Resolução: Ficha - Otimização com restrições: condições de otimalidade

1. Neste problema ($d=3, \mathcal{E}=\{1\}, \mathcal{I}=\{\}$) temos

$$\begin{aligned} F(w_1,w_2,w_3) &= w_1^2 - 2w_1 + w_2^2 - w_3^2 + 4w_3 \\ c(w_1,w_2,w_3) &= w_1 - w_2 + 2w_3 - 2 \end{aligned}$$

pelo que a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1,w_2,w_3,\lambda) = w_1^2 - 2w_1 + w_2^2 - w_3^2 + 4w_3 - \lambda\,(w_1 - w_2 + 2w_3 - 2)$$

<u>Calcular</u>:

$$\nabla_w L(w_1,w_2,w_3,\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w_1 - 2 - \lambda \\ 2w_2 + \lambda \\ -2w_3 + 4 - 2\lambda \end{bmatrix}$$

Verificar se $w^* = (2.5, -1.5, -1)^T$ é um ponto estacionário da Lagrangeana:

$c(2.5,-1.5,-1) = 2.5 - (-1.5) + 2(-1) - 2 = 4 - 4 = 0,$ é ponto admissível

$$\nabla_w L(2.5,-1.5,-1,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2(2.5) - 2 - \lambda \\ 2(-1.5) + \lambda \\ -2(-1) + 4 - 2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda = -3$$

Portanto, o ponto $w^* = (2.5, -1.5, -1)^T$ e o multiplicador $\lambda^* = -3$ satisfazem as condições KKT.

Vamos agora verificar se as condições suficientes de 2ª ordem são satisfeitas neste ponto:

<u>calcular:</u> $\nabla^2_{ww} L(w_1,w_2,w_3,\lambda)$

$$\nabla^2_{ww} L(w_1,w_2,w_3,\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_3 w_1} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_3 w_2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_3} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_3} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(2.5,-1.5,-1,-3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>calcular</u> $A_{\mathcal{E}}$ (matriz dos gradiente das restrições ativas em w^*):

$$\nabla c(w_1,w_2,w_3) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial c}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial c}{\partial w_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla c(2.5,-1.5,-1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e portanto $A_{\mathcal{E}}(w^*) = \nabla c^T = [1\ \ -1\ \ 2]$

<u>calcular</u> o núcleo de $A_{\mathcal{E}}(w^*)$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}(w^*)) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}(w^*))$ é: $Z = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

calcular:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(2.5, -1.5, -1 - 3) Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Como os determinantes das submatrizes principais são: 4 e 8, esta matriz é definida positiva. Portanto, $(2.5, -1.5, -1)^T$ é um minimizante local do problema e o mínimo local é $F(2.5, -1.5, -1) = -1.5$

2. Neste problema ($d = 3, \mathcal{E} = \{1\}, \mathcal{I} = \{\}$) temos

$$F(w_1, w_2, w_3) = w_1^2 + w_1^2 w_3^2 + 2w_1 w_2 + w_2^4 + 8w_2$$
$$c(w_1, w_2, w_3) = 2w_1 + 5w_2 + w_3 - 3$$

pelo que a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, w_3, \lambda) = w_1^2 + w_1^2 w_3^2 + 2w_1 w_2 + w_2^4 + 8w_2 - \lambda\left(2w_1 + 5w_2 + w_3 - 3\right)$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w_1 w_3^2 + 2w_1 + 2w_2 - 2\lambda \\ 4w_2^3 + 2w_1 - 5\lambda + 8 \\ 2w_3 w_1^2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Verificar se os pontos $(0,0,2)^T$, $(0,0,3)^T$ e $(1,0,1)^T$ são pontos estacionários da Lagrangeana:

ponto $(0,0,2)^T$:
$c(0,0,2) = 2 \times 0 + 5 \times 0 + 2 - 3 = -1 \neq 0$ não é ponto admissível, e portanto não é ponto estacionário de L.

ponto $(0,0,3)^T$:
$c(0,0,3) = 2 \times 0 + 5 \times 0 + 3 - 3 = 0$, é ponto admissível

$$\nabla_w L(0,0,3,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 - 2\lambda \\ -5\lambda + 8 \\ 0 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ sistema impossível}$$

Portanto, não existe nenhum multiplicador de Lagrange associado a este ponto, e portanto $(0,0,3)^T$ não é ponto estacionário de L.

ponto $(1,0,1)^T$:
$c(1,0,1) = 2 \times 1 + 5 \times 0 + 1 - 3 = 0$, é ponto admissível

$$\nabla_w L(1,0,1,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 + 2 + 0 - 2\lambda \\ 0 + 2 - 5\lambda + 8 \\ 2 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 2$$

Portanto, o ponto $w^* = (1,0,1)^T$ e o multiplicador $\lambda^* = 2$ satisfazem as condições KKT, ou seja, (1,0,1,2) é um ponto estacionário da Lagrangeana.

