

# Matemática Computacional :: Equações Não Lineares

maria irene falcão

Mestrado em Matemática e Computação



## 4. Equações Não Lineares

### 4.1 Equações Não Lineares: background

#### 4.1.1 Introdução

Neste capítulo consideramos o problema da determinação de raízes de uma **equação não linear**, isto é, de uma equação da forma

$$f(x) = 0 \quad (4.1)$$

onde  $f$  é uma função real de variável real, não linear.

Os métodos usados para resolver (4.1) são **métodos iterativos**: são dadas  $m + 1$  aproximações iniciais  $x_0, \dots, x_m$  para uma raiz  $r$  da equação (4.1) e determina-se, então, uma nova aproximação  $x_{m+1}$ , repetindo-se sucessivamente este processo. Mais precisamente, é gerada uma sequência  $\{x_k\}$  de aproximações para  $r$  através do uso de fórmulas do tipo

$$x_{k+1} = g(k, x_k, \dots, x_{k-m}); k = m, m + 1, \dots \quad (4.2)$$

Se a função  $g$  em (4.2) não depender de  $k$ , isto é, se a forma da função iterativa se mantiver de iteração para iteração, o método diz-se **estacionário**.

Seja  $e_k := r - x_k$  (erro na aproximação  $x_k$  para  $r$ ). O que se pretende, naturalmente, é ter métodos convergentes, isto é, métodos que satisfaçam

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = r$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0.$$

#### Ordem de convergência

Um conceito importante na discussão de métodos iterativos é o de **ordem de convergência**.

Seja  $\{x_k\}$  uma sequência de aproximações obtidas por um determinado método iterativo e suponhamos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = r$ . Seja  $e_k := r - x_k$ . Se existir um número  $p \geq 1$  e uma constante  $C > 0$  tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \quad (4.3)$$

dizemos que o método é de **ordem**  $p$  em  $r$ . Se  $p = 1$ , a convergência diz-se **linear** e, se  $p > 1$ , a convergência é dita **superlinear**, dizendo-se **quadrática** se  $p = 2$ , **cúbica** se  $p = 3$ , etc. A constante  $C$  é chamada **constante de convergência assintótica**. É usual escrever a expressão (4.3) de forma assintótica como

$$|e_{k+1}| \sim C|e_k|^p$$

que nos indica como o erro se comporta quando  $k$  é suficientemente grande.

**Nota 4.1** Quando  $p = 1$ ,  $C$  deve ser menor ou igual a 1 para que o método convirja, mas para  $p > 1$ , não é necessário que  $C \leq 1$  para haver convergência. Nalguns casos é possível estabelecer uma relação do tipo

$$|e_k| \leq CM^k, \quad M < 1, \quad (4.4)$$

não sendo, no entanto, possível mostrar diretamente que a condição (4.3) se verifica (com  $p = 1$ ). Neste caso, dizemos ainda que o método converge linearmente.

Quanto maior for a ordem de convergência de um método iterativo e menor a constante de convergência, maior será, em princípio, a sua rapidez de convergência.

#### 4.1.2 Método do ponto fixo ou das iterações sucessivas

Seja  $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de variável real. Dizemos que  $g$  é **contrativa** em  $D$ , se existe uma constante  $0 \leq L < 1$ , tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in D.$$

A constante  $L$  é chamada **constante de Lipschitz**.

Seja  $g$  uma aplicação de  $D$  em si mesmo, isto é,  $g : D \rightarrow D$ . Diz-se que  $\alpha \in D$  é **ponto fixo** de  $g$  se  $g(\alpha) = \alpha$ . Começemos por recordar o importante Teorema do Ponto Fixo (num intervalo  $I = [a, b]$  de  $\mathbb{R}$ ).

**Teorema 4.1 (do ponto fixo de Banach)** *Seja  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  e seja  $g$  uma aplicação de  $I$  em si mesmo, contrativa, com constante de Lipschitz  $L$ . Então:*

- (i) a aplicação  $g$  tem um e um só ponto fixo  $\alpha$  em  $I$ ;
- (ii) para qualquer valor inicial  $x_0 \in I$ , a sequência de iterações  $\{x_k\}$  definida por

$$x_{k+1} = g(x_k); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

converge para  $\alpha$ , ponto fixo de  $g$  em  $I$ ;

- (iii) o erro  $e_k := \alpha - x_k$  satisfaz

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{L^{k-m}}{1-L} |x_{m+1} - x_m|; \quad 0 \leq m \leq k-1. \quad (4.6)$$

Em particular, tem-se:

- $m = 0$  – Estimativa “a priori” para o erro na iteração  $k$ :

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0| \quad (4.7)$$

- $m = k - 1$  – Estimativa “a posteriori” para o erro na iteração  $k$ :

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{L}{1 - L} |x_k - x_{k-1}| \quad (4.8)$$

Voltemos, então, ao problema da determinação de uma raiz da equação não linear (4.1). Suponhamos que, por operações elementares, reescrevemos essa equação, de uma forma equivalente, como

$$g(x) = x \quad (4.9)$$

transformando, assim, o problema da determinação de uma raiz de (4.1) no da determinação de um ponto fixo de  $g$ . Se encontrarmos um intervalo  $I$  tal que  $g(I) \subseteq I$  e  $g$  seja contrativa em  $I$  então, tendo em conta o Teorema do Ponto Fixo de Banach, poder-se-á procurar  $\alpha$  (ponto fixo de  $g$  em  $I$ ) usando a fórmula iterativa

$$x_{k+1} = g(x_k); \quad k = 0, 1, \dots; \quad x_0 \in I. \quad (4.10)$$

A este método chamamos **método do ponto fixo** ou **das iterações sucessivas**.

A verificação de que  $g$  é contrativa no intervalo  $I$  poderá, por vezes, tornar-se mais simples recorrendo ao seguinte resultado, consequência imediata do Teorema do Valor Médio de Lagrange.

**Teorema 4.2** *Seja  $g \in C^1[a, b]$  tal que  $|g'(x)| \leq L < 1$ , para todo  $x \in (a, b)$ . Então,  $g$  é contrativa em  $I = [a, b]$  com constante de Lipschitz  $L$ .*

Tem-se, também o seguinte teorema.

**Teorema 4.3** *Seja  $\alpha$  um ponto fixo de uma função  $g$  e suponhamos que  $g$  é continuamente diferenciável num certo intervalo centrado em  $\alpha$  e que, além disso,  $|g'(\alpha)| < 1$ . Então, existe um intervalo  $I = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$  para o qual são válidas as hipóteses do teorema do ponto fixo de Banach.*

O resultado anterior mostra, assim, que se  $\alpha$  for um ponto fixo de  $g$  e  $|g'(\alpha)| < 1$ ,<sup>1</sup> então poderemos aplicar o método das aproximações sucessivas para aproximar  $\alpha$ , desde que  $x_0$  seja escolhido “suficientemente” próximo de  $\alpha$ . Por estas razões se diz que o método do ponto fixo é um método de convergência **local**.

Pode também mostrar-se que, se  $|g'(\alpha)| > 1$ , então o método das iterações sucessivas não poderá convergir.

As Figuras 4.1 - 4.3 ilustram o comportamento do método do ponto fixo, de acordo com o valor de  $g'(\alpha)$ .

---

<sup>1</sup>E sendo  $g'$  é contínua num intervalo centrado em  $\alpha$ .

