Alínea a

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, qualquer polinómio real ou complexo de grau n,

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

tem n raízes complexas (não necessariamente distintas) $r_1, r_2, \ldots, r_n,$, podendo por isso ser escrito na forma:

$$p_n(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n).$$

Resolução: Começamos por desenvolver o polinómio que referimos acima:

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n) = a_n(x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2)\cdots(x - r_n).$$

$$= a_n(\left[x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2\right](x - r_3))\cdots(x - r_n).$$

$$= a_n(x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + [(r_1 r_2) + (r_1 r_3) + (r_2 r_3)]\, x - r_1 r_2 r_3)\cdots(x - r_n).$$

O polinómio pode ser generalizada desta forma:

$$p_n(x) = a_n\left[x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n\right].$$

Onde:

$\sigma_1 = r_1 + r_2 + \cdots + r_n,$ representa a soma das raízes;

$\sigma_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} r_i r_j,$ representa a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas;

$\sigma_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} r_i r_j r_k,$ representa a soma dos produtos das raízes tomadas três a três;

$\vdots$

$\sigma_n = r_1 r_2 \cdots r_n,$ representa o produto de todas as raízes.

Igualando aos coeficientes da fómula:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

obtemos:

$$\begin{cases} -a_n\sigma_1 = a_{n-1} & \Rightarrow \quad \sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ a_n\sigma_2 = a_{n-2} & \Rightarrow \quad \sigma_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ -a_n\sigma_3 = a_{n-3} & \Rightarrow \quad \sigma_3 = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \vdots & \\ (-1)^n a_n\sigma_n = a_0 & \Rightarrow \quad \sigma_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Substituindo agora os valores de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ obtemos as seguintes relações entre as raízes $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots, r_n$ e os coeficientes do polinômio:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ (r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_1r_n) + (r_2r_3 + \cdots + r_2r_n) + \cdots + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \vdots \\ r_1r_2\cdots r_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Obtendo assim as fórmulas de Vieta pedidas no enunciado.