Vamos agora verificar se as condições suficientes de 2ª ordem são satisfeitas neste ponto (1,0,1,2):

calcular: $\nabla^2_{ww} L(w_1, w_2, w_3, \lambda)$

$$\nabla^2_{ww}L(w_1,w_2,w_3,\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_3 w_1} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_3 w_2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_3} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_3} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w_3^2+2 & 2 & 4w_1w_3 \\ 2 & 12w_2^2 & 0 \\ 4w_1w_3 & 0 & 2w_1^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww}L(1,0,1,2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>calcular</u> $A_{\mathcal{E}}(w^*)$ (matriz dos gradiente das restrições ativas em w^*):

$$\nabla c(w_1,w_2,w_3) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial c}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial c}{\partial w_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla c(1,0,1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e portanto $A_{\mathcal{E}}(w^*) = \nabla c^T = [2\ \ 5\ \ 1]$

<u>calcular</u> o núcleo de $A_{\mathcal{E}}(w^*)$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}(w^*)) = \left[\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}(w^*))$ é: $Z = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>calcular</u>:

$$Z^T\nabla^2_{ww}L(1,0,1,2)Z = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Como os determinantes das submatrizes principais são: 15 e -51, esta matriz é indefinida. Portanto, $(1,0,1)^T$ não é um minimizante do problema.

3. Neste problema ($d=2, \mathcal{E}=\{1\}, \mathcal{I}=\{\}$) temos

$$F(w_1,w_2) = w_1^2 + w_2^2$$
$$c(w_1,w_2) = w_1 + w_2 - 2$$

pelo que a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1,w_2,\lambda) = w_1^2 + w_2^2 - \lambda\,(w_1 + w_2 - 2)$$

<u>Calcular</u>:

$$\nabla_w L(w_1,w_2,\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w_1 - \lambda \\ 2w_2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Verificar se o ponto $(1,1)^T$ é um pontos estacionário da Lagrangeana:
$c(1,1) = 1+1-2 = 0$, é ponto admissível

$$\nabla_w L(1,1,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda \\ 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 2$$

Portanto, o ponto $w^* = (1,1)^T$ e o multiplicador $\lambda^* = 2$ satisfazem as condições KKT, ou seja, (1,1,2) é um ponto estacionário da Lagrangeana.

Reparar que $\nabla^2 F(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial w_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial w_2 w_1} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial w_1 w_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial w_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (matriz constante)

Como $\nabla^2 F(w_1, w_2)$ é definida positiva $\forall w \in \mathbb{R}^2$, então F é uma função convexa. Como F e c são funções convexas, o problema é convexo.

Portanto, o ponto $(1, 1)^T$ é um minimizante global do problema e o mínimo global é $F(1, 1) = 2$.

4. Neste problema ($d = 3, \mathcal{E} = \{1\}, \mathcal{I} = \{\}$) temos

$$\begin{aligned} F(w_1, w_2, w_3) &= w_1^4 w_2^2 + w_1^2 w_3^4 + \tfrac{1}{2} w_1^2 + w_1 w_2 + w_3 \\ c(w_1, w_2, w_3) &= w_1 + w_2 + w_3 - 1 \end{aligned}$$

pelo que a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, w_3, \lambda) = w_1^4 w_2^2 + w_1^2 w_3^4 + \frac{1}{2} w_1^2 + w_1 w_2 + w_3 - \lambda\,(w_1 + w_2 + w_3 - 1)$$

<u>Calcular</u>:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, w_3, \lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4w_1^3 w_2^2 + 2w_1 w_3^4 + w_1 + w_2 - \lambda \\ 2w_2 w_1^4 + w_1 - \lambda \\ 4w_1^2 w_3^3 + 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Verificar se $(1, 0, 0)^T$ é um ponto estacionário da Lagrangeana:

$c(1, 0, 0) = 1 + 0 + 0 - 1 = 0$, é ponto admissível

$$\nabla_w L(1, 0, 0, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 1-\lambda \\ 1-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 1$$

Portanto, o ponto $w^* = (1, 0, 0)^T$ e o multiplicador $\lambda^* = 1$ satisfazem as condições KKT, ou seja, (1,0,0,1) é um ponto estacionário da Lagrangeana.

