens, o sistema métrico demorou para pegar nos Estados Unidos. Muitos americanos sentem-se confortáveis com as unidades Inglesas e são relutantes para fazer parte delas. É compreensível. Por exemplo, se eu perguntar para você carregar um saco de 20 lb para ¼ de uma milha, você sabe o que esperar. Entretanto, se eu perguntar para carregar um saco pesando 10 quilos para a metade de um quilômetro você pode não ter certeza.

Nesta seção, mostro para você as unidades de medida básicas para os dois sistemas Inglês e métrico.

Se você quiser um exemplo da importância de converter cuidadosamente, você pode querer confiar na NASA – eles se perderam no meio da órbita de Mars, no final da década de 90 porque uma equipe de engenheiros usou as unidades Inglesas e a NASA usava o sistema métrico para navegar!

Observando o sistema Inglês

Normalmente, o sistema de medida Inglês é mais usado nos Estados Unidos (mas, ironicamente não na Inglaterra). Embora você esteja familiarizado provavelmente com a maioria das unidades Inglesas de medida, na lista a seguir, tenho certeza de que você conhece as mais importantes. Mostro para você também alguns valores equivalentes que podem lhe ajudar a fazer conversões de um tipo de unidade a um outro.

✓ **Unidades de distância:** Distância – chamada também de comprimento – é medida em polegadas (in.), pés (ft.), jardas (yd.) e milhas (mi.): 12 polegadas = 1 pé 3 pés = 1 jarda 5.280 pés = 1 milha ✓**Unidades de volume líquido:** O volume líquido (chamado capacidade) é a quantidade de espaço ocupado por um líquido tal como água, leite ou vinho. Discuto o volume quando falo da geometria, no Capítulo 16. O volume é medido em onças de líquido (fl.oz.), copos (c.), pints (pt.), quartos (qt) e galões (gal.): 8 onças de líquido = 1 copo 2 copos = 1 pint 2 pints = 1 quarto 4 quartos = 1 galão As unidades de volume líquido são usadas tipicamente para medir o volume das coisas que podem fluir. O volume dos objetos sólidos normalmente é mais medido em unidades cúbicas de distância, tais como polegadas, pés cúbicos e assim por diante.

✓ **Unidades de peso:** O peso é a medida de como fortemente a gravidade puxa um objeto para a Terra. O peso é medido em onças (oz.), libras (lb) e toneladas.

16 onças = 1 libra 2000 libras = 1 tonelada Não confunda as onças de líquido com o volume de medida, com onças que medem peso. Estas unidades são dois tipos completamente diferentes de medidas!

- **Unidades de tempo:** é difícil definir o tempo mas todo mundo sabe o que ele é. O tempo é medido em segundos, minutos, horas, dias, semanas e anos: 60 segundos = 1 minuto 60 minutos = 1 hora 24 horas = 1 dia 7 dias = 1 semana 365 dias = 1 ano A conversão dos dias em anos é aproximada porque a rotação diária da terra no seu eixo e sua revolução anual em volta do sol não são exatamente sincronizadas. Um ano é perto de 365,25 dias, razão pela qual a medida dos anos existe.

Eu exclui os meses da ilustração porque a definição de um mês é imprecisa – ele pode variar de 28 a 31 dias.

- **Unidade de velocidade:** A velocidade é a medida de quanto tempo um objeto leva para mover uma determinada distância. A unidade de velocidade mais comum é milhas por hora (mph).
- **Unidade de temperatura:** A temperatura mede a quantidade de calor contida em um objeto. Este objeto pode ser um copo de água, um peru no forno ou o ar ambiente de sua casa. A temperatura é medida em graus Fahrenheit (°F).

Observando o sistema métrico

Como o sistema Inglês, o sistema métrico fornece unidades de medida para distância, volume e assim por diante. Diferente do sistema Inglês, entretanto, o sistema métrico cria estas unidades usando uma unidade básica e um conjunto de prefixos.

A tabela 15-1 mostra cinco unidades básicas importantes no sistema métrico.

Tabela 15-1 – Cinco Unidades Métricas Básicas

Medida de	Unidade Métrica Básica
Distância	Metro
Volume (capacidade)	Litro
Massa (peso)	Grama
Tempo	Segundo
Temperatura	Grau (Celsius)

Para os objetivos científicos, o sistema métrico foi atualizado rigorosamente pelo Sistema de Unidades Internacionais (SI) definido. Cada unidade Si básica está relacionada diretamente com um processo científico mensurável que o define. No SI, o quilograma (não o grama) é a unidade básica de massa, o kelvin é a unidade básica de temperatura e o litro não é considerado uma unidade básica. Para razões técnicas, os cientistas tendem a usar rigidamente o mais definido SI, mas a maioria das pessoas usa o sistema métrico perdedor. Na prática diária, você pode pensar nas unidades listadas na Tabela 15-1 como unidades básicas.

A tabela 15-2 mostra dez prefixos métricos, normalmente com os três mais usados em negrito (veja Capítulo 14, para mais informações sobre potências de dez).

Tabela 15-2 – Dez Prefixos Métricos

Prefixo	*Significado*	*Número*	*Potência de Dez*
Giga	Um bilhão	1.000.000.000	10^9
Mega	Um milhão	1.000.000	10^6
Quilo	Mil	1000	10^3
Hecta	Cem	100	10^2
Deca	Dez	10	10^1
(nada)	Um	1	10^0
Deci	Um décimo	0,1	10^{-1}
Centi	Um centésimo	0,01	10^{-2}
Mil	Um milésimo	0,001	10^{-3}
Micro	Um milionésimo	0,000001	10^{-6}
Nano	Um bilionésimo	0,000000001	10^{-9}

As unidades métricas grandes e pequenas são formadas relacionando uma unidade básica com um prefixo. Por exemplo, relacionar o prefixo quilo ao metro da unidade básica dá para você o quilômetro que significa 1000 metros. Do mesmo modo, relacionar o prefixo mil ao litro da unidade básica dá para você o mililitro que significa 0,001 (um milésimo) de um metro.

Aqui está uma lista dando a você os básicos: ✓**Unidade de distância:** A unidade métrica básica de distância é o metro (m). As outras unidades comuns são os milímetros (mm), os centímetros (cm) e os quilômetros (km): 1 quilômetro = 1000 metros 1 metro = 100 centímetros 1 metro = 1000 milímetros ✓**Unidades de volume líquido:** A unidade métrica básica de volume líquido (chamada também capacidade) é o litro (L). Uma outra unidade comum é o milímetro (mL): 1 litro = 1000 milímetros ***Nota:*** Um milímetro é igual a 1 centímetro cúbico (cc).

Unidades de massa: Tecnicamente falando, o sistema métrico não mede o peso, mas a massa. O peso é a medida de como fortemente a gravidade puxa um objeto para a Terra. A massa, entretanto, é a medida da quantidade de coisa que um objeto tem. Se você viajasse para a lua, seu peso mudaria, portanto, você se sentiria mais leve. Mas sua massa ficaria igual, portanto todos vocês estariam ali. A menos que você esteja planejando uma viagem para um espaço externo ou realizando um experimento científico, provavelmente você não precisa saber a diferença entre o peso e a massa. Neste capítulo, você pode pensar neles como equivalente e uso a palavra peso ao referir-me à massa métrica.

A unidade básica de peso no sistema métrico é o grama (g). O quilograma é ainda mais usado normalmente: 1 quilograma = 1000 gramas ***Nota:*** 1 quilograma de água tem um volume de 1 litro.

✓ **Unidades de tempo:** Como no sistema Inglês, a unidade métrica básica do tempo é um segundo (s). Para a maioria dos objetivos, as pessoas usam também outras unidades Inglesas, tais como os minutos, as horas e assim por diante.

Para muitos objetivos científicos, o segundo é a única unidade usada para medir o tempo. Os números grandes dos segundos e as frações pequenas das seções são representados com a notação científica que discuto no Capítulo 14.

✓ **Unidades de velocidade:** Para a maioria dos objetivos, a unidade métrica mais comum de velocidade (chamada também velocidade) são quilômetros por hora (km/hr). Uma outra unidade comum são os metros por segundo (m/s).

✓ **Unidades de temperatura (graus Celsius ou Centígrado):** A unidade métrica básica de temperatura é o grau Celsius (°C) chamado também o grau Centígrado. A escala celsius é estabelecida para que no nível do mar, a água congela a 0 °C e ferve a 100 °C.

i/papode) Muitas vezes os cientistas usam uma outra unidade – o Kelvin (K) – para falar da temperatura. Os graus são iguais em Celsius, mas 0 K é estabelecido como zero absoluto, a temperatura na qual os átomos não se movem. O zero absoluto é aproximadamente igual a – 273,15 °C.

Avaliando e Convertendo entre os Sistemas Ingleses e os Sistemas Métricos

A maioria dos americanos usa o sistema Inglês de medida o tempo todo mas tem apenas um conhecimento superficial do sistema métrico. Mas as unidades métricas estão sendo usada normalmente como as unidades para ferramentas, corridas, refrigerantes e muitas outras coisas. Também se você viajar para o exterior, você precisa saber o quanto longe são 100 quilômetros ou em quanto tempo você pode dirigir com 10 litros de gasolina.

Nesta seção, mostro para você como fazer avaliações das unidades métricas de um estádio de beisebol em termos de unidades Inglesas que podem lhe ajudar a sentir mais confortável com as unidades métricas. Mostro para você também como converter entre as unidades métricas e inglesas, o que é um tipo comum de problema matemático.

i/papode) Quando eu falo de avaliações, quero dizer os caminhos perdidos para medir quantidades métricas usando as unidades Inglesas com que você está familiarizado. Em contraste, quando falo da conversão quero dizer usar uma equação para mudar de um sistema de unidades para o outro. Nenhum método é exato mas a conversão fornece uma aproximação mais perto (leva mais tempo) do que avaliando.

Avaliando o sistema métrico

Uma razão pela qual, às vezes, as pessoas sentem-se desconfortáveis usando o sistema métrico é que quando você não está familiarizado com ele, avaliar as quantidades em termos práticos é difícil. Por exemplo, se eu lhe disser que iremos à praia que fica a ¼ de milha, você se prepara para um passeio curto. E se eu lhe disser que ela fica a 10 milhas, você dirige seu carro. Mas o que você faz com a informação de que a praia fica a 3 quilômetros?

Do mesmo modo, se eu lhe disser que a temperatura é de 85 graus Fahrenheit, provavelmente você vestirá um traje de banho ou shorts. E se lhe disser faz 40 graus Fahrenheit, provavelmente você vestirá um casaco. Mas o que você vestirá se eu lhe disser que a temperatura é de 25 graus Celsius?

Nesta seção, dou para você algumas regras de polegada para avaliar as quantidades métricas. Em cada caso, mostro para você como uma unidade métrica comum se compara-se com uma unidade Inglesa com que você já se sente confortável.

Distâncias curtas aproximadas: 1 metro está em torno de 1 jarda (3 pés)

Aqui está como converter metros em pés: 1 metro ≈ 3,26 pés. Mas para a avaliação, use a regra simples de que 1 metro está em torno de 1 jarda (isto é, em torno de 3 pés).

Um homem de 6 pés tem altura em torno de 2 metros. Um quarto de 15 pés tem 5 metros de largura. E um campo de futebol de 100 jardas de comprimento é equivalente a 100 metros de comprimento. Do mesmo modo, um rio com profundidade de 4 metros é equivalente a 12 pés de profundidade. Uma montanha de 3000 metros de altura é equivalente a 9000 pés de altura. E uma criança com apenas a altura da metade de um metro tem uma altura em torno de 1 pé e meio.

Avaliando distâncias longas e velocidade

Aqui está como converter quilômetros em milhas: 1 quilômetro ≈ 0,62 milhas. Para a avaliação de um estádio de beisebol, você pode lembrar que 1 quilômetro está em torno de ½ a milha. Pela mesma prova, 1 quilômetro por hora está em torno de ½ a milha por hora.

A diretriz lhe diz que se você mora a 2 milhas do supermercado mais perto, então você mora em torno de 4 quilômetros dali. Uma maratona de 26 milhas está em torno de 52 quilômetros. Se você corre numa esteira 6 milhas por hora, então você pode correr em torno de 12 quilômetros por hora. Pela mesma prova, uma corrida de 10 quilômetros fica em torno de 5 milhas. Se o Tour de France fica em torno de 4000 quilômetros, então ele está em torno de 2000 milhas. E se a velocidade da luz fica em torno 300.000 quilômetros por segundo, então ela fica em torno de 150.000 milhas por segundo.

Volume aproximado: 1 litro fica em torno de 1 quarto (¼ de galão)

Aqui está como converter litros em galões: 1 litro ≈ 0,26 galões. Uma boa avaliação aqui é que 1 litro fica em torno de 1 quarto (isto é, há em torno de 4 litros no galão).

Usando esta avaliação, um galão de leite tem 4 quartos, portanto em torno de 4 litros. Se você coloca 10 galões de gasolina no seu tanque, o que fica em torno de 40 litros. Na outra direção, se você comprar uma garrafa de coca de 2 litros, você tem em torno de 2 quartos. Se você comprar um aquário com capacidade de 100 litros, ele armazena em torno de 25 galões de água. E se uma piscina armazena 8000 litros de água, ela tem 2000 galões.

Avaliando peso: 1 quilograma fica em torno de 2 libras

Aqui está como converter quilogramas em libras: 1 quilograma ≈ 2,20 libras. Como estimativa, entenda que 1 quilograma é igual a 2 pounds.

Por esta estimativa,um saco de 5 quilogramas de batatas pesa em torno de 10 pounds. Se você puder levantar supino de 70 quilogramas então você pode levantar supino em torno de 140 libras. E como um litro de água pesa exatamente 1 quilograma, você sabe que um quarto de água pesa em torno de 2 libras. Do mesmo modo, se um bebê pesa 8 libras ao nascer, ele ou ela pesa em torno de 4 quilogramas. Se você pesa 150 libras então você pesa em torno de 75 quilogramas. E se resolver perder 20 libras no próximo ano então você quer perder em torno de 10 quilogramas.

Avaliando a temperatura

O motivo mais comum para avaliar a temperatura em Celsius é em relação ao clima. A fórmula para converter Celsius em Fahrenheit é um tipo de bagunça: Fahrenheit = Celsius · 9/5 + 32

Em substituição, use a tabela útil da Tabela 15-3.

Tabela 15-3 – Comparando Temperaturas em Celsius e Fahrenheit

Celsius (Centígrado)	*Descrição*	*Fahrenheit*
0 graus	Frio	32 graus
10 graus	Frio	50 graus
20 graus	Quente	68 graus
30 graus	Quente	86 graus

Qualquer temperatura abaixo de 0°C é frio e qualquer temperatura acima de 30°C é quente. Na maioria do tempo, a temperatura cai pela metade. Portanto, você sabe que quando a temperatura é 6°C, você quer vestir um casaco. Quando ela é 14°C você quer um suéter ou, pelo menos, luvas longas. E quando ela é 25°C, vai para praia!

Convertendo as unidades de medida

Muitos livros oferecem-lhe uma fórmula para converter do sistema Inglês para o sistema métrico e uma outra fórmula para converter do sistema métrico para o sistema Inglês. Muitas vezes as pessoas descobrem este método de conversão porque elas têm problema ao lembrar do tipo de fórmula a ser usado para uma determinada direção.

Nesta seção, mostro para você um caminho simples para converter entre as unidades Inglesas e as unidades métricas que usam apenas uma fórmula para cada tipo de conversão.

Entendendo os fatores de conversão

Quando você multiplica qualquer número por 1, aquele número permanece o mesmo. Por exemplo, $36 \cdot 1 = 36$. E quando uma fração tem o mesmo numerador (número na parte superior) e o mesmo denominador (número na parte inferior), aquela fração é igual 1 (veja Capítulo 10, para mais detalhes). Portanto, quando você multiplica um número por uma fração igual a 1, o número permanece o mesmo. Por exemplo: $36 \cdot \frac{5}{5} = 36$

Se você multiplica uma medida por uma fração especial igual a 1, você pode trocar de uma unidade de medida para uma outra sem mudar o valor. As pessoas chamam tais frações de fatores de conversão.

Dê uma olhada em algumas equações que mostram como as unidades Inglesas e métricas relacionam-se (todas as conversões entre as unidades Inglesas e métricas são aproximadas): ✓1 metro = 3,26 pés ✓1 quilômetro = 0,62 milhas ✓1 litro = 0,26 galões ✓1 quilograma = 2,20 libras Como os valores de cada lado das equações são iguais, você pode criar as frações que são iguais a 1 da seguinte forma: ✓ $\frac{1 \text{ metro}}{3{,}26 \text{ pés}}$ ou $\frac{3{,}26 \text{ pés}}{1 \text{ metro}}$

✓ $\frac{1 \text{ quilômetro}}{0{,}62 \text{ milhas}}$ ou $\frac{0{,}62 \text{ milhas}}{1 \text{ quilômetro}}$

✓ $\frac{1 \text{ litro}}{0{,}26 \text{ galões}}$ ou $\frac{0{,}26 \text{ galões}}{1 \text{ litro}}$

✓ $\frac{1 \text{ quilograma}}{2{,}2 \text{ libras}}$ ou $\frac{2{,}2 \text{ libras}}{1 \text{ quilograma}}$

Depois de você entender quantas unidades de medida cancelam-se (que discuto na próxima seção), você pode escolher facilmente quais frações usar para trocar entre as unidades de medida.

Cancelando as unidades de medida

Quando você está multiplicando as frações, você pode cancelar qualquer fator que aparece no numerador e no denominador (veja Capítulo 9, para mais detalhes). Como nos números, você pode cancelar também as unidades de medida nas frações. Por exemplo, imagine que você queira avaliar esta fração: $\frac{6 \text{ galões}}{2 \text{ galões}}$

Você já sabe que pode cancelar um fator de 2 no numerador e no denominador. Mas você pode cancelar também a unidade galões no numerador e no denominador: $\frac{{}^{3}\cancel{6 \text{ galões}}}{\cancel{2 \text{ galões}}}$

Portanto, esta fração é simplificada como segue: = 3

Convertendo as unidades

Depois de entender como cancelar as unidades nas frações e como colocar as frações iguais a 1 (veja as seções anteriores), você tem um sistema garantido para converter as unidades de medida.

Imagine que você queira converter 7 metros em pés. Ao usar a equação 1 metro = 3,26 pés, você pode criar uma fração de dois valores como segue:

$\frac{1 \text{ metro}}{3{,}26 \text{ pés}}$ ou $\frac{3{,}26 \text{ pés}}{1 \text{ metro}} = 1$

As duas frações são iguais a 1 porque o numerador e o denominador são iguais. Portanto, você pode multiplicar a quantidade que você está tentando converter (7 metros) por uma destas frações sem mudá-la. Lembre-se que você quer cancelar as unidades de metros. Você já tem a palavra metros no numerador (para tornar isso claro, coloca 1 no denominador), portanto use a fração que coloca 1 metro no denominador:

$$\frac{7 \text{ metros}}{1} \quad \text{ou} \quad \frac{3{,}26 \text{ pés}}{1 \text{ metro}} = 1$$

Agora cancele a unidade que aparece no numerador e no denominador:

$$\frac{7 \cancel{\text{metros}}}{1} \quad \text{ou} \quad \frac{3{,}26 \text{ pés}}{1 \cancel{\text{metro}}} = 1$$

Neste ponto, o único valor no denominador é 1, portanto você pode ignorá-lo. E a única unidade deixada é pés, portanto, coloque-a no final da expressão: = 7 · 3,26 pés Agora, faça a multiplicação (o Capítulo 11 mostra como multiplicar os decimais): = 22,82 pés Pode parecer estranho que a resposta aparece com as unidades já anexadas, mas é a beleza deste método: Quando você coloca a expressão correta, a resposta aparece.

Você pode ter mais prática convertendo as unidades de medida no Capítulo 18, onde mostro para você como colocar as cadeias de conversão e aborda os problemas de palavras envolvendo a medida.

Capítulo 16

Represente Esta: Geometria Básica

Neste Capítulo

► Conhecendo os componentes básicos de geometria: Pontos, linhas, ângulos e formas ► Examinando duas formas dimensionais ► Observando a geometria sólida ► Descobrindo como medir uma variedade de formas

A geometria é a matemática das figuras, tais como quadrados, círculos, triângulos, linhas e assim por diante. Como a geometria é a matemática da física do espaço, ela é uma das áreas mais úteis da matemática. A geometria entra em jogo na medição dos quartos ou das paredes de sua casa, da área do seu jardim circular, do volume da água de sua piscina ou da distância mais curta do outro lado de um campo retangular.

Embora a geometria seja, normalmente, um longo ano de curso no segundo grau, você pode ser surpreso sobre como você pode pegar rapidamente o que você precisa saber a respeito da geometria básica. Muito sobre o que você descobre num curso de geometria é como escrever provas de geometria que você não precisa para a álgebra – ou a trigonometria ou mesmo o cálculo.

Neste capítulo, dou para você uma visão geral rápida e prática da geometria. Primeiro, mostro para você quatro conceitos importantes da geometria plana: linhas, ângulos e formas. Depois ofereço para você as bases das formas geométricas, dos círculos planos para os cúbicos sólidos. Por fim, discuto como medir as formas geométricas descobrindo a área e o perímetro das duas formas dimensionais e o volume e a área da superfície de alguns sólidos geométricos.

Evidentemente, se você quiser saber mais sobre geometria, o lugar ideal para ver além deste capítulo é Geometria Para Leigos (publicado por Wiley)!

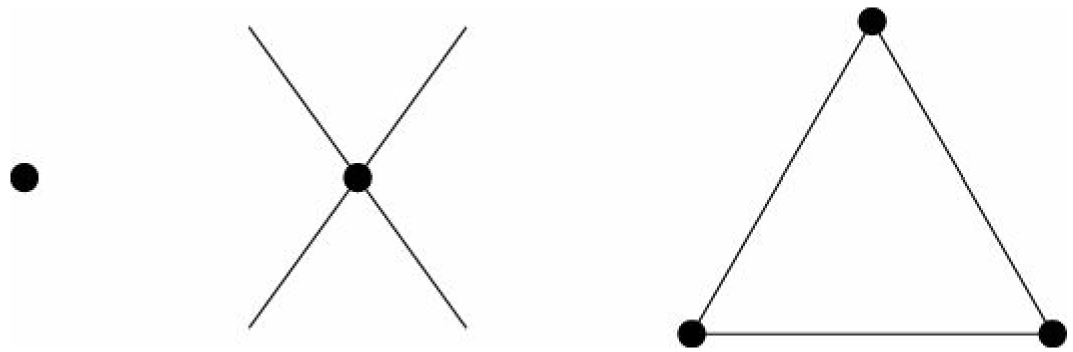
Montando um Plano: Pontos, linhas, Ângulos e Formas

A geometria plana é o estudo de figuras sobre uma superfície de duas dimensões – isto é, sobre um plano. Você pode pensar sobre o plano como um pedaço de papel sem espessura nenhuma. Tecnicamente, um plano não termina no limite do papel – ele continua para sempre.

Nesta seção, apresento para você quatro conceitos importantes da geometria plana: pontos, linhas, ângulos e formas (tais como quadrados, círculos, triângulos e assim por diante).

Criando pontos

Um ponto é uma posição sobre um plano. Ele não tem dimensão nem forma. Embora na realidade um ponto seja muito pequeno para ser visto, você pode representá-lo visualmente em um desenho usando um ponto.



Quando duas linhas cruzam, como mostrado acima, elas dividem o único ponto. Além disso, cada ângulo de um polígono é um ponto (Veja abaixo para saber mais sobre linhas e polígonos.)

Conhecendo suas linhas

Uma linha – chamada também uma linha reta – é muito mais do que ela parece ser: ela marca a distância mais curta entre dois pontos mas ela se estende infinitamente nas duas direções. Ela tem comprimento mas não tem largura, fazendo dela uma figura unidimensional (1-D).

Dado qualquer um dos dois pontos, você pode desenhar exatamente uma linha que passa pelos dois. Isto é, dois pontos determinam uma linha.

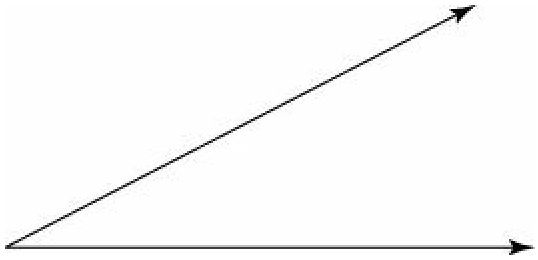
Quando duas linhas cruzam, elas dividem um único ponto. Quando duas linhas não cruzam, elas são paralelas, o que significa que elas permanecem na mesma distância uma da outra em todo lugar. Uma boa assistência visual para as linhas paralelas é um conjunto de estrada de ferro. Na geometria, você desenha uma linha com setas nas extremidades. As setas em cada extremidade de uma linha significam que a linha continua para sempre (como você pode observar no Capítulo 1, onde eu discuto a reta numerada).

O *segmento de uma linha* é um pedaço de uma linha que tem términos como mostrado aqui.

Um raio de um pedaço de uma linha que começa em um ponto e estende-se infinitamente em uma direção, tipo de um laser. Ele tem um término e uma seta.

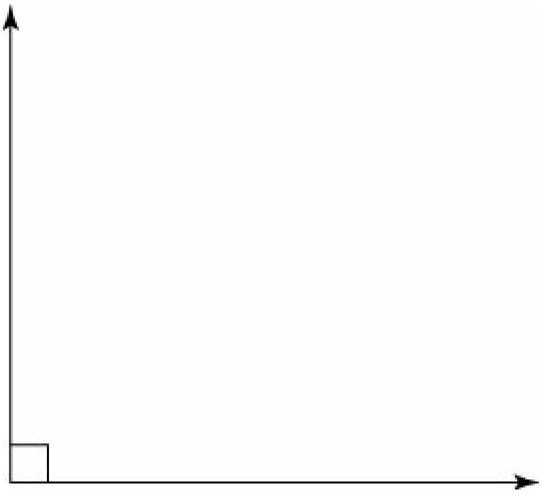
Calculando os ângulos

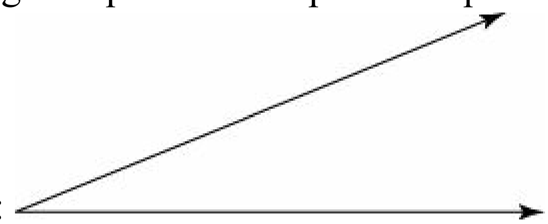
Um ângulo é formado quando dois raios estendem do mesmo ponto.



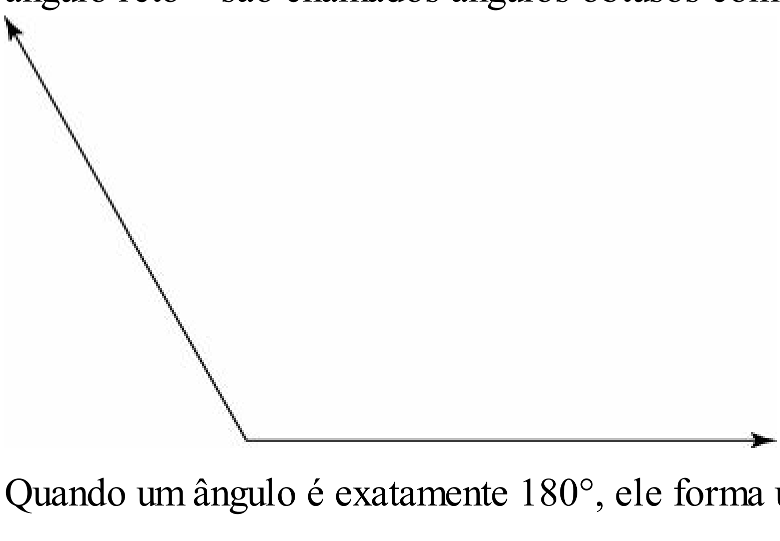
Os ângulos são usados tipicamente na marcenaria para medir os ângulos dos objetos. Eles são usados também na navegação para indicar uma mudança repentina na direção. Por exemplo, quando você está dirigindo é comum distinguir quando o ângulo de uma virada é "precisa" ou "não tão precisa."

A precisão de um ângulo é medida em geral nos graus. O ângulo mais comum é o ângulo reto – o ângulo no ângulo de um quadrado – que é um ângulo de 90° (90 graus):



Os ângulos que têm menos de 90° – isto é, os ângulos que são mais precisos que um ângulo reto – são chamados ângulos agudos, como este: 

Os ângulos que medem mais que 90° – isto é, os ângulos que não são tão precisos como um ângulo reto – são chamados ângulos obtusos como visto aqui:



Quando um ângulo é exatamente 180°, ele forma uma linha reta e é chamada um ângulo reto.

Promovendo coisas

Uma forma é qualquer figura geométrica fechada que tem uma figura interna e uma externa.

Muita geometria plana focaliza diferentes tipos de formas. Na próxima seção, mostro para você como identificar uma variedade de formas. Depois deste capítulo, mostro para você como medir estas formas.

Encontros fechados: Promovendo sua Compreensão das Formas 2-D

Uma forma é qualquer figura geométrica de duas dimensões (2-D) que tem uma interna e uma externa, separada pelo perímetro (limite) da forma. A área de uma forma é a medida da dimensão dentro daquela forma.

Poucas formas com que você está familiarizado provavelmente incluem o quadrado, o retângulo e o triângulo. Entretanto, muitas formas não têm nomes como você pode observar na Figura 16-1.

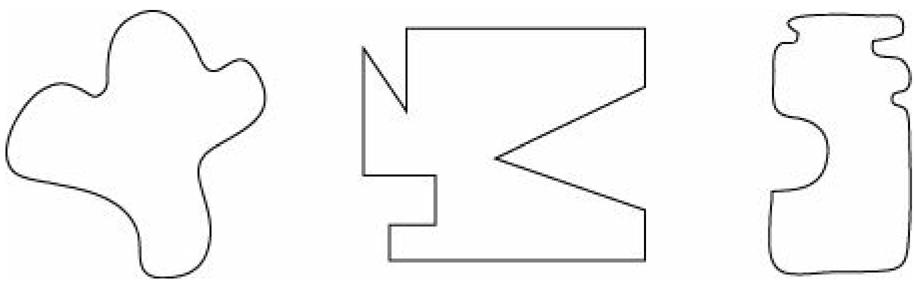


Figura 16-1: Figuras sem nomes.

Medir o perímetro e a área das formas é útil para uma variedade de aplicações, de um levantamento de uma terra (para obter informação sobre uma parte de terra que você está medindo) para a costura (calcular quanto material você precisa para um projeto). Nesta seção, apresento para você uma variedade de formas geométricas. Depois, no capítulo, mostro para você como descobrir o perímetro e a área de cada uma, mas, de agora em diante, eu familiarizo você com eles.

Círculos

Um círculo é um conjunto de todos os pontos que são uma distância constante a partir do centro do círculo. A distância de qualquer ponto no círculo para seu centro é chamada o raio do círculo. A distância de qualquer ponto no círculo diretamente do centro para o outro lado do círculo é chamada de diâmetro do círculo.

Diferentemente dos polígonos que discuto depois, um círculo não tem limites retos. Os antigos grecos – que inventaram muita coisa da geometria que conhecemos hoje – pensavam que o círculo era a forma geométrica mais perfeita.

Polígonos

Um polígono é qualquer forma cujos lados são todos retos. Todo polígono tem três ou mais lados (se ele tivesse menos de três, não seria, de fato, uma forma). Seguem poucos polígonos mais comuns.

Triângulos

A forma mais básica com lados retos é o triângulo, um polígono de três lados. Você descobre tudo sobre triângulos quando você estuda a trigonometria (e qual é o melhor lugar para começar do que Trigonometria Para Leigos?). Os triângulos são classificados na base de seus lados e ângulos. Observe as diferenças (e veja a Figura 16-2): ✓**Equilátero:** Um triângulo equilátero tem três lados iguais e os três ângulos medem 60 graus.

✓ **Isósceles:** Um triângulo isósceles tem dois lados iguais e dois ângulos iguais.

✓ **Escaleno:** Os triângulos escalenos têm três lados diferentes e três ângulos desiguais.

✓ **Retângulo:** Um triângulo retângulo tem um ângulo reto. Ele pode ser isósceles ou escaleno.

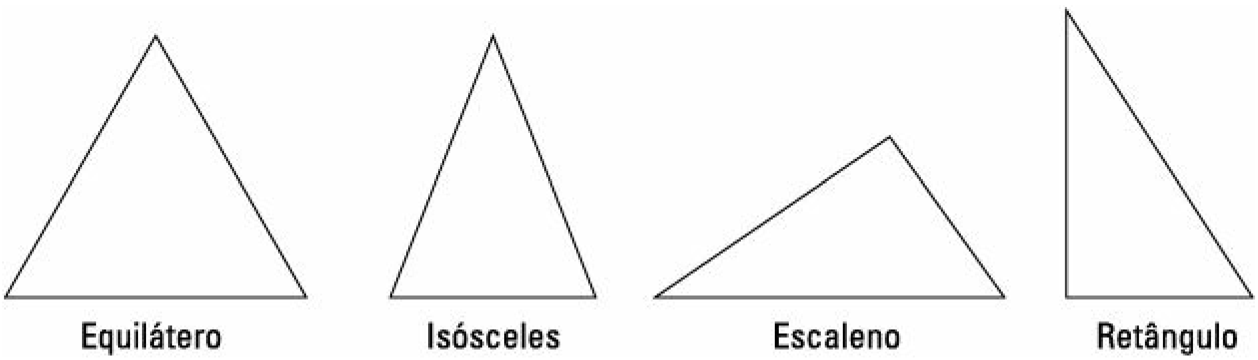


Figura 16-2: Tipos de triângulos.

Quadriláteros

Um quadrilátero é qualquer forma que tem quatro lados retos. Os quadriláteros são uma das formas mais comuns que você vê no dia-a-dia. Se você duvidar disso, olhe em volta e note que os quartos, as portas, as janelas e as partes horizontais superiores de mesas são quadriláteros. Aqui eu apresento para você poucos quadriláteros comuns (A figura 16-3 mostra para você o que eles parecem): ✓**Quadrado:** Um quadrado tem quatro ângulos retos e quatro lados iguais; também os dois pares de lados opostos (lados diretamente para o lado oposto de um ao outro) são paralelos.

