1. Pode mostrar-se que se A é uma matriz $m \times n$, então

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1.$$

Use o MATLAB para verificar estas relações para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0. \end{bmatrix}$.

2. Considere as quatro secções de código MATLAB seguintes usadas no âmbito de compressão de imagens aplicando a decomposição SVD. Execute cada secção de código e explique o *output*.

```
% Load image
A = imread('street1.jpg');
A = rgb2gray(A);
imshow(A)
title(['Original (',sprintf('Rank %d)',rank(double(A)))])
```

```
% Compress image a first time
[U1,S1,V1] = svdsketch(double(A),1e-2);
Anew1 = uint8(U1*S1*V1');
imshow(uint8(Anew1))
title(sprintf('Rank %d approximation',size(S1,1)))
```

```
% Compress image a second time
[U2,S2,V2] = svdsketch(double(A),1e-1);
Anew2 = uint8(U2*S2*V2');
imshow(Anew2)
title(sprintf('Rank %d approximation',size(S2,1)))
```

```
% Compress image a third time
[U3,S3,V3,apxErr] = svdsketch(double(A),1e-1,'MaxSubspaceDimension',15);
Anew3 = uint8(U3*S3*V3');
imshow(Anew3)
title(sprintf('Rank %d approximation',size(S3,1)))
```

3. Os valores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

são (com 5 casas decimais) $\lambda_1 = 14.14933$, $\lambda_2 = -2.04765$, $\lambda_3 = 1.89832$.

(a) Use o método da potência para calcular, com uma casa decimal correta, o valor próprio dominante e o respetivo vetor próprio.

(b) Calcule o *quociente de Rayleight*

$$\frac{\boldsymbol{y}_k^T A \boldsymbol{y}_k}{\boldsymbol{y}_k^T \boldsymbol{y}_k}$$

onde $\boldsymbol{y}_k$ é a aproximação obtida em (a) para o vetor próprio dominante. Compare este valor com o valor de λ_1. O que conclui?

(c) Se usar o método da potência com a matriz $(A - 1.89I)^{-1}$, para que valor (e vetor) converge o método?

(d) Obtenha a decomposição LU da matriz $(A - 1.89I)$.

(e) Faça duas iterações do método da potência inverso, usando o vetor inicial $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0.32, 0.94, 0.03)^T$. Indique a aproximação obtida para o valor próprio de A.

4. Considere a seguinte matriz simétrica

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a matriz de rotação plana $R_{1,2}(\theta)$ tal que o elemento na posição $(1,2)$ de

$$A_2 = R_{1,2}(\theta) A_1 R_{1,2}(\theta)^T$$

é nulo.

(b) Calcule A_2 (isto é, faça uma iteração do método de Jacobi).

5. Considere a matriz $A = \texttt{hilb}(4)$.

(a) Determine uma matriz tridiagonal T, ortogonalmente semelhante a A.

(b) Implemente o método QR com translação de origem, juntamente com deflação para obter todos os valores próprios de uma matriz simétrica A (ver páginas 62, 64 e 65 de "Complementos de Análise Numérica, Valores e Vetores Próprios").

Na fase 1, considere a redução da matriz inicial A à forma tridiagonal T (ou seja, $A \leftarrow T$).
Em em cada passo k, use a translação de origem $A_k - p_k I$ com $p_k := a_{n,n}^{(k)}$.
Para a deflação, considere $a_{n,n-1}^{(k)} = 0$, sempre que $|a_{n,n-1}^{(k)}| < 10^{-6}$, tome $a_{n,n}^{(k)}$ como aproximação para o valor próprio e passe a aplicar o método à matriz $A_{1:n-1,1:n-1}$ (ou seja, $n \leftarrow n-1$).

(c) Use a implementação obtida na alínea anterior para obter todos os valores próprios de A.

Nota: na resolução deste exercício podem usar-se funções pré-definidas no MATLAB.

DATA LIMITE PARA O ENVIO DA RESOLUÇÃO: 10 DE JUNHO DE 2024.