Vamos agora verificar se as condições suficientes de 2ª ordem são satisfeitas neste ponto (1,0,0,1):

<u>calcular:</u> $\nabla^2_{ww} L(w_1, w_2, w_3, \lambda)$

$$\nabla^2_{ww} L(w_1, w_2, w_3, \lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_3 w_1} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_3 w_2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_3} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_3} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12w_1^2 w_2^2 + 2w_3^4 + 1 & 8w_2 w_1^3 + 1 & 8w_1 w_3^3 \\ 8w_2 w_1^3 + 1 & 2w_1^4 & 0 \\ 8w_1 w_3^3 & 0 & 12w_1^2 w_3^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(1, 0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>calcular</u> $A_{\mathcal{E}}(w^*)$ (matriz dos gradiente das restrições ativas em w^*):

$$\nabla c(w_1, w_2, w_3) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial c}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial c}{\partial w_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla c(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e portanto $A_{\mathcal{E}} = \nabla c^T = [1 \;\; 1 \;\; 1]$

calcular o núcleo de $A_{\mathcal{E}}(w^*)$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}(w^*)) = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}(w^*))$ é: $Z = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

calcular:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(1,0,0,1) Z = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como os determinantes das submatrizes principais são: 1 e 1, esta matriz é definida positiva. Portanto, $(1,0,0)^T$ é um minimizante local do problema e o mínimo local é F(1,0,0)=0.5.

5. (a) Neste problema $(d = 2, \mathcal{E} = \{1\}, \mathcal{I} = \{\})$ temos

$$F(w_1, w_2) = w_1^2 - w_2^2$$
$$c(w_1, w_2) = w_1^2 + 2w_2^2 - 4$$

pelo que a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, \lambda) = w_1^2 - w_2^2 - \lambda \left(w_1^2 + 2w_2^2 - 4 \right)$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w_1 - 2w_1\lambda \\ -2w_2 - 4w_2\lambda \end{bmatrix}$$

Pontos estacionários de L:

$$\begin{cases} \nabla_w L(w_1, w_2, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ c(w_1, w_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2w_1 - 2w_1\lambda = 0 \\ -2w_2 - 4w_2\lambda = 0 \\ w_1^2 + 2w_2^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

e portanto os pontos estacionários são: (-2,0,1); (2,0,1); $(0, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$; $(0, \sqrt{2}, -\frac{1}{2})$

Vamos agora verificar se as condições suficientes de 2ª ordem são satisfeitas em cada um destes pontos:

Calcular:

$$\nabla c(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial c}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w_1 \\ 4w_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{ww} L(w_1, w_2, \lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_1} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2\lambda & 0 \\ 0 & -4\lambda - 2 \end{bmatrix}$$

ponto (-2,0,1):

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(-2, 0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla c(-2, 0) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto $A_{\mathcal{E}} = \nabla c^T = [-4 \;\; 0]$

calcular o núcleo de $A_{\mathcal{E}}$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}})$ é: $Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

calcular:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(-2, 0, 1) Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [-6]$$

Como o determinante desta matriz é: -6, esta matriz é definida negativa. Portanto, $(-2, 0)^T$ não é um minimizante do problema.

ponto (2,0,1):

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(2, 0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla c(2, 0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto a matriz $A_{\mathcal{E}} = \nabla c^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$

calcular o núcleo de $A_{\mathcal{E}}$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}})$ é: $Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

calcular:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(2, 0, 1) Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [-6]$$

Como o determinante desta matriz é: -6, esta matriz é definida negativa. Portanto, $(2, 0)^T$ não é um minimizante do problema.

ponto $(0,\sqrt{2},-\frac{1}{2})$:

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(\sqrt{2},0,\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla c(0,\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

calcular o núcleo de $A_{\mathcal{E}}$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}})$ é: $Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

calcular:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(0,\sqrt{2},-\tfrac{1}{2})\ \mathrm{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [3]$$

Como o determinante desta matriz é: 3, esta matriz é definida positiva. Portanto, $(0, \sqrt{2})^T$ é um minimizante local do problema e o mínimo local é $\mathrm{F}(0,\sqrt{2}) = -2$.

ponto $(0,-\sqrt{2},-\frac{1}{2})$:

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(0,\text{-}\sqrt{2},\text{-}\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow\nabla c(0,-\sqrt{2})= \begin{bmatrix} 0 \\ -4\sqrt{2} \end{bmatrix}$

e portanto a matriz $A_{\mathcal{E}} = \nabla c^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 \end{bmatrix}$

<u>calcular</u> o núcleo de $A_{\mathcal{E}}$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}$ é: $Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

<u>calcular</u>:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(0, -\sqrt{2}, -\tfrac{1}{2}) Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [3]$$

Como o determinante desta matriz é: 3, esta matriz é definida positiva. Portanto, $(0, -\sqrt{2})^T)$ é um minimizante local do problema e o mínimo local é F$(0,-\sqrt{2})=-2$.