✓ **Retângulo:** Como um quadrado, um retângulo tem quatro ângulos retos e dois pares de lados opostos paralelos. Diferentemente do quadrado, entretanto, embora os lados opostos sejam iguais, lados que dividem um ângulo – lados adjacentes – podem ter diferentes comprimentos.

- ✓ **Losango:** Imagine levando um quadrado e despedaçando-o como se seus ângulos fossem dobradiças. Esta forma é chamada um losango. Todos os quatro lados são iguais e os dois pares de lados opostos são paralelos.
- ✓ **Paralelogramo:** Imagine levando um retângulo e despedaçando-o como se os ângulos fossem dobradiças. Esta forma é chamada um paralelogramo – os dois pares de lados opostos são iguais e os dois pares de lados opostos são paralelos.
- ✓ **Trapézio:** A única característica mais importante do trapézio é que pelo menos dois lados opostos são paralelos.
- ✓ **Pipa:** Uma pipa é um quadrilátero com dois pares de lados adjacentes que têm o mesmo comprimento.

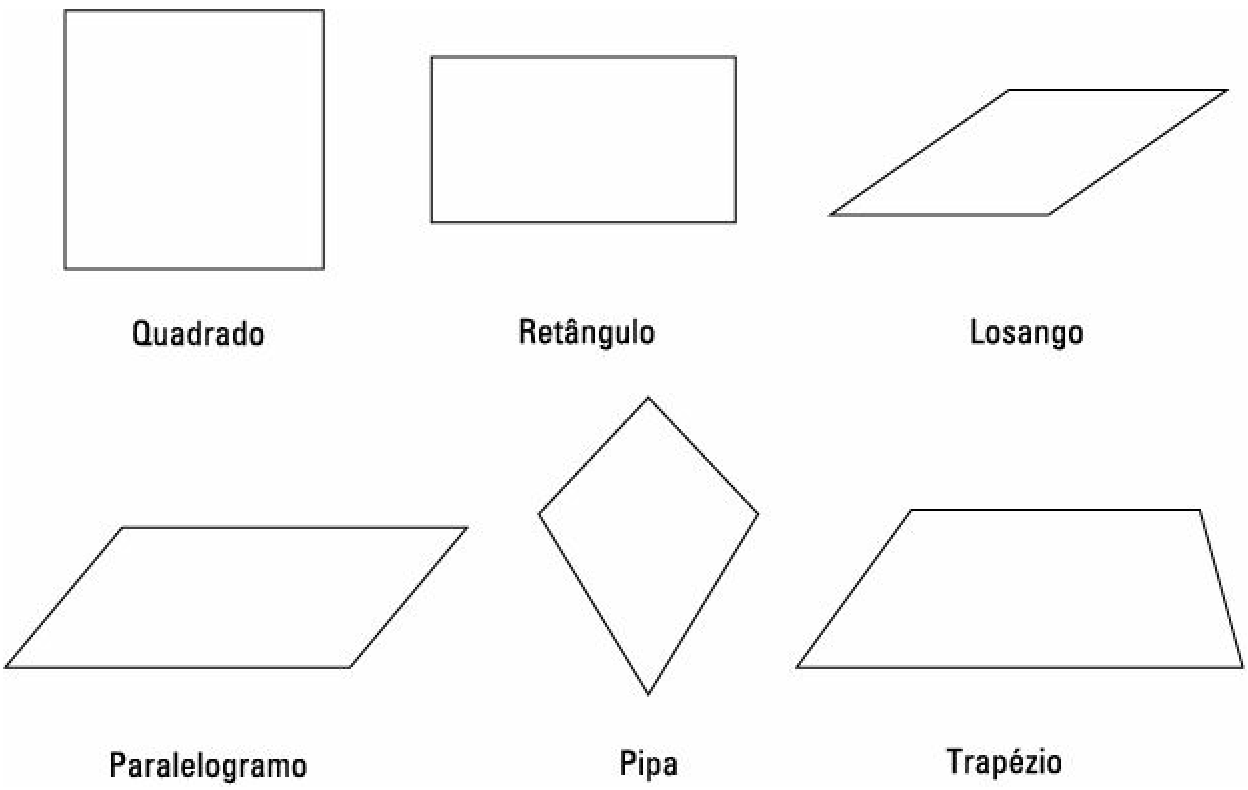


Figura 16-3: Quadriláteros comuns.

Um quadrilátero pode caber em mais de uma destas categorias. Por exemplo, todo paralelogramo (com dois conjuntos de lados paralelos) é, também, um trapézio (com pelo menos um conjunto de lados paralelos). Todo retângulo e todo losango é, também, um paralelogramo e um trapézio. E todo quadrado é, também, todos os outros cinco tipos de quadriláteros. Na prática, entretanto, é comum identificar um quadrilátero tão descritivamente quanto possível – isto é, use a primeira palavra na lista acima que o descreve com precisão.

Polígonos em esteróidos – polígonos maiores

Um polígono pode ter qualquer número de lados. Os polígonos com mais de quatro lados não são tão comuns quanto os triângulos e os quadriláteros, mas vale a pena ainda conhecê-los. Os polígonos maiores entram nas duas variedades básicas: regular e irregular.

Um polígono regular tem lados iguais e ângulos iguais. Os mais comuns são os pentágonos regulares (5 lados), os hexágonos regulares (6 lados) e os octágonos regulares (8 lados). Veja a Figura 16-4.

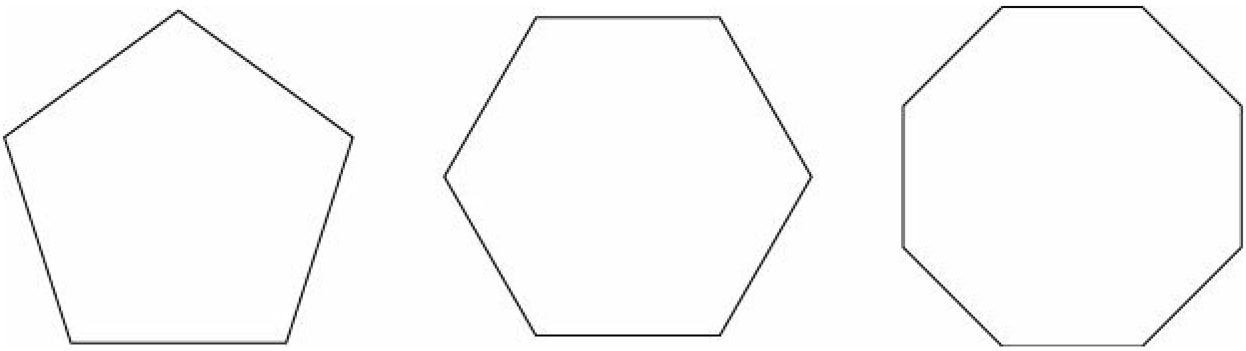


Figura 16-4: Um pentágono, um hexágono e um octágono.

O segundo polígono é um polígono irregular (veja Figura 16-5).

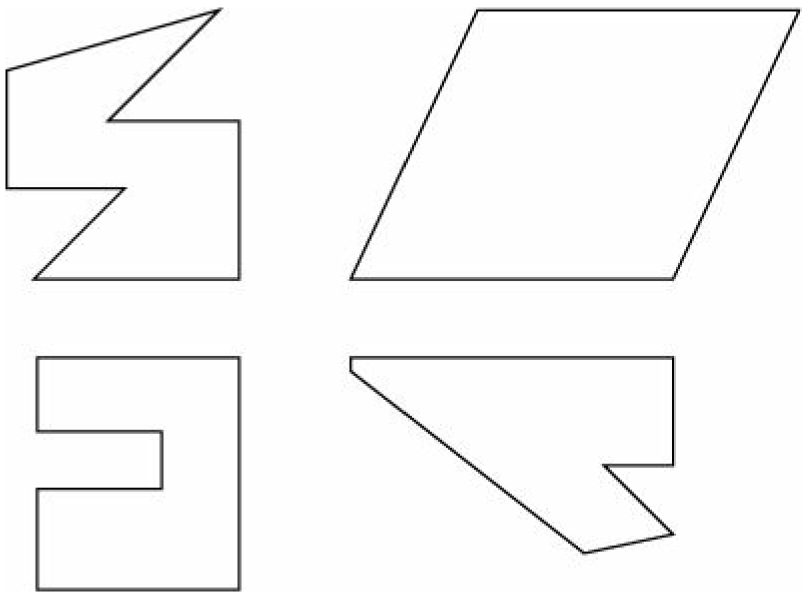


Figura 16-5: Vários polígonos irregulares.

Viajar para uma Outra Dimensão: Geometria Sólida

A geometria sólida é o estudo de formas no espaço – isto é, o estudo de formas em três dimensões. Um sólido é o equivalente espacial (tridimensional ou 3 –D) de uma forma. Todo sólido tem um lado externo e um lado externo separados pela superfície do sólido. Aqui, eu apresento para você uma variedade de sólidos.

As várias faces dos poliedros

Um poliedro é o equivalente tridimensional de um polígono. Como você pode se lembrar antes, neste capítulo, um polígono é uma forma que tem apenas lados retos. Do mesmo modo, um poliedro é um sólido que tem apenas limites retos e faces planas (isto é, as faces que são polígonos).

O poliedro mais comum é o cubo (veja Figura 16-6). Como você pode ver, um cubo tem 6 faces planas que são polígonos – neste caso, todas as faces são quadradas – e 12 limites retos. Além disso, um cubo tem 8 vértices (ângulos). Depois neste capítulo, mostro para você como medir a área da superfície e o volume de um cubo.

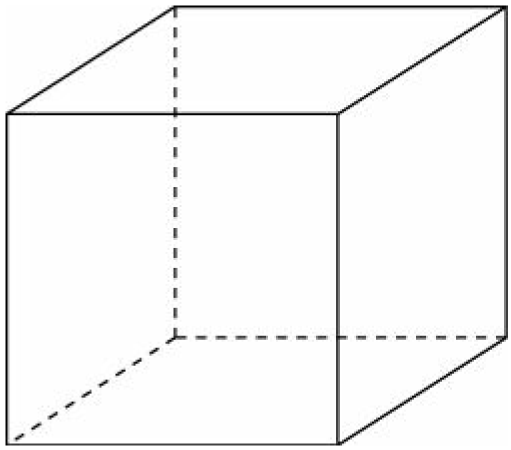


Figura 16-6: Um cubo típico.

A Figura 16-7 mostra poucos poliedros comuns.

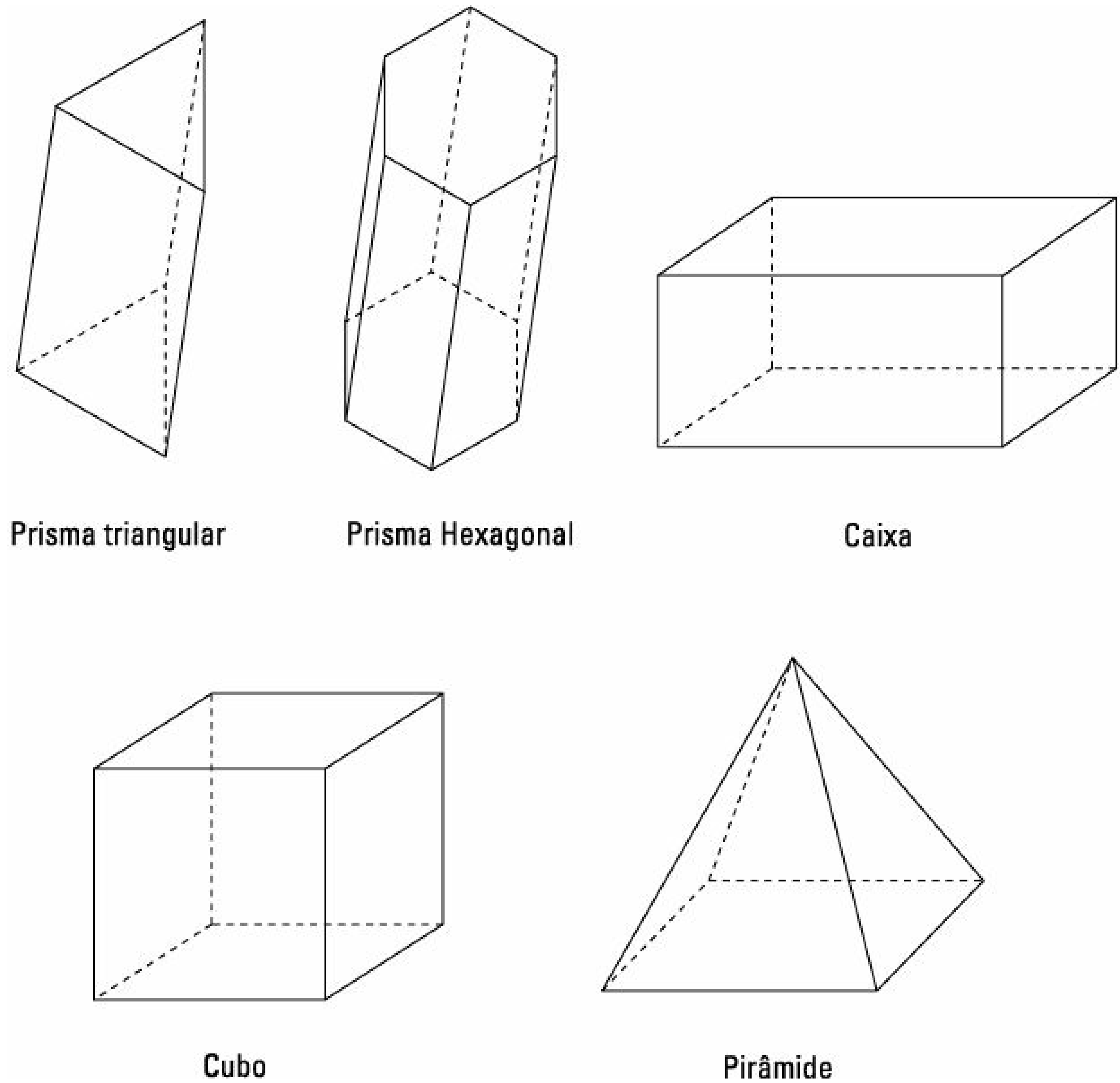


Figura 16-7: Poliedros comuns.

Depois, neste capítulo, mostro para você como medir cada um destes poliedros para determinar seu volume – isto é, a soma de espaço contido dentro de sua superfície.

Um conjunto especial de poliedros é chamado os cinco sólidos regulares (veja Figura 16-8). Cada sólido regular tem faces idênticas que são polígonos regulares. Note que um cubo é um tipo de sólido regular. Do mesmo modo, o tetraedro é uma pirâmide com quatro faces que são triângulos equiláteros.

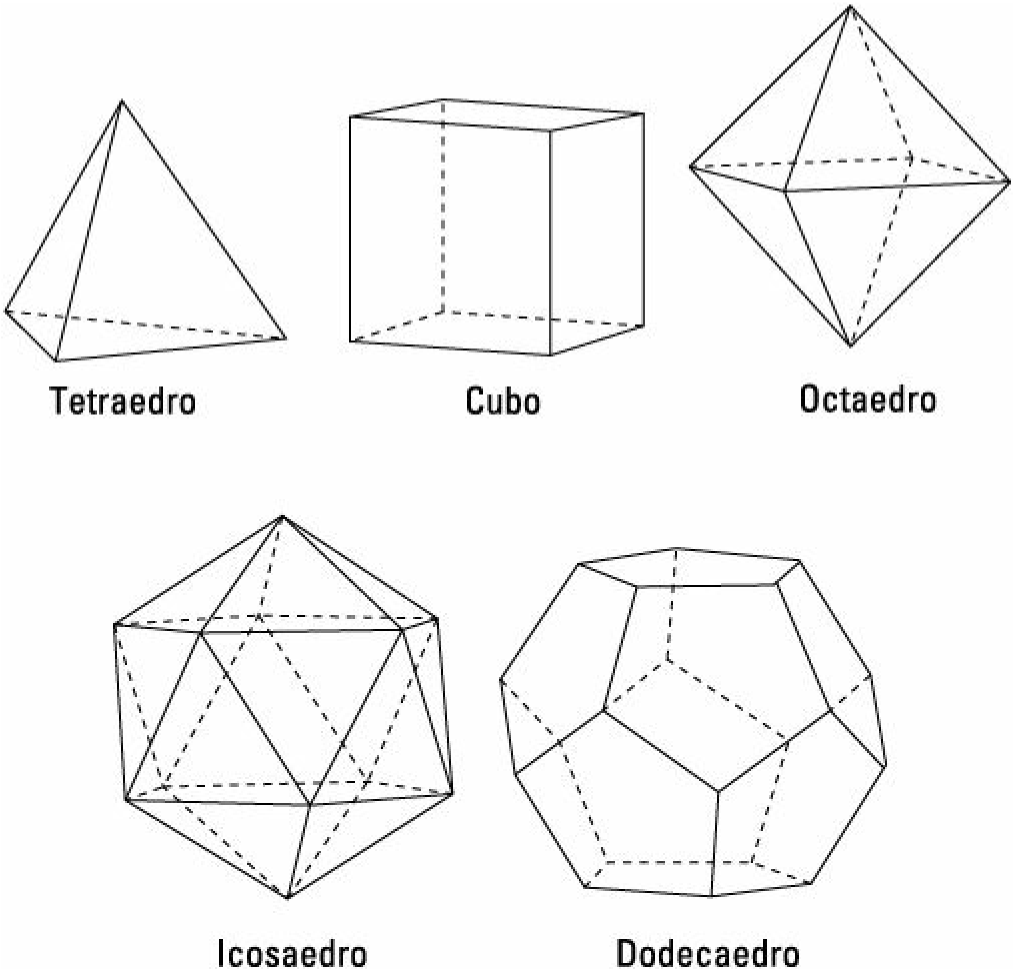


Figura 16-8: Os cinco sólidos regulares.

Formas 3-D com curvas

Muitos sólidos não são poliedros porque eles contêm pelo menos uma superfície curvada. Aqui estão poucos dos tipos de sólidos mais comuns (veja também Figura 16-9): ✓**Esfera:** Uma esfera é o sólido ou tridimensional equivalente de um círculo. Uma bola é uma assistência visual perfeita para uma esfera.

- ✓ **Cilindro:** Um cilindro tem uma base circular e estende-se verticalmente a partir do plano. Uma boa assistência visual para um cilindro é uma lata de sopa.
- ✓ **Cone:** Um cone é um sólido com uma base redonda que estende verticalmente para um único ponto. Uma boa assistência visual para um cone é um cone de sorvete.

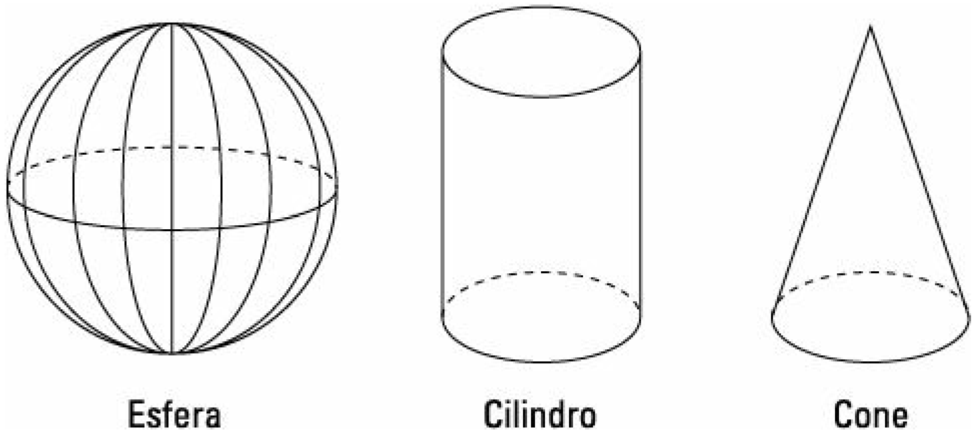


Figura 16-9: Esferas, cilindros e cones.

Na próxima seção, mostro para você como medir cada um destes sólidos para determinar seu volume – isto é, a soma do espaço contido dentro da sua superfície.

Medindo Formas: Perímetro, Área, Área de Superfície e Volume

Nesta seção, apresento para você algumas fórmulas importantes para medir as formas no plano e os sólidos no espaço. Estas fórmulas usam letras representam números que você pode colocar para criar medidas específicas. Usar letras no lugar de números é uma característica que você observará mais na Parte V, quando eu discuto a álgebra.

2-D: Medindo a superfície plana

Duas habilidades importantes na geometria – e na vida real – estão descobrindo o perímetro e a área de formas. O perímetro de uma forma é uma medida do comprimento de seus lados. Você usa o perímetro para medir a distância em torno dos limites de um quarto, de um prédio ou de uma trilha circular. A área de uma forma é uma medida de quão grande ela é por dentro. Você usa a área medindo a dimensão de uma parede, de uma mesa ou de um pneu.

Por exemplo, na Figura 16-10, dou para você os comprimentos dos lados de cada forma.

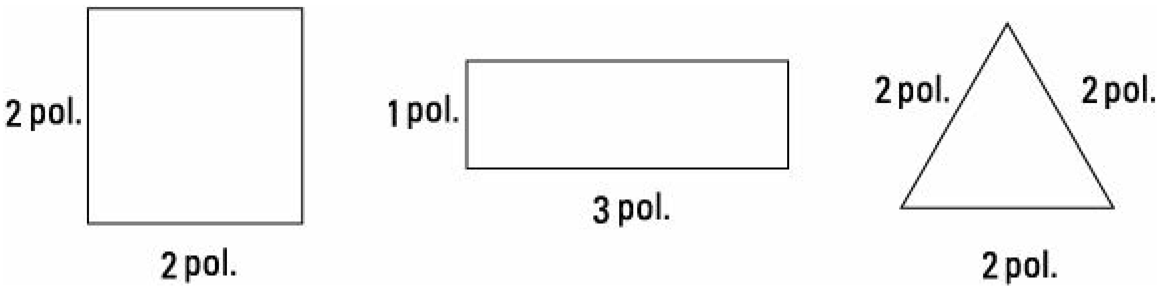


Figura 16-10: Medindo os lados das figuras.

LEMBRE-SE Quando todo lado de uma forma é reto, você pode medir seu perímetro somando os comprimentos de todos seus lados.

Do mesmo modo, na Figura 16-11, dou para você a área de cada forma.

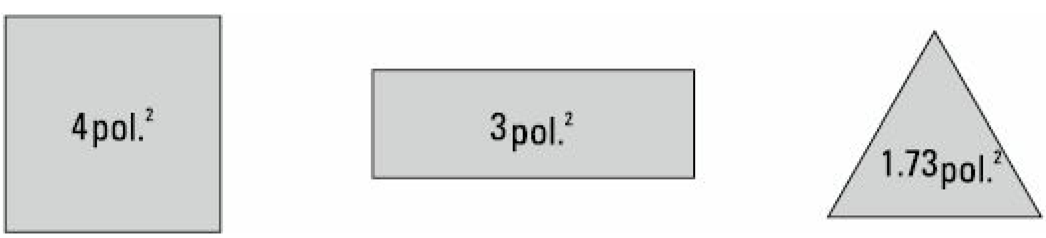


Figura 16-11: As áreas das figuras A área de uma forma é sempre medida nas unidades ao quadrado: polegadas ao quadrado, pés ao quadrado, milhas ao quadrado, quilômetros ao quadrado e assim por diante – mesmo se você tiver falando sobre a área de um círculo! (Para mais detalhes sobre medidas, vá ao Capítulo 15.) Discuto estes tipos de cálculos nesta seção. (Para mais informações sobre os nomes das formas, consulte "Encontros fechados: Promovendo sua Compreensão das Formas 2 D.")

Circulando nos círculos

O centro de um círculo é um ponto que é a mesma distância de qualquer ponto do próprio círculo. A distância é chamada o raio do círculo ou r para abreviação. E qualquer segmento de linha de um ponto do círculo do centro para um outro ponto do círculo é chamado diâmetro ou d para abreviação. Veja a Figura 16-12.

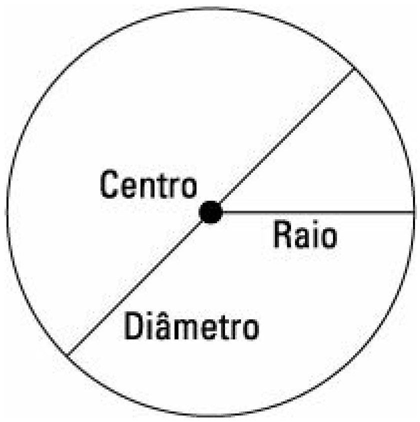


Figura 16-12: Decifrando as partes de um círculo.

Como você pode observar, o diâmetro de qualquer círculo é constituído de um raio mais um outro raio – isto é, dois raios (pronunciados raios). Este conceito lhe dá a seguinte fórmula útil: $d = 2 \cdot r$

Por exemplo, dado um círculo com um raio de 5 milímetros, você pode calcular o diâmetro como segue: $d = 2 \cdot 5$ mm $= 10$ mm

Como o círculo é uma forma extra especial, seu perímetro (o comprimento de seus "lados") tem um nome extra especial: a circunferência (C para circunferência). Antes os matemáticos tiveram muitos problemas para resolver como medir a circunferência de um círculo. Aqui está a fórmula que eles acertaram sobre: $C = 2 \cdot \pi \cdot r$ ***Nota:*** Como $2 \cdot r$ é o mesmo que o diâmetro, você pode escrever também a fórmula como $C = \pi \cdot d$ O símbolo π é chamado pi (pronunciado pi). É apenas um número cujo valor aproximado é como segue (a parte decimal de pi continua para sempre, portanto você não pode ter um valor exato para pi): $\pi = 3{,}14$

Portanto, dado um círculo com um raio de 5 mm, você pode calcular a circunferência aproximada: $C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5$ mm $= 31{,}4$ mm A fórmula para a área (A) de um círculo usa também π : A = π · r · r Aqui está como usar esta fórmula para descobrir a área aproximada de um círculo com um raio de 5 mm: A = 3,14 · $(5mm)^2$ = 3,14 · 25 mm quadrado = 78,5 mm^2

Medindo triângulos

Nesta seção, eu discuto como medir o perímetro e a área de todos os triângulos. Depois, mostro para você uma característica especial de triângulo retângulo que lhe permite medi-los mais facilmente.

Descobrindo o perímetro e a área de um triângulo

Os matemáticos não têm uma fórmula especial para descobrir o perímetro de um triângulo – eles somam apenas os comprimentos dos lados.

Para descobrir a área de um triângulo, você precisa saber o comprimento de um lado – a base (b para abreviação) – e a altura (h). Nota que a altura forma um ângulo reto com a base. A Figura 16-13 mostra um triângulo com uma base de 5 cm e uma altura de 2 cm:

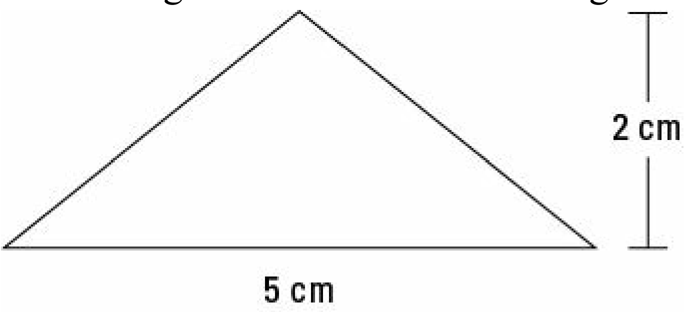


Figura 16-13: A base e a altura de um triângulo.

Aqui está a fórmula para a área de um triângulo: $A = \frac{1}{2}(b.h)$

Portanto aqui está como calcular a área de um triângulo com uma base de 5 cm e uma altura de 2 cm: $A = \frac{1}{2}(5cm\ .\ 2cm) = \frac{1}{2}(10cm^2) = 5cm^2$

Lições de Pitágoras: Descobrindo o terceiro lado de um triângulo retângulo

O lado longo de um triângulo retângulo c é chamado hipotenusa e os dois lados curtos (a e b) são chamados pernas (veja a Figura 16-14). A fórmula mais importante de um triângulo retângulo é o *Teorema de Pitágoras:*

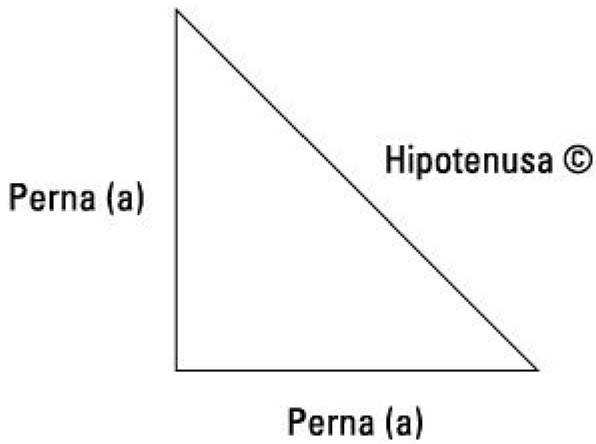


Figura 16-14: O hipotenusa e as pernas de um triângulo retângulo.

Esta fórmula permite-lhe descobrir a hipotenusa de um triângulo dado apenas os comprimentos das pernas. Por exemplo, imagine as pernas de um triângulo sejam 3 e 4 unidades. Aqui está como usar o teorema de Pitágoras para descobrir o comprimento da hipotenusa: $32 + 42 = c^2$

$9 + 16 = c^2$

$25 = c^2$

Portanto, quando você multiplica c por ele mesmo, o resultado é 25. Portanto: $c = 5$

O comprimento da hipotenusa é 5 unidades.

Medindo quadrados

A letra s representa o comprimento do lado de um quadrado. Por exemplo, se o lado de um quadrado é 3 polegadas, então você diz s = 3 polegadas. Descobrir o perímetro (P) de um quadrado é simples: multiplique apenas o comprimento do lado por 4. Aqui está a fórmula para o perímetro de um quadrado: $P = 4 \cdot s$

Por exemplo, se o comprimento do lado é 3 polegadas, substitui 3 polegadas por s na fórmula: $P = 4 \cdot 3$ pol. = 12 pol.

Descobrir a área de um quadrado é também fácil: multiplique apenas o comprimento do lado por ele mesmo – isto é, o quadrado do lado. Aqui estão dois caminhos para escrever a fórmula para a área de um quadrado (s2 é pronunciado ao quadrado): $A = s^2$ ou $A = s \cdot s$ Por exemplo, se o comprimento do lado é 3 polegadas, depois você tem o seguinte: A = (3 pol.)2 = 3 pol. · 3 pol. = 9 pol.^{2}

Trabalhando com retângulos

O lado longo de um retângulo é chamado comprimento ou c para abreviação. O lado curto é chamado largura ou l para abreviação. Por exemplo, em um retângulo cujos lados são 5 e 4 pés longos, c = 5 pés e l = 4 pés Como um retângulo tem dois comprimentos e duas larguras, você pode usar a fórmula longa para o perímetro de um retângulo: $P = 2 \cdot (c + l)$

Calcule o perímetro de um retângulo cujo comprimento é 5 jardas e cuja largura é 2 jardas como segue: P = 2 · (5 jardas + 4 jardas) = 2 · 9 jardas = 18 jardas A fórmula para a área de um retângulo é: A = c · l

Portanto, aqui está como você calcula a área do mesmo retângulo: A = 5 jardas · 4 jardas = 20 jardas^2

Calculando com losangos

Como no quadrado, use s para representar o comprimento do lado de um losango. Mas uma outra medida chave para um losango é sua altura. A altura de um losango (h para abreviação) é a distância mais curta de um lado para o lado oposto. Na figura 16-15, s = 4 cm e h = 2 cm.

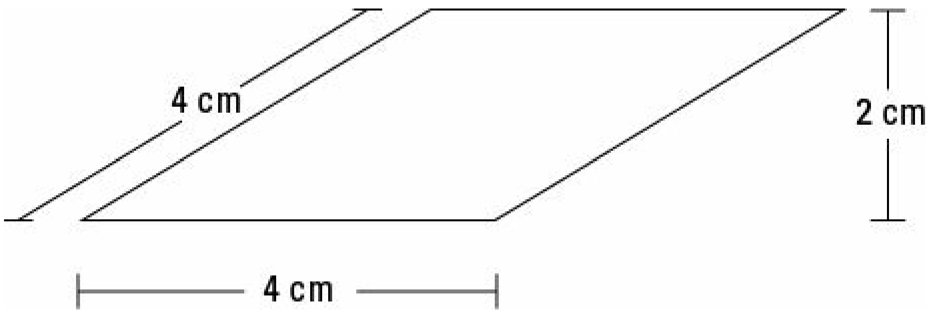


Figura 16-15: Medindo um losango.

A fórmula para o perímetro de um losango é a mesma para um quadrado: P = 4 · s

Aqui está como você calcula o perímetro de um losango cujo lado é 4 centímetros: P = 4 · 4 cm = 16 cm

Para medir a área de um losango, você precisa do comprimento do lado e da altura. Aqui está a fórmula: A = s · h

Portanto aqui está como você determina a área de um losango com um lado de 4 cm e uma altura de 2 cm: A = 4 cm · 2 cm = 8 cm^2

Você pode ler 8 cm2 de 8 centímetros quadrados ou como é mais comum 8 centímetros ao quadrado.

Medindo paralelogramos

Os lados superior e inferior de um paralelogramo são chamados sua base (b para abreviação) e os restantes dos dois lados são seus lados (s). E como nos losangos, uma outra medida importante de um paralelogramo é sua altura (h), a distância mais curta entre as bases. Portanto o paralelogramo na Figura 16-16 tem suas medidas: b = 6 polegadas, s = 3 polegadas e h = 2 polegadas.

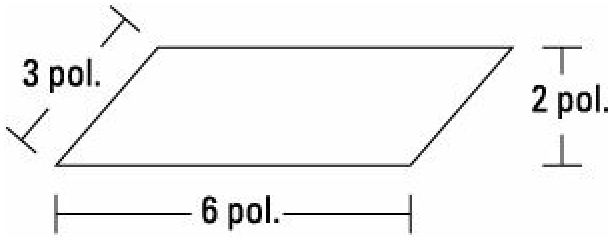


Figura 16-16: Medindo um paralelogramo.

