Matemática Computacional :: Aritmética Computacional

maria irene falcão

Mestrado em Matemática e Computação

1. Aritmética Computacional :: background

1.1 Sistema de numeração

Um sistema de numeração de vírgula flutuante $F(b, t, m, M)$ é caracterizado por quatro parâmetros:

- → b - base;
- → t - número de dígitos da mantissa;
- → m - valor mínimo do expoente;
- → M - valor máximo do expoente.

Constituem o sistema $F(b, t, m, M)$, para além do número zero, todos os números que se puderem exprimir na forma

$$\pm(.d_1 d_2 \dots d_t)_b \times b^e$$

com $d_1, d_2, \dots d_t \in \{0, 1 \dots, b-1\}$, $d_1 \neq 0$, e $e \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq e \leq M$; a notação $(.d_1 d_2 \dots d_t)_b$ designa $d_1\, b^{-1} + d_2\, b^{-2} + \cdots + d_t\, b^{-t}$.

Estes são os chamados números normalizados. Um sistema $F(b, t, m, M)$ pode ainda admitir os chamados números desnormalizados ou subnormais, que são os números obtidos deixando de impor a condição $d_1 \neq 0$, quando o expoente assume o valor mínimo.

O maior número de $F(b, t, m, M)$, designa-se por nível de overflow e é dado por

$$\Omega := (1 - b^{-t}) b^M$$

. O menor número positivo normalizado, chamado nível de underflow, é dado por

$$\omega := b^{m-1}$$

. O menor número positivo de um sistema que admita números desnormalizados[1] é b^{m-t}

Ao conjunto

$$R_F := [-\Omega, -\omega] \cup \{0\} \cup [\omega, \Omega]$$

chamamos conjunto dos números representáveis.

[1]Se nada for dito em contrário, quando nos referirmos a um sistema $F(b, t, m, M)$, consideramos apenas os números normalizados.

➠ Arredondamento

Dado um número $x \in R_F$, pretende-se encontrar um número de máquina que o represente. É natural exigir-se que esse número, iremos denotar por $fl(x)$, esteja à menor distância possível de x, havendo uma regra para decidir o que fazer, no caso de empate. Naturalmente que se $x \in F$, então $fl(x) = x$, como seria de desejar. Quando $fl(x)$ é escolhido desta forma[2], dizemos que é usado arredondamento para o mais próximo.

No caso em que existam dois números de máquina à mesma distância do número x, é habitual (sobretudo se a base do sistema for 2 ou 10) usar-se o chamado arredondamento para par, em que se escolhe para $fl(x)$ aquele cujo último dígito da mantissa seja par.

No chamado arredondamento usual (que normalmente usamos no dia-a-dia), em caso de empate, as mantissas são arredondadas "para cima", o que equivale a somar à mantissa $\frac{1}{2}\,bb^{-(t+1)}$, truncando, em seguida, o resultado para t dígitos.

A unidade de erro de arredondamento do sistema é $\mu := \frac{1}{2}b^{1-t}$. Chama-se epsilon da máquina, e denota-se por ϵ, a diferença entre o número de $F(b, t, m, M)$ imediatamente superior a 1 e o número 1, isto é, $\epsilon := b^{1-t}$.

➠ Operações de vírgula flutuante

Representaremos as operações de vírgula flutuante pelo símbolo usual rodeado por ○; por exemplo $\oplus$, $\otimes$. Admitimos que o resultado de uma operação de vírgula flutuante é obtido por arredondamento do resultado da operação exata, isto é, $x \oplus y = fl(x + y)$, $x \otimes y = fl(x \times y)$, etc.

1.2 Norma IEEE 754

Com o objetivo de uniformizar as operações nos sistemas de vírgula flutuante foi publicada, em 1985, a norma IEEE 754.[3] Esta norma especifica dois formatos básicos para a representação de números num sistema de vírgula flutuante: o formato simples com 32 bits e o formato duplo com 64 bits.

A norma IEEE 754 permite representar números normalizados na forma

$$x = (-1)^s (d_0.d_{-1}d_{-2}\cdots d_{-(t-1)})_2 2^{\mathfrak{e}},$$

onde

- $s \in \{0, 1\}$ sinal;
- $d_0 = 1$ bit implícito;
- t número de bits da mantissa;
- $\mathfrak{e}$ expoente com $e_{\text{min}} \le \mathfrak{e} \le e_{\text{max}}$.