(b) Neste problema $(d = 4, \mathcal{E} = \{2\}, \mathcal{I} = \{\})$ temos

$$\begin{aligned} F(w_1, w_2, w_3, w_4) &= (w_1 - 2)^2 + (w_2 - 2)^2 + (w_3 - 3)^2 + (w_4 - 4)^2 \\ c_1(w_1, w_2, w_3, w_4) &= w_1 - 2 \\ c_2(w_1, w_2, w_3, w_4) &= w_3 + w_4 - 2 \end{aligned}$$

pelo que a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, w_3, w_4, \lambda_1, \lambda_2) = (w_1 - 2)^2 + (w_2 - 2)^2 + (w_3 - 3)^2 + (w_4 - 4)^2 - \lambda_1 (w_1 - 2) - \lambda_2 (w_3 + w_4 - 2)$$

<u>Calcular</u>:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, w_3, w_4, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_3} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w_1 - \lambda_1 - 4 \\ 2w_2 - 4 \\ 2w_3 - \lambda_2 - 6 \\ 2w_4 - \lambda_2 - 8 \end{bmatrix}$$

Pontos estacionários de L:

$$\begin{cases} \nabla_w L(w_1, w_2, w_3, w_4, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ c_1(w_1, w_2, w_3, w_4) = 0 \\ c_2(w_1, w_2, w_3, w_4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2w_1 - \lambda_1 - 4 = 0 \\ 2w_2 - 4 = 0 \\ 2w_3 - \lambda_2 - 6 = 0 \\ 2w_4 - \lambda_2 - 8 = 0 \\ w_1 - 2 = 0 \\ w_3 + w_4 - 2 = 0 \end{cases}$$

e portanto o ponto estacionário é:
$(2, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, -5)$

Vamos agora verificar se as condições suficientes de 2ª ordem são satisfeitas no ponto estacionário:
<u>Calcular:</u>

$$\nabla c_1(w_1, w_2, w_3, w_4) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c_1}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial c_1}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial c_1}{\partial w_3} \\ \dfrac{\partial c_1}{\partial w_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla c_2(w_1,w_2,w_3,w_4) = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_2}{\partial w_1} \\ \frac{\partial c_2}{\partial w_2} \\ \frac{\partial c_2}{\partial w_3} \\ \frac{\partial c_2}{\partial w_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e portanto $A_{\mathcal{E}}(w_1,w_2,w_3,w_4) = \left[\nabla c_i^T\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\nabla^2_{ww} L(w_1,w_2,w_3,w_4,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial w_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial w_3 w_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial w_4 w_1} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial w_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial w_3 w_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial w_4 w_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial w_3^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial w_4 w_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_4} & \frac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_w 4} & \frac{\partial^2 L}{\partial w_3 w_4} & \frac{\partial^2 L}{\partial w_4^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>ponto $(2,2,\frac{1}{2},\frac{3}{2},0,-5)$:</u>

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(2,2,\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},0,-5) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla c_1(2,2,\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},0,-5) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla c_2(2,2,\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},0,-5)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e portanto a matriz $A_{\mathcal{E}}(2,2,\frac{1}{2},\frac{3}{2},0,-5) = \left[\nabla c_i^T\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>calcular</u> o núcleo de $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}})$: $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}})$ é: $Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>calcular</u>:

$Z^T \nabla^2_{ww} L(2,2,\frac{1}{2},\frac{3}{2},0,-5) Z =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Como os determinante das sub-matrizes principais são: 2 e 4, esta matriz é definida positiva. Portanto, $(2,2,\frac{1}{2},\frac{3}{2},0,-5)$ é um minimizante local do problema e o mínimo local é $F(2,2,\frac{1}{2},\frac{3}{2},0,-5) = 12.5$.

(c) Neste problema ($d = 2, \mathcal{E} = \{1\}, \mathcal{I} = \{\}$) temos

$$F(w_1,w_2) = 2\left(w_1^2+w_2^2-1\right) - w_1$$
$$c(w_1,w_2) = w_1^2+2w_2^2-1$$

pelo que a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1,w_2,\lambda) = 2\left(w_1^2+w_2^2-1\right) - w_1 - \lambda\left(w_1^2+2w_2^2-1\right)$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1,w_2,\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4w_1 - 2w_1\lambda - 1 \\ 4w_2 - 4w_2\lambda \end{bmatrix}$$

Pontos estacionários de L:

$$\begin{cases} \nabla_w L(w_1,w_2,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ c(w_1,w_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4w_1 - 2w_1\lambda - 1 = 0 \\ 4w_2 - 4w_2\lambda = 0 \\ w_1^2+2w_2^2-1 = 0 \end{cases}$$

e portanto os pontos estacionários são: $(1,0,\frac{3}{2})$; $(-1,0,\frac{5}{2})$; $(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{6}}{4},1)$; $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{4},1)$

Vamos agora verificar se as condições suficientes de 2ª ordem são satisfeitas em cada um destes pontos:

Calcular:

$$\nabla c(w_1,w_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial c}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w_1 \\ 4w_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{ww} L(w_1,w_2,\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_1} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2\lambda & 0 \\ 0 & 4-4\lambda \end{bmatrix}$$

ponto $(1,0,\frac{3}{2})$:

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(1,0,\tfrac{3}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla c(1,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto $A_{\mathcal{E}} = \nabla c^T = [2 \;\; 0]$

calcular o núcleo de $A_{\mathcal{E}}$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}})$ é: $Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

calcular:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(1,0,\tfrac{3}{2}) Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [-2]$$

Como o determinante desta matriz é: -2, esta matriz é definida negativa. Portanto, $(1,0)^T$ não é um minimizante do problema.

ponto $(-1,0,\frac{5}{2})$:

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(-1,0,\tfrac{5}{2}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla c(-1,0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto $A_{\mathcal{E}} = \nabla c^T = [-2 \;\; 0]$

<u>calcular</u> o núcleo de $A_{\mathcal{E}}$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}})$ é: $Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

<u>calcular</u>:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(-1, 0, \tfrac{5}{2}) Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [-6]$$

Como o determinante desta matriz é: -6, esta matriz é definida negativa. Portanto, $(-1, 0)^T$ não é um minimizante local do problema.

<u>ponto $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, 1)$:</u>

$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \nabla c(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{6} \end{bmatrix}$

e portanto $A_{\mathcal{E}} = \nabla c^T = [1 \;\; -\sqrt{6}]$

<u>calcular</u> o núcleo de $A_{\mathcal{E}}$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}) = \left[\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}})$ é: $Z = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 1 \end{bmatrix}$.

<u>calcular</u>:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{6}}{4}, 1) Z = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 1 \end{bmatrix} = [12]$$

Como o determinante desta matriz é: 12, esta matriz é definida positiva. Portanto, $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4})^T$ é um minimizante local do problema e o mínimo local é $F(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4}) = -\frac{5}{4} = -1.25$

<u>ponto $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}, 1)$:</u>

$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \nabla c(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \end{bmatrix}$

e portanto $A_{\mathcal{E}} = \nabla c^T = [1 \;\; \sqrt{6}]$

<u>calcular</u> o núcleo de $A_{\mathcal{E}}$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}}) = \left[\begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{E}})$ é: $Z = \begin{bmatrix} -\sqrt{6} \\ 1 \end{bmatrix}$.

<u>calcular</u>:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{6}}{4}, 1) Z = \begin{bmatrix} -\sqrt{6} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{6} \\ 1 \end{bmatrix} = [12]$$

Como o determinante desta matriz é: 12, esta matriz é definida positiva. Portanto, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4})^T$ é um minimizante local do problema e o mínimo local é $F(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}) = -\frac{5}{4} = -1.25$

6. (a) Neste problema $(d = 2, \mathcal{E} = \{\}, \mathcal{I} = \{2\})$ temos

$$
\begin{aligned}
&F(w_1,w_2) = w_1^3 - w_2^3 - 2w_1^2 - w_1 + w_2\\
&c_1(w_1,w_2) = -w_1 - 2w_2 + 2\\
&c_2(w_1,w_2) = w_1
\end{aligned}
$$

Caso 1: todas as restrições estão ativas

Neste caso, a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1,w_2,\alpha_1,\alpha_2) = w_1^3 - w_2^3 - 2w_1^2 - w_1 + w_2 - \alpha_1\left(-w_1 - 2w_2 + 2\right) - \alpha_2 w_1$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1,w_2,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3w_1^2 - 4w_1 + \alpha_1 - \alpha_2 - 1 \\ -3w_2^2 + 2\alpha_1 + 1 \end{bmatrix}$$

Como c_1 e c_2 estão ativas, então obtém-se $w_1 = 0$ e $w_2 = 1$.

calcular os multiplicadores de Lagrange, associados a c_1 e c_2, neste ponto:

$$\nabla_w L(0,1,\alpha_1,\alpha_2) = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 - 1 \\ 2\alpha_1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto os multiplicadores de Langrange são $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 0$. Como $\alpha_2 = 0$, a restrição c_2 é degenerada.

Portanto, o ponto (0,1,1,0) é um ponto estacionário da Langrangeana, para o caso em estudo.

Vamos agora verificar se as condições suficientes de 2ª ordem são satisfeitas neste ponto:

Calcular:

(gradientes das restrições ativas e não degeneradas):

$$\nabla c_1(w_1,w_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c_1}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial c_1}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{ww} L(w_1,w_2,\alpha_1,\alpha_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_1} \\ \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6w_1 - 4 & 0 \\ \\ 0 & -6w_2 \end{bmatrix}$$

ponto $(0,1,1,0)$:

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(0,1,1,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla c_1(0,1) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

e portanto $A_{\mathcal{I}} = \nabla c_1^T = [-1 \;\; -2]$

calcular o núcleo de $A_{\mathcal{I}}$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{I}}) = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{I}})$ é: $Z = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

calcular:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(0,1,1,0) Z = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = [-22]$$

Como o determinante desta matriz é: -22, esta matriz é definida negativa. Portanto, $(0,1)^T$ não é um minimizante do problema.