Cada paralelogramo tem duas bases iguais e dois lados iguais. Portanto, aqui está a fórmula para o perímetro de um paralelogramo: $P = 2 \cdot (b + s)$

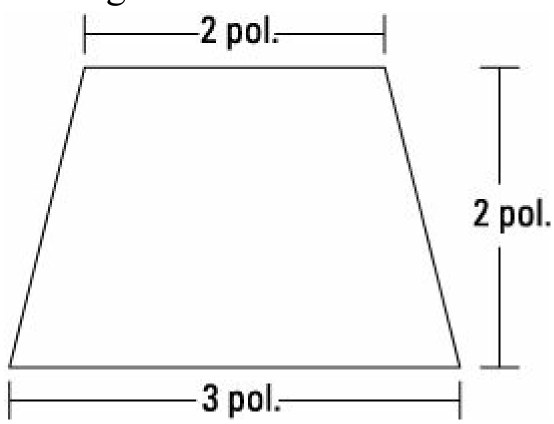
Para calcular o perímetro do paralelogramo nesta seção, substitua apenas as medidas para as bases e os lados: P = 2 (6 pol. + 3 pol.) = 2 · 9 pol. = 18 pol.

E aqui está a fórmula para a área de um paralelogramo: $A = b \cdot h$

Aqui está como você calcula a área do mesmo paralelogramo: A = 6 pol. · 2 pol. = 12 pol.^{2}

Medindo trapézios

Os lados paralelos de um trapézio são chamados suas bases. Como estas bases têm comprimentos diferentes, você pode chamá-los b1 e b2. A altura (h) de um trapézio é a distância mais curta entre as bases. Portanto, o trapézio na Figura 16-17 tem estas medidas:



b1 = 2 polegadas, b2 = 3 polegadas e h = 2 polegadas

Figura 16-17: Medindo um trapézio.

Como um trapézio pode ter lados de quatro comprimentos diferentes, de fato você não tem uma fórmula especial para descobrir o perímetro de um trapézio. Some apenas os comprimentos de seus lados, e você tem sua resposta.

Aqui está a fórmula para a área de um trapézio: $A = \frac{1}{2} \cdot (b_1 + b_2) \cdot h$

Portanto, aqui está como descobrir a área do trapézio representado:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \cdot (2pol. + 3pol.) \cdot 2pol. \\
&= \frac{1}{2} \cdot 5pol. \cdot 2pol. \\
&= \frac{1}{2} \cdot 10pol.^2 = 5pol.^2
\end{aligned}
$$

Nota: Por causa da propriedade associativa (veja Capítulo 4), posso multiplicar 5 polegadas. 2 polegadas antes de multiplicar por ½

Espaçando: Medindo em três dimensões

Em três dimensões, os conceitos de perímetro e de área devem ser um pouco ajustados.

Lembre-se que na forma 2D, o perímetro de uma forma é a medida de seu limite e a área de uma forma é a medida do que está por dentro da forma. Na forma 3D, o limite de um sólido é chamado a área da superfície o que está por dentro de um sólido é chamado seu volume.

A área da superfície de um sólido é uma medida da dimensão de sua superfície conforme medida nas unidades quadradas tais como as polegadas ao quadrado, os pés ao quadrado, os metros ao quadrado e assim por diante. O volume (V) de um sólido é uma medida do espaço que ele ocupa como medida em unidade de cubo tais como as polegadas ao cubo, os pés ao cubo, os metros ao cubo e assim por diante. (Para mais informações sobre medida vira para o Capítulo 15.) Você pode descobrir a área da superfície de um poliedro (sólido cujas faces são todas polígonos – veja antes na seção "As muitas faces dos poliedros") somando juntas as áreas de todas suas faces. As seções anteriores lhe dão algumas fórmulas de áreas. Na maioria dos casos, você não precisa conhecer a fórmula para descobrir a área da superfície de um sólido. (Para os nomes dos sólidos, veja a seção anterior intitulada " Viajar para uma Outra Dimensão: Geometria Sólida.") Descobrir o volume dos sólidos, entretanto, é alguma coisa que os matemáticos gostam que você conheça. Nas próximas seções, dou para você as fórmulas para descobrir os volumes de uma variedade de sólidos.

Esferas

O centro de uma esfera é um ponto que é a mesma distância de qualquer ponto da esfera ela mesma. Esta distância é chamada o raio r da esfera. Se você conhecer o raio de uma esfera, você pode descobrir seu volume usando a seguinte fórmula: $V = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^3$

Como esta fórmula inclui π usando 3,14 como um valor aproximado para π lhe dá um volume aproximado. Por exemplo, aqui está como calcular o volume aproximado de uma bola cujo raio é 4 polegadas:

$$
\begin{aligned}
V &\approx \frac{3}{4}\cdot 3.14\cdot(4pol.)^3\\
&= \frac{4}{3}\cdot 3.14\cdot 64pol.^3\\
&\approx 4.19\cdot 64pol.^3\\
&= 268.16pol.^3
\end{aligned}
$$

Cubos

A medida principal de um cubo é o comprimento de seu lado (s). Usando esta medida, você pode descobrir o volume de um cubo usando a seguinte fórmula: $V = s^3$

Portanto, se o lado de um cubo é 5 metros, aqui está como você calcula seu volume: $V = (5\ m)^3 = 5\ m \cdot 5\ m \cdot 5\ m = 125\ m^3$

Você pode ler 125 metros ao cubo ou 125 metros cúbicos.

Caixa (Retângulos sólidos)

As três medidas de um box (ou retângulo sólido) são seu comprimento (c), largura (l) e altura (h). A caixa representada na Figura 16-18 tem as seguintes medidas: c = 4 m, l = 3 m e h = 2m.

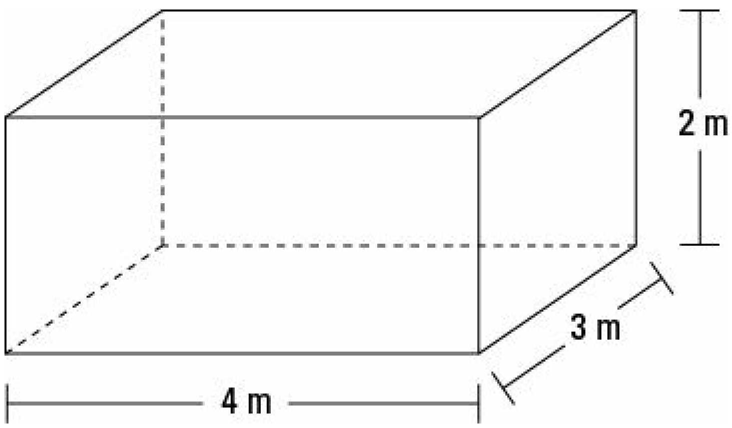


Figura 16-18: Medindo uma caixa.

Você pode descobrir o volume de uma caixa usando a seguinte fórmula: $V = c \cdot l \cdot h$

Portanto, aqui está como descobrir o volume da caixa representada nesta seção: $V = 4\ m \cdot 3\ m \cdot 2\ m = 24\ m^3$

Prismas

Descobrir o volume de um prisma (veja prismas na Figura 16-7) é fácil se você tiver duas medidas. Uma medida é a altura (h) do prisma. O segundo é a área da base (Ah). A base é o polígono que se estende verticalmente do plano. (Em “Forma 2D: Medindo o plano” antes, mostro para você como descobrir a área de uma variedade de formas.) Aqui está a fórmula para descobrir o volume de um prisma: $V = A_b \cdot h$ Por exemplo, imagine que um prisma tem uma base com uma área de 5 centímetros quadrados e uma altura de 3 centímetros. Aqui está como você descobre seu volume: $V = 5\ cm^2 \cdot 3\ cm = 15\ cm^3$

Note que as unidades das medidas (cm quadrado e cm) são também multiplicados, dando a você um resultado de cm quadrado.

Cilindros

Você descobre o volume de cilindros da mesma forma que você descobre a área de prismas – multiplicando a área da base (Ab) pela altura do cilindro (h): $V = A_b \cdot h$ Imagine que você queira descobrir o volume de uma lata cilíndrica cuja altura é 4 polegadas e cuja base é um círculo com um raio de 2 polegadas. Primeiro, descobra a área da base usando a fórmula para a área de um círculo:

$$\begin{aligned} A_b &= \pi \cdot r^2 \\ &\approx 3.14 \cdot (2pol.)^2 \\ &= 3.14 \cdot 4pol.^2 \\ &= 12.56pol.^2 \end{aligned}$$

Esta área é aproximada porque uso 3,14 como um valor aproximado para π. (Nota: No problema anterior, uso sinais iguais quando um valor é igual ao que vem antes dele e sinais de aproximadamente igual (≈) quando eu arredondo.) Agora, uso esta área para descobrir o volume de um cilindro: $V = 12{,}56\ pol.^2 \cdot 4\ pol. = 50{,}\ 24\ pol.^3$

Note como multiplicar (polegadas ao quadrado) por polegadas dá um resultado em (polegadas ao cubo).

Pirâmides e cones

As duas medidas chaves para as pirâmides e os cones são iguais àquelas para os prismas e os cilindros (veja as seções anteriores): a altura (h) e a área da base (Ab). Aqui está a fórmula para o volume de uma pirâmide ou de um cone: $V = \frac{1}{3}(A_b \cdot h)$

Por exemplo, imagine que você queira descobrir o volume de um cone de sorvete cuja altura é 4 polegadas e cuja área da base é 3 polegadas ao quadrado. Aqui está como você faz isso:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}(3pol.^2 \cdot 4pol.) \\ &= \frac{1}{3}(12pol.^3) \\ &= 4pol.^3 \end{aligned}$$

Do mesmo modo, imagine que você queira descobrir o volume de uma pirâmide no Egito cuja altura é 60 metros com uma base quadrada cujos lados são 50 metros cada. Primeiro, descobra a área da base usando a fórmula para a área de um quadrado a partir da seção anterior “Forma 2D: Medindo o plano,” neste capítulo.

$$A_b = s^2 = (50\ m^2) = 2500\ m^2$$

Agora, use esta área para descobrir o volume da pirâmide:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\left(2.500m^2 \cdot 60m\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(150.000m^3\right) \\ &= 50.000m^3 \end{aligned}$$

Capítulo 17

Ver é Acreditar: Criar o Gráfico como uma Ferramenta Visual

Neste Capítulo* ► *Lendo histogramas, gráficos de setores e gráficos de linha* ► *Entendendo o sistema de coordenadas cartesiano* ► *Traçando pontos e linhas em um gráfico* ► *Resolvendo os problemas usando um gráfico

Um gráfico é uma ferramenta visual para organizar e apresentar informações sobre números. A maioria dos estudantes acha os gráficos relativamente fáceis porque eles fornecem uma figura para se trabalhar ao invés de apenas um punhado de números. A simplicidade destaca os gráficos nos jornais, nas revistas, nos relatórios financeiros e em algum lugar uma comunicação visual clara é importante.

Neste capítulo, apresento para você três estilos de gráficos comuns: o histograma, o gráfico de setores e o gráfico de linha. Mostro para você como ler cada um destes estilos de gráficos para obter informação. Mostro para você também como responder aos tipos de perguntas que as pessoas podem fazer para verificar sua compreensão.

Passo o restante do capítulo concentrando-me no tipo de gráfico matemático mais importante: o sistema de coordenadas cartesiano. Este sistema é tão comum que quando o povo da matemática fala de um gráfico, geralmente ele fala deste tipo. Mostro para você as várias partes do gráfico e, depois, mostro para você como traçar pontos e linhas. No final do capítulo, você observa como pode resolver os problemas matemáticos usando um gráfico.

Observando Três Estilos Importantes de Gráfico

Nesta seção, mostro para você como ler e entender três estilos de gráficos: o histograma, o gráfico de setores e o gráfico de linha. Eles não são os únicos tipos de gráficos, mas são muito comuns e entendê-los pode lhe dar uma etapa lendo os outros tipos de gráficos quando você os observa.

Cada um destes estilos de gráficos tem uma função específica: ✓O histograma é melhor por representar números que são independentes uns dos outros.

✓ O gráfico de setores permite-lhe mostrar como um todo é cortado em partes.

✓ O gráfico de linha lhe dá um sentido sobre como os números mudam além do tempo.

Histograma

Um histograma lhe dá uma forma fácil para comparar os números e os valores. Por exemplo, a Figura 17-1 mostra um histograma comparando a performance de cinco treinadores em um centro de aptidão.

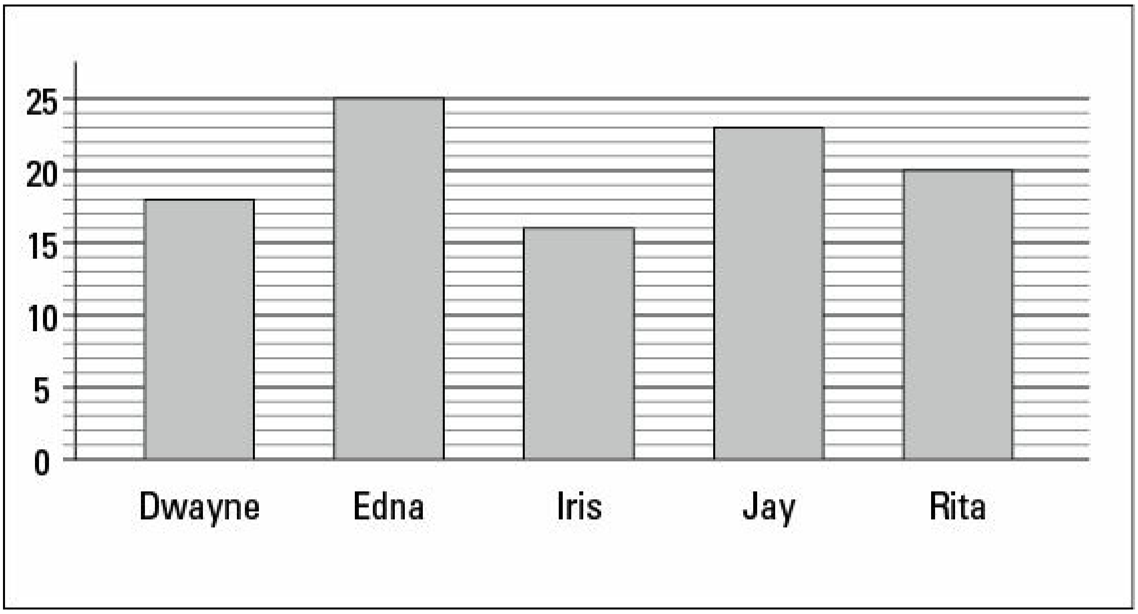


Figura 17-1: O número de clientes registrados neste trimestre.

Como você pode observar a partir da legenda, o gráfico mostra quantos novos clientes cada treinador matriculou neste trimestre. A vantagem de tal gráfico é que você pode observar, por exemplo, que Edna tem a maioria dos novos clientes e Iris tem menos clientes. O histograma é uma boa forma de representar números que são independentes uns aos outros. Por exemplo, se Iris tiver um outro novo cliente, isso não afeta necessariamente qualquer outra performance de treinador.

Ler um histograma é fácil depois de você se acostumar com ele. Aqui estão poucos tipos de perguntas que alguém poderia fazer sobre o histograma da Figura 17-1: ✓**Valores individuais:** Quantos novos clientes Jay tem? Descubra o histograma representando os clientes de Jay e note que ele tem 23 novos clientes.

✓ **Diferenças no valor:** Quantos clientes a mais Rita tem em comparação ao Dwayne? Note que Rita tem 20 novos clientes e Dwayne tem 18, portanto ela tem 2 clientes a mais do que ele.

✓ **Total:** Juntas, quantos clientes as três mulheres têm? Note que as três mulheres – Edna, Iris e Rita – têm 25, 16 e 20 novos clientes, respectivamente, portanto elas têm 61 novos clientes no geral.

Gráfico de setores

Um gráfico de setores que parece com um círculo dividido mostra para você como um objeto inteiro é cortado em partes. Os gráficos de setores são usados, muitas vezes, para representar as porcentagens. Por exemplo, a Figura 17-2 é um gráfico de setores representando as despesas mensais de Eileen.

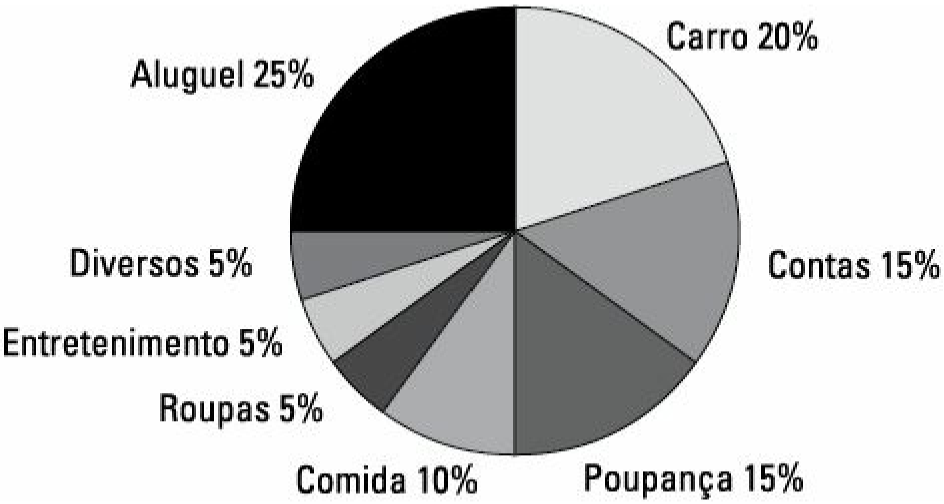


Figura 17-2: Despesas mensais da Eileen.

Você pode dizer ao observar que a maior despesa da Eileen é o aluguel e a segunda maior despesa é o carro dela. Diferentemente do histograma, o gráfico de setores mostra números que são dependentes uns aos outros. Por exemplo, se o aluguel da Eileen aumentar para 30 % da sua renda mensal, ela terá que reduzir sua despesa em, pelo menos, uma área.

Aqui estão poucas perguntas típicas que você pode ter feito sobre um gráfico de setores: ✓ **Porcentagens individuais:** Qual é a porcentagem de suas despesas mensais que Eileen gasta com comida? Descubra o pedaço que representa o que Eileen gasta com comida e note que ela gasta 10 % de sua renda ali.

✓ **Diferenças nas porcentagens:** Qual é a porcentagem a mais ela gasta no seu carro do que no entretenimento? Eileen gasta 20 % no seu carro, mas apenas 5 % no entretenimento, portanto a diferença entre estas porcentagens é 15 %.

✓ **Quanto uma porcentagem representa em termos de dólares:** Se Eileen trouxer para casa $ 2.000 por mês. Quanto ela poupa a cada mês? Primeiro note que Eileen coloca 15 % todo mês na poupança. Portanto você precisa calcular 15 % de $ 2.000. Usando suas habilidades do Capítulo 12, resolva este problema tornando 15 % em um decimal e multiplicando: $0{,}15 \cdot 2000 = 300$

Portanto Eileen poupa $ 300 todo mês.

Gráfico de linha

O uso mais comum de um gráfico de linha é traçar quantos números mudam além do tempo. Por exemplo, a Figura 17-3 é um gráfico de linha mostrando os cálculos das vendas do ano passado da Tami.

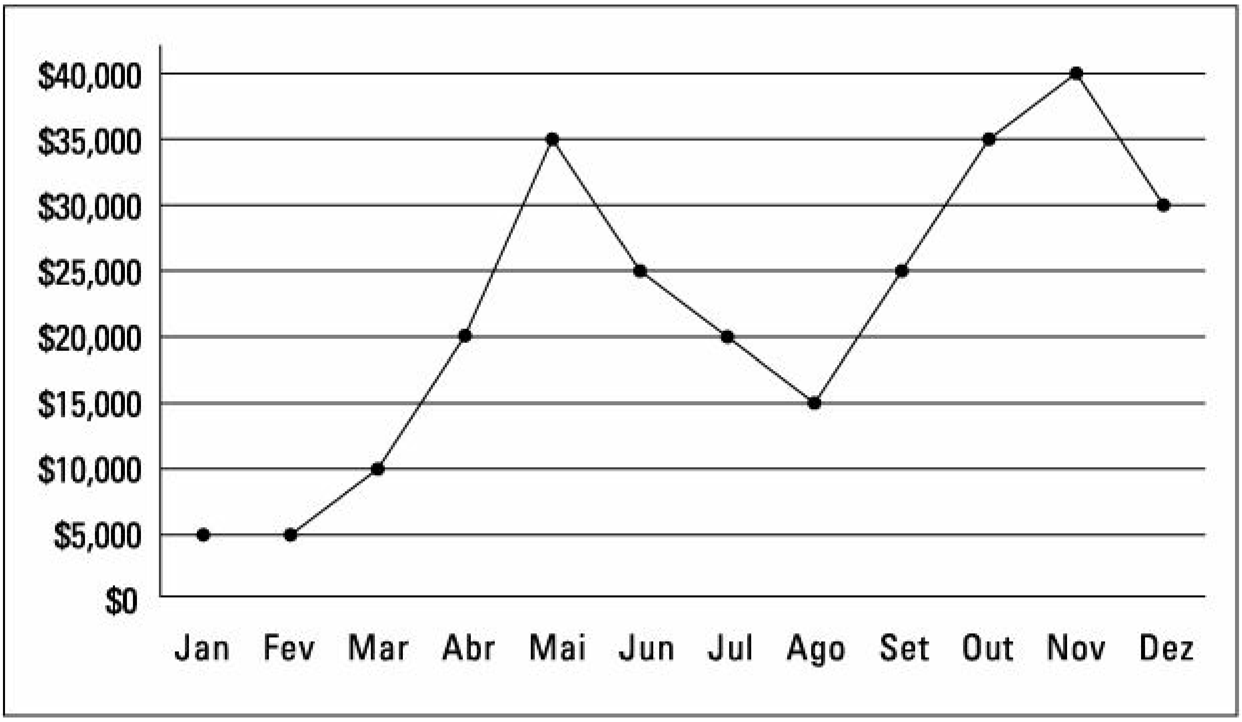


Figura 17-3: Receitas brutas da Tami.

O gráfico de linha mostra uma progressão no tempo. Em uma olhada, você pode dizer que o negócio da Tami teve tendência de crescer fortemente no início do ano, diminui durante o verão, cresce de novo no outono e, depois, diminui em Dezembro.

Aqui estão poucas perguntas típicas que você pode ter feito para mostrar que você sabe como ler um gráfico de linha.

✓ **Pontos baixos e altos e cronometragem:** Em que mês Tami lucrou mais na receita e quanto ela lucrou? Note que o ponto mais alto no gráfico é Novembro, quando a receita da Tami alcançou $ 40.000.

✓ **Total sobre um período de tempo:** Quanto ela lucrou, no geral, no último trimestre do ano? Um trimestre de um ano são três meses, portanto o último trimestre são os três últimos meses do ano. Tami lucrou $ 35.000 em Outubro, $ 40.000 em Novembro e $ 30.000 em Dezembro, portanto suas receitas totais para o último trimestre são $ 105.000.

✓ **Ótima mudança:** Em que mês o negócio mostrou o ótimo ganho em receita em comparação com o mês anterior? Você quer descobrir o segmento da linha no gráfico que tem a inclinação ascendente mais alta. Esta mudança ocorre entre Abril e Maio, onde a receita da Tami aumentou em $ 15.000, portanto seu negócio mostrou o ótimo ganho em Maio.

Sistema de Coordenadas Cartesiano

Quando o povo da matemática fala em usar um gráfico, em geral ele está se referindo ao gráfico cartesiano (chamado também o sistema de coordenadas cartesiano), como mostrado na Figura 17-4. No Capítulo 25, digo para você porque acredito que este gráfico é uma das dez invenções matemáticas mais importantes de todos os tempos. Você vê muito neste gráfico quando você estuda a álgebra, portanto familiarizar-se com isso agora é uma boa ideia.

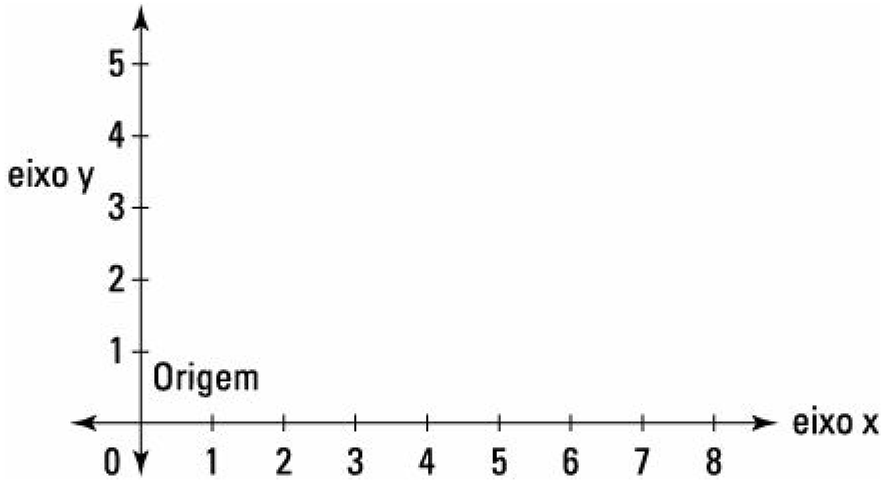


Figura 17-4: Um gráfico cartesiano inclui eixos horizontal e vertical que se cruzam na origem (0,0).

LEMBRE-SE Um gráfico cartesiano é de fato apenas duas retas numeradas que se cruzam em 0. Estas retas numeradas são chamadas o eixo horizontal (chamado também o eixo x) e o eixo vertical (chamado também eixo y). O lugar onde estes dois eixos se cruzam é chamado a origem.

Traçando pontos em um gráfico cartesiano

Traçando um ponto (descobrindo e marcando sua localização) em um gráfico não é muito mais difícil do que descobrir um ponto em uma reta numerada porque um gráfico são apenas duas retas numeradas colocadas juntas. (Vá ao Capítulo 1 para mais detalhes sobre a reta numerada.) LEMBRE-SE Todo ponto em um gráfico cartesiano é representado por dois números entre parênteses, separados por uma vírgula chamada conjunto de coordenadas. Para traçar qualquer ponto, comece na origem onde os dois eixos se cruzam. O primeiro número lhe diz quanto você deve ir para a direita (se positivo) ou a esquerda (se negativo) ao longo do eixo horizontal. O segundo número lhe diz quanto longe você sobe (se positivo) ou desce (se negativo) ao longo do eixo vertical.

Por exemplo, aqui estão as coordenadas dos quatro pontos chamados A, B, C e D:

A = (2, 3)   B = (–4, 1)   C = (0, –5)   D = (6, 0)

A Figura 17-5 descreve um gráfico com estes quatro pontos traçados. Comece na origem (0, 0). Para traçar o ponto A, conte dois 2 espaços à direita e 3 espaços para cima. Para traçar o ponto B, conte 4 espaços para esquerda (a direção negativa) e, depois, 1 espaço para cima. Para traçar o ponto C, conte 0 espaço para esquerda ou direita e, depois, conte 5 espaços para baixo (direção negativa). E para traçar o ponto D, conte 6 espaços para a direita e, depois, 0 espaço para cima ou para baixo.

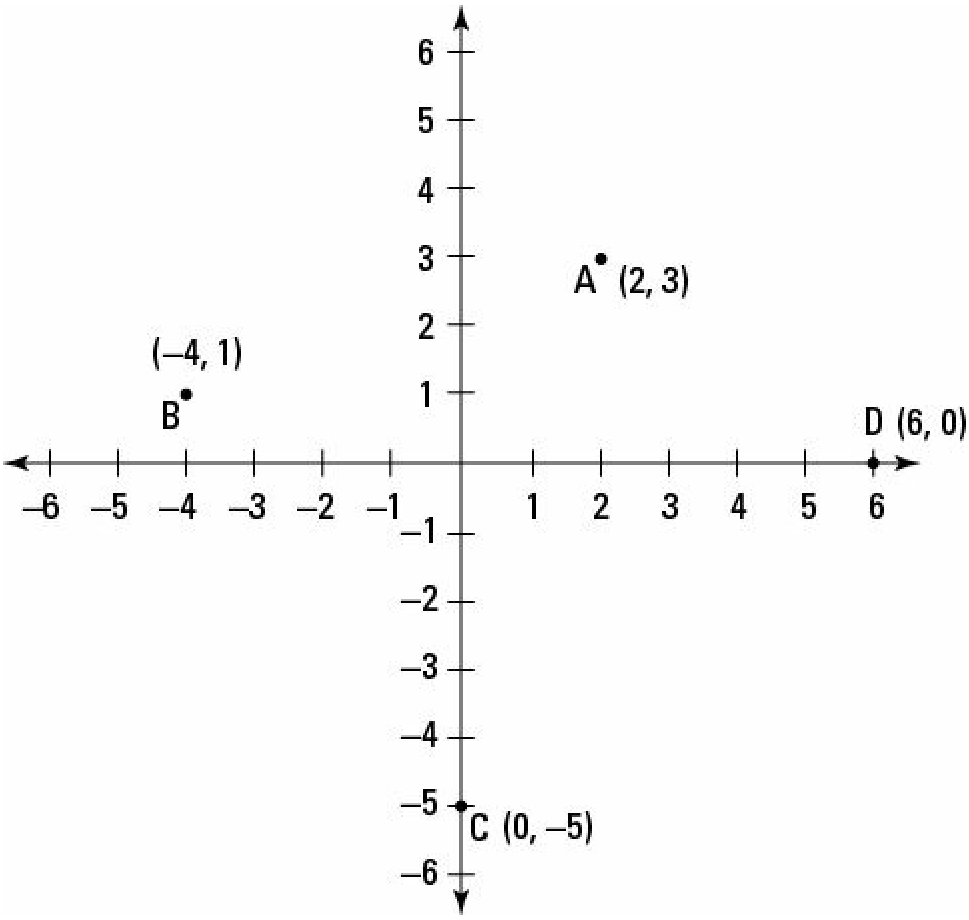


Figura 17-5: Pontos A, B, C e D traçados em um gráfico cartesiano.

Desenhando linhas no gráfico Cartesiano

Depois de entender como traçar pontos em um gráfico (veja a seção anterior), você pode começar a traçar linhas e usá-las para mostrar as relações matemáticas.

Os exemplos nesta seção concentram-se no número de dólares que as duas pessoas Xenia e Yanni estão usando. O eixo horizontal representa o dinheiro da Xenia e o eixo vertical representa o dinheiro da Yanni. Por exemplo, imagine que você queira desenhar uma linha representando esta expressão: Xenia tem $1 a mais que Yanni.

Para fazer isso, faça um gráfico como segue:

Xenia	1	2	3	4	5
Yanni					

Agora preencha cada coluna do gráfico supondo que Xenia tenha aquele número de dólares. Por exemplo, se Xenia tiver $ 1 então Yanni terá $ 0. E se Xenia tiver $ 2 então Yanni terá $ 1. Continua até que seu gráfico pareça com o seguinte:

Xenia	1	2	3	4	5
Yanni	0	1	2	3	4

Agora você tem cinco pares de ponto que você pode traçar seu gráfico como (Xenia, Yanni): (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3) e (5, 4). Depois, desenhe uma linha reta através destes pontos como mostrado na Figura 17-6.

A linha no gráfico representa todo par de quantias possível para Xenia e Yanni. Por exemplo, nota como o ponto (6, 5) está na linha. Este ponto representa a possibilidade de que Xenia tem $ 6 e Yanni tem $ 5.

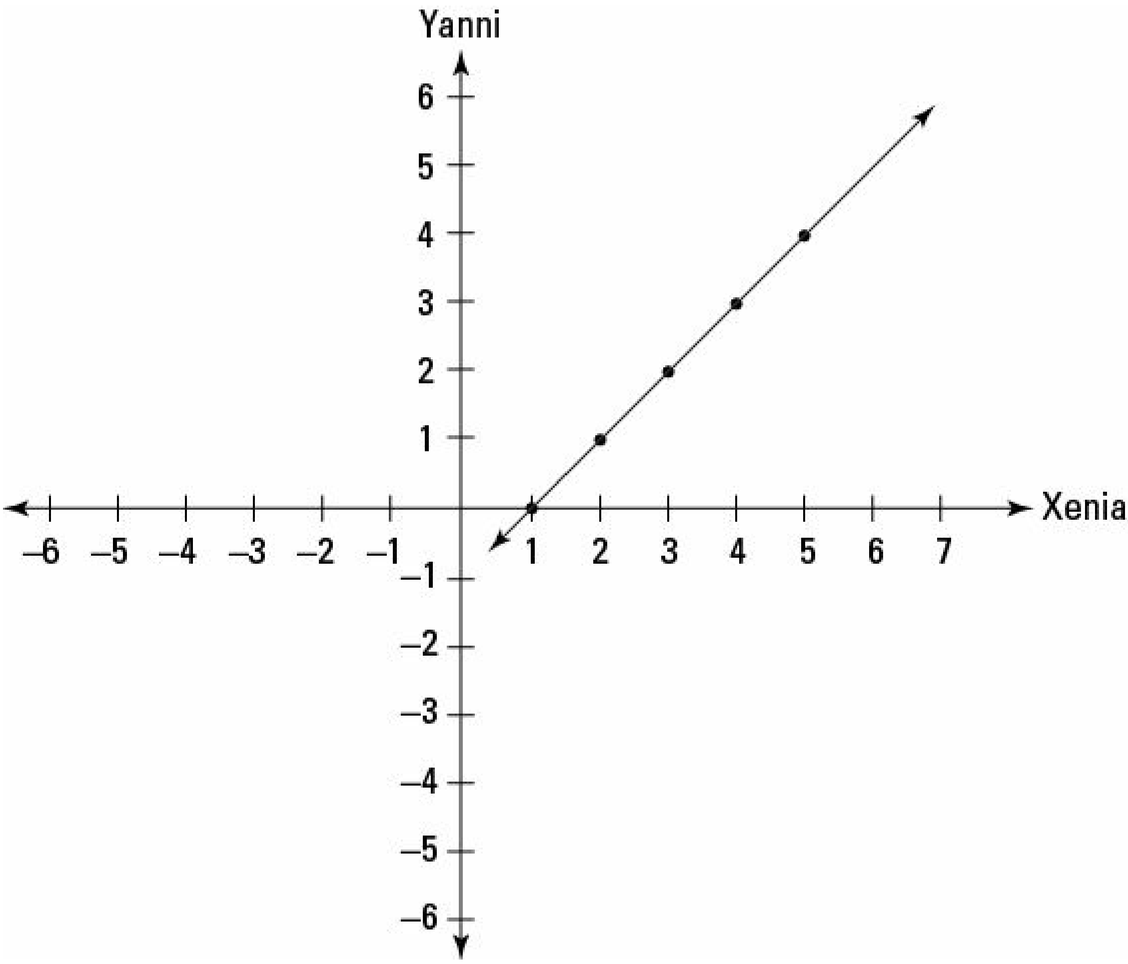


Figura 17-6: Todos os valores possíveis do dinheiro da Xenia e da Yanni se Xenia tiver $ 1 mais que Yanni.

