Alínea b)

Como sabido, o método de Newton é um método iterativo para encontrar uma raíz de uma função. Dada uma função f(x) e uma estimativa inicial x_0 a iteração do método de Newton é dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

O sistema de equações de Vieta relaciona os coeficientes de um polinómio com as somas e os produtos das suas raízes. Podemos representar esse sistema como várias funções $f_1, f_2, ..., f_n$ onde cada função representa uma equação de Vieta que recebe um vetor $x = (r_1, r_2, ..., r_n)$ que é o vetor das raízes.

O método de Weierstrass é uma generalização do método de Newton para sistemas de equações não lineares e que permite obter todas as raízes simultaneamente.

Para mostrar que a aplicação do método de Newton ao sistema de equações de Vieta resulta no método de Weierstrass, precisamos de calcular a matriz jacobiana (J) das funções $f_1, f_2, ..., f_n$ onde cada linha representa as derivadas parciais de cada função f_i em ordem a cada um dos componentes de $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, isto é, J(i,j) é a derivada parcial de f_i em relação a x_j. De seguida, é possível estabelecer um método iterativo com base numa aproximação inicial para as raízes x_0.

Passos da aplicação do Método de Newton para o Sistema de Vieta:

- Definir aproximação inicial para as raízes $x_0 = (r_1, r_2, ..., r_n)$;
- Criação de uma matriz F onde cada linha i representa a aplicação da função f_i ao vetor x_0, isto é, F(i) = $f_i(x_0)$.
- Preenchimento da matriz de Jacobi com os valores de x_0;
- Passo iterativo: $x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1}F(x_k)$;

O método iterativo acima descrito é o método de Weierstrass mas aplicado ao sistema de equações de Vieta ambos caracterizados pelo possibilidade de obter as aproximações para todas as raízes simultaneamente.

Para ilustrar, consideremos um polinómio de grau 3:

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

As equações de Vieta para este polinómio são:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -a$$
$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = b$$
$$r_1r_2r_3 = -c$$

A matriz F é dada da seguinte forma:

$$F(1) = f_1(x) = r_1 + r_2 + r_3 + a$$
$$\text{(linha 1)}$$
$$F(2) = f_2(x) = r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 - b$$
$$\text{(linha 2)}$$
$$F(3) = f_3(x) = r_1r_2r_3 + c$$
$$\text{(linha 3)}$$
$$\text{onde } x = (r_1, r_2, r_3)$$

A matriz jacobiana J seria:

$$J(1) = 1, 1, 1$$
$$\text{(linha 1)}$$
$$J(2) = r_2 + r_3, r_1 + r_3, r_1 + r_2$$
$$\text{(linha 2)}$$
$$J(3) = r_2r_3, r_1r_3, r_1r_2$$
$$\text{(linha 3)}$$

De seguida seria aplicar o passo iterativo $x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1}F(x_k)$ definindo uma aproximação inicial $x_0 = (r_1, r_2, r_3)$ sendo possível no final do processo aproximar todas as raízes do polinómio simultaneamente.