Caso 2: c_1 ativa

Neste caso, a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2) = w_1^3 - w_2^3 - 2w_1^2 - w_1 + w_2 - \alpha_1 \left(-w_1 - 2w_2 + 2\right)$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \alpha_1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3w_1^2 - 4w_1 + \alpha_1 - 1 \\ -3w_2^2 + 2\alpha_1 + 1 \end{bmatrix}$$

calcular os pontos estacionários de L:

Como c_1 está ativa, então obtém-se $w_1 = 2 - 2w_2$. Substituindo w_1 por esta expressão nas outras equações de $\nabla_w L$ e resolvendo o sistema:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \alpha_1) = \begin{bmatrix} 3(2-2w_2)^2 - 4(2-2w_2) + \alpha_1 - 1 \\ -3w_2^2 + 2\alpha_1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtém-se: $w_2 = 1$ e $\alpha_1 = 1$, ou $w_2 = \frac{5}{27} \simeq 0.1852$ e $\alpha_1 = -\frac{109}{243} \simeq -0.4486$, e portanto $w_1 = 0$ ou $w_1 = \frac{44}{27} \simeq 1.6296$.

Notar que os pontos (0,1) e $(\frac{44}{27}, \frac{5}{27})$ satisfazem a restrição c_2, ou seja, são pontos admissíveis.

Como o multiplicador associado ao ponto $(\frac{44}{27}, \frac{5}{27})$ é negativo, este ponto não é ponto ótimo do problema.

Como o multiplicador associado ao ponto (0,1) é não negativo, (0,1,1) é ponto estacionário da Lagrangeana, para o caso em estudo.

Vamos agora verificar se as condições suficientes de 2ªordem são satisfeitas neste ponto:

Calcular:

(gradientes das restrições ativas e não degeneradas):

$$\nabla c_1(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial c}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{ww} L(w_1, w_2, \alpha_1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_1} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6w_1 - 4 & 0 \\ 0 & -6w_2 \end{bmatrix}$$

ponto $(0,1,1)$:

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(0,1,1) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla c_1(0,1) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

e portanto $A_{\mathcal{I}} = \nabla c_1^T = [-1 \quad -2]$

calcular o núcleo de $A_{\mathcal{I}}$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{I}}) = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{I}})$ é: $Z = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

calcular:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(0,1,1,0) Z = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = [-22]$$

Como o determinante desta matriz é: -22, esta matriz é definida negativa. Portanto, $(0,1)^T$ não é um minimizante do problema.

Caso 3: c_2 ativa

Neste caso, a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, \alpha_2) = w_1^3 - w_2^3 - 2w_1^2 - w_1 + w_2 - \alpha_2 w_1$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \alpha_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3w_1^2 - 4w_1 + \alpha_2 - 1 \\ -3w_2^2 + 1 \end{bmatrix}$$

calcular os pontos estacionários de L:

Como c_2 está ativa, então obtém-se $w_1 = 0$. Substituindo w_1 por 0 nas outras equações de $\nabla_w L$ e resolvendo o sistema:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \alpha_2) = \begin{bmatrix} -\alpha_2 - 1 \\ 1 - 3w_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtém-se: $w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\alpha_2 = -1$, ou $w_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\alpha_2 = -1$.

Como o multiplicador associado ao ponto $(0, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ é negativo, este ponto não é ponto ótimo do problema.

Como o multiplicador associado ao ponto $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ é negativo, este ponto não é ponto ótimo do problema.

Caso 4: nenhuma das restrições esta ativa

Neste caso, a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, \alpha_2) = w_1^3 - w_2^3 - 2w_1^2 - w_1 + w_2$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3w_1^2 - 4w_1 - 1 \\ -3w_2^2 + 1 \end{bmatrix}$$

calcular os pontos estacionários de L, resolver o sistema:

$$\nabla_w L(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} 3w_1^2 - 4w_1 - 1 \\ -3w_2^2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtém-se os pontos:

$w_1 = \frac{2-\sqrt{7}}{3} \simeq -0.2153$ e $w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq -0.5774$

$w_1 = \frac{2+\sqrt{7}}{3} \simeq 1.5486$ e $w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq -0.5774$

$w_1 = \frac{2-\sqrt{7}}{3} - 0.2153$ e $w_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0.5774$

$w_1 = \frac{2+\sqrt{7}}{3} \simeq 1.5486$ e $w_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0.5774$

Todos estes pontos são pontos não-admissíveis para o problema.