Aqui está um exemplo levemente mais complicado: Yanni tem $ 3 mais duas vezes a quantia que Xenia tem.

De novo, comece a criar o gráfico comum:

Xenia	1	2	3	4	5
Yanni					

Você pode preencher este gráfico supondo que Xenia tem uma certa quantia e depois calcular quanto Yanni teria naquele caso. Por exemplo, se Xenia tiver $ 1, então duas vezes aquela quantia é $ 2, portanto Yanni tem $ 3 mais aquela quantia, ou seja $ 5. e se Xenia tiver $ 2, então duas vezes aquela quantia é $ 4, portanto Yanni tem $ 3 mais aquela quantia, ou seja $ 7. Continua daquela forma para preencher o gráfico como segue:

Xenia	1	2	3	4	5
Yanni	5	7	9	11	13

Agora, trace estes cinco pontos no gráfico e desenhe uma linha através deles como na Figura 17-7.

Como nos outros exemplos, este gráfico representa todos os valores possíveis que Xenia e Yanni poderiam ter. Por exemplo, se Xenia tiver $ 7, Yanni terá $ 17.

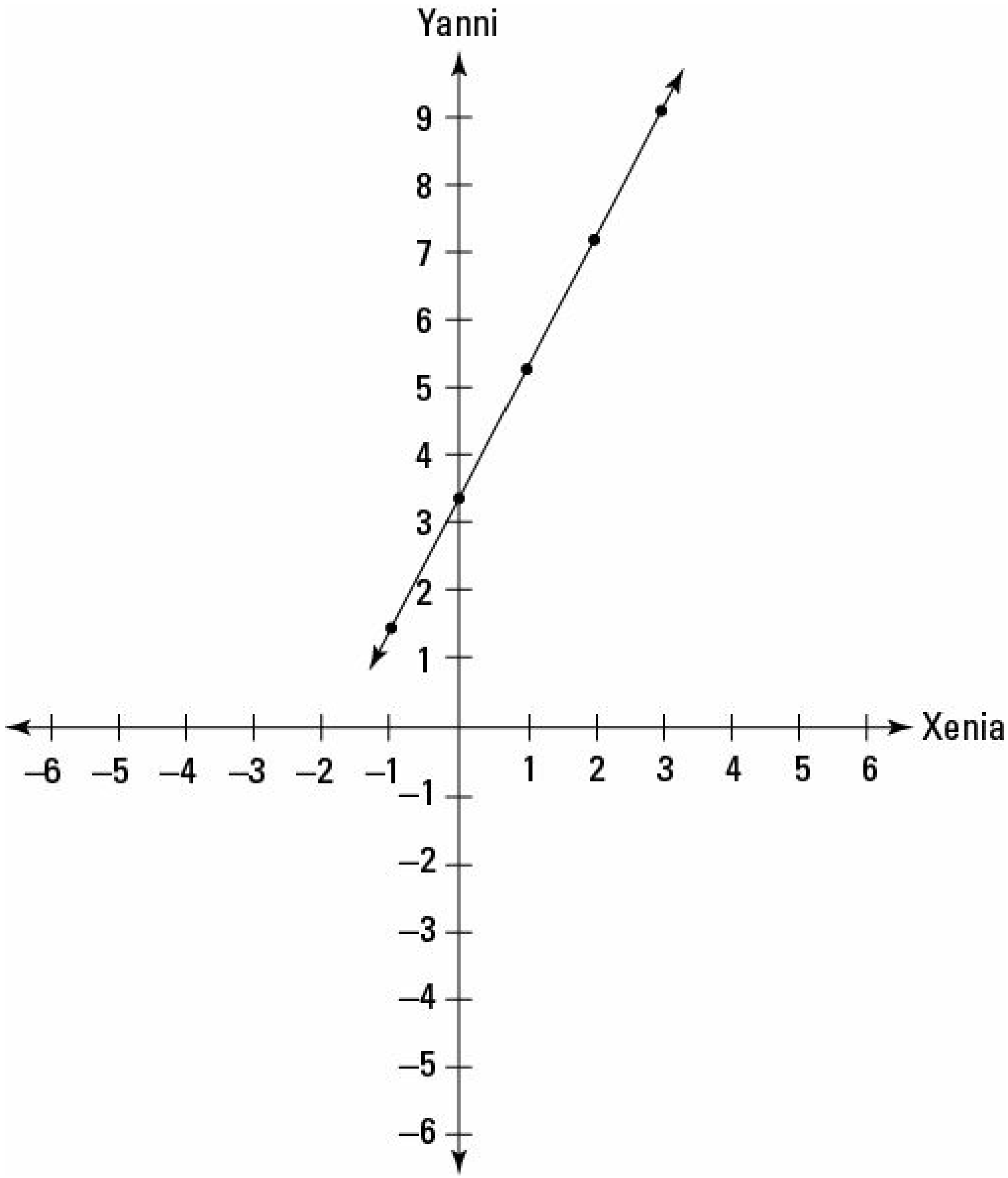


Figura 17-7: Todos os valores possíveis do dinheiro da Xenia e da Yanni se Yanni tiver $ 3 mais duas vezes a quantia que Xenia tem.

Resolvendo os problemas com um gráfico Cartesiano

Depois de entender como traçar pontos e desenhar linhas, você pode usar um gráfico para resolver alguns tipos de problemas matemáticos. Quando você desenha duas linhas que representam diferentes partes de um problema de palavras, então o ponto no qual as linhas se cruzam é sua resposta.

Aqui está um exemplo: Jacob é cinco anos mais velho do que Marnie, de fato, e, juntos, suas idades somam 15. Quantos anos eles têm?

Para resolver este problema, primeiro crie um gráfico para mostrar que Jacob é 5 anos mais velho do que Marnie.

Jacob	1	2	3	4	5
Marnie	6	7	8	9	10

Então, crie um outro gráfico para mostrar que, juntas, as somas das idades das duas crianças é igual a 15:

Jacob	1	2	3	4	5
Marnie	14	13	12	11	10

Por fim, trace as duas linhas em um gráfico (veja Figura 17-8) onde o eixo horizontal representa a idade do Jacob e o eixo vertical representa a idade da Marnie. Note que as duas linhas se cruzam-se no ponto em que Jacob tem 5 anos e Marnie tem 10 anos mais velha, portanto estas são as idades das duas crianças.

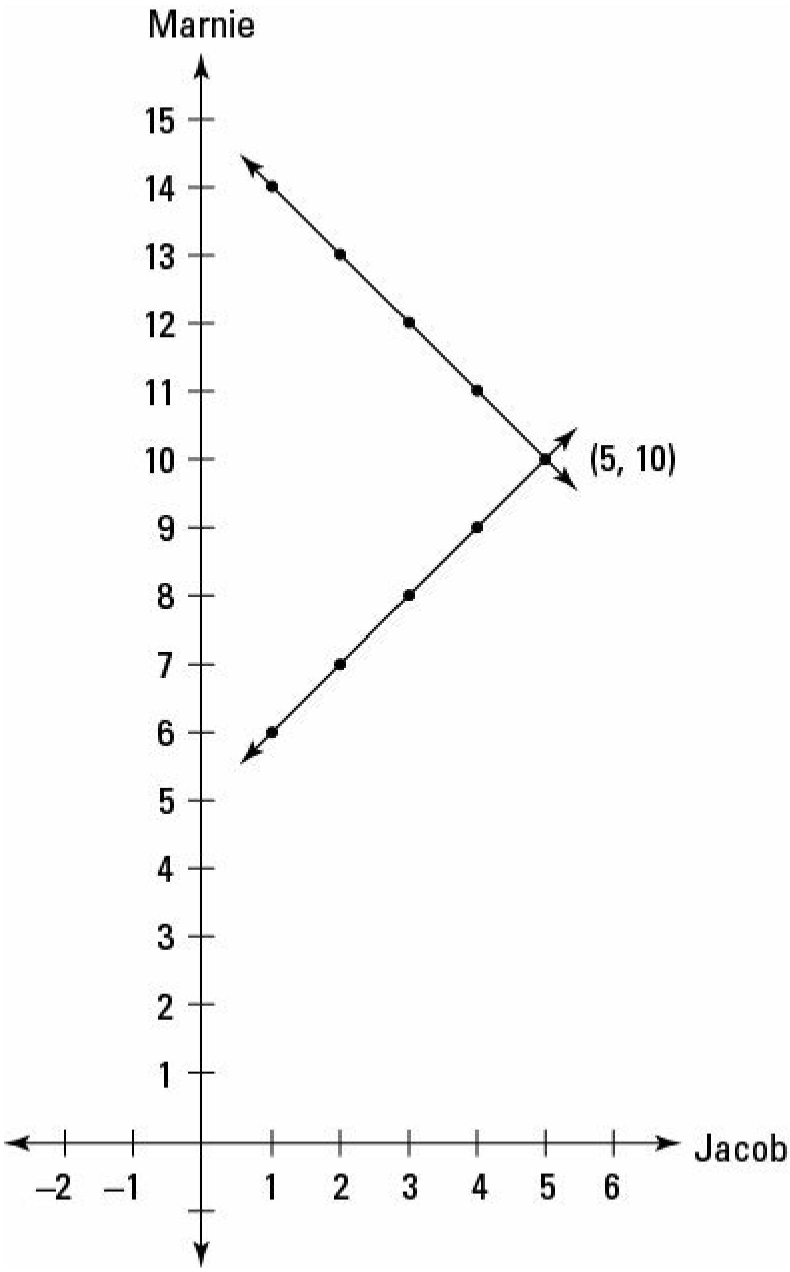


Figura 17-8: As duas linhas traçadas em um gráfico.

Capítulo 18

Resolvendo a Geometria e a Medida dos Problemas de Palavras

Neste Capítulo* ► *Resolvendo a medida dos problemas usando as cadeias de conversão* ► *Usando uma figura para resolver os problemas da geometria

Neste capítulo, concentro-me em dois tipos importantes de problemas de palavras: medida de problemas e os problemas da geometria. Em um problema de palavras envolvendo medida, muitas vezes você é perguntado para realizar uma conversão de um tipo de unidade para o outro. Às vezes você não tem a equação de uma conversão para resolver este tipo de problema diretamente, portanto você precisa colocar uma cadeia de conversão que discuto em detalhes no capítulo.

Um outro tipo comum de problema de palavras pede as fórmulas geométricas que forneço no Capítulo 16. Às vezes, um problema de palavras da geometria lhe dá uma figura para trabalhar. Em outros casos, você deve desenhar a figura lendo o problema cuidadosamente. Aqui, ofereço para você a prática fazendo os dois tipos de problemas.

Cadeia em linha: Resolvendo os Problemas de Medida com Cadeias de Conversão

No Capítulo 15, dou para você um conjunto de conversão de equações básicas para converter as unidades de medida. Mostro para você também como transforma estas equações em fatores de conversão – frações que você pode usar para converter as unidades. Esta informação é útil tanto quanto ela é dada, mas você pode não ter sempre uma equação para a exata conversão que você quer realizar. Por exemplo, como você converte anos em segundos?

Para os problemas de conversão mais complexos, uma boa ferramenta é a cadeia de conversão. Uma cadeia de conversão une uma sequência de conversões de unidade.

Estabelecendo uma cadeia curta

Aqui está um problema que lhe mostra como colocar uma cadeia de conversão curta para criar uma conversão cuja equação específica não será descoberta para: Os vendedores no Festival de Morango em Fragola Country venderam 7 toneladas de morangos em um única semana. Quantas porções de morangos têm em uma onça?

Você não tem uma equação para converter toneladas diretamente em onças. Mas você tem uma para converter toneladas em libras e uma outra para converter libras em onças. Você pode usar estas equações para construir uma ponte de uma unidade para a outra: toneladas → libras → onças Portanto, aqui estão duas equações que você vai querer usar: 1 tonelada = 2000 libras 1 libra = 16 onças Para converter toneladas em libras, note que estas frações são iguais a 1, porque o numerador (número na parte superior) é igual ao denominador (número na parte inferior): $\frac{1 \text{ tonelada}}{2.000 \text{ libras}}$ ou $\frac{2.000 \text{ libras}}{1 \text{ tonelada}}$

Para converter libras em onças, note que estas frações são iguais a 1:

$$\frac{1 \text{ libra}}{16 \text{ onças}} \quad \text{ou} \quad \frac{16 \text{ onças}}{1 \text{ libra}}$$

Você poderia fazer esta conversão em dois passos. Mas quando você sabe a ideia básica, você coloca uma cadeia de conversão em substituição. Para ajudar a tornar clara esta ideia, dê uma olhada sobre como converter toneladas em onças: toneladas → libras → onças Portanto, aqui está como colocar uma cadeia de conversão para tornar 7 toneladas em libras e, depois, em onças. Como você já tem toneladas na parte superior, você quer a fração de toneladas e libras que coloca tonelada na parte inferior. E como aquela fração coloca libras na parte superior, use a fração de libras e onças que coloca libra na parte inferior.

$$\frac{7 \text{ toneladas}}{1} \cdot \frac{2.000 \text{ libras}}{1 \text{ tonelada}} \cdot \frac{16 \text{ onças}}{1 \text{ libra}}$$

O último efeito aqui é pegar a expressão 7 toneladas e multiplicá-la duas vezes por 1, o que não muda o valor da expressão. Mas agora você pode cancelar todas as unidades de medida que aparecem no numerador de uma fração e o denominador da outra:

$$\frac{7 \cancel{\text{toneladas}}}{1} \cdot \frac{2.000 \cancel{\text{libras}}}{1 \cancel{\text{tonelada}}} \cdot \frac{16 \text{ onças}}{1 \cancel{\text{libra}}}$$

Se as unidades não se cancelam completamente, provavelmente você cometeu um erro quando você coloca a cadeia. Vire o numerador e o denominador de uma ou mais frações até que as unidades cancelem o modo que você as quer.

Agora você pode simplificar a expressão: $= 7 \cdot 2000 \cdot 16$ onças Uma cadeia de conversão não muda o valor da expressão, apenas as unidades de medida.

Trabalhando com mais pontos

Depois de você entender a ideia básica de uma cadeia de conversão, você pode criar uma cadeia enquanto você gosta de resolver facilmente problemas mais longos. Aqui está um outro exemplo de um problema que usa uma cadeia de conversão relacionada ao tempo.

> Jane tem exatamente 12 anos hoje. Você esqueceu de dar para ela um presente, mas você decide lhe oferecer suas habilidades matemáticas como o maior presente – você irá recalcular quantos anos ela tem. Supondo que um ano tem exatamente 365 dias, quantos segundos de vida ela tem?

Aqui está a conversão das equações com que você deve trabalhar: 1 ano = 365 dias 1 dia = 24 horas 1 hora = 60 minutos 1 minuto = 60 segundos Para resolver este problema, você precisa construir uma ponte dos anos para os segundos, como segue: anos → dias → horas → minutos → segundos Portanto, coloque uma longa cadeia de conversão, como segue:

$$\frac{12\text{ anos}}{1}\cdot\frac{365\text{ dias}}{1\text{ ano}}\cdot\frac{24\text{ horas}}{1\text{ dia}}\cdot\frac{60\text{ minutos}}{1\text{ hora}}\cdot\frac{60\text{ segundos}}{1\text{ minuto}}$$

Cancele todas as unidades que aparecem num numerador e num denominador:

$$\frac{12\ \cancel{\text{anos}}}{1}\cdot\frac{365\ \cancel{\text{dias}}}{1\ \cancel{\text{ano}}}\cdot\frac{24\ \cancel{\text{horas}}}{1\ \cancel{\text{dia}}}\cdot\frac{60\ \cancel{\text{minutos}}}{1\ \cancel{\text{hora}}}\cdot\frac{60\text{ segundos}}{1\ \cancel{\text{minuto}}}$$

Como você cancela as unidades, note que existe um modelo diagonal: o numerador (número da parte superior) de uma fração cancela o denominador (número da parte inferior) da próxima fração e assim por diante: Quando esvazia a fumaça, aqui está o que sobrou: = 12 · 365 · 24 · 60 · 60 s Este problema exige um pouco de multiplicação, mas o trabalho não é mais confuso: = 378.432.000 s A cadeia de conversão de 12 anos para 378.432.000 segundos não muda o valor da expressão, apenas a unidade de medida.

Tirando equações do texto

Em alguns problemas de palavras, o mesmo problema lhe dá uma dupla conversão das equações necessárias para resolver. Pegue por exemplo, este problema: Um furlong é um 1/8 de milha e uma braça é igual a 2 jardas. Se eu montasse meu cavalo hoje por 24 furlongs, em quantas braças eu montaria meu cavalo?

Este problema lhe dá duas novas conversões de equações com que trabalhar: 1 furlong = 1/8 de milha 1 braça = 2 jardas É útil remover as frações das equações antes de você começar, portanto aqui está uma versão mais importante da primeira equação: 8 furlongs = 1 milha Você quer se lembrar também das duas outras conversões: 1 milha = 5280 pés 3 pés = 1 jarda Depois, construa uma ponte dos furlongs para as milhas usando as conversões que estão disponíveis a partir destas equações: furlongs → milhas → pés → jardas → braças Agora, você pode formar sua cadeia de conversão. Toda unidade que você quer cancelar deve aparecer uma vez no numerador e uma vez no denominador:

$$\frac{24 \text{ furlongs}}{1} \cdot \frac{1 \text{ milha}}{8 \text{ furlongs}} \cdot \frac{5.280 \text{ pés}}{1 \text{ milha}} \cdot \frac{1 \text{ jarda}}{3 \text{ pés}} \cdot \frac{1 \text{ braça}}{2 \text{ jardas}}$$

Depois, você pode cancelar todas as unidades com exceção as braças:

$$\frac{24 \cancel{\text{furlongs}}}{1} \cdot \frac{1 \cancel{\text{milha}}}{8 \cancel{\text{furlongs}}} \cdot \frac{5.280 \cancel{\text{pés}}}{1 \cancel{\text{milha}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{jarda}}}{3 \cancel{\text{pés}}} \cdot \frac{1 \text{ braça}}{2 \cancel{\text{jardas}}}$$

Um outro modo para você tornar mais fácil o problema é notar que o número 24 está no numerador e 3 e 8 estão no denominador. Evidentemente, 3 · 8 = 24, portanto você pode cancelar todos estes três números:

$$\frac{\cancel{24 \text{ furlongs}}}{1} \cdot \frac{1 \cancel{\text{milha}}}{\cancel{8 \text{ furlongs}}} \cdot \frac{5.280 \cancel{\text{pés}}}{1 \cancel{\text{milha}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{jarda}}}{\cancel{3 \text{ pés}}} \cdot \frac{1 \text{ braça}}{2 \cancel{\text{jardas}}}$$

Neste ponto, a expressão tem apenas dois números deixados do lado (1) e é fácil simplificar a fração: $= \frac{5.280}{2} \text{ braças} = 2.640 \text{ braças}$

Como sempre, a cadeia de conversão de 24 furlongs para 2640 braças não muda o valor da expressão, apenas as unidades de medida.

Arredondando: Indo para a resposta curta

Às vezes, as medidas do mundo real não são muito precisas. Afinal de contas, se você medir o comprimento de um campo de futebol com sua régua confiável, você tem limites para cancelar uma polegada ou duas (ou mais). Quando você realiza cálculos com tais medidas descobrindo a resposta para um punhado de casas decimais não faz sentido porque a resposta já é aproximada. Em substituição, você quer arredondar sua resposta para os números que são provavelmente corretos. Aqui está um problema que lhe pede para fazer apenas isso: Heather pesou seu hamster favorito Binky e descobriu que ele pesa 4 onças. Quantos gramas pesa Binky, ao grama inteiro mais próximo?

Este problema pede-lhe para converter das unidades Inglesas para as unidades métricas, portanto você precisa desta conversão de equação: 1 quilograma = 2,20 libras Note que esta equação de conversão inclui apenas quilogramas e libras, mas o problema inclui onças e gramas. Portanto, para converter de onças para libras e de quilograma para gramas, aqui estão algumas equações para ajudar a construir uma ponte entre onças e gramas: 1 libra = 16 onças 1 quilograma = 1000 gramas Sua cadeia realizará as seguintes conversões: onças → libras → pés → quilogramas → gramas Portanto, coloque sua expressão como segue:

$$= \frac{4 \text{ onças}}{1} \cdot \frac{1 \text{ libra}}{16 \text{ onças}} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{2.2 \text{ libra}} \cdot \frac{1.000 \text{ g}}{1 \text{ kg}}$$

Como sempre, depois de colocar a expressão, você pode cancelar toda unidade com exceção para uma expressão que você está convertendo para:

$$= \frac{4\ \cancel{\text{onças}}}{1} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{libra}}}{16\ \cancel{\text{onças}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{kg}}}{2.2\ \cancel{\text{libra}}} \cdot \frac{1.000\ \text{g}}{1\ \cancel{\text{kg}}}$$

Quando você está multiplicando uma série de frações, pode criar uma fração fora de todos os números. Os números que estavam originalmente nos numeradores das frações permanecem no numerador. Do mesmo modo, os números que estavam nos denominadores permanecem no denominador. Portanto, coloque apenas um sinal de multiplicação entre cada par de números.

$$= \frac{4 \cdot 1.000}{16 \cdot 2.2} g$$

Neste ponto, você pode começar o cálculo. Mas, para poupar esforço, recomendo o cancelamento dos fatores comuns. Neste caso, você cancela um 4 no numerador e no denominador, mudando o 16 no denominador para um 4: $= \frac{4 \cdot 1.000}{{}_4\cancel{16} \cdot 2.2} g$

Agora, você pode cancelar um outro 4 no numerador e no denominador, mudando o 1000 no numerador para 250: $= \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{1.000}^{250}}{\cancel{4}\,\cancel{16} \cdot 2.2} g$

Neste ponto, aqui está o que sobrou: $= \frac{250}{2.2} g$

Divida 250 por 2,2 para ter sua resposta: ≈ 113,6 g

Nota que coloquei a divisão em uma casa decimal. Como o número depois da vírgula decimal é 6, preciso arredondar minha resposta até o próximo maior grama. (Veja Capítulo 11, para mais detalhes sobre decimais arredondados.) Para o grama mais próximo, Binky pesa 114 gramas. Como é comum, a cadeia de conversão não muda o valor da expressão, apenas a unidade de medida.

Resolvendo a Geometria dos Problemas de Palavras

Alguns problemas de palavras de geometria apresentam-lhe uma figura. Em outros casos, você mesmo deve desenhar uma figura. Fazer o esboço de figuras é sempre uma boa ideia porque ele pode lhe dar, em geral, uma ideia de como proceder. As seguintes soluções apresentam-lhe dois tipos de problemas. (Para resolver estes problemas de palavras, você precisa de algumas fórmulas de geometria que discuto no Capítulo 16.)

Trabalhando a partir de palavras e imagens

Às vezes, você deve interpretar uma figura para resolver um problema de palavras. Leia o problema cuidadosamente reconheça as formas no desenho, preste atenção na etiqueta e use sejam quais forem as fórmulas que lhe ajudam a responder à pergunta. Neste problema, você deve trabalhar com uma figura.

Sr. Dennis é um fazendeiro com dois filhos adolescentes. Ele deu a eles um pedaço de terra com um riacho corrrendo nela diagonalmente, como mostrado na Figura 18-1. O filho mais velho pegou a área maior e o mais novo tomou a menor área. Qual é a área de terra que cada filho tem em pés ao quadrado?

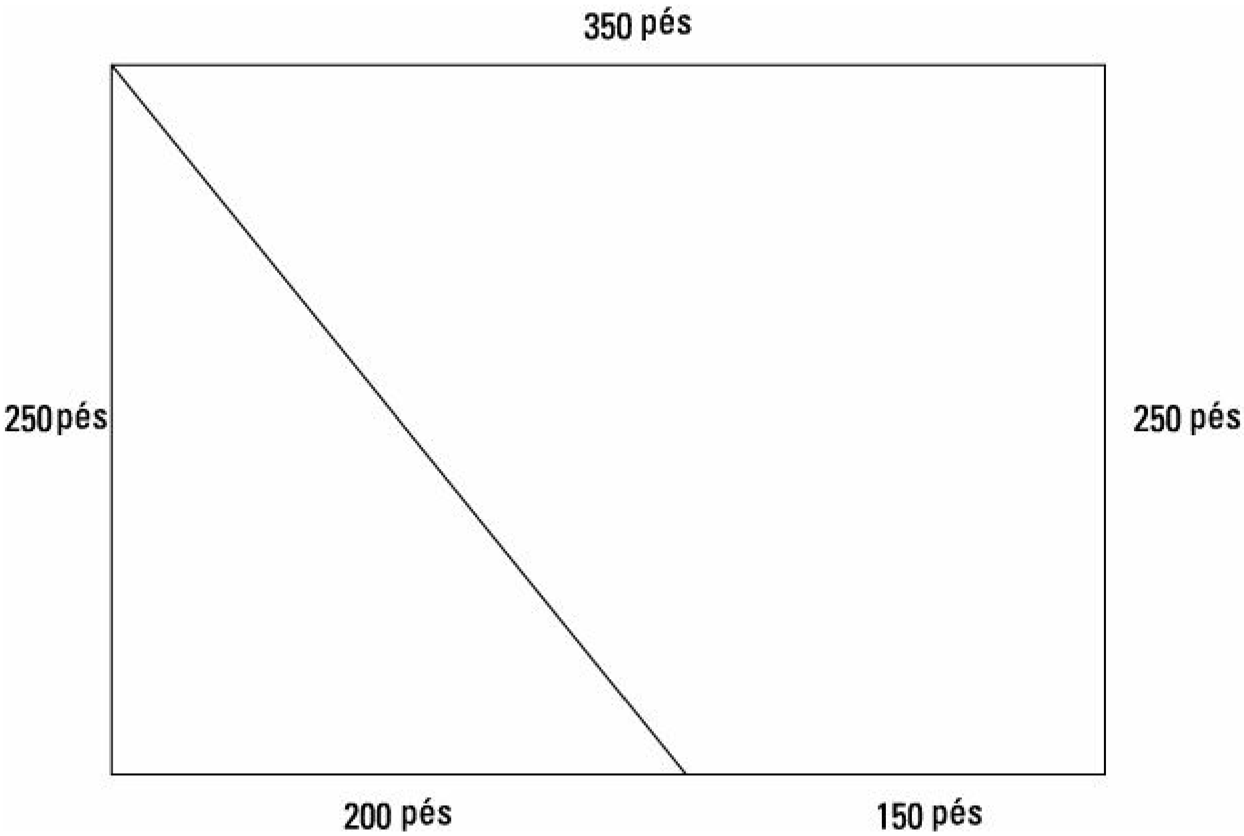


Figura 18-1: Dois filhos têm duas porções não retangulares de um campo retangular.

Para descobrir a menor área, trace o retângulo, use a fórmula para a área de um triângulo, onde A é a área, b é a base e h é a altura: $A = \frac{1}{2}(b \cdot h)$

O pedaço inteiro de terra é um retângulo, portanto você sabe o ângulo que o triângulo divide com o retângulo é um ângulo reto. Portanto, você sabe que os lados etiquetados 200 pés e 250 pés são a base e a altura. Descubra a área deste pedaço de terra colocando a base e a altura dentro da fórmula: $A = \frac{200 \text{ pés} \cdot 250 \text{ pés}}{2}$

Para fazer este capítulo, um pouco mais fácil, note que você pode cancelar um fator de 2 a partir do numerador e do denominador: $A = \frac{\cancel{200}^{100}\text{ pés} \cdot 250\text{ pés}}{\cancel{2}} = 25.000\text{ pés quadrados}$

A forma da área remanescente é um trapézio. Você pode descobrir sua área usando a fórmula para um trapézio, mas existe um modo mais fácil. Como você sabe, a área do triângulo do pedaço de terra, você pode usar esta equação de palavras para descobrir a área do trapézio: Área do trapézio = área do pedaço de terra inteiro – área do triângulo Para descobrir a área do pedaço de terra inteiro, lembre-se da fórmula para a área de um retângulo. Coloque seu comprimento e sua largura dentro da fórmula: A = comprimento · Largura A = 350 pés · 250 pés A = 87.500 pés quadrados Agora, substitua apenas os números que você conhece na equação de palavras que você coloca: Área do trapézio = 87.500 pés quadrados – 25.000 pés quadrados = 62.500 pés quadrados Portanto, a área de terra do filho mais velho é 62.500 pés quadrados e a área de terra do filho mais novo é 25.000 pés quadrados.

Escapar daquelas práticas esboçadas

Os problemas de palavras da geometria podem não fazer sentido até você desenhar algumas figuras. Aqui está um exemplo de um problema de geometria sem uma figura fornecida: No jardim de Elmwood, o mastro de bandeira fica exatamente ao sul do equipamento de balanço e a 20 metros a oeste da casa na árvore. Se a área do triângulo criada pelo mastro de bandeira, pelo equipamento de balanço e pela casa na árvore é de 150 metros quadrados, qual é a distância entre o equipamento de balanço e a casa na árvore?

Este problema é feito para lhe confundir até você desenhar uma figura sobre o que está sendo informado a você. Comece com a primeira frase descrita na Figura 18-2. Você não precisa desenhar a escada sobre a casa na árvore, algumas crianças brigando sobre os balanços e uma bandeira com o número correto de estrelas e as listras sinalizando no topo do mastro – as etiquetas são bem legais. Como você pode observar, eu desenhei um triângulo retângulo cujos ângulos são o equipamento de balanço (EB), o mastro de bandeira (MB) e a casa na árvore (CM). Eu etiquetei também a distância entre o mastro de bandeira e a casa na árvore como igual a 20 metros.

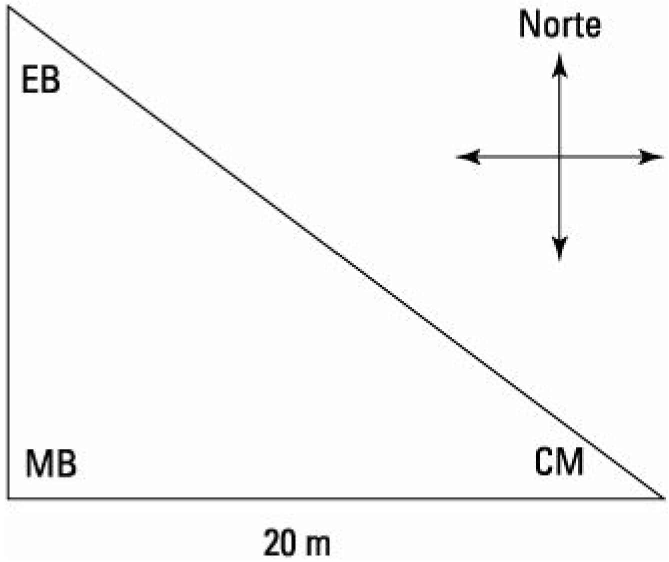


Figura 18-2: Um esboço etiquetado mostra a informação importante em um problema de palavras.

A próxima frase informa-lhe a área deste triângulo: A = 150 m^2

Agora, você está desligado da informação, portanto você precisa lembrar de alguma coisa que você pode a partir da geometria. Como você conhece a área do triângulo, você pode descobrir a fórmula para a área de um triângulo útil: $A = \frac{1}{2}(b.h)$

Aqui b é a base e h é a altura. Neste caso, você tem um triângulo retângulo, portanto a base é a distância entre MB e CM e a altura é a distância entre EB e MB. Portanto você já sabe a área do triângulo e também o comprimento da base. Preencha a equação: $150 = \frac{1}{2}(20.h)$

Você pode resolver agora esta equação para h. Comece a simplificar: 150 = 10 · h Você pode tornar esta equação em um problema de divisão usando as operações inversas, como lhe mostro, no Capítulo 4: 150 ÷ 10 = h 15 = h

Agora, você sabe que a altura do triângulo é 15 m, portanto você pode acrescentar esta informação para sua figura, como mostrado na Figura 18-3.

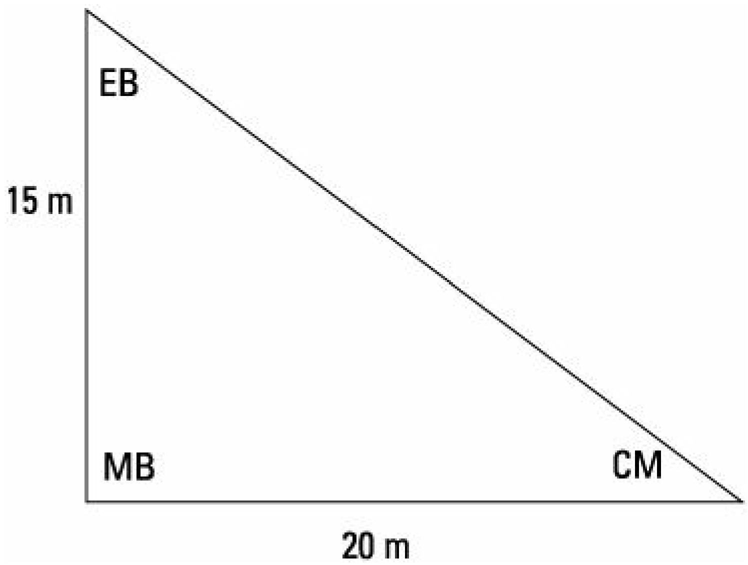


Figura 18-3: Atualize as etiquetas no seu esboço como você trabalha no problema.