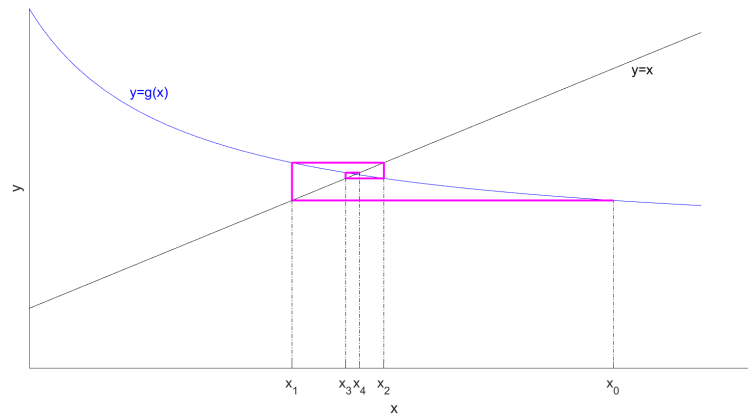


Figura 4.1: Convergência:  $-1 < g'(\alpha) < 0$

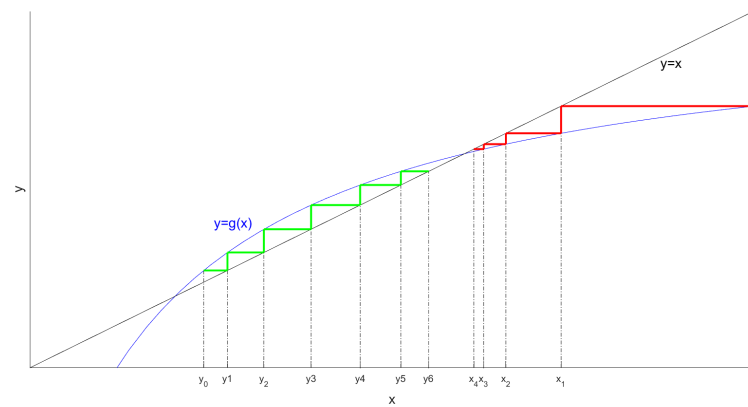


Figura 4.2: Convergência:  $0 < g'(\alpha) < 1$

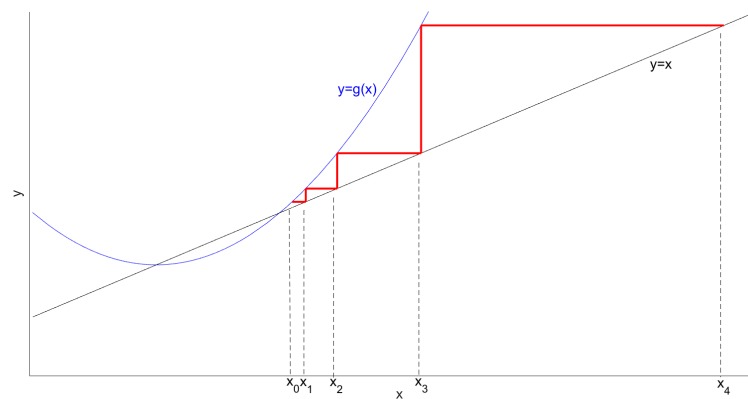


Figura 4.3: Divergência:  $g'(\alpha) > 1$

**Teorema 4.4 (Ordem de convergência do método do ponto fixo)** *Seja  $\alpha$  um ponto fixo de uma função  $g$  e suponhamos que  $g$  é continuamente diferenciável num certo intervalo centrado em  $\alpha$  e que, além disso,*

$$0 < |g'(\alpha)| < 1.$$

Seja  $I$  o intervalo (que sabemos existir) para o qual se verificam as condições do teorema do ponto fixo, e suponhamos que  $x_0 \in I$  e que  $x_{k+1} = g(x_k)$ ;  $k = 0, 1, \dots$ . Então, designando por  $e_k$  o erro na iteração  $k$ , isto é,  $e_k = \alpha - x_k$ , tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = |g'(\alpha)|. \quad (4.11)$$

Por outras palavras, nestas condições o método converge linearmente, com constante de convergência assintótica  $C = |g'(\alpha)|$ .

O resultado anterior mostra que a convergência do método do ponto fixo será tanto mais rápida quanto menor for o valor de  $C = |g'(\alpha)|$ . Pode acontecer que  $g'(\alpha) = 0$ . Nesse caso, será de esperar que a convergência seja “melhor” que linear. De facto, tem-se o seguinte resultado mais geral:

**Teorema 4.5 (convergência do método do ponto fixo)** *Seja  $\alpha$  um ponto fixo de uma função  $g$  e suponhamos que  $g$  é  $p$  vezes continuamente diferenciável num certo intervalo centrado em  $\alpha$  e que, além disso,*

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots g^{(p-1)}(\alpha) = 0$$

*e que  $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$ . Seja  $\{x_k\}$  a sequência de iterações obtida por aplicação do método do ponto fixo, com  $x_0$  escolhido suficientemente próximo de  $\alpha$ . Então, tem-se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \frac{1}{p!} |g^{(p)}(\alpha)|. \quad (4.12)$$

Por outras palavras, nestas condições, a ordem de convergência do método é  $p$  e a constante de convergência assintótica é  $C = \frac{1}{p!} |g^{(p)}(\alpha)|$ .

### 4.1.3 Aceleração de Aitken

A convergência do método do ponto fixo é, em geral, linear, podendo por isso revelar-se bastante lenta. A aceleração de Aitken é um procedimento que visa melhorar a velocidade de convergência de sequências iterativas, sendo particularmente útil no contexto do método de ponto fixo.

Observe-se que, nas condições dos teoremas anteriores, podemos escrever

$$\alpha - x_{k+1} = g'(\xi_k)(\alpha - x_k),$$

com  $\xi_k \in (\min(x_k, \alpha), \max(x_k, \alpha))$ . Analogamente

$$\alpha - x_{k+2} = g'(\xi_{k+1})(\alpha - x_{k+1}).$$

Assim, em caso de convergência e para  $k$  suficientemente grande, será então válida a relação

$$\alpha - x_{k+1} \approx C(\alpha - x_k) \quad \text{e} \quad \alpha - x_{k+2} \approx C(\alpha - x_{k+1}), \quad (4.13)$$

onde  $C \approx g'(\xi_k) \approx g'(\xi_{k+1}) \approx g'(\alpha)$ . Eliminando  $\alpha$  entre as duas relações obtém-se

$$C \approx \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k}.$$

A relação anterior permite estimar o valor de  $C$  sem necessidade de recorrer a estimativas de  $g'(\alpha)$ , as quais envolveriam o valor (desconhecido) do ponto fixo  $\alpha$ . Introduzindo este valor de  $C$  em (4.13), obtém-se a expressão simplificada

$$\alpha \approx x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k},$$

a qual pode ser escrita, usando o operador de diferenças descendentes (cf. Exercício 2.4) como

$$\alpha \approx x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k}.$$

É de esperar que a sucessão  $(y_k)_k$  calculada através da fórmula

$$y_k = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k} \quad (4.14)$$

convirja mais rapidamente que a sucessão original  $(x_k)_k$ . O processo de obter, a partir de uma sequência linearmente convergente  $(x_k)_k$ , uma sequência de convergência mais rápida  $(y_k)_k$  através de (4.14) é usualmente designado **aceleração  $\Delta^2$  de Aitken** e pode ser aplicado a qualquer sequência linearmente convergente, gerada ou não pelo método do ponto fixo.

**Nota 4.2** Se, a partir de determinado  $k$ , a sequência dos rácios  $\frac{\Delta x_{k-1}}{\Delta x_k}, \frac{\Delta x_k}{\Delta x_{k+1}}, \dots$  é aproximadamente constante, pode assumir-se que  $y_k$  será uma melhor aproximação para  $\alpha$  do que  $x_k$ . Em particular,  $|y_k - x_k|$  será uma boa estimativa para o erro  $|\alpha - x_k|$ .