[2] Existem outras formas de determinar $fl(x)$, como, por exemplo, a chamada truncatura, em que simplesmente se ignoram todos os dígitos da mantissa do número que estejam para além da posição t

[3] IEEE- Institute for Electrical and Electronics Engineers.

A tabela seguinte contem os valores dos parâmetros do formato simples e duplo.

	formato simples	formato duplo
t	24	53
e_{min}	-126	-1022
e_{max}	127	1023

O formato simples corresponde então ao sistema $F(2, 24, -125, 128)$ e o duplo[4] corresponde a $F(2, 53, -1021, 1024)$. Ambos os sistemas admitem números desnormalizados.

➠ Alocação dos bits no formato simples

0	1 2 3 4 5 6 7 8	9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
S	Expoente (8 bits)	Mantissa (23 bits)

➠ Alocação dos bits no formato duplo

0	1 2 3 ··· 10 11	12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 ··· 55 55 56 57 58 59 60 61 62 63
S	Expoente (11 bits)	Mantissa (52 bits)

➠ Representação do expoente

No formato simples, o expoente está codificado da seguinte forma

expoente $-\ \varepsilon$	$\mathfrak{e}$
0 0 0 0 0 0 0 0 $\hookrightarrow$ 0	reservado
0 0 0 0 0 0 0 1 $\hookrightarrow$ 1	-126
0 0 0 0 0 0 1 0 $\hookrightarrow$ 2	-125
$\vdots$	$\vdots$
0 1 1 1 1 1 1 1 $\hookrightarrow$ 127	0
1 0 0 0 0 0 0 0 $\hookrightarrow$ 128	1
$\vdots$	$\vdots$
1 1 1 1 1 1 0 1 $\hookrightarrow$ 253	126
1 1 1 1 1 1 1 0 $\hookrightarrow$ 254	127
1 1 1 1 1 1 1 1 $\hookrightarrow$ 255	reservado

Os expoentes satisfazem, por isso, a relação

$$\mathfrak{e} = \varepsilon - e_{\mathsf{max}}.$$

[4] Por defeito, o MATLAB trabalha no sistema de numeração de norma IEEE em formato duplo.

O sistema de numeração IEEE admite ainda os "números" especiais $+\infty$ e $-\infty$ ($\mathbf{Inf}$ e $-\mathbf{Inf}$), para representar, por exemplo, o resultado da divisão de um número por zero, bem como o símbolo especial $\mathbf{NaN}$ (Not a Number), para representar o resultado de operações não definidas matematicamente, tais como $0/0$, $\infty - \infty$, etc.

$\pm$	$e_1e_2e_3\cdots e_7e_8$	$d_1d_2d_3\cdots d_{22}d_{23}$

$e_1e_2\cdots e_8$	valor representado
$(00000000)_2 = (0)_{10}$	$\pm(0.d_1d_2d_3\cdots d_{22}d_{23})_2 \times 2^{-126}$
$(00000001)_2 = (1)_{10}$	$\pm(1.d_1d_2d_3\cdots d_{22}d_{23})_2 \times 2^{-126}$
$(00000010)_2 = (2)_{10}$	$\pm(1.d_1d_2d_3\cdots d_{22}d_{23})_2 \times 2^{-125}$
$\vdots$	$\vdots$
$(01111111)_2 = (127)_{10}$	$\pm(1.d_1d_2d_3\cdots d_{22}d_{23})_2 \times 2^{0}$
$(10000000)_2 = (128)_{10}$	$\pm(1.d_1d_2d_3\cdots d_{22}d_{23})_2 \times 2^{1}$
$\vdots$	$\vdots$
$(11111101)_2 = (253)_{10}$	$\pm(1.d_1d_2d_3\cdots d_{22}d_{23})_2 \times 2^{126}$
$(11111110)_2 = (254)_{10}$	$\pm(1.d_1d_2d_3\cdots d_{22}d_{23})_2 \times 2^{127}$
$(11111111)_2 = (255)_{10}$	$\pm\infty$ se $d_1 = d_2 \cdots = d_{23} = 0$
	NaN, nos outros casos

A norma IEEE 754 especifica também as regras de arredondamento a utilizar. Por defeito, é utilizado o chamado arredondamento para par, isto é, se $x \in R_F$, $fl(x)$ é escolhido como o número de máquina mais próximo de x, sendo, em caso de "empate", escolhido aquele que tem o último *bit* da mantissa igual a zero.