Para resolver o problema você precisa ainda descobrir a distância entre EB e CM. Como este é um triângulo retângulo, você pode usar o teorema de Ppitágoras para calcular a distância: $a^2 + b^2 = c^2$

Lembre que a e b são os comprimentos dos lados curtos e c é o comprimento do lado mais longo chamado hipotenusa. (Veja Capítulo 16, para mais detalhes sobre o teorema de Pitágoras.) Você pode substituir os números dentro desta fórmula como segue: $15^2 + 20^2 = c^2$

Começar a resolver c avaliando o lado esquerdo da equação de acordo com a ordem das operações (veja Capítulo 5, para mais detalhes). Comece com os dois expoentes e, depois, mova para a adição: $225 + 400 = c^2$

$$625 = c^2$$

Neste ponto, lembre-se que c^2 significa $c \cdot c$: $625 = c \cdot c$

Portanto, c é um número que, quando multiplicado por ele mesmo, resulta no número 625. Ele é maior que 20 (porque um dos lados mais curtos do triângulo é 20), mas inferior a 30 (porque $30 \cdot 30 = 900$). Um pouco de teste e erro lhe dá o seguinte: $625 = 25 \cdot 25$

Portanto a distância entre o equipamento de balanço e a casa da árvore é de 25 metros.

Juntas por Último: Colocando Geometria e Medidas em Um Problema

Os problemas de palavras pedem-lhe muitas vezes, para usar uma variedade de habilidades. É especialmente popular (entre professores, não estudantes) em um final de exame quando você está sendo testado em tudo que uma classe estudou durante o semestre inteiro. Portanto, aqui está um exemplo que junta tudo a partir deste capítulo: Uma fonte circular com 32 pés de diâmetro é cercada por uma trilha circular que tem 120 pés de comprimento em volta do seu limite externo. Qual é a largura da trilha em polegadas (Use 3,1 como pi) Primeiro desenhe uma figura sobre o que o problema está pedindo, conforme a

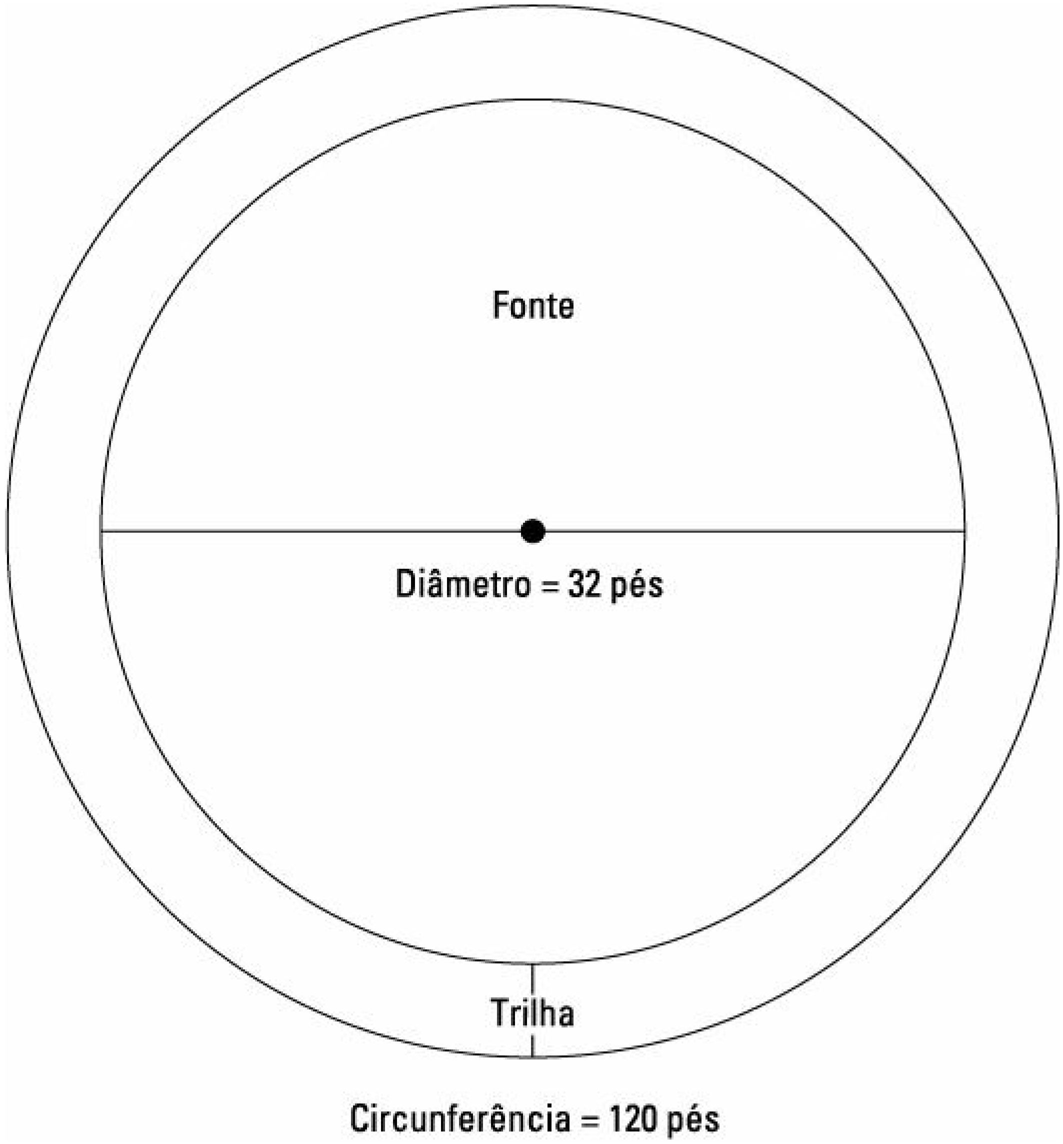


Figura 18-4:

Figura 18-4: Medindo uma trilha em volta de uma fonte.

Como você pode observar, desenhei um círculo para a fonte e etiquetei seu diâmetro de 32 pés. O limite externo da trilha em volta da fonte é, também, um círculo, e sua circunferência é 120 pés. O problema é perguntar a largura da trilha. A figura mostra-lhe que a largura da trilha é a distância entre o círculo interno e o círculo externo.

O raio de um círculo é a distância entre seu centro e o próprio círculo (veja Capítulo 16). Portanto, se você conhecer o raio de cada círculo, você pode descobrir a largura da trilha subtraindo: Largura da trilha = raio do círculo externo – raio do círculo interno Esta equação de palavras sabe que o diâmetro do círculo interno é 32 pés, portanto você pode descobrir seu raio usando esta fórmula do Capítulo 16, onde d é o diâmetro e r é o raio: $d = 2 \cdot r$

Calculando o diâmetro do círculo interno, você tem o seguinte: 32 pés = 2 · raio do círculo interno Provavelmente, você pode resolver este problema na sua cabeça: Raio do círculo interno = 16 pés Você conhece também a circunferência do círculo externo, portanto você pode descobrir seu raio usando esta fórmula do Capítulo 16, onde C é a circunferência e r é o raio: $C = 2 \cdot \pi \cdot r$ Calculando a circunferência e π como 3,1 lhe dá: 120 pés = 2 · 3,1 · raio do círculo externo Esta equação pode ser simplificada um pouco como segue: 120 pés

= 6,2 · raio do círculo externo Agora, você pode usar as operações inversas para rearrumar este problema de multiplicação em um problema de divisão (veja Capítulo 4, para mais detalhes sobre como fazer isso): 120 pés ÷ 6,2 = raio do círculo externo Arredondando esta divisão para as dezenas mais próximas lhe dá esta resposta: Raio do círculo externo ≈ 19,4 pés Agora que você tem o raio dos dois círculos, você pode substituir dentro da equação de palavras com que você começou: Largura da trilha ≈ 19,4 pés – 16 pés = 3,4 pés O problema pede a resposta mais próxima em polegadas. Aqui está uma conversão da equação: 1 pé = 12 polegadas Você pode colocar uma expressão como segue:

$$\frac{3{,}4 \text{ pés}}{1} \times \frac{12 \text{ pol.}}{1 \text{ pés}}$$

Agora, você pode cancelar os pés porque as unidades aparecem no numerador e no denominador: $\frac{3{,}4 \cancel{\text{pés}}}{1} \times \frac{12 \text{ pol.}}{1 \cancel{\text{pés}}}$

Esta expressão simplifica agora o seguinte: = 3,4 · 12 polegadas = 40, 8 polegadas Portanto, a largura da trilha está em torno de 41 polegadas. Este problema é bom para ser experimentado. Copie o mesmo e veja se você pode trabalhar com ele do início ao final.

Capítulo 19

Calculando Suas Chances: Estatística e Probabilidade

Neste Capítulo ► Conhecendo como a estatística funciona com os dados quantitativos e qualitativos ► Descobrindo como calcular uma porcentagem e o modo de uma amostra ► Calculando a média e a mediana ► Descobrindo a probabilidade de um evento

A estatística e a probabilidade são duas das mais importantes e amplamente mais usadas aplicações da matemática. Elas são aplicáveis virtualmente por todo o aspecto do mundo real – negócios, biologia, planejamento da cidade, política, meteorologia e muito mais áreas de estudo. Até a física, que uma vez pensou ser desprovida de incerteza, agora confia na probabilidade.

Neste capítulo, dou para você um entendimento básico sobre estas duas ideias matemáticas. Primeiro, apresento a você a estatística e a importante distinção entre os dados quantitativos e qualitativos. Mostro para você como trabalhar com os dois tipos de dados para descobrir as respostas significativas. Portanto, dou para você as bases da probabilidade. Mostro para você como a probabilidade de um evento ocorrer é sempre uma fração entre 0 e 1. Depois disso, demonstro como construir esta fração somando os resultados favoráveis e os resultados possíveis. Por fim, coloco estas ideias para trabalhar, mostrando para você como calcular a probabilidade para arremessar moedas e para rolar dados.

Juntando Dados Matemáticos: Estatística Básica

A estatística é a ciência de juntar e levantar conclusões a partir de dados, que são informações medidas objetivamente de um modo imparcial e reproduzível.

Uma estatística individual é uma conclusão levantada a partir destes dados. Aqui estão alguns exemplos: ✓Em média um trabalhador bebe 3,7 xícaras de café todo dia.

✓ Apenas 52 % dos estudantes que ingressam na faculdade de direito se formam, de fato.

✓ O gato é o animal de estimação mais popular dos Estados Unidos.

✓ No ano passado, o preço da TV de alta definição caiu em média $ 575.

Os estatísticos trabalham para identificar uma população que eles gostariam de estudar:

trabalhadores, estudantes de direito, donos de animais de estimação, compradores de equipamentos eletrônicos, quem quer que seja. Como é difícil trabalhar com a grande maioria da população, um estatístico coleta os dados a partir de uma amostra menor selecionada casualmente desta população. Muitos estatísticos ficam preocupados em juntar dados confiáveis e precisos. Você pode ler tudo sobre este tema no livro Estatística para Leigos (Wiley).

Nesta seção, dou para você uma introdução curta sobre os aspectos mais matemáticos da estatística.

Entendendo diferenças entre dados quantitativos e qualitativos

Dados – as informações usadas em estatística – podem ser qualitativos ou quantitativos. Os dados qualitativos dividem um conjunto de dados (o conjunto de dados que você juntou) em pedaços distintos baseados em um atributo específico. Por exemplo, em uma turma de alunos, os dados qualitativos podem incluir: ✓Sexo de cada aluno ✓Cor favorita de cada criança ✓Se ele ou ela tem, pelo menos, um animal de estimação ✓Como ele ou ela vem para escola e como ele ou ela vai embora da escola Você pode identificar os dados qualitativos notando que eles associam um atributo-isto é, uma qualidade – para cada membro do conjunto de dados. Por exemplo, quatros atributos da Emma que ela é do sexo feminino, sua cor favorita é verde, ela tem um cachorro e vai para escola em pé.

Do outro lado, os dados quantitativos fornecem informações numéricas – isto é, informações sobre quantidades ou números. Por exemplos, os dados quantitativos de uma mesma turma de alunos podem incluir o seguinte: ✓Altura de cada criança em polegadas ✓Peso dele ou dela em libras ✓O número de irmãos que ele ou ela tem ✓O número de palavras que ele ou ela formou corretamente no mais recente teste de ortografia.

Você pode identificar os dados quantitativos notando que eles associam um número a cada membro do conjunto de dados. Por exemplo, Carlos mede 55 polegadas, pesa 68 libras, tem três irmãos e formou 18 palavras corretamente.

Trabalhando com dados qualitativos

Os dados qualitativos dividem normalmente uma amostra em pedaços distintos. Como minha amostra – que é puramente fictícia – Uso 25 alunos na turma de quinta série da irmã da Elena. Por exemplo, imagine que todas as 25 crianças da turma de quinta série da irmã da Elena respondam às três perguntas de sim ou não da Tabela 19-1.

Tabela 19-1 – Levantamento da Quinta Série da Irmã da Elena

Perguntas	*Sim*	*Não*
Você é um menino?	5	20
Você tem animais de estimação?	14	11
Você pega o ônibus para escola?	16	9

Os alunos respondem também à pergunta "Qual é sua cor favorita?" com os resultados mostrados na Tabela 19-2.

Tabela 19-2 – Cores Favoritas da Turma da Irmã da Elena

Cor	*Número de alunos*	*Cor*	*Número de Alunos*
Azul	8	Laranja	1
Vermelho	6	Amarelo	1
Verde	5	Prata	1
Roxo	3		

Embora a informação fornecida por cada aluno não seja numérica, você pode lidar com ela numericamente somando o número de alunos que respondeu a cada pergunta e trabalhando com estes números.

Dada esta informação, você pode criar expressões informadas sobre os alunos desta turma lendo apenas as tabelas. Por exemplo, ✓Exatamente 20 crianças têm, pelo menos, um irmão ou uma irmã.

✓ Nove crianças não pegam o ônibus para a escola.

✓ Apenas a cor favorita de uma criança é amarela.

Deparando com as porcentagens

Você pode criar expressões estatísticas mais sofisticadas sobre os dados qualitativos descobrindo a porcentagem da amostra que tem um atributo específico. Aqui está como você faz então: **1. Escreva uma expressão que inclui o número de membros que divide aquele atributo e o número total na amostra.**

Imagine que você queira saber a porcentagem de alunos da turma da irmã da Elena são apenas meninos. A tabela lhe diz que 5 alunos não têm irmãos, e você sabe que 25 crianças são da turma. Portanto, você pode começar a responder a esta pergunta, como segue: Cinco das 25 crianças são apenas meninos.

2. Reescreva esta expressão, tornando os números em uma fração:

$$\frac{\text{Número que divide atributo}}{\text{Número na amostra}}$$

No exemplo, 5/25 das crianças são apenas meninos.

3. **Converta a fração em uma porcentagem, usando o método que mostro para você, no Capítulo 12.**

Você descobre que 5 ÷ 25 = 0,2, portanto 20 % das crianças são apenas meninos.

Do mesmo modo, imagine que você queira descobrir a porcentagem de crianças que pegam o ônibus para ir à escola. Neste momento, a tabela lhe diz que 16 crianças pegam o ônibus, portanto você pode escrever esta expressão: Dezesseis das 25 crianças pegam o ônibus para ir à escola.

Agora, escreva a expressão como segue:

$\frac{16}{25}$ das crianças pegam o ônibus para a escola.

Por fim, converta esta fração em uma porcentagem. Quando você descobre 16 ÷ 25 você tem 0,64, ou seja 64 %.

64 % das crianças pegam o ônibus para ir à escola.

Entrando no modo

O modo lhe diz a resposta mais popular para uma pergunta sobre estatística. Por exemplo, na pesquisa da turma da Irmã da Elena (veja Tabela 19-1 e 19-2), os grupos do modo são crianças que: ✓Têm pelo menos um irmão ou uma irmã (20 alunos) ✓Têm, pelo menos, um animal de estimação (14 alunos) ✓Pegam o ônibus para a escola (16 alunos) ✓Escolheram azul como cor favorita (8 alunos)

LEMBRE-SE Quando uma pergunta divide um conjunto de dados em duas partes (como as perguntas de sim ou não), o grupo do modo representa mais da metade do conjunto de dados. Mas quando uma pergunta divide um conjunto de dados em mais de duas partes, o modo não representa necessariamente mais da metade do conjunto de dados.

Por exemplo, 14 crianças têm, pelo menos, um animal de estimação e as outras 11 crianças não têm nenhum. Portanto o grupo do modo – as crianças que têm um animal de estimação – é mais da metade da turma. Mas 8 das 25 crianças escolheram o azul como cor favorita delas. Portanto, embora este seja o grupo do modo, inferior a metade da turma que escolheu esta cor.

PAPO DE ESPECIALISTA Com uma pequena amostra, você pode ter mais de um modo – por exemplo, talvez o número de alunos que gosta do vermelho é igual ao número de alunos que gosta do azul. Entretanto, obter os modos múltiplos não é, normalmente, uma questão com uma amostra maior porque se torna menos adequado do que aquele mesmo número de pessoas que terá a mesma preferência.

Trabalhando com dados quantitativos

Os dados quantitativos atribuem um valor numérico para cada membro da amostra. Como minha amostra – de novo fictícia – uso cinco membros do time de basquete da Irmã da Elena. Imagine que a informação na Tabela 19-3 fosse juntar a altura de cada membro do time e o recente teste de ortografia.

Tabela 19-3 – Altura e Escores do Teste de Ortografia

Alunos	*Altura em Polegadas*	*Número de Palavras Formadas Corretamente*
Carlos	55	18
Dwight	60	20
Patrick	59	14
Tyler	58	17
William	63	18

Nesta seção, mostro para você como usar esta informação para descobrir a média e a média para os dois conjuntos de dados. Os dois termos referem-se aos modos de calcular o valor médio em um conjunto de dados quantitativos. Uma média lhe dá uma ideia geral sobre onde muitas pessoas em um conjunto de dados diminuem, portanto você sabe os tipos de resultados padrão. Por exemplo, a média de altura da turma da quinta série da irmã da Elena provavelmente é inferior à média de altura de Los Angeles Lakers. Como mostro para você nas seções que seguem, uma média pode ser mal informada em alguns casos, portanto saber quando usar a média versus a mediana é importante.

A média é o termo mais usado. De fato, muitas pessoas usam a palavra média. Aqui você descobre a média de um conjunto de dados:

Descobrindo a média

1. **Some todos os números daquele conjunto.**

   Por exemplo, para descobrir a altura média dos cinco membros do time, primeiro some todas as alturas: 55 + 60 + 59 + 58 + 63 = 295

2. **Divida o resultado pelo número total de membros daquele conjunto.**

   Divida 295 por 5 (isto é pelo número total de garotos do time): 295 ÷ 5 = 59

   Portanto a média de altura dos garotos do time da irmã da Elena é 59 polegadas.

Do mesmo modo, para descobrir a média do número de palavras que os garotos formaram corretamente, primeiro some o número de palavras que eles formaram corretamente: 18 + 20 + 14 + 17 + 18 = 87

Agora divide o resultado por 5: 87 ÷ 5 = 17,4

Como você observar, ao dividir você termina com um decimal na sua resposta. Se você arredondar para a palavra inteira mais próxima, a média do número de palavras que os cinco garotos formaram corretamente é em torno de 17 palavras. (Para mais informações sobre arredondar, veja Capítulo 2.) 

A média pode ser mal informada quando você tem fortes distorções nos dados – isto é, quando os dados têm muitos valores baixos e poucos valores altos ou vice-versa.

Por exemplo, imagine que o presidente de uma empresa lhe diga, "O salário médio na minha empresa é de $ 200.000 por ano!" Mas no seu primeiro dia de trabalho, você descobre que o salário do presidente é $ 19.010.000 e cada um destes 99 empregados ganha $ 10.000. Para descobrir a média, some todos os salários: $ 19.010.000 + (99 · $ 10.000) = $ 20.000.000

Agora, divida este número pelo número total de pessoas que trabalha ali: $ 20.000.000 ÷ 100 = $ 200.000

Portanto, o presidente não mentiu. Entretanto, a distorção nos salários resultou em uma média mal informada.

Descobrindo a mediana

Quando os valores dos dados são distorcidos (quando poucos grandes números ou poucos números pequenos diferem de maneira significativa do restante dos dados), a média pode lhe dar uma figura mais precisa do padrão. Aqui está como descobrir a mediana de um conjunto de dados: **1. Organize o conjunto do menor ao maior.**

Para descobrir a altura mediana dos garotos na Tabela 19-3, organize as alturas dos cinco na ordem de menor a maior.

55 58 59 60 63

2. Escolha o número do meio.

O valor médio 59 polegadas é a altura mediana.

Para descobrir a média do número de palavras que os garotos formaram corretamente (veja Tabela 19-3), organize seus escores na ordem de menor a maior:

14 17 18 18 20

Neste momento, o valor do meio é 18, portanto 18 é o escore médio.

Se você tiver um número de valores par no conjunto de dados, coloque os números na ordem e descobra a média dos dois números do meio na lista (veja a seção anterior, para mais detalhes sobre a média). Por exemplo, considere o seguinte:

2 3 <u>5</u> <u>7</u> 9 11

Os dois números no centro são 5 e 7. Some-os juntos para ter 12 e, depois, divida por 2 para ter a média deles. A média na lista é 6.

Agora lembre-se do presidente da empresa que ganha \$ 19.010.000 por ano e seus empregados ganham, cada um, \$ 10.000. Aqui está como estes dados parecem:

10.000 10.000 10.000 ... 10.000 19.010.000

Como você pode observar, se você fosse escrever todos os 100 salários, os números no centro seriam, obviamente, os dois 10.000. O salário média é \$ 10.000, e seu resultado é muito mais reflexivo sobre o que você ganharia provavelmente se você trabalhasse nesta empresa.

Observando as Probabilidades: Probabilidade Básica

A probabilidade é a decisão dos matemáticos sobre como um evento deve ocorrer provavelmente. Por exemplo, ✓Qual é a probabilidade de o bilhete da loteria que comprei ser sorteado?

- ✓ Qual é a probabilidade de meu carro precisar de reparos antes do fim da garantia?
- ✓ Qual é a probabilidade de mais de 100 polegadas de gelo cair em Manchester, New Hampshire, este inverno?

A probabilidade tem uma ampla variedade de aplicações em seguros, previsão do tempo, ciências biológicas e até em física.

O estudo da probabilidade começou centenas de anos atrás quando um grupo de nobres franceses começaram a acreditar que a matemática poderia lhe ajudar a lucrar ou, pelo menos, não perder pesadamente nas salas de jogo que eles frequentavam.

Você pode ler sobre todos os detalhes da probabilidade no livro Probability for Dummies (Wiley – ainda sem tradução). Nesta seção, você encontrará em Inglês, um pequeno gosto deste assunto fascinante.

Calculando a probabilidade

A probabilidade de ocorrer um evento é uma fração cujo numerador (número na parte superior) e denominador (número na parte inferior) são como segue (para mais detalhes sobre frações, vá ao Capítulo 9): $\frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$

Neste caso, um resultado favorável é, simplesmente, um resultado no qual o evento que você está examinando acontece. Em contraste, um resultado possível é um resultado que pode acontecer.

Por exemplo, imagine que você queira saber a probabilidade de uma moeda arremessada parar em cara. Note que existem dois resultados possíveis (cara ou coroa), mas apenas um destes resultados é favorável – o resultado no qual a cara aparece. Para descobrir a probabilidade deste evento, crie uma fração como segue:

$$\frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, a probabilidade de a moeda parar em cara é de ½

Portanto, qual é a probabilidade de quando você rolar um dado, o número 3 aparecer na face. Para calcular esta probabilidade, note que existem seis resultados possíveis (1, 2, 3, 4, 5 ou 6), mas apenas um destes faz o número 3 parar na face. Para descobrir a probabilidade deste resultado, crie uma fração como segue:

$$\frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}} = \frac{1}{6}$$

Portanto, a probabilidade de o número 3 parar na face é de 1/6.

E qual é a probabilidade de você, casualmente, pega uma carta que seja em ás? Para calcular esta probabilidade, note que existem 52 resultados possíveis (um para cada carta no baralho), mas em apenas quatro destes fazem você pegar um às. Portanto:

$$\frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}} = \frac{4}{52}$$

Portanto, a probabilidade de você pegar um às é de 4/52, o que pode reduzido para 1/13 (veja Capítulo 9, para mais detalhes sobre redução de frações).

A probabilidade é sempre uma fração ou um decimal de 0 a 1. Quando a probabilidade de um resultado ser 0, o resultado é impossível. Quando a probabilidade de um resultado é 1, o resultado é certo.

Oh, as probabilidades! Somando os resultados com várias moedas e vários dados

Embora a fórmula da probabilidade básica não seja difícil, às vezes descobrir os números a serem colocados nela pode ser complicado. Uma fonte de confusão é somar o número de resultados, os favoráveis e os possíveis. Nesta seção, concentro-me em arremessar moedas e rolar dados.

Arremessando moedas

Quando você vira uma moeda, geralmente você pode ter dois resultados possíveis: cara ou coroa. Quando você vira duas moedas ao mesmo tempo – quer dizer um peêniny e um níquel – você pode ter quatro resultados possíveis:

Resultado	***Pêni***	***Níquel***
# 1	Cara	Cara
# 2	Cara	Coroa
# 3	Coroa	Cara
# 4	Coroa	Coroa

Quando você vira três moedas ao mesmo tempo – quer dizer um pênienny, um níquel e um dime – oito resultados são possíveis:

Resultado	***Pêni***	***Níquel***	***Dime***
# 1	Cara	Cara	Cara
# 2	Cara	Cara	Coroa
# 3	Cara	Coroa	Cara
# 4	Cara	Coroa	Coroa
# 5	Coroa	Cara	Cara
# 6	Coroa	Cara	Coroa
# 7	Coroa	Coroa	Cara
# 8	Coroa	Coroa	Coroa

Note o modelo: Todo momento que você acrescenta uma moeda adicional, o número de resultados possíveis dobra. Portanto, se você virar seis moedas, aqui está o número de resultados possíveis que você tem: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \approx 64$

O número de resultados possíveis é igual ao número de resultados por moeda (2) elevado ao número de moedas (6): Matematicamente, você tem $2^2 = 64$.

Aqui está uma fórmula útil para calcular o número de resultados quando você está virando, sacudindo ou rolando várias moedas, dados ou outros objetos ao mesmo tempo: Número de resultados por objeto $^{\text{Número de objetos}}$ Imagine que você queira descobrir a probabilidade de seis moedas arremessadas pararem na cara. Para fazer isso, você quer criar uma fração e já sabe que o denominador – o número de resultados possíveis – é 64. Apenas um resultado é favorável, portanto o numerador é 1:

$$\frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}} = \frac{1}{64}$$

Portanto, a probabilidade de seis moedas arremessadas pararem na cara é 1/64.

Aqui está uma pergunta suútil: Qual é a probabilidade de exatamente cinco das seis moedas arremessadas pararem na cara? De novo, você está criando uma fração e já sabe que o denominador é 64. Para descobrir o numerador (resultados favoráveis), pense nele desta forma: se a primeira moeda parar na coroa, então todo o resto deve parar na cara. Se a segunda moeda parar na coroa, então, de novo, todo o resto deve parar na cara. É verdadeiro para todas as seis moedas, portanto você tem seis resultados favoráveis:

$$\frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}} = \frac{6}{64}$$

Portanto, a probabilidade de exatamente cinco das seis moedas pararem na cara é 6/64 o que é reduzido para 3/32 (veja Capítulo 9 para mais detalhes sobre redução de frações).

Rolando os dados

Quando você rola um único dado, você pode ter seis resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Entretanto, quando você rola dois dados, este número pula para 36. Veja Figura 19-1.

A todo o momento que você acrescenta um dado adicional, o número de resultados possíveis é multiplicado por 6. Portanto, se você rolar quatro dados, aqui está o número de resultados possíveis: 6 elevado a $4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$

Imagine que você queira calcular a possibilidade de rolar quatros 6. A probabilidade é uma fração, e você já sabe que o denominador desta fração é 1296. Neste caso, apenas um resultado – todos os quatro dados aparecendo 6 – é favorável, portanto aqui está como você cria sua fração: $\frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}} = \frac{1}{1.296}$

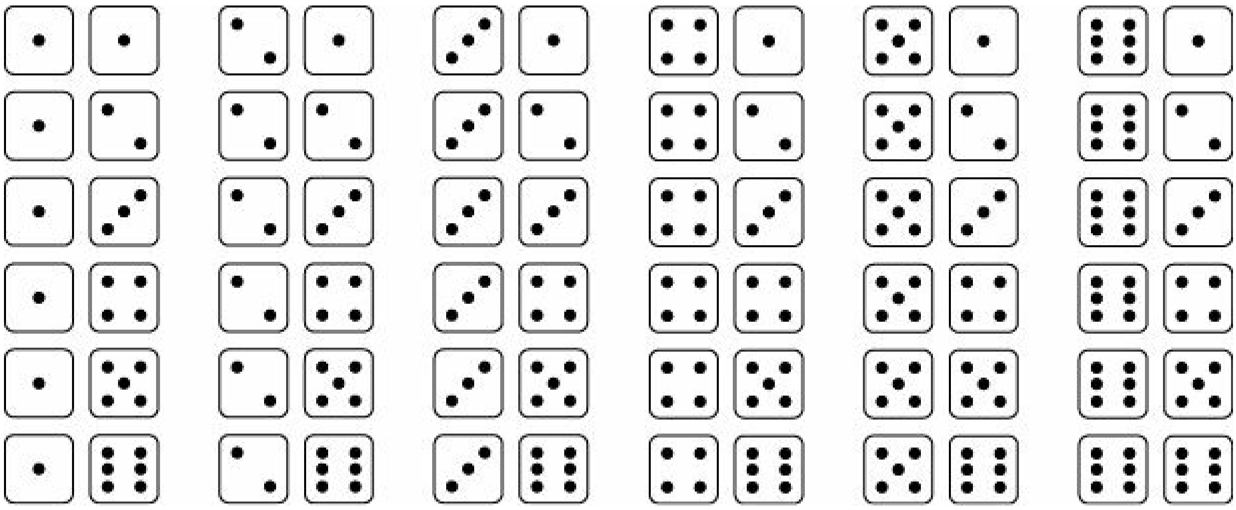


Figura 19-1: Possibilidade para um par de dados rolar.

Portanto, a probabilidade para você rolar quatro 6 é de 1/1296 – uma probabilidade muito pequena, de fato.

Aqui está uma pergunta mais interessante: Qual é a probabilidade de todos os quatro dados aparecerem 4, 5 ou 6? De novo, você está criando uma fração cujo denominador é 1296. Para descobrir o numerador, pense nele desta forma: Para o primeiro dado, existem três resultados favoráveis (4, 5 ou 6). Para os primeiros dois dados, existem $3 \cdot 3 = 9$ os resultados favoráveis como mostrados aqui: 4-4 4-5 4-6

5-4 5-5 5-6

6-4 6-5 6-6

Para três dados, existem $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ resultados favoráveis. Portanto, para todos os quatro dados, existem $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ resultados favoráveis. Portanto:

$$\frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}} = \frac{3^4}{6^4} = \frac{81}{1.296}$$

Portanto, a probabilidade de todos os quatro dados aparecerem 4, 5 ou 6 é 81/1296. Esta fração é reduzida para 1/16 (veja Capítulo 9, para mais detalhes sobre redução de frações).

Capítulo 20

Estabelecendo as Coisas com a Teoria do Conjunto Básico

Neste Capítulo* ► *Definindo um conjunto e seus elementos* ► *Entendendo os subconjuntos e o conjunto vazio* ► *Conhecendo as operações básicas nos conjuntos, incluindo a união e a interseção

Um conjunto é apenas uma coleção de coisas. Mas na simplicidade deles, os conjuntos são fundamentais. No nível mais profundo, a teoria de conjunto é o fundamento de tudo na matemática.

A teoria de conjunto fornece uma forma de falar sobre as coleções de números, tais como os números pares, números primos ou números contáveis com facilidade e clareza. Ela dá para você também regras para realizar cálculos nos conjuntos que se tornam úteis na matemática avançada. Por estas razões, a teoria de conjunto torna-se mais importante quanto mais alto você sobe na cadeia alimentar da matemática – especialmente quando você começa a escrever as provas matemáticas. Estudar os conjuntos pode ser também uma boa interrupção no material da matemática comum com que você trabalha.

Neste capítulo, mostro para você as bases da teoria de conjunto. Primeiro, mostro para você como definir conjuntos e seus elementos e como você pode dizer quando dois conjuntos são iguais. Mostro para você também a ideia simples da cardinalidade de um conjunto. Depois, discuto os subconjuntos e o todo importante conjunto vazio (Ø). Depois disso, discuto as quatro operações nos conjuntos: união, interseção, complemento relativo e complemento.

Entendendo os números inteiros

Um conjunto é uma coleção de coisas de qualquer ordem. Estas coisas podem ser prédios, vaga-lumes, números, qualidades de figuras históricas, nomes que você chama seu irmão mais novo, qualquer coisa.

Você pode definir um conjunto em poucas formas principais: ✓**Colocar uma lista dos elementos do conjunto entre chaves { }:** Você pode simplesmente listar tudo que pertence ao conjunto. Quando o conjunto é muito grande, use simplesmente uma elipse (...) para indicar os elementos do conjunto não mencionados. Por exemplo, para listar o conjunto dos números de 1 a 100 você pode escrever **{ 1, 2, 3, ..., 100}.** Para listar o conjunto de todos os números contáveis, você pode escrever { 1, 2, 3...}.

- ✓ **Usar uma descrição verbal:** Se você usar uma descrição verbal sobre o que o conjunto inclui, tenha certeza de que a descrição é clara e explícita e portanto, você saberá exatamente o que está no conjunto e o que não está nele. Por exemplo, o conjunto de quatro estações é muito nítido mas você pode encontrar um debate no conjunto de palavras que descreve minha habilidades culinárias já que muitas pessoas têm opiniões diferentes.
- ✓ **Escrever uma regra matemática (anotação de construção de conjuntos):** Depois na álgebra, você pode escrever uma equação que diz para as pessoas como calcular os números que fazem parte de um conjunto. Verifique no livro Álgebra II For Dummies de Mary Jane Sterling (Wiley – ainda sem tradução), para mais detalhes.