#### 4.1.4 Exercícios

**Exercício 4.1** Seja  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  e seja  $g \in C^1[a, b]$  uma aplicação que satisfaz as condições de convergência do método do ponto fixo no intervalo  $I$ , isto é, suponhamos que  $g(I) \subseteq I$  e  $|g'(x)| < 1, \forall x \in (a, b)$ . Mostre que, se  $0 < g'(x) < 1, \forall x \in (a, b)$ , então a convergência da sequência gerada pelo método do ponto fixo para  $\alpha$  (ponto fixo de  $g$  em  $I$ ) é monótona. Mais precisamente, mostre que:

- Se  $x_0 > \alpha$ , então  $x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > \dots$
- Se  $x_0 < \alpha$ , então  $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$

O que acontece quando  $-1 < g'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ ? Interprete geometricamente estes resultados.

**Exercício 4.2** Seja  $a$  um inteiro positivo e considere a sucessão definida por

$$x_0 = \frac{1}{a}, \quad x_1 = \frac{1}{a + \frac{1}{a}}, \quad x_2 = \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}}}, \dots,$$

ou seja,  $\{x_k\}$  é a sucessão definida por  $x_0 = \frac{1}{a}, \quad x_{k+1} = \frac{1}{a + x_k}$ .



- a) Mostre que essa sucessão converge para um valor  $\alpha \in [\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a}]$ .

**Nota:** O valor de  $\alpha$  definido pela sucessão anterior é normalmente apresentado sob a forma de uma fracção contínua:

$$\alpha = \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \dots}}}$$

- b) Quando  $a = 1$ , que número “famoso” é  $1 + \alpha$ ? Determine uma aproximação para esse número, usando 8 iterações do método do ponto fixo. Obtenha uma estimativa para o erro  $|\alpha - x_8|$ .

**Exercício 4.3** Seja  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  uma aplicação contrativa, com constante de Lipschitz  $L$  e seja  $\alpha$  o ponto fixo de  $g$  em  $I = [a, b]$ . Seja  $\{x_k\}$  a sequência definida por iteração do ponto fixo:  $x_k = g(x_{k-1})$ ;  $x_0 \in I$ . Mostre que, se  $L < \frac{1}{2}$ , então, ao utilizarmos o critério de paragem  $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ , teremos garantia de que a iteração  $x_k$  satisfará também  $|\alpha - x_k| < \delta$ . Que poderá acontecer se  $\frac{1}{2} < L < 1$ ?

**Exercício 4.4** Pretende-se resolver a equação  $\frac{1}{x} - e^x = 0$ , a qual admite uma raiz perto do ponto  $x = 0.5$ .

- a) Quais das seguintes fórmulas iterativas

$$x_{k+1} = -\ln x_k; \quad x_{k+1} = e^{-x_k}; \quad x_{k+1} = \frac{x_k + e^{-x_k}}{2},$$

poderão ser usadas? E qual deverá ser usada?

- b) Calcule uma aproximação para essa raiz, usando a fórmula mais eficiente, iterando até que  $|x_k - x_{k-1}| \leq 0.5 \times 10^{-3}$ . Estime, então, o valor de  $|\alpha - x_k|$ .
- c) Indique uma estimativa para o número de iterações que deveria efetuar para, usando a outra fórmula possível, garantir uma aproximação para a raiz com o mesmo número de casas decimais da aproximação obtida na alínea anterior.

**Exercício 4.5** Considere a sucessão de números reais definida do seguinte modo:

$$\begin{cases} x_0 = a, \\ x_{k+1} = 1 - \frac{1}{bx_k}; \quad k = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

onde  $a$  e  $b$  são números reais dados.

- a) Mostre que, se  $b > 4$ , esta sucessão é convergente, qualquer que seja  $a \in [\frac{1}{2}, 1]$ .

- b) Seja então  $b > 4$ ,  $a \in [\frac{1}{2}, 1]$  e  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Verifique que:

i.  $\alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{b}}$ .

ii.  $|\alpha - x_k| \leq \frac{4}{b-4}|x_k - x_{k-1}|, \quad k = 1, 2, \dots$

- c) Faça  $a = 0.75, b = 5$  e estime o número de iterações do Método do Ponto Fixo que seriam necessárias para obter uma aproximação para  $\alpha$  com 4 casas decimais corretas.

#### Exercício 4.6

- a) Mostre que a fórmula de Aitken transforma uma sucessão linearmente convergente  $(x_k)_k$  noutra sucessão,  $(y_k)_k$ , também linearmente convergente, mas cuja constante de erro assintótico é mais favorável, i.e.,  $C^2$  em vez de  $C$ .
- b) Uma vez que a sucessão transformada  $(y_k)_k$  tem convergência linear, podemos aplicar a esta sucessão a transformação de Aitken obtendo-se aquilo que se designa por **transformação de Aitken iterada**. Obtenha a fórmula da transformação de Aitken iterada.

#### Exercício 4.7

Considere a função

$$g(x) = \frac{0.1x - \tan x}{1.5},$$

cujo ponto fixo é  $\alpha = 0.20592169510 \dots$

- a) Faça 30 iterações do método do ponto fixo, usando como aproximação inicial  $x_0 = 0$ . Apresente os resultados numa tabela contendo o número  $k$  da iteração, a aproximação  $x_k$  para o ponto fixo, os valores  $\Delta x_k$  e os rácios  $\frac{\Delta x_{k-1}}{\Delta x_k}$ .
- b) Diga se se justifica usar a fórmula de Aitken para acelerar a convergência e, em caso afirmativo, obtenha a sequência resultante.

## 4.2 Método de Newton e variantes

### 4.2.1 Descrição geométrica

Se a função  $f$ , cujo zero estamos a procurar, for continuamente diferenciável e se a derivada de  $f$  puder ser calculada sem grande esforço computacional, podemos aproximar os zeros de  $f$  utilizando o bem conhecido **método de Newton**.

A ideia é começar com uma estimativa inicial  $x_0$ , depois aproximar a função  $f$  pela reta tangente ao seu gráfico em  $x_0$  e, finalmente, calcular a interseção desta tangente com o eixo dos  $x$  para obter  $x_1$ . Esta aproximação  $x_1$  será tipicamente uma melhor aproximação para o zero da função original do que a primeira estimativa  $x_0$ , e o método pode ser iterado (ver Figura 4.4).

Facilmente se prova que o método de Newton é definido pelo esquema iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

sendo  $x_0$  uma aproximação inicial (suficientemente próxima do zero de  $f$ ) e  $f'(x_k) \neq 0$  (ver Exercício 4.15).

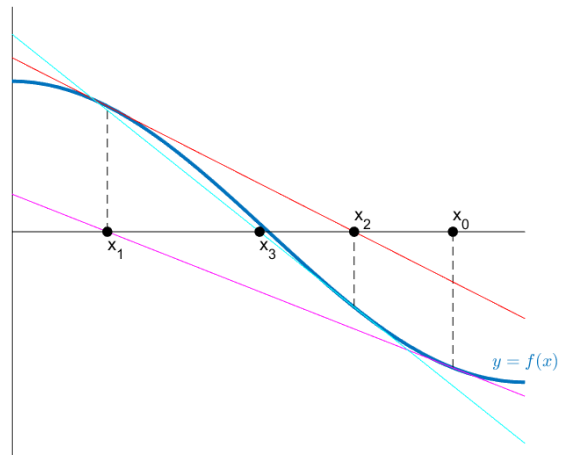
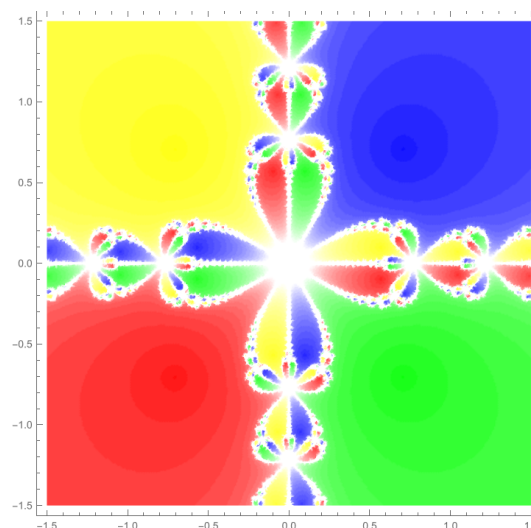


Figura 4.4: O método de Newton

### 4.2.2 Bacias de atração

O método de Newton também pode ser utilizado para a determinação de zeros complexos, desde que se considere um número complexo como estimativa inicial.