Para além disso, em geral, tem-se

→ se $x > \Omega$, $fl(x) = \mathbf{Inf}$;

→ se $x < -\Omega$, $fl(x) = -\mathbf{Inf}$;

→ se $2^{m-t} \leq x < \omega$, $fl(x)$ é o número desnormalizado mais próximo de x;

→ se $x < 2^{m-t}$, $fl(x) = 0$.

Exemplo 1.1 *Formato simples*

1	1 0 0 0 0 0 0 1	1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

$$-(1.111)_2 \times 2^{129-127} = -(7.5)_{10}$$

0	0 0 0 0 0 0 0 0	1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

$(0.11)_2 \times 2^{-126}$

0	1 1 1 1 1 1 1 1	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

NaN

1	1 1 1 1 1 1 1 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

$-\infty$

1.3 Erro absoluto, erro relativo, algarismos significativos e casas decimais de precisão

Ao valor

$$E_{\tilde{x}} := x - \tilde{x}$$

chama-se erro absoluto do valor aproximado $\tilde{x}$ para x. Para $x \neq 0$, o valor

$$R_{\tilde{x}} := \frac{x - \tilde{x}}{x}$$

constitui o chamado erro relativo do valor aproximado $\tilde{x}$ para x.[5]

Dizemos que $\tilde{x}$ é uma aproximação para x com p casas decimais de precisão, se p é o maior inteiro tal que

$$|x - \tilde{x}| \leq 0.5 \times 10^{-p}$$

Dizemos que $\tilde{x}$ é uma aproximação para x com q algarismos (decimais) significativos, se q é o maior inteiro para o qual se tem

$$|x - \tilde{x}| \leq 0.5 \times 10^{-q} \times 10^{e}$$

onde e é o expoente de x na notação normalizada (na base decimal).

➠ Erros de arredondamento

Sejam $\mathcal{F} := F(b, t, m, M)$ e $x = (-1)^s m_x b^e \in R_{\mathcal{F}}$ não nulo e normalizado (i.e. $b^{-1} \leq m_x < 1$, $m \leq e \leq M$).

O erro absoluto de arredondamento: é dado por:

$$|E_{fl(x)}| = |x - fl(x)| \leq \frac{1}{2} b^{-t} b^{e} = \mu b^{e-1}.$$

e o erro relativo de arredondamento por:

$$|R_{fl(x)}| = \frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{\frac{1}{2} b^{-t}\, b^{e}}{b^{-1}\, b^{e}} = \frac{1}{2} b^{1-t} = \mu.$$

[5] Muitas vezes estamos interessados apenas no valor absoluto destas quantidades, designado-as pelos mesmos nomes, caso tal seja claro pelo contexto.

O majorante do erro absoluto depende de e, logo de x. O majorante do erro relativo depende apenas da unidade de erro de arredondamento da máquina usada. Deste resultado, conclui-se de imediato que

$$fl(x) = x(1+\delta), \text{ com } |\delta| \leq \mu.$$

➠ Propagação de erros nas operações usuais

Sejam $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ valores aproximados para x e y, respetivamente ($x, y \neq 0$), e sejam $S = x + y$, $P = x \times y$ e $Q = x/y$. Sejam $\widetilde{S}, \widetilde{P}$ e $\widetilde{Q}$ os valores aproximados para S, P e Q obtidos usando os valores $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ em vez de x e y e admitindo que as operações são efetuadas exatamente. Podem estabelecer-se facilmente os seguintes resultados:

$$E_{\widetilde{S}} = E_{\tilde{x}} + E_{\tilde{y}} \qquad E_{\widetilde{P}} = E_{\tilde{x}}y + E_{\tilde{y}}x - E_{\tilde{x}}E_{\tilde{y}} \qquad E_{\widetilde{Q}} = \frac{yE_{\tilde{x}} - xE_{\tilde{y}}}{y\tilde{y}}$$