Em geral, os conjuntos são identificados com letras capitais para mantê-los distintos das variáveis na álgebra, que são em geral, letras pequenas. (O Capítulo 21 fala sobre o uso das variáveis.) A melhor forma de entender os conjuntos é começar a trabalhar com eles. Por exemplo, aqui eu defino três conjuntos: A = { Edifício Empire State, Torre Eiffel, Coliseu de Roma}

B = { Inteligência do Albert Einstein, Talento de Marilyn Monroe, Habilidade atlética de DiMaggio, Crueldade do Senador Joseph McCarthy}

C = as quatro estações do ano O conjunto A contém três objetos tangíveis: trabalhos famosos de arquitetura. O conjunto B contém quatro objetos intangíveis: atributos de pessoas famosas. E o conjunto C contém também objetos intangíveis: as quatro estações. A teoria de conjunto permite-lhe trabalhar com objetos tangíveis ou intangíveis, desde que você define seu conjunto corretamente. Nas seguintes seções, mostro para você as bases da teoria de conjunto.

Simples, meu querido: Levando em conta o que está dentro dos conjuntos

As coisas contidas em um conjunto são chamadas de elementos (conhecidos também como membros). Considere os primeiros dois conjuntos que defino na seção de apresentação: A = { Edifício Empire State, Torre Eiffel, Coliseu de Roma}

B = { Inteligência do Albert Einstein, Talento de Marilyn Monroe, Habilidade atlética de DiMaggio, Crueldade do Senador Joseph McCarthy}

A Torre Eiffel é um elemento de A e o talento da Marilyn Monroe é um elemento de B. Você pode escrever estas expressões usando o símbolo ∈ o que significa um elemento de: Torre Eiffel ∈ A Talento da Marilyn Monroe ∈ B

Entretanto, a Torre Eiffel não é um elemento de B. Você pode escrever esta expressão usando o símbolo ∉ , o que significa não é um elemento de: Torre Eiffel ∉ B

Estes dois símbolos tornam-se mais comuns, conforme você avança nos estudos de matemática. As seguintes seções discutem o que está dentro destas chaves e como alguns conjuntos relacionam-se.

Cardinalidade de conjuntos

A cardinalidade de um conjunto é apenas uma palavra enfeitada para o número de elementos naquele conjunto.

Quando A é { Edifício Empire State, Torre Eiffel, Coliseu de Roma}, ele tem três elementos, portanto a cardinalidade de A é três. O conjunto B que é { Inteligência do Albert Einstein, Talento de Marilyn Monroe, Habilidade atlética de DiMaggio, Crueldade do Senador Joseph McCarthy} tem quatro elementos, portanto a cardinalidade de B é quatro.

Conjuntos iguais

Se dois elementos listam ou descrevem os mesmos elementos, os conjuntos são iguais (você pode dizer também que eles são idênticos ou equivalentes). A ordem dos elementos nos conjuntos não importa. Do mesmo modo, um elemento pode aparecer duas vezes em um conjunto, mas apenas os elementos distintos precisam combinar.

Imagine que eu defina alguns conjuntos, como segue: C = as quatro estações do ano D = { primavera, verão, outono, inverno}

E = { outono, primavera, verão, inverno}

F = { verão, verão, verão, primavera, outono, inverno, inverno, verão}

O conjunto C dá uma regra clara descrevendo um conjunto. O conjunto D lista explicitamente os quatro elementos em C. O conjunto E lista as quatro estações em uma ordem diferente. E o conjunto F lista as quatro estações com alguma repetição. Portanto, todos os quatro conjuntos são iguais. Como nos números, você pode usar o sinal de igualdade para mostrar que os conjuntos são iguais: C = D = E = F

Subconjuntos

Quando todos os elementos de um conjunto estão completamente contidos em um segundo conjunto, o primeiro conjunto é um subconjunto do segundo. Por exemplo, considere estes conjuntos: C = { primavera, verão, outono, inverno}

G = { primavera, verão, outono}

Como você pode observar, todo elemento de G é, também, um elemento de C, portanto G é um subconjunto de C. O símbolo para subconjunto é $\subset$, portanto você pode escrever o seguinte: $G \subset C$

Todo conjunto é um subconjunto dele. Esta ideia pode parecer estranha até que você constate que todos os elementos de qualquer conjunto estejam, obviamente, contidos naquele conjunto.

Conjuntos vazios

O conjunto vazio – chamado também o conjunto nulo – é um conjunto que não tem elementos: H = { }

Como você pode observar, defino H listando seus elementos, mas não listei nada, portanto H está vazio. O símbolo Ø é usado para representar o conjunto vazio. Portanto, H = Ø

Você pode definir também um conjunto vazio usando uma regra. Por exemplo: I = tipos de galos que põem ovos Evidentemente, os galos são machos e, portanto, eles não põem ovos, então este conjunto é vazio.

Você pode pensar que Ø é nada. E como nada é sempre nada, existe apenas um conjunto vazio. Todos os conjuntos vazios são iguais, portanto neste caso, H = 1.

Além disso, Ø é um subconjunto de todo outro conjunto (a seção anterior discute sobre os subconjuntos), portanto as seguintes expressões são verdadeiras: Ø ⊂ A Ø ⊂ B

Ø ⊂ C

Este conceito faz sentido quando você pensa nele. Lembre-se que Ø não tem elementos, portanto, tecnicamente falando, todo elemento em Ø é todo outro conjunto.

Conjuntos de números

Um importante uso de conjuntos é definir os conjuntos de números. Como em todos os outros conjuntos, você pode listar os elementos ou descrever verbalmente uma regra que lhe diz claramente o que está incluído no conjunto e o que não está. Por exemplo, considere os seguintes conjuntos: J = { 1, 2, 3, 4, 5}

K = { 2, 4, 6, 8, 10}

L = o conjunto de números contáveis Minhas definições de J e K listam seus elementos explicitamente. Como K é infinitamente grande, preciso usar uma reticência (...) para mostrar que este conjunto continua para sempre. A definição de L é uma descrição do conjunto em palavras.

Discuto especialmente alguns conjuntos significantes de números, no Capítulo 25.

Operações nos Conjuntos

Em aritmética, as Quatro Grandes operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) permitem-lhe combinar os números de várias formas (veja Capítulo 3 e 4 para mais informações). A teoria de conjunto tem também quatro operações importantes: união, interseção, complemento relativo e complemento. Você verá mais sobre estas operações conforme você avança nos estudos de matemática.

Aqui estão as definições para estes conjuntos de números: P = { 1, 7}

Q = { 4, 5, 6}

R = { 2, 4, 6, 8, 10}

Nesta seção, uso estes três conjuntos e poucos outros para discutir as quatro operações de conjunto e mostrar-lhe como elas funcionam. (Nota: Nas equações, eu listo de novo os elementos, substituindo os nomes dos conjuntos com seus equivalentes nas chaves. Portanto, você não deve virar de trás para frente para checar o que cada conjunto contém.)

União: Elementos combinados

A união de dois conjuntos é o conjunto de seus elementos combinados. Por exemplo, a união de { 1, 2} e { 3, 4} é { 1, 2, 3, 4}. O símbolo para esta operação é ∪, portanto: { 1, 2} ∪ { 3, 4} = 1, 2, 3, 4}

Do mesmo modo, aqui está como descobrir a união de P e Q

$$P \cup Q = \{1, 7\} \cup \{4, 5, 6\} = \{1, 4, 5, 6, 7\}$$

Quando dois conjuntos têm um ou mais elementos em comum, estes elementos aparecem apenas uma vez na união do conjunto deles. Por exemplo, considere a união de Q e R. Neste caso, os elementos 4 e 6 estão em dois conjuntos, mas cada um destes números aparece uma vez na união deles: $Q \cup R = \{4, 5, 6\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

A união de qualquer conjunto com ele é o mesmo: $P \cup P$

Do mesmo modo, a união de qualquer conjunto com Ø (veja a seção anterior “Conjuntos vazios”) é o mesmo: $P \cup \varnothing = P$

Interseção: Elementos em comum

A interseção de dois conjuntos é o conjunto de seus elementos comuns (os elementos que aparecem nos dois conjuntos). Por exemplo, a interseção de { 1, 2, 3} e { 2, 3, 4} é { 2, 3}. O símbolo para esta operação é ∩ · Você pode escrever o seguinte: $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$

Do mesmo modo, aqui está como escrever a interseção de Q e R: $Q \cap R = \{4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{4, 6\}$

Quando dois conjuntos não têm elementos em comum, a interseção deles é o conjunto vazio

(Ø): P ∩ Q = { 1, 7} ∩ {4, 5, 6} = Ø

A interseção de qualquer conjunto com ele é o mesmo: P ∩ P = P

Mas a interseção de qualquer conjunto com Ø é Ø: P ∩ Ø = Ø

Complemento relativo: Subtração (sorta)

O complemento relativo de dois conjuntos é uma operação similar para subtração. O símbolo para a operação é o sinal de menos (–). Começando com o primeiro conjunto, você remove todo elemento que aparece no segundo conjunto para chegar no complemento relativo deles. Por exemplo, { 1, 2, 3, 4, 5} – { 1, 2, 5} = { 3, 4}

Do mesmo modo, aqui está como descobrir o complemento relativo de R e Q. Os dois conjuntos partilham 4 e 6, portanto você deve remover aqueles elementos de R: R – Q = { 2, 4, 6, 8, 10} – { 4, 5, 6} = { 2, 8, 10}

Note que a inversão desta operação lhe dá um resultado diferente. Neste momento, você remove os números 4 e 6 partilhados de Q: Q – R = { 4, 5, 6} – { 2, 4, 6, 8, 10} = { 5}

Como a subtração na aritmética, o complemento relativo não é uma operação comutativa. Em outras palavras, a ordem é importante. (Veja Capítulo 4, para mais detalhes sobre as operações comutativa e não comutativa.)

Complemento: Sentindo o excluído

O complemento de um conjunto é tudo que não está naquele conjunto. Como tudo é um conceito difícil para se trabalhar, primeiro você deve definir o que significa tudo como o conjunto universal (U). Por exemplo, imagine você definir o conjunto universal como este: U = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Agora, está um par de conjuntos com que trabalhar: M = { 1, 3, 5, 7, 9}

N = { 6}

O complemento de cada conjunto é o conjunto de todo elemento em U que não está no conjunto original: U – M = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} – { 1, 3, 5, 7, 9} = { 0, 2, 4, 6, 8}

U – N = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} – { 6} = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9}

O complemento é aproximadamente relacionado ao complemento relativo (veja a seção anterior). As duas operações são similares para a subtração. A principal diferença é que o complemento é sempre a subtração de um conjunto de U, mas o complemento relativo é a subtração de um conjunto a partir de qualquer outro conjunto.

O símbolo para o complemento é ′, portanto você pode escrever o seguinte: M′ = { 0, 2, 4, 6, 8}

$N' = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

Parte V

Os arquivos X: Introdução à Álgebra

"David está usando a álgebra para calcular a gorjeta. Bárbara – você teria ideia do que seria um expoente fracional?"

Nesta parte...

Apresento para você a álgebra, uma ferramenta maravilhosa para resolver uma ampla variedade de problemas de matemática com velocidade e precisão. Mostro para você como declarar uma variável (tal como x) para representar um número desconhecido. Portanto, dou para você um punhado de ferramentas importantes para trabalhar com as expressões algébricas. Depois, você coloca estas ferramentas para funcionar resolvendo as equações algébricas. Por fim, tudo vem junto, conforme você resolve os problemas de palavras de álgebra.

Capítulo 21

Entra Sr. X: Álgebra e Expressões Algébricas

Neste Capítulo ► Encontrando Sr. X de frente ► Entendendo como uma variável tal como x representa um número ► Usando a substituição para avaliar uma expressão algébrica ► Identificando e rearrumando os termos em qualquer expressão algébrica ► Simplificando as expressões algébricas

V ocê nunca esquece do seu primeiro amor, do seu primeiro carro ou do seu primeiro x. Infelizmente, para algumas pessoas, lembrar-se do seu primeiro x na álgebra é similar a lembrar-se do seu primeiro amor que lhe levou para um passeio ou do seu primeiro carro que quebrou em algum lugar do México.

O fato mais conhecido sobre a álgebra é que ela usa letras – como x – para representar números. Portanto, se você tiver uma história traumática de x, tudo que posso dizer é que o futuro será mais radiante do que o passado.

O que eu chamaria de boa álgebra? É uma pergunta comum, e ela merece uma resposta decente. A álgebra é usada para resolver os problemas que são muito difíceis mesmo para a aritmética ordinária. E como o processamento numérico é tanto parte do mundo moderno, a álgebra é tudo (mesmo que você não veja isso): na arquitetura, na engenharia, na medicina, na estatística, na computação, nos negócios, na química, na física, na biologia e evidentemente na matemática avançada. Em algum lugar que os números estejam úteis, a álgebra está ali. Por isso, virtualmente, todo colégio ou toda universidade insiste para você deixar (ou entrar com) pelo menos uma familiaridade passageira com a álgebra.

Neste capítulo, eu apresento (ou reapresento) para você aquele pequeno colega evasivo, Sr. X, de uma forma que o limita como mais um amigo. Portanto, mostro para você como as expressões algébricas são similares às expressões aritméticas e são diferentes das expressões aritméticas com que você está acostumado para trabalhar. (Para refrescar sua memória sobre as expressões aritméticas, veja Capítulo 5.)

X marca a Posição

Em matemática, x representa um número – qualquer número. Qualquer letra que você usa para representar um número é uma variável, o que significa seu valor pode variar – isto é, seu valor é incerto. Em contraste, um número na álgebra é chamado muitas vezes de uma constante porque seu valor é fixo.

Às vezes, você tem bastante informação para descobrir a identidade de x. Por exemplo, considera o seguinte: $2 + 2 = x$ Obviamente, nesta equação, x representa o número 4. Mas, outras vezes, o número que x representa fica envolvido em mistério. Por exemplo: $x > 5$

Nesta desigualdade, x representa algum número maior que 5 – talvez seja 6 ou 7 ½ ou 542,002.

Expressando-se com Expressões Algébricas

No Capítulo 5, apresento para você expressões aritméticas: séries de números e operadores que podem ser avaliados ou colocados em um lado de uma equação. Por exemplo:

$$2+3$$
$$7\cdot 1.5-2$$
$$2\wedge 4-|-4|-\sqrt{100}$$

Neste capítulo, apresento para você um outro tipo de expressão matemática: a expressão algébrica. Uma expressão algébrica é qualquer série de símbolos matemáticos que pode ser colocada em um lado de uma equação e que inclui pelo menos uma variável.

Aqui estão alguns exemplos de expressões algébricas:

$$5x$$
$$-5x+2$$
$$x^2y-y^2x+\frac{z}{3}-xyz+1$$

Como você pode observar, a diferença entre aritméticas e expressão algébricas é simples em uma expressão algébrica inclui pelo menos uma variável.

Nesta seção, mostro para você como trabalhar com as expressões algébricas. Primeiro, demonstro como avaliar uma expressão algébrica substituindo os valores de suas variáveis. Portanto, mostro para você como separar uma expressão algébrica em um ou mais termos e como identificar o coeficiente e a parte da variável de cada termo.

Avaliando expressões algébricas

Para avaliar uma expressão algébrica, você precisa conhecer o valor numérico de toda variável. Para cada variável na expressão, substitua o número que ela representa depois avalia a expressão.

No Capítulo 5, mostro para você como avaliar uma expressão aritmética. Brevemente, isso significa descobrir o valor daquela expressão como um único número (vá ao Capítulo 5, para mais detalhes sobre avaliação).

Saber como avaliar as expressões aritméticas torna útil a avaliação das expressões algébricas. Por exemplo, imagine que você queira avaliar a seguinte expressão: $4x - 7$

Note que esta expressão contém a variável x, que é desconhecida, portanto o valor de toda a expressão também é desconhecido.

Uma expressão algébrica pode ter qualquer número de variáveis, mas, em geral, você não trabalha com as expressões que têm mais de 3. Você pode usar qualquer letra como uma variável, mas x, y e z tendem a ter muita milhagem.

Imagine, no caso anterior, que $x = 2$. Para avaliar a expressão, substitua 2 por x em todo lugar que ele aparece na expressão: $4(2) - 7$

Depois de você fazer a substituição, sobra uma expressão aritmética para você, portanto você pode terminar seus cálculos para avaliar a expressão: $= 8 - 7 = 1$

Portanto, $x = 2$, a expressão algébrica $4x - 7 = 1$

Agora, imagine que você queira avaliar a seguinte expressão, onde $x = 4$: $2x^2 - 5x - 15$

Neste momento, o primeiro passo é substituir 4 por x em todo lugar que esta variável aparece na expressão: $2(4)^2 - 5(4) - 15$

Agora, avalie de acordo com a ordem das operações explicada no Capítulo 5. Você faz as potências primeiro, portanto comece a avaliar o expoente 4^2 que é igual a $4 \cdot 4$: $= 2(16) - 5(4) - 15$

Agora, continue na multiplicação, movendo da esquerda para a direita: $= 32 - 5(4) - 15$

$$= 32 - 20 - 15$$

Depois avalia a subtração, de novo da esquerda para a direita: $= 12 - 15$

$$= -3$$

Portanto, dado $x = 4$, a expressão algébrica $2x^2 - 5x - 15 = -3$.

Você não está limitado às expressões de apenas uma variável usando a substituição.

Enquanto você conhece o valor de toda variável na expressão, você pode avaliar as expressões algébricas com qualquer número de variáveis. Por exemplo, imagine que você queira avaliar esta expressão.

$3x^2 + 2xy - xyz$ Para avaliá-la, você precisa dos valores de todas as variáveis: $x =$

3

y = –2

z = 5

O primeiro passo é substituir o valor equivalente para cada uma das três variáveis onde você as acha: $3(3)^2 + 2(3)(-2) - 3(-2)(5)$ Agora, use as regras para a ordem das operações do Capítulo 5. Comece a avaliar o expoente 3^2: $= 3(9) + 2(3)(-2) - 3(-2)(5)$ Depois, avalie a multiplicação da esquerda para a direita (se você precisar saber mais sobre as regras para a multiplicação dos números negativos, verifique o Capítulo 4): $= 27 + 2(3)(-2) - 3(-2)(5) = 27 + 6(-2) - 3(-2)(5) = 27 + -12 - 3(-2)(5) = 27 + -12 - (-6)(5) = 27 + -12 - (-30)$ Agora tudo que sobra é adição e subtração. Avalie da esquerda para a direita, lembrando das regras para a adição e a subtração dos números negativos no Capítulo 4: $= 15 - (-30) = 15 + 30 = 45$

Portanto dados os três valores para x, y e z, a expressão algébrica $3x^2 + 2xy - xyz = 45$

Para a prática, copie a expressão e os três valores, feche o livro e veja se você pode substituir e avaliar na sua própria expressão.

Registrando os termos algébricos

LEMBRE-SE

Um termo em uma expressão algébrica é qualquer pedaço de símbolos tirado do restante da expressão por uma adição ou uma subtração. Como as expressões algébricas ficam mais complexas, elas começam a se enfileirar em mais e mais termos. Aqui estão alguns exemplos:

Expressões	***Número de termo***	***Termos***
5x	Um	5x
-5x + 2	Dois	–5x e 2
$x^2y + \frac{z}{3} - xyz + 8$	Quatro	$x^2y,\ \frac{z}{3},\ -xyz,$ e 8

Não importa o quanto é complicada uma expressão algébrica, você pode separá-la sempre em um ou mais termos.

LEMBRE-SE

Ao separar uma expressão algébrica em termos, junte o sinal de mais ou menos com o termo que ele precede imediatamente.

Quando um termo tem uma variável, ele é chamado de um termo algébrico. Quando ele não tem uma variável, é chamado de uma constante. Por exemplo, observe a seguinte expressão:

$$x^2y + \frac{z}{3} - xyz + 8$$

Os três primeiros termos são termos algébricos e o último termo é uma constante. Como você pode observar, em álgebra uma constante é apenas uma palavra útil para o número.

De fato, os termos são importantes porque você pode seguir regras para movê-los, combiná-los e realizar as Quatro Grandes operações sobre eles. Todas estas habilidades são importantes para resolver as equações que explico no próximo capítulo. Mas de agora em diante, esta seção explica um pouco sobre os termos e algumas de suas características.

Fazendo a mudança: Rearrumando seus termos

Depois de entender como separar uma expressão algébrica em termos, você pode ir um passo arrumando os termos em qualquer ordem que você gosta. Cada termo move como uma unidade, tipo de grupo de pessoas que divide carona para trabalhar junto – todo mundo dentro do carro fica junto durante toda a carona.

Por exemplo, imagine você começar com a expressão –5x + 2. Você pode rearrumar os dois termos da expressão sem mudar seu valor. Note que o sinal de cada termo fica com aquele termo, por sinal, é comum derrubar o sinal de mais no início de uma expressão: = 2 – 5x

Reorganizar os termos desta forma não afeta o valor da expressão porque a adição é comutativa – isto é, você pode reorganizar coisas que você está somando e sem mudar a resposta. (Veja Capítulo 4, para mais detalhes sobre a propriedade comutativa da adição.) Por exemplo, imagine x = 3. Portanto a expressão original e seu arranjo avalia o seguinte (usando as regras que traço antes em "Avaliando as Expressões Algébricas"):

–5x + 2	2 – 5x
= –5(3) + 2	= 2 – 5(3)
= –15 + 2	= 2 – 15
= –13	= –13

Reorganizar as expressões desta forma fica importante depois neste capítulo, quando você simplifica as expressões algébricas. Como outro exemplo, imagine que você tenha esta expressão: 4x – y + 6

Você pode reorganizá-la em uma variedade de formas: = 6 + 4x – y = –y + 4x + 6

Como o termo 4x não tem um sinal, ele é positivo, portanto você pode escrever um sinal de mais conforme necessário ao reorganizar os termos.

Enquanto o sinal de cada termo fica com aquele termo, reorganizar os termos em uma expressão não tem efeito no seu valor.

Por exemplo, imagine que $x = 2$ e $y = 3$. Aqui está como avaliar a expressão original e os dois rearranjos:

$4x - y + 6$	$6 + 4x - y$	$-y + 4x + 6$
$= 4(2) - 3 + 6$	$= 6 + 4(2) - 3$	$= -3 + 4(2) + 6$
$= 8 - 3 + 6$	$= 6 + 8 - 3$	$= -3 + 8 + 6$
$= 5 + 6$	$= 14 - 3$	$= 5 + 6$
$= 11$	$= 11$	$= 11$

Identificando o coeficiente e a variável Todo termo em uma expressão algébrica tem um coeficiente. O coeficiente é a parte numérica sinalizada em uma expressão algébrica – isto é, o número e o sinal (+ ou –) que vai com aquele termo. Por exemplo, imagine você trabalhando com a seguinte expressão algébrica: $-4x^3 + x2 - x - 7$

A tabela abaixo mostra os quatro termos desta expressão, com o coeficiente de cada termo:

Termo	***Coeficiente***	***Variável***
$-4x^3$	-4	x^3
x2	1	x^2
$-x$	-1	x
-7	-7	nada

Note que o sinal associado com o termo é parte do coeficiente. Portanto, o coeficiente de $-4x^3$ é -4.

Quando um termo aparece para ter nenhum coeficiente, realmente o coeficiente é 1. Portanto, o coeficiente de x^2 é 1 e o coeficiente de $-x$ é -1. E quando um termo é uma constante (apenas um número), aquele número com seu sinal associado é o coeficiente. Portanto o coeficiente do termo -7 é, simplesmente, -7.

A propósito, quando o coeficiente de qualquer termo algébrico é 0, a expressão igual a 0 não importa com que parece ser a parte variável:

$0x = 0 \qquad 0xyz = 0 \qquad 0x^3y^4z^{10} = 0$

Em contraste, a parte variável de uma expressão é tudo, exceto o coeficiente. A tabela acima mostra os quatro termos da mesma expressão, com a parte variável de cada termo.

Identificando termos similares

Os termos similares (ou como os termos) são quaisquer termos algébricos que têm a mesma parte variável – isto é, as duas letras e seus expoentes devem se igualar exatamente. Aqui estão alguns exemplos:

Parte Variável	*Exemplos de Similar*		*Termos*
x	$4x$	$12x$	$99.9x$
x^2	$6x^2$	$-20x^2$	$\frac{8}{3}x^2$
y	y	$1.000y$	πy
xy	$-7xy$	$800xy$	$\frac{22}{7}xy$
x^3y^3	$3x^3$	$-111x^3y^3$	$3.14x^3y^3$

Como você pode observar, em cada exemplo, a parte variável em todos três termos similares é a mesma. Apenas o coeficiente muda, e ele pode ser qualquer número: positivo ou negativo, número inteiro, fração, decimal ou até um número irracional, tal como π (Para mais detalhes sobre os números reais, veja Capítulo 25.)

Levando em conta os termos algébricos e as Quatro Grandes operações

Nesta seção, conduzo você sobre como aplicar as Quatro Grandes operações nas expressões algébricas. De agora em diante, pense apenas em trabalhar com as expressões algébricas como um conjunto de ferramentas que você está juntando para uso quando desenvolve o trabalho. Você descobre o quão importantes são estas ferramentas no Capítulo 22, quando você começa a resolver as equações algébricas.

Acrescentando termos

LEMBRE-SE Acrescentar termos similares somando coeficientes e mantendo a mesma parte variável.

Por exemplo, imagine que você tenha a expressão 2x + 3x. Lembre-se que 2x é apenas uma taquigrafia para x + x e 3x significa, simplesmente, x + x + x. Portanto quando você os soma, você tem o seguinte: = x + x + x + x + x = 5x Como você pode observar, quando as partes variáveis de dois termos são iguais, você acrescenta estes termos somando seus coeficientes: 2x + 3x = (2 + 3)x. A ideia aqui é quase similar à ideia de que 2 maçãs + 3 maçãs = 5 maçãs.

Você não pode acrescentar termos não similares. Aqui estão alguns casos em que as variáveis ou seus expoentes são diferentes: $2x + 3y$

$2yz + 3y$

$2x(x) + 3x$ Nestes casos, você não pode realizar a adição. Você está enfrentando uma situação que é similar a 2 maçãs + 3 laranjas. Como as unidades (maçãs e laranjas) são diferentes, você não pode resolver o problema. (Veja Capítulo 4, para mais detalhes sobre como trabalhar com as unidades.)

Subtraindo termos

A subtração funciona como a adição. Subtrair os termos similares descobrindo a diferença entre seus coeficientes e mantendo a mesma parte variável.

Por exemplo, imagine que você tenha $3x – x$. Lembre-se que $3x$ é, simplesmente uma taquigrafia para $x + x + x$. Portanto, fazer esta subtração lhe dá o seguinte: $x + x + x – x = 2x$ Nenhuma grande surpresa aqui. Simplesmente você descobre $(3 – 1)x$. Neste momento, a ideia é aproximadamente paralela à ideia de que \$3 – \$1 = \$2.

Aqui está um outro exemplo: $2x – 5x$

De novo, sem problema, enquanto você sabe como trabalhar com números negativos (veja Capítulo 4 se você precisar de detalhes). Descubra apenas a diferença entre os coeficientes: $= (2 – 5)x = –3x$ Neste caso, lembre-se que \$2 – \$5 = –3\$ (isto é, um débito de 3 dólares).

Você não pode subtrair os termos não similares. Por exemplo, você não pode subtrair os dois seguintes: $7x – 4y$

$7x^2y – 4xy^2$

Como na adição, você não pode fazer a subtração com diferentes variáveis. Pense nisso tentando calcular \$7 – 4 pesos. Como as unidades neste caso, (dólares versus pesos) são diferentes, você adere. (Veja Capítulo 4, para mais detalhes sobre trabalhando com unidades.)

Multiplicando termos

Diferentemente da adição e da subtração, você pode multiplicar os termos não similares. Multiplicar quaisquer dois termos multiplicando seus coeficientes e combinando – isto é, reunindo ou juntando – todas as variáveis em cada termo em um único termo, como mostro para você abaixo.

Por exemplo, imagine que você queira multiplicar $5x(3y)$. Para ter o coeficiente, multiplique $5 \cdot 3$. Para ter a parte algébrica, combine as variáveis x e y: $= 5(3)xy = 15xy$ Agora, imagine você poder multiplicar $2x(7x)$. De novo, multiplique os coeficientes e junte as variáveis em um único termo: $7(2)xx = 14xx = 14x^2$

Aqui está um outro exemplo. Multiplique todos os três coeficientes e junte as variáveis: $2x^2 (3y) (4xy) = 2 (3) (4) x^2xyy = 24x^3y^2$

Como você pode observar, o expoente 3 que é associado a x é apenas a soma de quantos x aparecem no problema. A mesma coisa acontece com o expoente 2 associado a y.

Uma forma rápida de multiplicar as variáveis com os expoentes é somar juntos os expoentes · Por exemplo: $(x^4y^3) (x^2y^5) (x^6y) = x^{12}y^9$

Neste exemplo, somei os expoentes dos x ($4 + 2 + 6 = 12$) para ter o expoente de x na solução. Do mesmo modo, somei os expoentes dos y ($3 + 5 + 1 = 9$ – não se esqueça de $y = y^1$!) para ter o expoente de y na solução.

Dividindo termos

É comum representar a divisão das expressões algébricas como uma fração, apesar de usar o sinal da divisão ( ). Portanto, a divisão dos termos algébricos parece reduzir, de fato, uma fração em termos menores (veja Capítulo 9, para mais detalhes sobre a redução).

Para dividir um termo algébrico por um outro, segue estes passos: **1. Crie uma fração de dois termos**

Imagine que você queira dividir $3xy$ por $12x^2$. Começa a tornar este problema em uma fração: $\frac{3xy}{12x^2}$

2. Cancele os fatores em coeficientes que estão no numerador e no denominador.

Neste caso, você pode cancelar um 3. Note que quando o coeficiente em xy fica igual a 1, você pode largá-lo: $= \frac{xy}{4x^2}$

3. Cancele qualquer variável que está no numerador e no denominador.

Você pode quebrar x^2 em xx: $= \frac{xy}{4xx}$

Agora você pode cancelar claramente um x no numerador e no denominador: $= \frac{y}{4x}$

Como você pode observar, a fração resultante é, de fato, uma forma reduzida da original.

Como outro exemplo, imagine que você queira dividir $-6x^2yz^3$ por $-8x^2y^2z$. Comece a escrever a divisão como uma fração: $= \frac{3x^2yz^3}{-8x^2y^2z}$

Primeiro, reduza os coeficientes. Note que como os dois coeficientes eram originalmente negativos, você pode cancelar os dois sinais de menos também:

$$= \frac{3x^2yz^3}{4x^2y^2z}$$

Agora, você pode começar a cancelar as variáveis. Faço isso em dois passos antes:

$$= \frac{3xxyzzz}{4xxyyz}$$

Neste ponto, cancele qualquer evento de uma variável que aparece no numerador e no denominador:

$$= \frac{3zz}{4y}$$

$$= \frac{3z^2}{4y}$$

Você não pode cancelar as variáveis e os expoentes se o numerador ou o denominador tiver mais de um termo nele.

Simplificando Expressões Algébricas

As expressões algébricas tornam-se mais complexas, simplificando-as pode torná-las mais fáceis para se trabalhar. Simplificar uma expressão significa (muito simplesmente!) torná-la menor e mais fácil para gerir. Você vê o quanto é importante simplificar as expressões quando você começa a resolver as equações algébricas.

De agora em diante, pense nesta seção como um tipo de caixa de ferramenta para a álgebra. Aqui mostro para você como usar estas ferramentas. No Capítulo 22, mostro para você quando usá-las.

Combinando termos similares

Quando dois termos algébricos são similares (quando suas variáveis são iguais), você pode somar ou subtraí-los (veja a seção anterior, “Considerando os termos algébricos e as Quatro Grandes operações”). Esta característica fica útil quando você tenta simplificar uma expressão. Por exemplo, imagine você trabalhando com a seguinte expressão: $4x - 3y + 2x + y - x + 2y$ Esta expressão tem seis termos. Mas estes seis termos possuem três com a variável x e os outros três com a variável y. Comece a reorganizar a expressão para que todos os termos similares sejam agrupados: $= 4x - 2x - x - 3y + y + 2y$ Agora, você pode somar e subtrair os termos similares. Faço isso em dois passos, primeiro para os termos x e, depois, para os termos y: $= 5x - 3y + y + 2y = 5x + 0y = 5x$ Note que os termos x simplificam 5x e os termos y simplificam 0y, o que é 0, portanto os termos y diminuem a expressão!

Aqui está um pouco de exemplo mais complicado que tem variáveis com os expoentes: $12x - xy - 3x^2 + 8y + 10xy + 3x^2 - 7x$ Neste momento, você tem quatro diferentes tipos de termos. Como um primeiro passo, você pode rearrumar estes termos para que os grupos de termos similares estejam juntos (sublinho estes quatro grupos, portanto você pode vê-los claramente): $\underline{12x - 7x}\ \underline{- xy + 10xy}\ \underline{- 3x^2 + 3x^2}\ \underline{+ 8y}$ Agora, combine cada conjunto de termos similares: $= 5x + 9xy + 0x^2 + 8y$ Neste momento, os termos x^2 somam 0, portanto eles diminuem a expressão: $= 5x + 9xy + 8y$

Removendo parênteses de uma expressão algébrica

Os parênteses mantêm partes de uma expressão como uma única unidade. No Capítulo 5, mostro para você como lidar com os parênteses em uma expressão aritmética. Esta habilidade é, também, útil com as expressões algébricas. Como você descobre quando você começa a resolver as equações algébricas, no Capítulo 22, eliminar parênteses é, muitas vezes, o primeiro passo para resolver um problema. Nesta seção, mostro como lidar com as Quatro Grandes operações facilmente.

Tirar tudo: Parênteses com um sinal de mais

Quando uma expressão contém parênteses que vêm depois do sinal de mais (+), você pode remover os parênteses. Aqui está um exemplo: $2x + \underline{(3x - y)} + 5y = 2x \underline{+ 3x - y} + 5y$ Agora, você pode simplificar a expressão combinando os termos similares: $= 5x + 4y$ Quando o primeiro termo dentro dos parênteses é negativo, quando você tira os parênteses, o sinal de menos substitui o sinal de mais. Por exemplo: $6x + (-2x + y) -4y = 6x - 2x + y - 4y$

Reviramento do sinal: Parênteses com um sinal de menos

Às vezes uma expressão contém parênteses que vêm depois de um sinal de menos (–). Neste caso, mude o sinal de todo termo dentro dos parênteses para o sinal oposto; depois remova os parênteses.