Quando  $f$  tem mais do que um zero, o zero para o qual o método de Newton converge depende da estimativa inicial  $x_0$ . Uma **bacia de atração** de Newton de o zero  $r$  é simplesmente o conjunto de estimativas iniciais que levam à convergência do método de Newton para  $r$ . Colorir o plano complexo de acordo com o zero para o qual uma estimativa inicial converge, atribuindo uma cor diferente a cada solução, pode originar imagens muito bonitas.



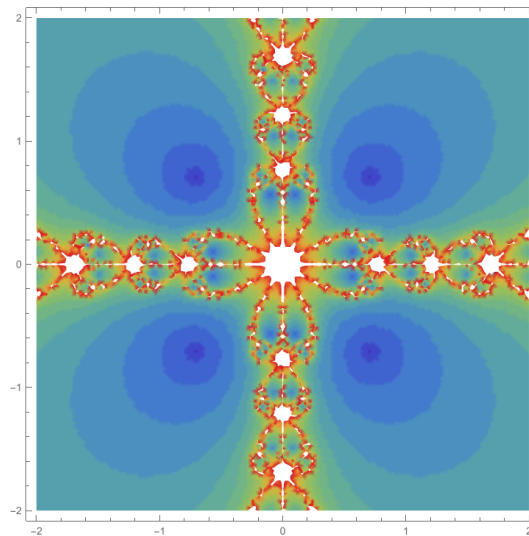
**Exemplo 4.1** Considere o polinômio  $p(x) = x^4 + 1$ , cujos zeros são

$$r_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad r_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad r_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Para indicar quais as estimativas iniciais que convergem e para que raízes, utilizámos 4 cores: vermelho (que mostra a convergência para  $r_1$ ), azul ( $r_2$ ), amarelo ( $r_3$ ) e verde ( $r_4$ ). Considerámos

várias estimativas iniciais no quadrado  $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$ , e o resultado é mostrado na figura seguinte. As regiões brancas correspondem ao uso de estimativas iniciais para as quais o método de Newton não convergiu em 20 iterações.

**Nota 4.3** Outra forma de obter as bacias de atração é utilizar uma escala de cores para representar o número de iterações necessárias para alcançar a convergência, sem considerar para que zero as iterações convergem. Nesses casos, obtemos as seguintes figuras.



### 4.2.3 Exercícios

**Exercício 4.6** Deduza o esquema iterativo (4.15) do método de Newton.

**Exercício 4.7** Mostre que o método de Newton é equivalente ao método do ponto fixo com função iterativa

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Conclua que, se  $f$  for três vezes continuamente diferenciável<sup>2</sup> num certo intervalo centrado em  $\alpha$ , então existe um intervalo  $I = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ , tal que o método converge pelo menos quadraticamente para  $r$ , para qualquer estimativa inicial  $x_0 \in I$ .

Além disso, no caso de convergência quadrática, a constante de convergência assintótica é dada por:

$$C = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(r)}{f'(r)} \right|.$$

**Exercício 4.8** Seja  $f(x) = (x - r)^m$ , com  $m > 1$ .

- a) Mostre que se usarmos o método de Newton para determinar  $r$ , então  $e_{k+1} = \frac{m-1}{m} e_k$ , onde  $e_k = r - x_k$ .

---

<sup>2</sup>Aqui exigimos que  $f$  seja três vezes continuamente diferenciável para invocar os resultados de convergência do método do ponto fixo; no entanto, pode ser demonstrado que o resultado ainda se mantém quando  $f$  é apenas duas vezes continuamente diferenciável numa vizinhança de  $r$ .

- b) Conclua que a convergência do método para  $r$  não pode ser quadrática, mas apenas linear. Neste caso, qual é o valor da constante de convergência?

Este resultado generaliza-se para o caso em que  $f(x) = (x - r)^m g(x)$ , com  $g$  sendo uma função (suficientemente diferenciável) que não se anula em  $r$ , ou seja, para o caso em que  $r$  é uma raiz de ordem  $m$  de  $f$ .

Neste cenário, o método de Newton ainda pode ser aplicado e a convergência ocorre, embora o comportamento e a ordem de convergência dependam da multiplicidade  $m$  da raiz  $r$ . Em particular, a convergência do método de Newton para raízes múltiplas pode ser sublinear, em vez de quadrática, quando  $m > 1$ .

**Exercício 4.9 (Método de Newton Modificado)** Mostre que, se a multiplicidade  $m$  da raiz é conhecida, o seguinte algoritmo modificado preserva a ordem de convergência quadrática do método de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

**Exercício 4.10** Considere o polinómio

$$p(x) = x^3 - 3.5x^2 + 4x - 1.5.$$

- a) Use o método de Newton para obter aproximações para os zeros de  $p$ , utilizando  $x_0 = 0.9$ ,  $x_0 = 1.33$ ,  $x_0 = 1.35$  e  $x_0 = 1.5$ .
- b) Observe que  $p(x) = (x - 1)^2(x - 1.5)$  e use o Método de Newton Modificado (4.16) para obter o zero duplo de  $p$ .

### 4.3 Método da secante

Um método alternativo ao método de Newton, utilizado, por exemplo, se o cálculo da derivada da função  $f$  envolve grande esforço computacional, é o chamado *método da secante*.

Neste caso, partindo de duas aproximações  $x_{k-1}$  e  $x_k$  para um zero  $r$  de  $f$ , vamos considerar como nova aproximação a abcissa do ponto de encontro da reta que une os pontos  $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$  e  $(x_k, f(x_k))$  com o eixo das abcissas. Mais precisamente, o método da secante gera uma sequência de iterações definidas por

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}; k = 1, 2, \dots, \quad (4.17)$$

sendo  $x_0, x_1$  dados.

No que diz respeito à convergência, tem-se o seguinte resultado.

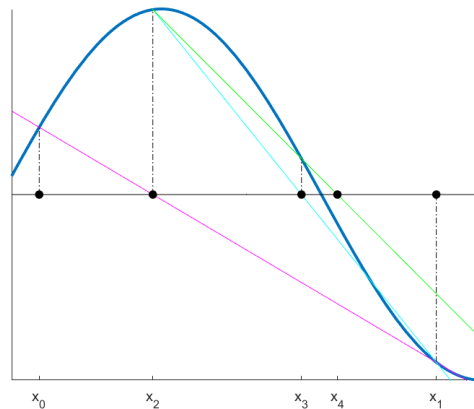


Figura 4.5: O método da secante

**Teorema 4.6 (convergência do método da secante)** *Seja  $r$  uma raiz da equação  $f(x) = 0$  e suponhamos que  $f$  é duas vezes continuamente diferenciável numa vizinhança de  $r$  e que  $f'(r) \neq 0$  (ou seja, que  $r$  é um zero simples de  $f$ ). Então, existe um intervalo  $I = [r - \delta, r + \delta]$  tal que, para quaisquer aproximações iniciais  $x_0, x_1 \in I$ , o método da secante converge para  $r$ , com ordem de convergência*

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (4.18)$$

e constante de convergência assintótica dada por

$$C = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|^{1/p}. \quad (4.19)$$

## 4.4 Métodos simultâneos para encontrar raízes de polinômios

### 4.4.1 Método de Weierstrass

Os métodos apresentados anteriormente envolvem a aproximação de um zero  $\alpha_i$  de cada vez. Se a função a considerar for um polinômio, podemos obter todas as raízes através da deflação (i.e., dividindo pelo fator  $x - \alpha_i$ ). Nesta secção, vamos considerar um método iterativo que encontra todas as raízes de um polinômio simultaneamente.