(b) Neste problema ($d = 2, \mathcal{E} = \{\}, \mathcal{I} = \{2\}$) temos

$$\begin{aligned} F(w_1, w_2) &= \tfrac{1}{2}w_1^2 + w_2^2 \\ c_1(w_1, w_2) &= 2w_1 + w_2 - 2 \\ c_2(w_1, w_2) &= 1 - w_1 + w_2 \end{aligned}$$

Caso 1: todas as restrições estão ativas

Neste caso, a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2}w_1^2 + w_2^2 - \alpha_1 (2w_1 + w_2 - 2) - \alpha_2(1 - w_1 + w_2)$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 - 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2w_2 - \alpha_1 - \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Como c_1 e c_2 estão ativas, então obtém-se $w_1 = 1$ e $w_2 = 0$.

calcular os multiplicadores de Lagrange, associados a c_1 e c_2, neste ponto:

$$\nabla_w L(1, 0, \alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} \alpha_2 - 2\alpha_1 + 1 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto os multiplicadores de Langrange são $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ e $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$. Como existem multiplicadores de Lagrange negativos, este ponto não é ponto ótimo.

Caso 2: c_1 ativa

Neste caso, a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, \alpha_1) = \frac{1}{2}w_1^2 + w_2^2 - \alpha_1 (2w_1 + w_2 - 2)$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \alpha_1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 - 2\alpha_1 \\ 2w_2 - \alpha_1 \end{bmatrix}$$

calcular os pontos estacionários de L:

Como c_1 está ativa, então obtém-se $w_1 = 1 - \frac{w_2}{2}$. Substituindo w_1 por esta expressão nas outras equações de $\nabla_w L$ e resolvendo o sistema:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \alpha_1) = \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha_1 - w_2/2 \\ 2w_2 - \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtém-se: $w_2 = \frac{2}{9} \simeq 0.2222$ e $\alpha_1 = \frac{4}{9} \simeq 0.4444$, e portanto $w_1 = \frac{8}{9} \simeq 0.8889$.

Como o ponto $(\frac{8}{9}, \frac{2}{9})$ verifica a restrição c_2, é um ponto admissível para o problema. Como o multiplicador de Lagrange é não negativo, o ponto $(\frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9})$ é um ponto estacionário da Lagrangeana.

Vamos agora verificar se as condições suficientes de 2ªordem são satisfeitas neste ponto:

Calcular:
(gradientes das restrições ativas e não degeneradas):

$$\nabla c_1(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c_1}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial c_1}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{ww}L(w_1,w_2,\alpha_1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_1} \\ \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>ponto $(\frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9})$:</u>

$\Rightarrow \nabla^2_{ww}L(\frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \nabla c_1(\frac{8}{9}, \frac{2}{9}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

e portanto $A_{\mathcal{I}} = \nabla c_1^T = [2 \ \ 1]$

<u>calcular</u> o núcleo de $A_{\mathcal{I}}$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{I}}) = \left[\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{I}})$ é: $Z = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

<u>calcular</u>:

$Z^T\nabla^2_{ww}L(\frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9})Z = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = [2.25]$

Como o determinante desta matriz é: 2.25, esta matriz é definida positiva. Portanto, $(\frac{8}{9}, \frac{2}{9})^T$ é um minimizante local do problema e o mínimo local é $F(\frac{8}{9}, \frac{2}{9}) = \frac{4}{9}$.

<u>**Caso 3: c_2 ativa**</u>

Neste caso, a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2}w_1^2 + w_2^2 - \alpha_2(1 - w_1 + w_2)$$

<u>Calcular</u>:

$\nabla_w L(w_1,w_2,\alpha_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 + \alpha_2 \\ 2w_2 - \alpha_2 \end{bmatrix}$

<u>calcular</u> os pontos estacionários de L:

Como c_2 está ativa, então obtém-se $w_1 = w_2 + 1$. Substituindo w_1 por esta expressão nas equações de $\nabla_w L$ e resolvendo o sistema:

$\nabla_w L(w_1,w_2,\alpha_2) = \begin{bmatrix} w_2 + 1 + \alpha_2 \\ 2w_2 - \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

obtém-se: $w_2 = -\frac{1}{3}$ e $\alpha_2 = -\frac{2}{3}$, e portanto $w_1 = \frac{2}{3}$.

Como o multiplicador associado ao ponto $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ é negativo, este ponto não é ponto ótimo do problema.

<u>**Caso 4: nenhuma das restrições esta ativa**</u>

Neste caso, a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2) = \frac{1}{2}w_1^2 + w_2^2$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ 2w_2 \end{bmatrix}$$

calcular os pontos estacionários de L, resolver o sistema:

$$\nabla_w L(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} w_1 \\ 2w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtém-se: $w_1 = 0$ e $w_2 = 0$. Uma vez que o ponto (0,0) não verifica todas as restrições do problema, (0,0) não é ponto admissível.