Considere este exemplo: $6x – (2xy – 3y) + 5xy$ Um sinal de menos está na frente dos parênteses, portanto você precisa mudar os sinais dos dois termos nos parênteses e remover os parênteses. Note que o termo 2xy aparece sem sinal porque ele é o primeiro termo dentro dos parênteses. Esta expressão significa de fato, o seguinte: $= 6x – \underline{(+2xy – 3y)} + 5xy$ Você pode observar como mudar os sinais: $= 6x \underline{– 2xy + 3y} + 5xy$ Neste ponto, você pode combinar os dois termos similares xy: $= 6x + 3xy + 3y$ Distribuindo: Parênteses sem sinal Quando nada existir entre um número e um conjunto de parênteses, isso significará a multiplicação. Por exemplo:

$2(3) = 6 \qquad 4(4) = 16 \qquad 10(15) = 150$

Esta anotação fica mais comum com as expressões algébricas, substituindo até o ponto do sinal da multiplicação (·):

$3(4x) = 12x \qquad 4x\,(2x) = 8x^2 \qquad 3x(7y) = 21xy$

Para remover os parênteses sem um sinal, multiplique o termo de fora dos parênteses por todo termo dentro dos parênteses; depois remova os parênteses. Quando você segue aqueles passos, você está usando a propriedade distributiva.

Aqui está um exemplo: $2(3x – 5y + 4)$ Neste caso, multiplique 2 por cada um dos três termos dentro dos parênteses: $= 2(3x) + 2(–5y) + 2(4)$ Para o momento, esta expressão parece ser mais complexa do que a original, mas agora você pode eliminar todos os três conjuntos de parênteses, multiplicando: $= 6x – 10y + 8$

Multiplicar todo termo dentro dos parênteses é, simplesmente, a distribuição da multiplicação na adição – chamada, também, de propriedade distributiva – que discuto no Capítulo 4.

Como outro exemplo, imagine que você tenha a seguinte expressão: $– 2x(– 3x + y + 6) + 2xy – 5x^2$

Comece a multiplicar $–2x$ pelos três termos dentro dos parênteses: $– 2x(– 3x) – 2x(y) – 2x(6) + 2xy – 5x^2$

A expressão parece pior que quando você começou, mas você pode eliminar os parênteses multiplicando: $= 6x^2 – 2xy – 12x + 2xy – 5x^2$

Agora, você pode combinar os termos similares. Faço isso em dois passos, primeiro rearrumando e depois combinando: $= 6x^2 – 5x^2 – 2xy + 2xy – 12x = x^2 – 12x$

Parênteses usando a sigla PFDU

Às vezes, as expressões têm dois conjuntos de parênteses próximos uns dos outros sem um sinal entre eles. Naquele caso, você precisa multiplicar todo termo dentro do primeiro conjunto por todo termo dentro do segundo conjunto.

Quando você tem dois termos dentro de cada conjunto de parênteses, você pode usar um procedimento chamado PFDU. A sigla PFDU é um anacrônico para ajudar-lhe a ter certeza de multiplicar os termos corretos. Ela representa Primeiro, Fora, Dentro e Último. Aqui está como funciona o procedimento: **1. Comece a multiplicar os dois Primeiros termos nos parênteses.**

Imagine que você queira simplificar a expressão $(2x – 2)\ (3x – 6)$. O primeiro termo no primeiro conjunto de parênteses é 2x e 3x é o primeiro termo no segundo conjunto de parênteses. Portanto, multiplique 2x por 3x: $(\underline{2x} – 2)\ (\underline{3x} – 6)$ $2x(3x) = 6x^2$

2. Multiplique então os dois termos de Fora

Os dois termos de fora, 2x e –6 estão nas extremidades: $(\underline{2x} – 2)\ (3x \underline{– 6})$ $2x(–6) = –12x$ **3. epois, multiplique os dois termos de Dentro**

Os dois termos no meio são –2 e 3x: $(2x \underline{– 2})\ (\underline{3x} – 6)$ $–2(3x) = –6x$ **4. Finalmente, multiplique os dois Últimos termos**

O último termo no primeiro conjunto de parênteses é –2 e –6 é o último termo no segundo conjunto: $(2x \underline{– 2})\ (3x \underline{– 6})$ $–2(–6) = 12$

Some estes quatro resultados juntos para ter a expressão simplificada: $= 6x^2 – 12x – 6x + 12$

Neste caso, você pode simplificar esta expressão ainda mais combinando os termos similares –12x e –6x: $= 6x^2 – 18x + 12$

Note que durante este procedimento, você multiplica todo termo dentro de um conjunto de parênteses por todo termo dentro do outro conjunto. A sigla PFDU ajuda-lhe a manter o caminho e ter certeza de que você multiplicou tudo.

A sigla PFDU é de fato uma aplicação da propriedade distributiva, que discuto na seção antes desta. Em outras palavras, $(2x – 2)\ (3x – 6)$ é, de fato, a mesma coisa que $2x(3x – 6) + –2(3x – 6)$ quando ela é distribuída. Portanto, distribuir de novo esta expressão dá para você $6x^2 – 6x – 12x\ 12$

Capítulo 22

Desmascarando Sr. X: Equações Algébricas

Neste Capítulo* ► *Usando variáveis (tais como x) nas equações* ► *Conhecendo alguns caminhos rápidos para resolver x nas equações simples* ► *Entendendo o método do balanço de equilíbrio para resolver as equações* ► *Rearrumando os termos em uma equação algébrica* ► *Isolando os termos algébricos em um lado de uma equação* ► *Removendo os parênteses de uma equação* ► *Cruzar a multiplicação para remover as frações

Quando o assunto é álgebra, resolver as equações é o principal evento.

Resolver uma equação algébrica significa descobrir o número que a variável (normalmente x) representa. Não surpreendentemente, este procedimento é chamado resolver x e, quando você sabe como fazer isso, sua confiança – não mencionar séries – na sua aula de álgebra vai voar alto para o teto.

Por este motivo, este capítulo é todo a respeito. Primeiro, mostro para você poucos métodos informais para resolver x quando uma equação não é muito difícil. Portanto, mostro para você como resolver equações mais difíceis pensando nelas como um balanço de equilíbrio.

O método do balanço de equilíbrio é de fato o coração da álgebra (sim, a álgebra tem um coração apesar de tudo!). Depois de entender esta ideia simples, você estará pronto para resolver equações mais complicadas usando todas as ferramentas que mostro para você, no Capítulo 21, tais como simplificar expressões e remover parênteses. Você descobre como estender estas habilidades para as equações algébricas. Finalmente, mostro para você como cruzar a multiplicação (veja Capítulo 9) pode resolver as equações algébricas com frações.

No final deste capítulo, você deve ter uma compreensão sólida sobre um punhado de caminhos para resolver as equações para o evasivo e misterioso x.

Entendendo as Equações Algébricas

Uma equação algébrica é uma equação que inclui, pelo menos, uma variável – isto é, uma letra (tal como x) que representa um número. Resolver uma equação algébrica significa descobrir o número que x representa.

Nesta seção, mostro para você as bases de como uma variável como x funciona dentro de uma equação no primeiro lugar. Portanto mostro para você poucos caminhos rápidos para resolver x quando uma equação não é muito difícil.

Usando x nas equações

Como você descobre no Capítulo 5, uma equação é a expressão matemática que contém um sinal de igualdade. Por exemplo, aqui está perfeitamente uma boa equação: $7 \cdot 9 = 63$

No seu coração, uma variável (tal como x) é nada mais que um marcador de posição para um número. Provavelmente, você está acostumado com as equações que usam outros marcadores de posição: Um número é voluntariamente deixado em branco ou substituído por um traço ou um ponto de interrogação, e você imaginou preenchê-lo. Normalmente, este número vem depois do sinal de igualdade. Por exemplo: $8 + 2 = \_\_$

$12 - 3 = \_\_$

$14 \div 7 = ?$

Enquanto você está confortável com a adição, a subtração, ou seja, o que for você pode trocar a equação um pouco: $9 + \_\_ = 14$

$? \cdot 6 = 18$

Quando você para de usar traços e pontos de interrogação e começa a usar variáveis, tais como x, para representar a parte da equação que você quer resolver, bingo! Você tem um problema de álgebra: $4 + 1 = x$ $12 \div x = 3$

$x - 13 = 30$

Quatros modos para resolver as equações algébricas

Você não precisa chamar um exterminador apenas para matar um micróbio. Do mesmo modo, a álgebra é um material potente, e você não precisa dela sempre para resolver uma equação algébrica.

Falando em geral, você tem quatro modos de resolver as equações algébricas, tais como aquelas que apresento antes, neste capítulo: ✓Observando-as (chamadas também de inspeção ou observando apenas o problema para ter a resposta) ✓Reorganizando-as, usando as operações inversas se necessário ✓Adivinhando e verificando ✓Aplicando álgebra

Observando as equações fáceis

Você pode resolver os problemas fáceis, observando-os apenas. Por exemplo: $5 + x = 6$

Quando você observa este problema, você pode ver que $x = 1$. Quando um problema é fácil e você pode ver a resposta, você não precisa ter nenhum problema para resolvê-lo.

Reorganizar um pouco as equações mais fáceis

Quando você não pode ver uma resposta observando apenas um problema, às vezes reorganizar o problema ajuda a torná-lo um problema que você pode resolver usando as Quatro grandes Operações. Este é o método que uso na parte deste livro, especialmente para resolver as equações com fórmulas, como os problemas de geometria e os problemas envolvendo pesos e medidas. Por exemplo: $6x = 96$

A resposta pode não preterir você, mas lembra-se que este problema significa: $6 \cdot x = 96$

Você pode reorganizar este problema usando as operações inversas, como mostro para você, no Capítulo 4: $96 \div 6 = x$ Agora, resolva o problema pela divisão (longo ou do outro modo) para descobrir que $x = 16$.

Adivinhando e verificando as equações

Você pode resolver algumas equações adivinhando uma resposta e depois, verificar se você está certo. Por exemplo, imagine que você queira resolver a seguinte equação: $3x + 7 = 19$

Para descobrir o que x é igual, comece a adivinhar que $x = 2$. Agora, verifique se você está certo ao substituir 2 por x na equação: $3(2) + 7 = 6 + 7 = 13 < 19$ ERRADO!

Quando $x = 2$, o lado esquerdo da equação é igual a 13 ao invés de 19. Foi uma adivinhação inferior, portanto tente uma adivinhação superior: $x = 5$: $3(5) + 7 = 15 + 7 = 22 > 19$ ERRADO!

Neste momento, sua adivinhação foi grande, portanto tente $x = 4$: $3(4) + 7 = 12 + 7 = 19$ CORRETO!

Com apenas três adivinhações, você descobriu que $x = 4$.

Aplicando álgebra nas equações mais difíceis

Quando uma equação algébrica torna-se bastante difícil, você descobre que observar e reorganizá-la não é suficiente para resolvê-la. Por exemplo: $11x - 13 = 9x + 3$

Provavelmente, você não pode dizer o que x é igual apenas observando este problema. Você não pode resolvê-lo também reorganizando-o usando uma operação inversa. E adivinhar e verificar seria tedioso. É onde a álgebra entra no jogo.

A álgebra é especialmente importante porque você pode seguir as regras matemáticas para descobrir sua resposta. Ao longo deste capítulo, mostro para você como usar as regras da álgebra para tornar os problemas difíceis como este em problemas que você pode resolver.

O Ato de Balanceamento: Resolvendo X

Como mostro para você na seção anterior, alguns problemas são muito complicados para descobrir o que a variável (normalmente x) é igual apenas observando-a ou reorganizando-

a. Para este problemas, você precisa de um método confiável para ter a resposta correta. Chamo este método de balanço de equilíbrio.

O equilíbrio permite-lhe resolver x – isto é, descobrir o número que x representa – em um procedimento de passo a passo que sempre funciona. Nesta seção, mostro para você como usar o método do balanço de equilíbrio para resolver as equações algébricas.

Ocorrendo um equilíbrio

O sinal de igualdade em qualquer equação significa que os dois lados estão equilibrados. Para manter aquele sinal de igualdade, você deve manter aquele equilíbrio. Em outras palavras, o que você faz em um lado de uma equação você deve fazer o mesmo no outro lado.

Por exemplo, aqui está uma equação equilibrada: $\begin{array}{c} 1+2=3 \\ \hline \Delta \end{array}$

Se você somar 1 em um lado da equação, a padronização sairia do equilíbrio.

$$\begin{array}{c} 1+2+1\neq 3 \\ \hline \Delta \end{array}$$

Mas se você somar 1 nos dois lados da equação, a padronização fica equilibrada:

$$\begin{array}{c} 1+2+1=3+1 \\ \hline \Delta \end{array}$$

Você pode somar qualquer número na equação enquanto você faz isso nos dois lados. E em matemática, qualquer número significa x: 1 + 2 + x = 3 + x Lembre-se que x é o mesmo onde quer que ele aparece em uma única equação ou problema.

Esta ideia de mudar os dois lados de uma equação de forma igual não é limitada à adição. Você pode subtrair um x facilmente ou até multiplicar ou dividir por x enquanto faz a mesma coisa nos dois lados da equação: Subtrair: 1 + 2 – x = 3 – x Multiplicar: (1 + 2)x = 3x

Dividir: $\frac{1+2}{x}=\frac{3}{x}$

Usando o balanço de equilíbrio para isolar x

A simples ideia de equilíbrio está no coração da álgebra e permite-lhe descobrir o que é x em várias equações. Quando você resolve uma equação algébrica, o objetivo é isolar x – isto é ter x sozinho em um lado da equação e algum número no outro lado. Nas equações algébricas de dificuldade mediana, este é um procedimento de três passos: 1. Ter todas as constantes (termos diferentes de x) em um lado da equação.

2. Ter todos os termos x no outro lado da equação.

3. Dividir para isolar x.

Por exemplo, dê uma olhada no seguinte problema: $11x - 13 = 9x + 3$

Como você segue os passos, note como mantenho equilibrada a equação a cada passo: 1. Ter todas as constantes em um lado da equação somando 13 nos dois lados da equação:

$$\begin{array}{rrrr} 11x & -13 & =9x & +3 \\ & +13 & & +13 \\ \hline 11x & & =9x & +16 \end{array}$$

Como você obedeceu as regras do balanço de equilíbrio, você sabe que esta nova equação é correta também. E, agora, o único termo diferente de x (16) está no lado direito da equação.

2. Ter os termos x no outro lado subtraindo 9x dos dois lados da equação:

$$\begin{array}{rrr} 11x = & 9x & +16 \\ -9x & -9x & \\ \hline 2x = & & 16 \end{array}$$

De novo, o equilíbrio é preservado, portanto a nova equação é correta.

3. Dividir por 2 para isolar x:

$$\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$$
$$x = 8$$

Para verificar esta resposta, você pode, simplesmente, substituir 8 por x na equação original: $11(8) - 13 = 9(8) + 3$

$88 - 13 = 72 + 3$

$75 = 75$ ✓

Após verificação, portanto 8 é o valor correto de x.

Rearrumando as Equações e Isolando X

Quando você entende como a álgebra funciona como um balanço de equilíbrio, como mostro para você na seção anterior, você pode começar a resolver as equações algébricas mais difíceis. A tática básica é sempre a mesma: Mudando os dois lados da equação de forma igual em todo passo, tente isolar x em um lado da equação.

Nesta seção, mostro para você como colocar suas habilidades do Capítulo 21 para resolver as equações. Primeiro, mostro para você como reorganizar os termos em uma expressão é similar a reorganizá-los em uma equação algébrica. Depois, mostro para você como remover os parênteses de uma equação pode lhe ajudar a resolvê-la. Por fim, você descobre como cruzar a multiplicação é importante para resolver as equações algébricas com frações.

Reorganizando os termos em um lado de uma equação

Reorganizar os termos tornam-se muito importantes quando se trabalha com equações. Por exemplo, imagine você trabalhando com esta equação: $5x - 4 = 2x + 2$

Quando você pensa nisso, esta equação é, de fato, duas expressões conectadas com um sinal de igualdade. E, evidentemente, é verdade para toda equação. Por este motivo, tudo que você descobre sobre as expressões, no Capítulo 21, é útil para resolver as equações. Por exemplo, você pode reorganizar os termos em um lado de uma equação. Portanto, aqui está um outro modo de escrever a mesma equação: $-4 + 5x = 2x + 2$

E aqui está um terceiro modo: $-4 + 5x = 2 + 2x$ Esta flexibilidade para reorganizar os termos fica útil quando você está resolvendo as equações.

Movendo os termos para o outro lado do sinal de igualdade

Antes, neste capítulo, mostro para você como uma equação é similar ao balanço de equilíbrio. Por exemplo, dê uma olhada na Figura 22-1.

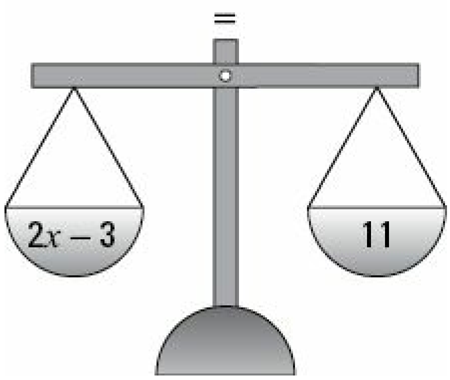


Figura 22-1: Mostrando como uma equação é similar ao balanço de equilíbrio.

Para manter o balanço de equilíbrio, se você somar ou remover alguma coisa em um lado, você deve fazer a mesma coisa no outro lado. Por exemplo:

$$\begin{array}{rrrr} 2x & -3 & =11 & \\ -2x & & & -2x \\ \hline & -3 & =11 & -2x \end{array}$$

Agora, dê uma olhada nestas duas versões desta equação lado a lado: $2x - 3 = 11$ $-3 = 11 - 2x$ Na primeira versão, o termo $2x$ está no lado esquerdo do sinal de igualdade. Na segunda versão, o termo $-2x$ está no lado direito. Este exemplo ilustra uma regra importante.

Quando você move qualquer termo em uma expressão no outro lado do sinal de igualdade, muda seu sinal (de mais para menos ou de menos para mais).

Como outro exemplo, imagine você trabalhando com esta equação: $4x - 2 = 3x + 1$

Você tem x nos dois lados da equação, portanto quer remover o 3x. Quando você move o termo 3x do lado direito para o lado esquerdo, você deve mudar seu sinal de mais para menos (tecnicamente, você está subtraindo 3x dos dois lados da equação): $4x - 2 - 3x = 1$

Depois disso, você pode simplificar a expressão no lado esquerdo da equação, combinando os termos similares: $x - 2 = 1$

Neste ponto, provavelmente você pode observar que $x = 3$ porque $3 - 2 = 1$. Mas apenas para ter certeza, mova termo -2 para o lado direito e mude seu sinal: $x = 1 + 2$

$$x = 3$$

Para verificar este resultado, substitua por 3 onde x aparece na equação original: $4(3) - 2 = 3(3) + 1$

$$12 - 2 = 9 + 1$$

$$10 = 10 \checkmark$$

Como você pode observar, mover os termos de um lado de uma equação para o outro pode ser uma grande ajuda quando você estiver resolvendo equações.

Removendo os parênteses das equações

O Capítulo 21 lhe dá um tesouro de truques para simplificar as expressões e elas ficam muito úteis quando você estiver resolvendo equações. Uma habilidade chave desse capítulo é remover os parênteses das expressões. É também indispensável quando você estiver resolvendo equações.

Por exemplo, imagine você ter a seguinte equação: $5x + (6x - 15) = 30 - (x - 7) + 8$

Sua missão é ter todos os termos x em um lado da equação e todas as constantes no outro. Como a equação está, entretanto, os termos x e as constantes são “fechados juntos” dentro dos parênteses. Isto é, não pode isolar os termos x das constantes. Portanto antes de você poder isolar os termos, você precisa remover os parênteses da equação.

Lembra-se que uma equação é, de fato, apenas duas expressões conectadas por um sinal de igualdade. Portanto, você pode começar a trabalhar com a expressão no lado esquerdo. Nesta expressão, os parênteses começam com um sinal de menos (+), portanto você pode apenas removê-los: $5x + \underline{6x - 15} = 30 - (x - 7) + 8$

Agora, mova a expressão no lado direito. Neste momento, os parênteses vêm depois de um sinal de menos (–). Para removê-los, mude o sinal dos dois termos ded dentro dos parênteses: x torna-se –x e –7 torna-se 7: $5x + 6x - 15 = 30 \underline{- x} \underline{+ 7} + 8$

Bravo! Agora, você pode isolar os termos x para dentro do seu coração. Mova o –x do lado direito para a esquerda, mudando-o para x: $5x + 6x - 15 \underline{+ x} = 30 + 7 + 8$

Depois, mova –15 do lado esquerdo para a direita, mudando-o para 15: $5x + 6x + x = 30 + 7 + 8 \underline{+ 15}$

Agora, combine os termos similares nos dois lados da equação: $12x = 30 + 7 + 8 + 15$

$$12x = 60$$

Por fim, elimine o coeficiente 12, dividindo:

$$\frac{12x}{12} = \frac{60}{12}$$
$$x = 5$$

Como é comum, você pode verificar sua resposta, substituindo 5 na equação original onde x aparece: $5x + (6x - 15) = 30 - (x - 7) + 8$

$5(5) + [6(5) - 15] = 30 - (5 - 7) + 8$

$25 + (30 - 15) = 30 - (-2) + 8$

$25 + 15 = 30 + 2 + 8$

$40 = 40$ ✓

Aqui está mais um exemplo: $11 + 3(-3x + 1) = 25 - (7x - 3) - 12$

Como no exemplo anterior, comece a remover os dois conjuntos de parênteses. Neste momento, entretanto, no lado esquerdo da equação, você não tem sinal nenhum entre 3 e (–3x + 1). Mas de novo, você pode colocar suas habilidades do Capítulo 21 para serem usadas. Para remover os parênteses, multiplique 3 pelos dois termos dentro dos parênteses: $11 - 9x + 3 = 25 - (7x - 3) - 12$

No lado direito, os parênteses começam com um sinal de menos, portanto remova os parênteses mudando todos os sinais dentro dos parênteses: $11 - 9x + 3 = 25 - 7x + 3 - 12$

Agora, você está pronto para isolar os termos x, faço isso em um passo, mas dê muitos passos, conforme você achar melhor: $-9x + 7x = 25 + 3 - 12 - 11 - 3$

Neste ponto, você pode combinar os termos similares: $-2x = 2$

Para acabar, divida os dois lados por –2: $x = -1$

Como sempre, verifique sua solução usando a substituição: $11 + 3(-3x + 1) = 25 - (7x - 3) - 12$

$$11 + 3[-3(-1) + 1] = 25 - [7(-1) - 3] - 12$$

Todas as variáveis sumiram agora, portanto lembre-se que as regras da ordem de precedência do Capítulo 5. Comece com a multiplicação dentro dos parênteses, que sublinhei: $11 + 3(3 + 1) = 25 - (-7 - 3) - 12$

Agora, você pode simplificar o que está dentro de cada conjunto de parênteses: $11 + 3(4) = 25 - (-10) - 12$

E, agora, você pode remover os parênteses e completar a verificação: $11 + 12 = 25 + 10 - 12$

$23 = 23$ ✓

Copie este exemplo e trabalhe com ele poucas vezes com o livro fechado.

Multiplicação cruzada

Em álgebra, a multiplicação cruzada ajuda a simplificar as equações, removendo frações não desejadas (e, honestamente, quando as frações são desejadas? Como discuto no Capítulo 9, você pode usar a multiplicação cruzada para descobrir se duas frações são iguais. Por exemplo, aqui estão duas equações iguais: $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

Quando você cruza a multiplicação delas, você multiplica o numerador de uma fração pelo denominador da outra: $2(6) = 3(4)$ $12 = 12$ ✓

Mas imagine você querer resolver esta equação algébrica: $\frac{x}{2x-2} = \frac{2x+3}{4x}$

Esta equação parece ser complicada. Você não pode fazer a divisão ou cancelar alguma coisa porque a fração no lado esquerdo tem dois termos no denominador e a fração no lado direito tem dois termos no numerador (veja Capítulo 21, para mais informações sobre a divisão dos termos algébricos). Entretanto, um importante pedaço de informação que você tem é que a fração $\frac{x}{2x-2}$ é igual à fração $\frac{2x+3}{4x}$ Portanto, se você cruzar a multiplicação dessa duas frações, você tem dois resultados que também são iguais $x(4x) = (2x + 3)(2x - 2)$ Neste ponto, você tem alguma coisa que você sabe como trabalhar com ela. O lado esquerdo é fácil: $4x^2 = (2x + 3)(2x - 2)$ O lado direito exige um pouco da sigla PFDU (Primeiro, Fora, Dentro e Último) (vá ao Capítulo 21, para mais detalhes): $4x^2 = 4x^2 - 4x + 6x - 6$

Agora, todos os parênteses sumiram, portanto você pode isolar os termos x. Como a maioria destes termos já está no lado direito da equação, isole-os naquele lado: $6 = 4x^2 - 4x + 6x - 4x^2$

Combinar os termos lhe dá uma surpresa agradável: $6 = 2x$

Os dois termos x^2 anulam-se. Você pode ter observado a resposta correta, mas aqui está como terminar:

$$\frac{6}{2} = \frac{2x}{2}$$
$$x = 3$$

Para verificar sua resposta, substitua 3 na equação original:

$$\frac{3}{2(3)-2} = \frac{2(3)+3}{4(3)}$$
$$\frac{3}{6-2} = \frac{6+3}{12}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Após a verificação, portanto a resposta x = 3 é correta.

Capítulo 23

Colocando Sr. X para Funcionar: Problemas Algébricos

Neste Capítulo ► Resolvendo os problemas algébricos com passos simples ► Trabalhando para resolver um problema algébrico ► Escolhendo variáveis ► Usando tabelas

Os problemas de palavras que exigem a álgebra estão entre os problemas mais difíceis que os estudantes enfrentam – e os mais comuns. Os professores gostam apenas dos problemas algébricos porque eles trazem juntos muito do que você conhece, tal como resolver as equações algébricas (Capítulos 21 e 22) e transformando palavras em números (veja Capítulos 6, 13 e 18). E os testes padronizados incluem virtualmente sempre estes tipos de problemas.

Neste capítulo, mostro para você um método de cinco passos para usar a álgebra para resolver os problemas de palavras. Portanto, dou para você um punhado de exemplos que leva você a todos os cinco passos.

Ao longo do caminho, dou para você algumas dicas que podem resolver facilmente os problemas de palavras. Primeiro, mostro para você como escolher uma variável que torna sua equação tão simples quanto possível. Depois, dou para você a prática para organizar a informação do problema dentro de uma tabela. No final deste capítulo, você deve ter um entendimento sólido de como resolver uma ampla variedade de problemas algébricos.

Resolvendo os Problemas Algébricos em Cinco Passos

Tudo nos Capítulos 21 e 22 entra em jogo quando você usa a álgebra para resolver os problemas de palavras, portanto se você se sentir um pouco inseguro em resolver as equações algébricas, veja aqueles capítulos para uma revisão.

Através desta seção, uso o seguinte problema de palavras como exemplo: Em três dias, Alexandra vendeu um total de 31 ingressos para o jogo da escola dela. Na terça-feira, ela vendeu duas vezes mais ingressos que na quarta-feira. E na quinta-feira, ela vendeu exatamente 7 ingressos. Quantos ingressos a Alexandra vendeu a cada dia. De terça a quinta?

Organizar a informação em um problema algébrico usando uma tabela ou uma figura é normalmente útil. Aqui está o que juntei:

Terça-feira:	duas vezes mais que na quarta-feira
Quarta-feira:	?
Quinta-feira:	7
Total:	31

Neste ponto, toda a informação está na tabela, mas a resposta pode não preterir você ainda. Nesta seção, sublinho um método de passo a passo que lhe permite resolver este problema e os mais difíceis também.

Aqui estão os cinco passos para resolver a maioria dos problemas algébricos: **1. Considerar uma variável**

2. Estabelecer a equação

3. Resolver a equação

4. Responder a pergunta do problema

5 Verificar sua resposta

Considerando uma variável

Como você conhece no Capítulo 21, uma variável é uma letra que representa um número. Na maioria das vezes, você não descobre a variável x (ou qualquer outra variável, para aquele caso) em um problema de palavras. Isso não significa que você não precisa da álgebra para resolver o problema. Significa apenas que você terá de colocar x no seu próprio problema e decidir o que ele representa.

LEMBRE-SE Quando você considera uma variável, você diz o que aquela variável significa no problema que você está resolvendo.

Aqui estão alguns exemplos de variáveis consideradas: Vamos colocar m = o número de ratos mortos que o gato arrastou dentro da casa.

Vamos colocar p = o número de vezes que o marido da Marianne prometeu tirar o lixo.

Vamos colocar c = o número de queixas que Arnold recebeu depois de pintar a porta da garagem dele de roxo.

Em cada caso, você tem uma variável (m, p ou c) e dá a ela um sentido anexando a ela um número.

Note que a tabela anterior para o problema da amostra tem um grande ponto de interrogação perto de quarta-feira. Este ponto de interrogação representa um número, portanto você pode querer considerar uma variável que representa este número. Aqui está como você faz isso: Vamos colocar w = o número de ingressos que a Alexandra vendeu na quarta-feira.

Quando for possível, escolha uma variável com a mesma inicial conforme o que representa a variável. Esta prática faz lembrar o que a variável significa um pouco mais fácil, o que lhe ajudará depois no problema.

Para o restante do problema, a todo momento você observa a variável w mantendo em mente que ele representa o número de ingressos que Alexandra vendeu na quarta-feira.

Estabelecendo a equação

Depois de ter uma variável com que trabalhar, você pode entrar no problema de novo e descobrir outros modos de usar esta variável. Por exemplo, a Alexandra vendeu duas vezes mais ingressos na terça-feira que na quarta-feira, portanto ela vendeu 2w ingressos na terça-feira. Agora você tem muito mais informação para preencher na tabela:

Terça-feira	Duas vezes mais que na quarta-feira	2w
Quarta-feira	?	w
Quinta-feira	7	7
Total:	31	31

Você sabe que o número total de ingressos ou a soma dos ingressos que ela vendeu na terça-feira, quarta-feira e quinta-feira é 31. Com a tabela preenchida como aquela, você está pronto para estabelecer uma equação para resolver o problema: $2w + w + 7 = 31$

Resolvendo a equação

Depois de estabelecer uma equação, você pode usar os truques do Capítulo 22 para resolver a equação w. Aqui está a equação mais de uma vez: $2w + w + 7 = 31$

Para os iniciantes, lembrem que 2w significa, de fato, $w + w$. Portanto, à esquerda, você sabe que tem $w + w + w$ ou 3w; você pode simplificar a equação um pouco como segue: $3w + 7 = 31$

O objetivo, neste ponto, é tentar obter todos os termos com w em um lado da equação e todos os termos sem w no outro lado. Portanto, no lado esquerdo da equação, você quer eliminar 7. O inverso da adição é a subtração, portanto subtraia 7 nos dois lados:

$$\begin{array}{lll} 3w & +7 & = 31 \\ & -7 & -7 \\ \hline 3w & & = 24 \end{array}$$

Agora, você quer isolar w no lado esquerdo da equação. Para fazer isso, você deve suprimir a multiplicação por 3, portanto divida os dois lados por 3:

$$\frac{3w}{3} = \frac{24}{3}$$
$$w = 8$$

Respondendo a pergunta

Você pode ter pensado que depois de receber a equação, você acabou. Mas você tem ainda um pouco mais de trabalho. Volte ao problema e observe que ele lhe faz esta pergunta: Quantos ingressos a Alexandra vendeu a cada dia. De terça-feira a quinta-feira?

Neste ponto, você tem uma informação que pode lhe ajudar a resolver o problema. O problema lhe diz que Alexandra vendeu 7 ingressos na quinta-feira. E como w = 8, agora você sabe que ela vendeu 8 ingressos na quarta-feira. E na terça-feira, ela vendeu duas vezes mais que na quarta-feira, portanto ela vendeu 16. Portanto Alexandra vendeu 16 ingressos na terça-feira, 8 na quarta-feira e 7 na quinta-feira.

Verificando seu trabalho

Para verificar seu trabalho, compare sua resposta com o problema, linha por linha, para ter certeza de que toda expressão no problema é verdadeira: Nos três dias, Alexandra vendeu um total de 31 ingressos para o jogo da escola dela.

Está correto, porque 16 + 8 + 7 = 31.

Na terça-feira, ela vendeu duas vezes mais ingressos que na quarta-feira.

Correto, porque ela vendeu 16 ingressos na terça-feira e 8 na quarta-feira.

E, na quinta-feira, ela vendeu exatamente 7 ingressos.

Sim, está correto também, portanto você está bem para continuar.

Escolhendo Sua Variável Cuidadosamente

LEMBRE-SE

Considerar uma variável é simples, como mostro para você antes, neste capítulo, mas você pode tornar o restante de seu trabalho muito mais fácil quando você sabe como escolher sua variável cuidadosamente. Quando for possível, escolha uma variável para que a equação que você deve resolver não tenha frações, que são muito mais difíceis para se trabalhar do que com os números inteiros.

Por exemplo, imagine você tentando resolver este problema: Irina tem três vezes mais clientes que Toby. Se eles têm 52 clientes juntos, quantos clientes cada pessoa tem?

A frase chave do problema é “Irina tem três vezes mais clientes que Toby”. Tem significado porque ela indica uma relação entre Irina e Toby que é baseada na multiplicação ou na divisão. E para evitar as frações, você quer evitar a divisão onde é possível.

Quando você observa uma frase que indica que você deve usar a multiplicação ou a divisão, escolha sua variável para representar o número menor. Neste caso, Toby tem menos clientes que Irina, portanto escolher t como sua variável é o gesto inteligente.

Imagine você começar a considerar sua variável como segue: Vamos colocar t = o número de clientes que Toby tem.

Portanto, usando aquela variável você pode fazer esta equação:

Irina	$3t$
Toby	t

Sem fração! Agora, para resolver este problema, estabeleça esta equação: Irina + Toby = 52

Coloque os valores da tabela: $3t + t = 52$

Agora, você pode resolver o problema facilmente usando o que mostro para você, no Capítulo 22: $4t = 52$

$$t = 13$$

Toby tem 13 clientes, portanto Irina tem 39. Para verificar este resultado – que recomendo muito antes neste capítulo – note que $13 + 39 = 52$.