O método mais simples dessa classe de métodos simultâneos foi mencionado pela primeira vez por Weierstrass (1903) em conexão com o Teorema Fundamental da Álgebra e foi redescoberto por vários autores, em particular por Durand (1960) e Kerner (1966). Por esta razão, o método que vamos derivar é conhecido como **método de Weierstrass** ou método de Weierstrass-Durand-Kerner.

Começamos por considerar polinômios mónicos de grau três, ou seja, polinômios  $P$  da forma

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Isolando o valor  $x_1$  a partir desta equação, obtemos

$$x_1 = x - \frac{P(x)}{(x - x_2)(x - x_3)}.$$

Observe que  $x_1$  é um ponto fixo da função  $x - \frac{P(x)}{(x-x_2)(x-x_3)}$ , já que  $P(x_1) = 0$ . Além disso, se substituirmos as raízes  $x_2$  e  $x_3$  por aproximações  $\xi_2$  e  $\xi_3$ , respetivamente, tais que  $\xi_2$  e  $\xi_3$  não sejam iguais a  $x_1$ , então  $x_1$  continua a ser um ponto fixo da função perturbada  $x - \frac{P(x)}{(x-\xi_2)(x-\xi_3)}$ . Portanto,  $x_1$  pode ser obtido a partir da iteração do ponto fixo:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{P(x_1^{(k)})}{(x_1^{(k)} - \xi_2)(x_1^{(k)} - \xi_3)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A ideia do método de Weierstrass é combinar a iteração de ponto fixo para  $x_1$  com iterações semelhantes para  $x_2$  e  $x_3$  numa iteração simultânea para todas as raízes. Assim, pode-se utilizar o seguinte procedimento iterativo:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{P(x_1^{(k)})}{(x_1^{(k)} - x_2^{(k)})(x_1^{(k)} - x_3^{(k)})}, \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \frac{P(x_2^{(k)})}{(x_2^{(k)} - x_1^{(k)})(x_2^{(k)} - x_3^{(k)})}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \\ x_3^{(k+1)} &= x_3^{(k)} - \frac{P(x_3^{(k)})}{(x_3^{(k)} - x_1^{(k)})(x_3^{(k)} - x_2^{(k)})}. \end{aligned}$$

A última fórmula é realizada em “modo paralelo” e é frequentemente chamada de “modo de passo total”. A convergência do método pode ser acelerada utilizando uma variante diferente que faz uso das aproximações mais recentes para as raízes assim que estejam disponíveis, conforme segue:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{P(x_1^{(k)})}{(x_1^{(k)} - x_2^{(k)})(x_1^{(k)} - x_3^{(k)})}, \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \frac{P(x_2^{(k)})}{(x_2^{(k)} - x_1^{(k+1)})(x_2^{(k)} - x_3^{(k)})}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \\ x_3^{(k+1)} &= x_3^{(k)} - \frac{P(x_3^{(k)})}{(x_3^{(k)} - x_1^{(k+1)})(x_3^{(k)} - x_2^{(k+1)})}. \end{aligned}$$

Essa variante do método de Weierstrass é geralmente chamada de “modo sequencial” ou “modo de passo único”.

O caso particular para grau  $n = 3$  pode ser generalizado facilmente para outros graus. Mais precisamente, dado um polinómio mónico  $P$  de grau  $n$  e uma estimativa inicial  $x_i^{(0)}$ , o esquema de iteração de Weierstrass paralelo é:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{P(x_i^{(k)})}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i^{(k)} - x_j^{(k)})}; \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.20)$$

enquanto que o método de Weierstrass sequencial é:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{P(x_i^{(k)})}{\prod_{j=1}^{i-1} (x_i^{(k)} - x_j^{(k+1)}) \prod_{j=i+1}^n (x_i^{(k)} - x_j^{(k)})}; \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

**Teorema 4.7 (Convergência do método de Weierstrass )** *Seja  $P$  um polinómio da forma*

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

*e suponha que todas as raízes de  $P$  são simples. Se as aproximações iniciais  $x_i^{(0)}$  estiverem suficientemente próximas das raízes  $x_i$  de  $P$ , então as sequências  $\{x_i^{(k)}\}$  em (4.20) convergem quadraticamente para  $x_i$ .*

**Demonstração.** Sejam  $x_i^{(k)}$  aproximações para  $x_i$  com erros  $\varepsilon_i^{(k)}$ , isto é,

$$\varepsilon_i^{(k)} := x_i - x_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.22)$$

e seja

$$\varepsilon^{(k)} := \max_i |\varepsilon_i^{(k)}|.$$

Observe-se que

$$\begin{aligned} x_i - x_i^{(k+1)} &= x_i - x_i^{(k)} + \frac{P(x_i^{(k)})}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i^{(k)} - x_j^{(k)})} = x_i - x_i^{(k)} + \frac{\prod_{j=1}^n (x_i^{(k)} - x_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i^{(k)} - x_j^{(k)})} \\ &= x_i - x_i^{(k)} - (x_i - x_i^{(k)}) \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x_i^{(k)} - x_j}{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{x_i^{(k)} - x_j}{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}} = 1 + \frac{x_j^{(k)} - x_j}{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}$$

e  $x_i$  é uma raiz simples, podemos concluir que, para  $\varepsilon^{(k)}$  suficientemente pequeno,  $|x_i^{(k)} - x_j^{(k)}|$  está afastado de zero, e assim

$$\frac{x_i^{(k)} - x_j}{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{(k)})$$

e

$$\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x_i^{(k)} - x_j}{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}} = \left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{(k)})\right)^{n-1} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{(k)}).$$

Portanto,

$$x_i - x_i^{(k+1)} = x_i - x_i^{(k)} - (x_i - x_i^{(k)}) \left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{(k)})\right),$$

ou seja,

$$\varepsilon_i^{(k+1)} = \varepsilon_i^{(k)} \left(1 - (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{(k)}))\right) = \varepsilon_i^{(k)} \mathcal{O}(\varepsilon^{(k)}).$$



Isto mostra que

$$\varepsilon^{(k+1)} = \mathcal{O}((\varepsilon^{(k)})^2). \quad \square$$

**Nota 4.4 (Símbolo de Landau  $\mathcal{O}(\cdot)$ )** Considerem-se duas funções  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ , tais que  $g(x) \neq 0$ ,  $x \in D$ . Dizemos que  $f$  é de ordem  $\mathcal{O}$  (“o grande”) a respeito de  $g$  quando  $x$  tende para  $x_0$  (finito ou  $\pm\infty$ ), se existir uma constante  $K > 0$  e um  $\delta > 0$  tais que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq K,$$

para todo o  $x \in D$ , tal que  $x \in B(x_0, \delta)$ <sup>3</sup> e  $x \neq x_0$ . Escrevemos, então,

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)), \quad \text{quando } x \rightarrow x_0.$$