(c) Neste problema ($d = 2, \mathcal{E} = \{\}, \mathcal{I} = \{2\}$) temos

$$\begin{aligned} F(w_1, w_2) &= -w_1^2 + w_2^2 - w_1 w_2 \\ c_1(w_1, w_2) &= 2w_1 - w_2 - 2 \\ c_2(w_1, w_2) &= 4 - w_1 - w_2 \end{aligned}$$

Caso 1: todas as restrições estão ativas

Neste caso, a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2) = -w_1^2 + w_2^2 - w_1 w_2 - \alpha_1 (2w_1 - w_2 - 2) - \alpha_2 (4 - w_1 - w_2)$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2w_1 - w_2 - 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2w_2 - w_1 + \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Como c_1 e c_2 estão ativas, então obtém-se $w_1 = 2$ e $w_2 = 2$.

calcular os multiplicadores de Lagrange, associados a c_1 e c_2, neste ponto:

$$\nabla_w L(2, 2, \alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} -4 - 2 - 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 4 - 2 + \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto os multiplicadores de Langrange são $\alpha_1 = -\frac{8}{3}$ e $\alpha_2 = \frac{2}{3}$. Como existem multiplicadores de Lagrange negativos, este ponto não é ponto ótimo.

Caso 2: c_1 ativa

Neste caso, a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2) = -w_1^2 + w_2^2 - w_1 w_2 - \alpha_1 (2w_1 - w_2 - 2)$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \alpha_1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2w_1 - w_2 - 2\alpha_1 \\ 2w_2 - w_1 + \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Como c_1 está ativa, então obtém-se $w_1 = \frac{w_2}{2} + 1$. Substituindo w_1 por esta expressão nas outras equações de $\nabla_w L$ e resolvendo o sistema:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \alpha_1) = \begin{bmatrix} -2\left(\frac{w_2}{2} + 1\right) - w_2 - 2\alpha_1 \\ 2w_2 - \frac{w_2}{2} - 1 - \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtém-se: $w_2 = 4$ e $\alpha_1 = -5$, e portanto $w_1 = 3$. Como o multiplicador associado ao ponto (3,4) é negativo, este ponto não é ponto ótimo do problema.

Caso 3: c_2 ativa

Neste caso, a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2, \alpha_2) = -w_1^2 + w_2^2 - w_1 w_2 - \alpha_2(4 - w_1 - w_2)$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \alpha_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2w_1 - w_2 + \alpha_2 \\ 2w_2 - w_1 + \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Como c_2 está ativa, então obtém-se $w_1 = 4 - w_2$. Substituindo w_1 por esta expressão nas equações de $\nabla_w L$ e resolvendo o sistema:

$$\nabla_w L(w_1, w_2, \alpha_2) = \begin{bmatrix} -8 + 2w_2 - w_2 + \alpha_2 \\ 2w_2 - 4 + w_2 + \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtém-se: $w_2 = -2$ e $\alpha_2 = 10$, e portanto $w_1 = 6$. Notar que o ponto (6,-2) satisfaz a restrição c_1, ou seja, é um ponto admissível para o problema.

Vamos agora verificar se as condições suficientes de 2ªordem são satisfeitas neste ponto:

Calcular:
(gradientes das restrições ativas e não degeneradas):

$$\nabla c_2(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c_2}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial c_2}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{ww} L(w_1, w_2, \alpha_1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2 w_1} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_1 w_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial w_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ponto $(6, -2)$:

$$\Rightarrow \nabla^2_{ww} L(6, -2) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla c_2(6, -2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e portanto $A_{\mathcal{I}} = \nabla c_2^T = [-1 \quad -1]$

calcular o núcleo de $A_{\mathcal{I}}$: $\mathcal{N}(A_{\mathcal{I}}) = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

e portanto a Base para o $\mathcal{N}(A_{\mathcal{I}})$ é: $Z = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

calcular:

$$Z^T \nabla^2_{ww} L(6, -2) Z = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [2]$$

Como o determinante desta matriz é: 2, esta matriz é definida positiva. Portanto, $(6, -2)^T$ é um minimizante local do problema e o mínimo local é $F(6, -2) = -20$.

Caso 4: nenhuma das restrições esta ativa

Neste caso, a função Lagrangeana é dada por:

$$L(w_1, w_2) = -w_1^2 + w_2^2 - w_1 w_2$$

Calcular:

$$\nabla_w L(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2w_1 - w_2 \\ 2w_2 - w_1 \end{bmatrix}$$

calcular os pontos estacionários de L, resolver o sistema:

$$\nabla_w L(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} -2w_1 - w_2 \\ 2w_2 - w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtém-se: $w_1 = 0$ e $w_2 = 0$. Como o ponto (0,0) não verifica todas as restrições do problema, (0,0) não é ponto admissível para o problema.