Agora, imagine que apesar disso, você pega o caminho oposto e decide considerar uma variável, como segue: Vamos colocar i = o número de clientes que Irina tem.

Dada aquela variável, você deveria representar os clientes de Toby usando a fração $i/3$, que conduz à mesma resposta mas muito mais trabalho.

Resolvendo os Problemas Algébricos Mais Complexos

Os problemas algébricos ficam mais complexos quando o número de pessoas ou coisas que você precisa descobrir aumenta. Nesta seção, a complexidade aumenta de duas ou três pessoas para quatro ou, então, cinco pessoas. Quando você acaba, você deve se sentir confortável resolvendo os problemas algébricos de dificuldade significante.

Traçando uma tabela para quatro pessoas

Como na seção anterior, uma tabela pode lhe ajudar a organizar a informação, portanto você não fica confuso. Aqui está um problema que envolve quatro pessoas: Alison, Jeremy, Liz e Raymond participaram em uma campanha de bens enlatados no trabalho. Liz doou três vezes mais latas que Jeremy, Alison doou duas vezes mais que Jeremy e Raymond doou 7 vezes mais que Liz. Junto as duas mulheres doaram duas vezes mais latas que os dois homens. Quantas latas as quatro pessoas doaram junto?

O primeiro passo, como sempre, é considerar uma variável. Lembre-se que para evitar as frações, você quer considerar uma variável baseada na pessoa que obteve o menor número de latas. Mas Liz doou mais latas que Jeremy, assim como Alison. Além disso, Raymond doou mais latas que Liz. Portanto, como Jeremy doou o menos número de latas, considere sua variável como segue: Vamos colocar j = o número de latas que Jeremy doou Agora, você pode estabelecer sua tabela como segue:

Jeremy	j
Liz	3j
Alison	2j
Raymond	Liz + 7 = 3j + 7

Isso parece ser bom porque, como esperado, não existem somas de frações na tabela. A próxima frase lhe diz que as mulheres doaram duas vezes mais latas que os homens, portanto crie um problema de palavras, como mostro para você, no Capítulo 6: Liz + Alison = Jeremy + Raymond + 2

Você pode substituir agora esta equação, como segue: $3j + 2j = j + 3j + 7 + 2$

Com sua equação estabelecida, você está pronto para resolver. Primeiro, isole os termos algébricos: $3j + 2j – j – 3j = 7 + 2$

Combine os termos similares: $j = 9$

Quase sem esforço, você resolveu a equação, portanto você sabe que Jeremy doou 9 latas. Com esta informação, você pode voltar para a tabela, colocar 9 no j e descobrir quantas latas as outras crianças doaram: Liz doou 27, Alison doou 18 e Raymond doou 34. Por fim, você pode somar estes números para concluir que quatro pessoas doaram 88 latas juntos.

Para verificar os números, leia do começo ao fim o problema e tenha certeza de que eles funcionam em todos os pontos da história. Por exemplo, juntas Liz e Alison doaram 45 latas e Jeremy e Raymond doaram 43, portanto as mulheres doaram, de fato, 2 latas a mais que os homens.

Cruzando a linha de chegada com cinco pessoas

Aqui está um exemplo final, o mais difícil, neste capítulo, desconsiderar qual você deve trabalhar com cinco pessoas.

> Cinco amigos estão mantendo o número de milhas percorridos por eles. Por enquanto, neste mês, Mina correu 12 milhas, Suzanne correu 3 milhas a mais que Jake e Kyle correu duas vezes tanto quanto Victor. Mas amanhã, depois de eles completarem 5 milhas de corrida, Jack irá correr tanto quanto Mina e Victor unidos e todo o grupo irá correr 174 milhas. Quanto cada pessoa correu por enquanto?

A coisa mais importante para notar neste problema é que existem dois conjuntos de números: as milhas que todas as cinco pessoas correram hoje e sua milhagem incluindo amanhã. E a milhagem de amanhã de cada pessoa será cinco vezes maior do que a milhagem de hoje dele ou dela. Aqui está como estabelecer uma tabela:

	Hoje	***Amanhã (Hoje + 5)***
Jake		
Kyle		
Mina		
Suzanne		
Victor		

Com esta tabela, você está livre para começar bem a resolução deste problema. Depois, procure antes aquela expressão do problema que conecta duas pessoas pela multiplicação ou pela divisão. Aqui está ela: ....Kyle correu duas vezes tanto quanto Victor.

Como Victor correu menos milhas que Kyle, considere sua variável como segue: Vamos colocar v = o número de milhas que Victor correu hoje.

Note que acrescentei a palavra hoje para que seja claro que estou falando das milhas de Victor antes das 5 milhas de amanhã.

Neste ponto, você pode começar a preencher a tabela:

	Hoje	***Amanhã (Hoje + 5)***
Jake		
Kyle	2v	2v + 5
Mina	12	17
Suzanne		

Victor	v	v + 5

Como você pode observar, abandonei a informação sobre Jake e Suzanne porque não posso representá-la usando a variável v. Comecei também a preencher a coluna de Amanhã somando 5 aos meus números na Coluna de Hoje.

Agora, posso mover a próxima expressão do problema: Mas amanhã...Jake irá correr tanto quanto Mina e Victor unidos....

Posso usar esta informação para preencher a informação sobre Jake:

	Hoje	***Amanhã (Hoje + 5)***
Jake	17 + v	17 + v + 5
Kyle	2v	2v + 5
Mina	12	17
Suzanne		
Victor	v	v + 5

Neste caso, primeiro preenchi a distância de amanhã do Jake (17 + v + 5) e, depois, subtraí 5 para descobrir sua distância de hoje. Agora, posso usar a informação de que hoje Suzanne correu 3 milhas a mais que Jake:

	Hoje	***Amanhã (Hoje + 5)***
Jake	17 + v	17 + v + 5
Kyle	2v	2v + 5
Mina	12	17
Suzanne	17 + v + 3	17 + v + 8
Victor	v	v + 5

Com a tabela preenchida como esta, você pode começar a estabelecer sua equação. Primeiro, estabeleça uma equação de palavras, como segue: Jake amanhã + Kyle amanhã + Mina amanhã + Suzanne amanhã + Victor amanhã = 174

Agora, substitua apenas a informação da tabela dentro da equação de palavras para estabelecer sua equação: $17 + v + 5 + 2v + 5 + 17 + 17 + v + 8 + v + 5 = 174$

Como sempre, comece a resolver a equação isolando os termos algébricos.

$$v + 2v + v + v = 174 - 17 - 5 - 5 - 17 - 17 - 8 - 5$$

Depois, combine os termos similares: $5v = 100$

$$\frac{5v}{5} = \frac{100}{5}$$

Por fim, para eliminar o coeficiente no termo 5v, divida os dois lados por 5: $v = 20$

Agora, você sabe que o total da distância do Victor até hoje é de 20 milhas. Com esta informação, você substitui 20 por v e preenche a tabela, como segue:

	Hoje	*Amanhã (Hoje + 5)*
Jake	37	42
Kyle	40	45
Mina	12	17
Suzanne	40	45
Victor	20	25

A coluna Hoje contém as respostas para a pergunta do problema. Para verificar esta solução, tenha certeza de que toda expressão no problema é verdadeira. Por exemplo, amanhã as cinco pessoas irão correr um total de 174 milhas porque 42 + 45 + 17 + 45 + 25 = 174

Copie este problema, feche o livro e pratique.

Parte VI

A Parte dos Dez

Nesta parte...

Apenas para diversão, esta parte do livro inclui algumas listas de dez mais nos tópicos relacionados à matemática. Mostro para você alguns conceitos importantes de matemática que você deve se lembrar. E listo alguns conjuntos importantes de números.

Capítulo 24

Dez Conceitos-Chaves de Matemática que Você não Deve Ignorar

Neste Capítulo ► Apreciando o quanto os conceitos simples são indispensáveis na matemática ► Vendo por que π e os números primos são importantes ► Entendendo a importância dos conjuntos e das funções ► Observando os conceitos mais avançados

A própria matemática é um grande conceito repleto de pequenos subconceitos que nenhuma pessoa, entretanto, estudará muito tempo para, possivelmente, entendê-lo.

Mas dentro de tudo isso, alguns conceitos têm tanto airplay que na minha humilde opinião, eles criam o Hall da Fama da Matemática. Cada um destas ideias mudou não apenas a matemática, mas, também, a forma como as pessoas pensavam o mundo. Conhecê-las pode mudar seu mundo também — ou pelo menos, dá para você uma perspectiva mais ampla sobre o que é a matemática.

Portanto, aqui está minha lista dos dez conceitos mais importantes da matemática.

Obtendo Conjunto com Conjuntos

Um conjunto é uma coleção de objetos. Os objetos chamados elementos do conjunto podem ser tangível (sapatos, linces, pessoas, jujubas e assim por diante) ou intangível (caracteres fictícios, ideias, números e os parecidos).

Os conjuntos são uma forma simples e flexível para organizar o mundo que você pode definir todos os termos da matemática. Como os matemáticos fazem isto, é muito complexo, mas o entendimento básico dos conjuntos não é difícil e é parte da maioria da matemática. Veja Capítulo 20 para mais detalhes sobre a teoria de conjunto e no Capítulo 25 para alguns conjuntos de número significante.

Jogando com Números Primos

Um número primo é qualquer número contável que tem exatamente dois divisores (números que dividem nele igualmente) – 1 e o próprio número. Aqui estão os primeiros dez números primos:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29...

Os números primos continuam para sempre – isto é, a lista é infinita.

Além disso, os números primos são, em um sentido importante, os elementos a partir dos quais todos os outros números podem ser construídos. Todo número contável maior que 1, não importa o tamanho, pode ser escrito como o único produto de números primos.

Muito mais que apenas um curioso ato de café-pequeno, a singularidade dos fatores de cada número primo passa por um nome muito mais importante: O Teorema Fundamental da Aritmética. Veja os Capítulos 1 e 7 para mais detalhes sobre os primos números.

Zero: Muita pressão sobre Nada

Zero pode parecer um grande nada, mas é, de fato, uma das maiores invenções de todos os tempos. Como todas as invenções, ele não existia até que alguém pensasse nele. Os Grecos e os Romanos que conheciam muito sobre a matemática e a lógica e não conheciam nada sobre zero. Os sistemas de número que eles usavam não tiveram como expressar, por exemplo, quantas oliveiras você tinha abandonado quando você começou com três e um vizinho zangado cortou três delas.

O conceito de zero como um número surgiu independentemente em vários lugares diferentes. Na América do Sul, o sistema de número que os Maia usavam incluíam um símbolo para zero. E o sistema hindu-arábico usado na maior parte do mundo hoje desenvolvido a partir do antigo sistema arábico que usou zero como um marcador de lugar).

De fato, zero não é, de fato, nada – é, simplesmente, uma forma de expressar nada matematicamente. E é, normalmente, alguma coisa.

Tornando-se Grego: Pi (π)

O símbolo π (pi – pronunciado pi) é uma letra Grega que representa a proporção entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro (veja Capítulo 16 sobre os círculos). Aqui está o valor aproximado de π : π = 3,1415926535...

Embora π seja apenas um número – ou, em termos algébricos, uma constante – ele é importante para vários motivos: ✓A geometria não seria o mesmo sem ele. Os círculos são uma das maiores formas básicas da geometria, e você precisa de π para medir a área e a circunferência de um círculo. Portanto, se alguns extraterrestres parassem no seu campo de cereais e você quer medir os círculos de colheita resultantes ou se você quisesse saber a área de sua mesa de cozinha redonda, π pode ser útil.

✓ Pi é um número irracional, o que significa que nenhuma fração igual a ele existe, de fato. Além disso, π é um número transcendental, o que significa que nunca é o valor de x em uma equação polinomial (o tipo mais básico da equação algébrica). Portanto, embora π apareça de uma simples operação (medindo um círculo), ele contém uma complexidade profunda de que os números tais como 0, 1, –1, ½ e até $\sqrt{2}$ não compartilham. (Veja Capítulo 25, para mais detalhes sobre os números transcendentais e irracionais.) ✓Pi está em todo lugar na matemática. Ele mostra constantemente (sem trocadilhos) onde você esperaria por ele, pelo menos. Um exemplo é a trigomometria, o estudo dos triângulos. Os triângulos não são obviamente círculos, mas a trigomometria usa os círculos para medir o tamanho dos ângulos, e você não pode virar um compasso sem acertar π.

No Nível: Sinais de igualdade e Equações

Quase todo mundo toma o humilde sinal de igualdade para concordar. É muito comum na matemática que ele fica virtualmente despercebido. Mas o fato de que o sinal de igualdade destaca praticamente em todo lugar aumenta apenas o peso da ideia de que o conceito de igualdade – um entendimento de quando uma coisa é matematicamente a mesma que a outra – é um dos mais importantes conceitos da matemática jamais criados.

Uma expressão matemática com um sinal de igualdade é uma equação. O sinal de igualdade relaciona duas expressões matemáticas que têm o mesmo valor. A potência da matemática fica nesta relação. Razão pela qual quase tudo na matemática envolve equações. As próprias expressões são limitadas as suas utilidades. O sinal de igualdade fornece um modo potente para conectar as expressões, o que permite aos cientistas conectarem as ideias em novas formas.

Por exemplo, em milhares de anos, a energia e a matéria foram vistas como separadas e sem relação. A famosa equação de Einstein — *E = mc2* — relaciona uma expressão que representa a energia com uma expressão que representa a matéria. O resultado é uma visão radicalmente alterada do universo.

Para mais detalhes sobre como os conceitos de igualdade e de equilíbrio esgotam na álgebra, veja no Capítulo 22.

Na Grade: O Gráfico Cartesiano

O gráfico Cartesiano (chamado também o sistema de coordenadas cartesianas) é o nome desejado para o bom e velho gráfico que discuto no Capítulo 17. Ele foi inventado pelo matemático e filósofo francês René Descartes.

O que é tão especial no gráfico Cartesiano? Antes da invenção do gráfico, a álgebra e a geometria eram estudadas durante séculos como duas áreas de matemática separadas e sem relação. A álgebra era exclusivamente o estudo das equações (veja Parte V) e a geometria era exclusivamente o estudo das figuras no plano ou no espaço (veja Capítulo 16).

A invenção do gráfico por Descartes trouxe junto a álgebra e a geometria. O resultado era a geometria analítica, uma nova matemática que não emergiu apenas as antigas ciências da álgebra e da geometria, mas trouxe, também, maior clareza de ambas. Agora, você pode desenhar as soluções para as equações que incluem as variáveis x e y como pontos, linhas, círculos e outras formas de geometria em um gráfico.

Entrada ou Saída: Confiando nas Funções

Uma função é uma máquina matemática que contém um número (chamado a entrada) e exprime exatamente um outro número (chamado a saída). É um tipo de misturador porque o que você tira dele depende do que você coloca nele. Quando você coloca um sorvete, você consegue um milk-shake. Quando você coloca uma fruta você consegue uma batida. Quando você coloca seu telefone celular, você consegue um telefone celular danificado horrivelmente.

Imagine eu inventar uma função chamada MaisUm que soma 1 a qualquer número. Portanto, quando você coloca o número 2, o número que você tira é 3: MaisUm(2) = 3

Do mesmo modo, quando você coloca o número 100, o número que você tira é 101: MaisUm(100) = 101

Como você pode observar, quando você coloca um número par, a função MaisUm tira um número ímpar. E isso acontecerá para todo número par. Portanto, esta função mapeia o conjunto de números pares ao conjunto de números ímpares.

Este procedimento pode parecer mais simplista, mas como os conjuntos, a simplicidade das funções dá a eles sua potência. As funções permitem aos matemáticos – e um hóspede de outras pessoas tais como programadores de computadores, estatísticos, biólogos, economistas e psicólogos – para perceber uma palavra complexa em uma forma matemática.

As funções têm muitas partes, conforme você se move na álgebra. Neste instante, lembre-se que uma função tem uma entrada e uma saída. Para um olhar mais profundo sobre as funções, veja o livro Álgebra para Leigos de Mary Jane Sterling (Wiley).

Explorando o Infinito

A palavra infinito comanda uma grande potência. O mesmo acontece com o símbolo do infinito (∞). Qual é o tamanho do infinito? Aqui está uma resposta comum: Se você fosse somar todos os grãos de areia de todas as praias do mundo e depois fazer a mesma coisa em todo planeta de nossa galáxia, a próposito você estava somando, você não chegaria nem perto do infinito do que onde está agora. Yessiree, é grande. (Você não gostaria de visitar todos aqueles outros planetas?

De fato, o infinito não é um número. O infinito, além de qualquer classificação de tamanho ou número, é a qualidade da infinidade. E ainda os matemáticos dominaram o infinito para um ótimo alcance.

Em sua invenção de cálculo, Sr. Isaac Newton apresentou o conceito de um limite, o que lhe permite calcular o que acontece com os números, conforme eles ficam muito grandes e aproximam-se do infinito. E na sua matemática transfinita, Geoges Cantor provou que o infinito que acabei de descobrir é apenas o menor conjunto dos infinitos maiores. E aqui está o chutador: Este conjunto de infinitos maiores é infinito. (Veja Capítulo 25 para mais detalhes sobre os números transfinitos de Cantor.)

A Real Reta Numerada

A reta numerada esteve presente a cerca de um longo tempo e ela é uma das primeiras ajudas que os professores usam para ensinar números às crianças. Todo ponto na reta numerada representa um número. Bem, parece ser muito óbvio mas estranho para dizer este conceito não foi bem entendido durante milhares de anos.

O filósofo grego Zeno de Elea colocou este problema chamado Paradoxo de Zeno: Para atravessar o quarto você deve andar metade da distância (½) do quarto. Depois você deve ir até metade do restante da distância (¼). Depois disso, você deve ir até metade da distância que resta ainda (1/8). Este padrão continua para sempre:

$$\frac{1}{2}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{8}\quad \frac{1}{16}\quad \frac{1}{32}\quad \frac{1}{64}\quad \frac{1}{128}\quad \frac{1}{256}\quad \ldots$$

Portanto, você nunca pode chegar ao outro lado do quarto.

Obviamente no mundo real, você pode e atravessa os quartos o tempo todo. Mas a partir do ponto de vista da matemática, o Paradoxo de Zeno e os outros paradoxos similares ficaram sem resposta por 2000 anos.

O problema básico era: Todas as frações listadas na sequência anterior estão entre 0 e 1 na reta numerada. E existe um número infinito delas. Mas como você pode ter um número infinito de números em um espaço finito?

Os matemáticos do século XIX – Augustin Cauchy, Richard Dedekind, Karl Weierstrass e George Cantor o maior deles – resolveram este paradoxo. O resultado foi uma análise real, a matemática avançada da reta numerada real.

O Número Imaginário i

Os números imaginários são um conjunto de números não descobertos na reta numerada. Se a ideia parece inacreditável – Onde mais eles estariam? – não se preocupe: Durante milhares de anos, os matemáticos não acreditavam neles. Mas as aplicações do mundo real na eletrônica, nas partículas da física e em muitas outras áreas da ciência, tornaram céticos em crentes. Portanto, se seus planos de verão incluírem a instalação elétrica de seu laboratório subterrâneo ou a construção do capacitor de fluxo da máquina do tempo – ou, talvez, estudar apenas para ser graduado em engenharia elétrica – você descobrirá que os números imaginários são muito importantes para serem ignorados.

Veja o Capítulo 25, para mais informação sobre os números complexos e imaginários.

Capítulo 25

Dez Conjuntos de Números Importantes que Você Deve Conhecer

Neste Capítulo

► Identificando números contáveis, números inteiros, números racionais e números reais
► Descobrindo números complexos e imaginários ► Observando como os números transfinitos representam os níveis mais altos do infinito

Quanto mais você descobre números mais estranhos eles ficam. Quando você estiver trabalhando apenas com os números contáveis e com algumas operações simples, os números parecem desenvolver sua paisagem. O terreno desta paisagem começa sem movimento, mas, conforme você apresenta os outros conjuntos, ele se torna logo surpreendente, chocante até afetando intensamente a mente ou as emoções. Neste capítulo, levo você a uma viagem na consciência mais ampla de dez conjuntos de números.

Começo com os números contáveis mais comuns e confortáveis. Continuo com os números inteiros (números contáveis negativos e positivos e 0), os números racionais (números inteiros e frações) e os números reais (todos os números da reta numerada). Levo você também em poucas rotas secundárias ao longo do caminho. A viagem termina com os números transfinitos quase inacreditáveis e bizarros. E em um caminho, os números transfinitos traz você de volta onde você começou no início — com os números contáveis.

Cada um destes conjuntos de números tem um objetivo diferente, algum comum (tal como contabilidade ou marcenaria), algum científico (tal como a eletrônica e a física) e algum objetivo puramente matemático. Aproveite a carona!

Somando Números Contáveis (ou Naturais)

Os números contáveis – chamados também os números naturais – são provavelmente os primeiros números que você já encontrou. Eles começam com 1 e sobem a partir dali: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

LEMBRE-SE

Os três pontos (ou elipse) no final informam-lhe que a sequência de números continuam para sempre – em outras palavras, é infinito.

Os números contáveis são importantes para manter os objetos tangíveis: pedras, cozinhas, carros, telefones celulares – qualquer coisa que você pode tocar e que você não planeja cortar em pedaços.

O conjunto de números contáveis é *fechado* debaixo da adição e da multiplicação. Isto é, se você somar ou multiplicar quaisquer dois números contáveis, o resultado será também um número contável. Mas o conjunto não é fechado debaixo da subtração ou da divisão. Por exemplo, se você subtrair 2 – 3, você tem –1, que é um número negativo do que um número contável. E se dividir 2 ÷ 3, você tem 2/3, que é uma fração.

Se você colocar 0 no conjunto de números contáveis, você tem o conjunto de números inteiros.

Identificando Números Inteiros

O conjunto de números inteiros inclui os números contáveis (veja a seção anterior), os números contáveis negativos e 0: ...., –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Os pontos ou elipses, no início e no final do conjunto lhe diz que os números inteiros são infinitos nas direções negativa e positiva.

Como os números inteiros incluem os números negativos, você pode usá-los para manter qualquer coisa que pode envolver potencialmente dívida. Na cultura de hoje, é normalmente dinheiro. Por exemplo, se você tiver $ 100 na sua conta corrente e escrever um cheque de $ 120, você descobre que seu novo saldo baixará para –$20 (sem somar nenhuma taxa que o banco cobra!).

O conjunto de números inteiros é fechado debaixo da adição, subtração e multiplicação. Em outras palavras, se você somar, subtrair ou multiplicar quaisquer dois números inteiros, o resultado é, também, um número inteiro. Mas o conjunto não é fechado debaixo da divisão. Por exemplo, se você dividir o número inteiro –2 pelo número inteiro 5, você tem a fração –2/5, que não é um número inteiro.

Conhecendo o Racional atrás dos Números Racionais

Os números racionais incluem os números inteiros (veja a seção anterior) e todas as frações entre os números inteiros. Aqui, eu listo apenas os números racionais de –1 a 1 cujos denominadores (números na parte inferior) são números positivos inferiores a 5:

$$\ldots -1 \ldots -\frac{3}{4} \ldots -\frac{2}{3} \ldots -\frac{1}{2} \ldots -\frac{1}{3} \ldots -\frac{1}{4} \ldots 0 \ldots \frac{3}{4} \ldots \frac{2}{3} \ldots \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{4} \ldots 1 \ldots$$

As elipses informam-lhe que entre qualquer par de números racionais existe um número infinito de outros números racionais – uma qualidade chamada a densidade infinita de números racionais.

Em geral os números racionais são usados para a medida na qual a precisão é importante.

Por exemplo, uma régua não seria muito boa se ela fosse medir o comprimento da polegada mais próxima. A maioria das réguas mede o comprimento mais perto de 1/16 de uma polegada, que é bastante próxima para meus objetivos. Do mesmo modo, medir copos, escalas, precisão dos relógios e os termômetros que lhe permitem criar medidas para uma fração de uma unidade usam também os números racionais. (Veja Capítulo 15, para mais detalhes sobre as unidades de medida.) O conjunto de números racionais é fechado debaixo das Quatro Grandes Operações. Isto é, se você pegar quaisquer dois números racionais e somar, subtrair, multiplicar ou dividi-los, o resultado é sempre um outro número racional.

Sentido dos Números Irracionais

Em um sentido, os números irracionais são um tipo de pega tudo; todo número na reta numerada que não é racional é irracional.

Por definição, nenhum número irracional pode ser representado como uma fração; nem nenhum número irracional pode ser representado como um decimal terminativo ou um decimal repetitivo (veja Capítulo 11, para mais detalhes sobre estes tipos de decimais).

Em substituição, um número irracional pode ser aproximadamente apenas como um decimal não-terminativo, não-repetitivo: a série de números depois da vírgula decimal continua para sempre sem criar um padrão.

O exemplo mais famoso de um número irracional é π, que representa a circunferência de um círculo com um diâmetro de 1 unidade. Um outro número irracional é $\sqrt{2}$, que representa a distância da diagonal de um quadrado com um lado de 1 unidade. De fato, todas as raízes quadradas dos números não quadrados (tais como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e assim por diante) são números irracionais.

Os números irracionais preenchem os espaços na reta numerada real. (A reta numerada real é apenas a reta numerada com a qual você se acostumou, mas é contínua; ela não tem intervalos para que todo ponto faça par com um número.) Estes números são usados em muitos casos em que você não precisa de apenas um alto nível de precisão, como nos números racionais, mas o valor exato de um número que não pode ser representado como uma fração.

Os números irracionais escondem-se em duas variedades: números algébricos e números transcendentais. Discuto dois destes tipos de números nas seções que seguem.

Absorvendo Números Algébricos

Para entender os números algébricos, você precisa de uma pequena informação sobre as equações polinomiais. Uma equação polinomial é uma equação algébrica que encontra as seguintes condições: ✓Suas operações são limitadas à adição, subtração e multiplicação.

Em outras palavras, você não deve dividir por uma variável.

✓ Suas variáveis são elevadas apenas para positivo, expoentes do número inteiro.

Você pode descobrir mais detalhes sobre as equações polinomiais no livro Álgebra para Leigos de Mary Jane Sterling (Wiley). Aqui estão algumas equações polinomiais:

$$2x + 14 = (x + 3)^2$$

$$2x^2 - 9x - 5 = 0$$

Todo número algébrico destaca a solução de pelo menos uma equação polinomial. Por exemplo, imagine que você tenha a seguinte equação: $x^2 = 2$

Você pode resolver esta equação como $x = \sqrt{2}$. Portanto $\sqrt{2}$ é um número algébrico cujo valor aproximado é 1,4142135623.... (veja Capítulo 4 para mais informações sobre as raizesraízes quadradas).

Movendo-se nos Números Transcendentes

Um número transcendental, em contraste a um número algébrico (veja a seção anterior), nunca é a solução de uma equação polinomial. Como os números irracionais, os números transcendentais são também, um tipo de pega tudo: Todo número na reta numerada que não algébrico é transcendental.

O número transcendental mais conhecido é π cujo valor aproximado é 3,1415926535... Seu uso começa na geometria, mas se estende virtualmente para todas as áreas da matemática. (Veja Capítulos 16 e 24, para mais detalhes sobre π).

Os outros importantes números transcendentais acontecem quando você estuda a trigonometria, a matemática dos triângulos retângulos. Senos, co-senos, tangentes e outras funções trigonométricas são muitas vezes, números transcendentais.

Um outro importante número transcendental, cujo o valor aproximado é 2,7182818285... O número é a base do logaritmo natural que você não usará provavelmente até você ter o pré-cálculo ou cálculo. As pessoas usam e para resolver problemas sobre juros compostos, crescimento da população, desintegração e o semelhante.

Baseando-se nos Números Reais

O conjunto de números reais é o conjunto de todos os números irracionais e racionais (veja as seções anteriores). Os números reais compreendem todo ponto na reta numerada.

Como os números racionais (veja antes, neste capítulo, “Conhecendo o Racional Atrás dos Números Racionais”), o conjunto de números reais é fechado debaixo das Quatro Grandes Operações. Isto é, se você pegar quaisquer dois números reais e somar, subtrair, multiplicar ou dividi-los, o resultado será sempre um outro número real.

Tentando imaginar Números Imaginários

Um número imaginário é qualquer número real multiplicado por $\sqrt{-1}$.

Para entender o que é muito estranho nos números imaginários, isso ajuda você a conhecer um pouco sobre as raízes quadradas. A raiz quadrada de qualquer número é um segundo número que, quando multiplicado por ele mesmo, lhe dá o primeiro número. Por exemplo, a raiz quadrada de 9 é 3 porque $3 \cdot 3 = 9$ E a raiz quadrada de 9 é, também, – 3 porque $-3 \cdot -3 = 9$ (Veja Capítulo 4, para mais detalhes sobre as raízes quadradas e a multiplicação dos números negativos.) O problema para descobrir $\sqrt{-1}$ é que ela não está na reta numerada (porque ela não está no conjunto dos números reais). Se ela fosse na reta numerada real, ela seria um número positivo, um número negativo ou 0. Mas quando você multiplica qualquer número positivo por ele mesmo, você tem um número positivo. E quando multiplica qualquer número negativo por ele mesmo, você tem também um número positivo. Por fim, quando multiplica 0 por ele mesmo, você tem 0.

Se $\sqrt{-1}$ não estiver na reta numerada real, onde ela está? É uma boa pergunta. Durante milhares de anos, os matemáticos acreditavam que a raiz quadrada de um número negativo era simplesmente sem sentido. Eles o expulsaram para um lugar chamado indefinido, que é o mesmo lugar onde eles mantiveram as frações com um denominador de 0. No século XIX, entretanto, os matemáticos começaram a descobrir estes números importantes e descobriram a forma de incorporá-los no restante da matemática.

Os matemáticos designaram $\sqrt{-1}$ com o símbolo i. Como ele não se adequou na reta numerada real, i obteve sua própria reta numerada, que parece muito com a reta numerada real. A Figura 25-1 mostra alguns números que formam o imaginário.

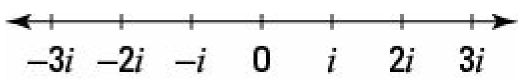


Figura 25-1: Números sobre a reta numerada imaginária.

Embora estes números sejam chamados de imaginários, hoje os matemáticos os consideram não menos reais que os números reais. E a aplicação científica dos números imaginários na eletrônica e na física verificou que estes números são muito mais do que apenas as invenções da imaginação de alguma pessoa.

Compreendendo a Complexidade dos Números Complexos

Um número complexo é qualquer número real (veja antes neste capítulo, “Baseando-se nos Números Reais”) mais ou menos um número imaginário (veja a seção anterior). Aqui estão alguns exemplos: 1 + i 5 – 2i –100 + 10i

Entrando nos subconjuntos Muitos conjuntos de números, de fato, adequam-se nos outros conjuntos. Os matemáticos chamam estes conjuntos aninhados de subconjuntos. Por exemplo, o conjunto de números inteiros é chamado Z. Como o conjunto de números naturais ou contáveis (representados por N) está completamente contido dentro do conjunto de números inteiros, N é um subconjunto ou parte de Z.

O conjunto de números racionais é chamado Q. Como o conjunto de números inteiros está completamente contido dentro do conjunto de números racionais, N e Z são dois subconjuntos de Q.

R representa o conjunto de números reais. Como o conjunto de números racionais está completamente contido dentro do conjunto de números reais, N, Z e Q são todos subconjuntos de R.

O conjunto de números complexos é chamado C. Como o conjunto de números reais está completamente contido dentro do conjunto de números complexos, N, Z e Q são todos subconjuntos de C.

O símbolo ⊂ significa um subconjunto de (veja Capítulo 20 para mais detalhes sobre a anotação de conjuntos). Portanto aqui está como os conjuntos adequam-se dentro de cada um: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

Você pode tornar qualquer número real em um número complexo somando apenas 0i (que é igual a 0): 3 = 3 + 0i –12 = –12 + 0i 3,14 = 3,14 + 0i Estes exemplos mostram-lhe que os números reais são apenas parte do maior conjunto de números complexos.

Como os números racionais e os números reais (verificar as seções anteriores, neste capítulo), o conjunto de números complexos é fechado debaixo das Quatro Grandes Operações. Isto é, se você pegar quaisquer dos dois números complexos e somar, subtrair, multiplicar ou dividi-los, o resultado será sempre um outro número complexo.

Ultrapassando o Infinito com Números Transfinitos

Os números transfinitos são um conjunto de números representando diferentes níveis de infinito. Considere isso durante um momento: Os números contáveis (1, 2, 3, ...) continuam para sempre, portanto eles são infinitos. Mas existem mais números reais do que números contáveis.

De fato, os números reais são infinitamente mais infinitos do que os números contáveis. O matemático Georg Cantor provou este fato. Ele provou também que durante todo nível de infinito, você pode descobrir um outro nível até maior. Ele chamou estes números de transfinitos porque eles transcendem ou vão além do que você pensa sobre infinito.

O menor número transfinito é $\aleph_0$ (aleph 0) que é igual ao número de elementos no conjunto de números contáveis. Como os números contáveis são infinitos, o símbolo comum para infinito (∞) e $\aleph_0$ significa a mesma coisa.

O próximo número transfinito é $\aleph_1$ (aleph um) que é igual ao número de elementos no conjunto de números reais. É uma ordem de infinito maior que ∞.

Os conjuntos de números inteiros e os números algébricos todos têm $\aleph_0$ elementos. E os conjuntos de números complexos, imaginários, transcendentais e irracionais, todos, têm $\aleph_1$ elementos.

Os maiores níveis de infinito existem também. Aqui está o conjunto de números transfinitos:
$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots$

A elipse lhe diz que a sequência de números transfinitos continua para sempre – em outras palavras, é o infinito. Como você pode observar, na superfície, os números transfinitos parecem similares aos números contáveis (na primeira seção deste capítulo). Isto é, o conjunto de números transfinitos tem $\aleph_0$ elementos.

$$\frac{3}{4}$$

$$5\frac{5}{9} + 11\frac{7}{9} + 3\frac{8}{9} + 1\frac{5}{9}$$

$$16\frac{3}{5} + 7\frac{7}{9}$$