Recordemos algumas propriedades:

1.  $f(x) = \mathcal{O}(f(x))$
2.  $\mathcal{O}(\mathcal{O}(h(x))) = \mathcal{O}(h(x))$ .
3.  $k\mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(g(x))$
4.  $\mathcal{O}(g(x)) + \mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(g(x))$
5.  $\mathcal{O}(g_1(x)).\mathcal{O}(g_2(x)) = \mathcal{O}((g_1.g_2)(x))$

**Exemplo 4.2** Considere o polinómio  $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12$ . Escolhendo como aproximação inicial o vetor  $x_0 = (-1. + 0.5i, 2., 2. - 0.5i, 0)^T$ , obtemos os seguintes resultados (com 4 a.s.), usando o Método de Weierstrass Paralelo:

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	$-1. + 0.5i$	2.	$2. - 0.5i$	0
1	$-1.722 - 0.491i$	$3.297 - 7.784i$	$-2.551 + 6.581i$	$1.976 + 1.694i$
2	$-1.708 - 0.444i$	$2.031 - 4.083i$	$-1.442 + 3.012i$	$2.119 + 1.514i$
3	$-1.675 - 0.287i$	$1.401 - 2.131i$	$-0.997 + 1.520i$	$2.271 + 0.898i$
4	$-1.725 + 0.053i$	$0.768 - 0.996i$	$-0.371 + 0.926i$	$2.328 + 0.018i$
5	$-2.098 + 0.0618i$	$-0.626 - 1.232i$	$0.424 + 1.406i$	$3.301 - 0.235i$
6	$-1.980 + 0.021i$	$-0.0717 - 1.270i$	$0.067 + 1.309i$	$2.985 - 0.061i$
7	$-2.001 - 0.0028i$	$0.012 - 1.418i$	$-0.010 + 1.417i$	$2.998 + 0.003i$
8	-2.000	$-1.414i$	$1.414i$	3.000

A figura seguinte contém um gráfico das iterações à medida que convergem para as raízes (note-se que  $P(x) = (x^2 + 2)(x + 2)(x - 3)$ ). Cada cor corresponde a uma raiz diferente, sendo o vermelho para a raiz -2, magenta para a raiz 3, verde para a raiz  $\sqrt{2}i$  e azul para  $-\sqrt{2}i$ . A aproximação inicial está marcada com um quadrado e a raiz está marcada com um círculo.

<sup>3</sup>Entende-se por  $B(+\infty, \delta) := \{x : x > \frac{1}{\delta}\}$ , definindo-se, de modo análogo,  $B(-\infty, \delta) := \{x : x < -\frac{1}{\delta}\}$ .

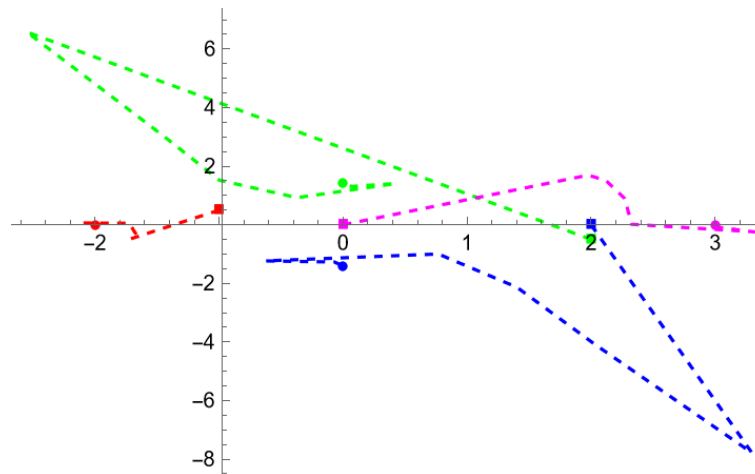


Figura 4.6: Iterações de Weierstrass

#### 4.4.2 Exercícios

**Exercício 4.14** Uma maneira de aproximar a ordem de convergência local  $\rho$  do método de Weierstrass é usar

$$\rho \approx \rho^{(k)} := \frac{\log \varepsilon^{(k)}}{\log \varepsilon^{(k-1)}},$$

onde  $\varepsilon_i^{(k)}$  é dado por (4.22).

Considere novamente o polinômio do Exemplo 4.2. Complete a seguinte tabela:

$k$	$\varepsilon_1^{(k)}$	$\varepsilon_2^{(k)}$	$\varepsilon_3^{(k)}$	$\varepsilon_4^{(k)}$	$\rho^{(k)}$
0					--
1					
$\vdots$					
10					

**Exercício 4.15** Repita o exercício anterior usando o método de Weierstrass sequencial. O que observa?

### 4.5 Sistemas de equações não lineares

#### 4.5.1 Método de Newton para sistemas não lineares

Considere-se um sistema de  $n$  equações não lineares em  $n$  incógnitas

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

ou, usando notação vetorial,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

$$\text{onde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

O método de Newton para resolução do sistema anterior é definido por

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left( \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.23)$$

onde  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  é a aproximação inicial e  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  designa a matriz Jacobiana da função  $\mathbf{f}$  calculada em  $\mathbf{x}$ , i.e.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Note-se que o método (4.23) pode ser escrito como

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)},$$

onde

$$\mathbf{s}^{(k)} = - \left( \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Na prática, a matriz Jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$  não é invertida explicitamente; em vez disso deverão ser efetuados os seguintes passos:

1. resolver o sistema  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$  para determinar o incremento  $\mathbf{s}^{(k)}$ ;
2. calcular a próxima iteração, usando  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}$ .

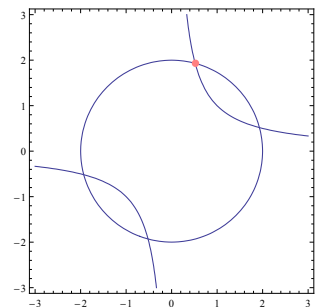
**Exemplo 4.3** Considere-se o sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \\ x_1 x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Uma das suas soluções,  $\mathbf{r}$ , é o ponto assinalado na figura ao lado.

Fazendo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , podemos escrever

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ x_1 x_2 - 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$



Após 5 iterações do método de Newton com aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , obtém-se a aproximação abaixo.

```
f=@(x) [x(1)^2+x(2)^2-4; x(1)*x(2)-1];
J=@(x) [2*x(1), 2*x(2); x(2), x(1)];
x0=[0;1];
for k=1:5
    s0=-J(x0)\f(x0);
    x1=x0+s0;
    x0=x1;
end
x1

x1 =
0.5176
1.9319
```

**Teorema 4.8 (Convergência local do método de Newton)** *Seja  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função continuamente diferenciável num aberto convexo  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^n$  que contém uma raiz  $\mathbf{r}$  de  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Suponhamos que*

1.  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  é invertível e  $\|\mathbf{J}(\mathbf{r})^{-1}\| \leq \beta$ ;
2. a matriz jacobiana de  $\mathbf{f}$  satisfaz, em  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ , a condição de Lipschitz

$$\|\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{J}(\mathbf{r})\| \leq \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|.$$

Então, qualquer que seja a aproximação inicial  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}_0$ , as iterações do método de Newton estão bem definidas, permanecem em  $\mathcal{D}_0$  e convergem para  $\mathbf{r}$ . Além disso

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{r}\| \leq C \|\mathbf{x}^k - \mathbf{r}\|^2,$$

i.e. a convergência é quadrática.

**Nota 4.5** *Embora o método de Newton tenha convergência quadrática, a sua aplicação envolve algumas dificuldades.*

- **Sensibilidade à aproximação inicial:** em geral, é necessária uma boa aproximação inicial  $\mathbf{x}_0$  para garantir a convergência.
- **Custo computacional:** o custo do método de Newton para sistemas de ordem  $n$  é muito elevado, já que, em cada iteração, há que:

- calcular a matriz Jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$  ( $n^2$  cálculos de valores de funções);
- resolver um sistema ( $\mathcal{O}(n^3)$  operações).

#### 4.5.2 Método de Broyden

Os chamados **métodos de atualização da secante**:

- usam valores da função  $\mathbf{f}$  em iterações sucessivas para obter uma **aproximação** para a matriz Jacobiana;
- em cada iteração, não calculam uma nova fatorização dessa matriz (necessária para resolver o sistema), mas simplesmente efetuam uma **atualização** da fatorização da iteração anterior.

O método de Broyden é uma alternativa eficiente ao método de Newton para a resolução de sistemas de equações não lineares, pois oferece uma maneira de atualizar uma aproximação para a matriz jacobiana de forma iterativa, reduzindo o custo computacional, especialmente em problemas de grande dimensão. Embora possa ser menos preciso do que o método de Newton em algumas situações, a sua eficiência torna-o uma escolha popular em muitos contextos.

A ideia central do método de Broyden é utilizar uma aproximação  $\mathbf{B}^{(k)}$  para a matriz jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$ , substituindo desta forma o sistema original pelo sistema

$$\mathbf{B}^{(k)}\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (4.24)$$

e atualizar a cada iteração a matriz  $\mathbf{B}^{(k)}$  com base nas informações disponíveis. Broyden pretendeu generalizar o método da secante ao caso de sistemas de equações não lineares, propondo, para o efeito, a seguinte fórmula de atualização

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \mathbf{B}^{(k)} + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1})(\mathbf{s}^{(k)})^T}{\|\mathbf{s}^{(k)}\|^2}. \quad (4.25)$$

O algoritmo de Broyden pode então ser descrito da seguinte forma:

1. Inicializar  $\mathbf{x}^{(0)}$  e  $\mathbf{B}^{(0)}$ ;
2. Calcular  $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})$ ;
3. Para  $k = 0, 1, \dots$  fazer
  - (a) resolver o sistema (4.24) para obter  $\mathbf{s}^{(k)}$ ;
  - (b) atualizar solução:  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}$ ;
  - (c) atualizar a matriz  $\mathbf{B}^{(k)}$ , usando (4.25).

**Nota 4.6** Apesar de suas vantagens, o método de Broyden tem algumas desvantagens:

- **Convergência Mais Lenta:** Em comparação com o método de Newton, que tem convergência quadrática, o método de Broyden tem uma taxa de convergência geralmente inferior (superlinear), o que significa que pode precisar de mais iterações para convergir.
- **Sensibilidade à aproximação inicial:** Tal como o método de Newton, o sucesso do método de Broyden depende da escolha da aproximação inicial. Se a aproximação inicial  $x_0$  estiver muito longe da solução, o método pode não convergir.

### 4.5.3 Exercícios

**Exercício 4.15** Resolva os sistemas abaixo indicados, usando o método de Newton e o método de Broyden e as aproximações iniciais indicadas.

$$a) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ e^{x_1-1} + x_2^3 - 2 = 0 \end{cases} \quad (x_0 = (1.5 \ 2.0)^T)$$

$$b) \begin{cases} x_1^2 + x_2 - x_2 e^{x_1} = 0 \\ x_1^2 - x_2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (x_0 = (1 \ 1)^T)$$

**Exercício 4.16** A **Função Tridiagonal de Broyden** é uma função não linear utilizada frequentemente para testar métodos numéricos de otimização e para resolver sistemas de equações não lineares. Esta função faz parte de um conjunto de funções de teste projetadas para avaliar a eficiência de algoritmos em encontrar raízes de sistemas não lineares.

Para um sistema de  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a função tridiagonal de Broyden é definida por um sistema de  $n$  equações não lineares da forma:

$$f_i(x) = (3 - 2x_i)x_i - x_{i-1} - 2x_{i+1} + 1 = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

onde:  $f_i(x)$  representa a  $i$ -ésima equação do sistema,  $x_0 = 0$  e  $x_{n+1} = 0$  são condições de fronteira,  $x_i$  são as variáveis a serem encontradas.

Use o método de Broyden para resolver o sistema para  $n = 10$ , usando como aproximação inicial  $x_0 = (-1 \ -1 \ \dots \ -1)^T$ .

## 4.6 Trabalhos

Trabalho 1. A equação de Kepler relativa ao movimento dos planetas tem a forma

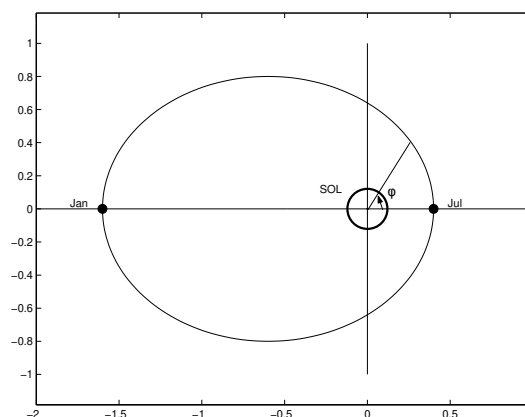
$$\omega t = \phi - \varepsilon \sin \phi, \quad (4.26)$$

onde  $t$  é o tempo,  $\omega$  é a frequência angular,  $\varepsilon$  é a excentricidade da órbita do planeta (elipse) e  $\phi$  é o ângulo. Para determinar a localização do planeta no instante  $t$ , é necessário determinar o valor de  $\phi$  na equação (4.26), sendo, então, as coordenadas  $x$  e  $y$  dadas por

$$x = a(\cos \phi - \varepsilon) \quad \text{e} \quad y = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \phi,$$

onde  $a$  é o semi-eixo maior da elipse.

Considere um planeta com  $a = 1 \text{ AU}$ <sup>4</sup> e excentricidade  $\varepsilon = 0.6$ <sup>5</sup>. A figura seguinte mostra a órbita desse planeta e a sua posição em “Janeiro” ( $\omega t = \pi \Leftrightarrow \phi = \pi$ ) e em “Julho” ( $\omega t = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$ ).



Pretende-se determinar a posição do planeta nos restantes dez meses do ano (assuma que cada mês corresponde a 1/12 do ano). Preencha a tabela seguinte e esboce a figura correspondente com as posições do planeta (semelhante à figura anterior, mas mais completa).

$\omega t$	$\phi$	$x$	$y$
0	0.000000	0.400000	0.000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\pi$	0.3141593	-1.600000	0.000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

<sup>4</sup>AU (unidade astronómica)

<sup>5</sup>Este valor de  $\varepsilon$  é, na realidade, muito maior do que a excentricidade da órbita da Terra ...

**Trabalho 2. [Método de Steffensen]**

O método de Steffensen é uma técnica que combina o método do ponto fixo com o processo de aceleração  $\Delta^2$  de Aitken do seguinte modo:

1. dada uma aproximação  $x_0$ , obter as iteradas  $x_1$  e  $x_2$  pelo método do ponto fixo
2. usar a fórmula de Aitken aplicada a  $x_0, x_1$  e  $x_2$  para obter  $x'_0$
3. repetir passo 1) com  $x_0 = x'_0$ .

- a) Mostre que o método Steffensen para obter o ponto fixo de uma função  $g$  é um método iterativo de ponto fixo, cujo esquema iterativo é

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(g(x_k) - x_k)^2}{g(g(x_k)) - 2g(x_k) + x_k}$$

- b) Implemente o método Steffensen e apresente exemplos adequados.

**Trabalho 3.**

- a) Considere a aplicação do método de Newton para resolver a equação  $2 - e^x = 0$ , a qual admite  $r = \ln 2$  como solução, tomando como aproximação inicial  $x_0 = 1$ .

- (i) Calcule os quocientes

$$R_k^{(2)} = \frac{|r - x_{k+1}|}{|r - x_k|^2}$$

e verifique se  $R_k^{(2)}$  tende para o valor esperado (qual?) quando  $k \rightarrow \infty$ .

- (ii) Calcule os quocientes

$$R_k^{(p)} = \frac{|r - x_{k+1}|}{|r - x_k|^p}$$

para valores de  $p \neq 2$ , mas próximos de 2, por exemplo,  $p = 1.9, 1.8, 2.1$ . Que verifica?

- b) Considere novamente a aplicação do método de Newton, agora para a equação  $1 - xe^{1-x} = 0$ , a qual admite  $r = 1$  como raiz dupla (tome  $x_0 = 0$ ). Determine os quocientes  $R_k^{(p)}$  para  $p = 2$  e  $p = 1$ .
- c) Repita a alínea anterior usando o método modificado (4.16). Comente devidamente os resultados obtidos.

**Trabalho 4. [Método de Halley]** O método de Halley para aproximar uma solução da equação  $f(x) = 0$  consiste na sequência de iterações:

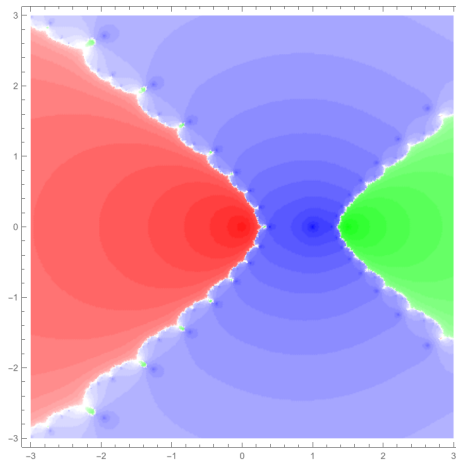
$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2(f'(x_k))^2 - f(x_k)f''(x_k)},$$

começando com uma estimativa inicial  $x_0$ .

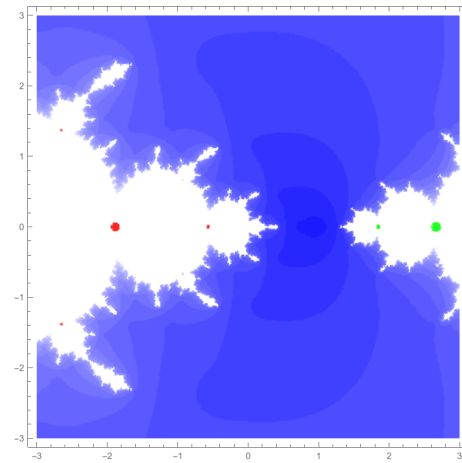


- Deduza o esquema<sup>6</sup> aplicando o método de Newton à função  $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}}$ .
- Prove que o método tem ordem de convergência 3 (pode assumir que  $f$  é suficientemente suave).
- Use os métodos de Newton e de Halley para obter as raízes da equação  $xe^x = -\frac{1}{2e}$ , usando como estimativas iniciais os valores 0.25 e -3. Faça um pequeno comentário à rapidez de convergência de ambos os métodos.

Trabalho 5. Obtenha a bacia de atração dos zeros do polinómio  $p(x) = x^4 - 3.5x^3 + 4x^2 - 1.5x$ , usando o método de Newton e o Método de Newton Modificado. Os gráficos resultantes devem ser semelhantes às figuras seguintes.



Método de Newton



Método de Newton modificado

Trabalho 6. Implemente o método de Weierstrass paralelo e sequencial. Ilustre a ordem de convergência de cada um destes métodos, escolhendo exemplos adequados. Inclua um exemplo de um polinómio com raízes múltiplas.

Trabalho 7. De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, qualquer polinómio real ou complexo de grau  $n$ ,

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (4.27)$$

tem  $n$  raízes complexas (não necessariamente distintas)  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , podendo por isso ser escrito na forma

$$p_n(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n). \quad (4.28)$$

- Obtenha as chamadas **fórmulas de Vieta** que relacionam os coeficientes do polinómio

<sup>6</sup>Nesta alínea, pode usar o Mathematica para evitar os cálculos.

com somas e produtos das raízes  $r_1, r_2, \dots, r_n$ :

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n) + (r_2 r_3 + \dots + r_2 r_n) + \dots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ r_1 r_2 \dots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases} \quad (4.29)$$

ou, de forma equivalente

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left( \prod_{j=1}^k r_{i_j} \right) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n$$

- b) Mostre que a aplicação do método de Newton na resolução do sistema (4.29) conduz ao método de Weierstrass para obter simultaneamente os zeros do polinómio (4.28). Ilustre o resultado anterior, considerando um exemplo.
- c) Considere a equação polinomial  $x^3 + 2x^2 - 7x + 1 = 0$ .
- (i) Use o método de Newton, com aproximações iniciais adequadas, para obter todas as raízes da equação.
  - (ii) Calcule as raízes da equação, usando o método de Weierstrass.
  - (iii) Escreva as fórmulas de Vieta para este polinómio e use o método de Newton na resolução do correspondente sistema.

Trabalho 8. [Adaptado de Pina 1995] Seja  $A$  uma matriz real de ordem  $n$  invertível.

- a) Prove a chamada **fórmula de Sherman-Morrison**

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} uv^T A^{-1},$$

se e só se  $\sigma = 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$ .

- b) Considere o sistema  $Ax = b$  e o sistema modificado  $By = c$ , onde  $B = A + uv^T$ . Apresente um algoritmo eficiente que relacione as soluções dos dois sistemas e evite o cálculo de  $A^{-1}$ .
- c) Mostre que a aplicação da fórmula de Sherman-Morrison permite escrever a matriz inversa da matriz  $\mathbf{B}^{(k+1)}$ , associada ao método de Broydan, a partir da inversa da matriz  $\mathbf{B}^{(k)}$ . Mais precisamente, mostre que, se  $\mathbf{H}^{(k)} = (\mathbf{B}^{(k)})^{-1}$ , então

$$\mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{H}^{(k)} - \frac{1}{\sigma_k \|\mathbf{s}^{(k)}\|^2} \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k+1)}) (\mathbf{s}^{(k)})^T \mathbf{H}^{(k)},$$

onde

$$\sigma_k = 1 + \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(k)}\|^2} (\mathbf{s}^{(k)})^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k+1)}),$$

sendo esta expressão válida quando  $\sigma_k \neq 0$ .

- d) Escreva uma função para implementar o método de Broydan e ilustre a sua aplicação através de exemplos adequados.

# Conteúdo

<b>4</b>	<b>Equações Não Lineares</b>	<b>3</b>
4.1	Equações Não Lineares: background	3
4.1.1	Introdução	3
4.1.2	Método do ponto fixo ou das iterações sucessivas	4
4.1.3	Aceleração de Aitken	7
4.1.4	Exercícios	8
4.2	Método de Newton e variantes	10
4.2.1	Descrição geométrica	10
4.2.2	Bacias de atração	11
4.2.3	Exercícios	12
4.3	Método da secante	13
4.4	Métodos simultâneos para encontrar raízes de polinómios	14
4.4.1	Método de Weierstrass	14
4.4.2	Exercícios	18
4.5	Sistemas de equações não lineares	18
4.5.1	Método de Newton para sistemas não lineares	18
4.5.2	Método de Broyden	21
4.5.3	Exercícios	22
4.6	Trabalhos	23