$$R_{\widetilde{S}} = \frac{x}{x+y}R_{\tilde{x}} + \frac{y}{x+y}R_{\tilde{y}} \qquad R_{\widetilde{P}} = R_{\tilde{x}} + R_{\tilde{y}} - R_{\tilde{x}}R_{\tilde{y}} \qquad R_{\widetilde{Q}} = \frac{R_{\tilde{x}} - R_{\tilde{y}}}{1 - R_{\tilde{y}}}$$

Supondo $|R_{\tilde{x}}|, |R_{\tilde{y}}| \ll 1$, obtêm-se as seguintes fórmulas simplificadas para o erro relativo do produto e do quociente

$$R_{\widetilde{P}} \approx R_{\tilde{x}} + R_{\tilde{y}} \qquad R_{\widetilde{Q}} \approx R_{\tilde{x}} - R_{\tilde{y}}$$

Nota: A operação mais "perigosa" (isto é, que pode amplificar significativamente o erro relativo dos argumentos) é a adição (podendo ocorrer o chamado cancelamento subtrativo quando se somam números muito próximos e com sinais contrários).

1.4 Condicionamento e estabilidade

Um problema diz-se mal condicionado se for muito sensível a perturbações introduzidas nos seus dados, isto é, se "pequenas" alterações nos dados produzirem "grandes" alterações na sua solução (independentemente do método escolhido para resolver o problema). Se tal não acontecer, o problema diz-se bem condicionado.

Um método numérico diz-se instável se, no decurso dos cálculos inerentes à aplicação do método, os erros se amplificarem de forma inaceitável; Se tal não acontecer, o método diz-se estável.

➠ Número de condição de uma função

Sendo f uma função continuamente diferenciável na vizinhança de um ponto x e sendo $f(x) \neq 0$, à quantidade

$$\text{cond}(f(x)) := \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|}$$

chamamos número de condição de f em x.

Supondo $x \neq 0$ e sendo $\tilde{x}$ pertencente à vizinhança de x onde f é diferenciável, tem-se

$$\frac{|f(x) - f(\tilde{x})|}{|f(x)|} \approx \text{cond}(f(x)) \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}.$$

De modo análogo, se f é uma função de duas variáveis suficientemente diferenciável na vizinhança de (x, y) e $(\tilde{x}, \tilde{y})$ está nessa vizinhança, tem-se

$$\frac{|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})|}{|f(x,y)|} \approx \frac{|x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}|}{|f(x,y)|} \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} + \frac{|y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}|}{|f(x,y)|} \frac{|y - \tilde{y}|}{|y|}.$$

As quantidades $\frac{|x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}|}{|f(x,y)|}$ e $\frac{|y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}|}{|f(x,y)|}$ são os números de condição de f em (x, y) relativamente à variável x e à variável y, respetivamente.

1.5 Funções pré-definidas do MATLAB

Função	Objetivo
abs	Valor absoluto
ceil	Arredondamento para o inteiro mais próximo (na direcção de $+\infty$)
base2dec	Mudança de uma dada base para a base decimal
bin2dec	Mudança da base binária para a base decimal
dec2base	Mudança da base decimal para outra base
dec2bin	Mudança da base decimal para a base binária
eps	epsilon da máquina
fix	Arredondamento para o inteiro mais próximo (na direcção de zero)
floor	Arredondamento para o inteiro mais próximo (na direcção de $-\infty$)
Inf	Representação na aritmética IEEE de $+\infty$
NaN	Representação na aritmética IEEE de "Not-a-Number"
realmax	Nível de overflow
realmin	Nível de underflow
rem	Resto da divisão
round	Arredondamento para o inteiro mais próximo

➠ Referências

Para mais pormenores sobre a norma IEEE 754, veja, por exemplo, [IEE85], [Ove01] ou [Gol91]; o livro clássico de Wilkinson [Wil63], apesar de bastante antigo, continua a ser uma referência importante sobre o tema deste capítulo; outro livro bastante interessante sobre este tópico é o de Higham [Hig02].

Gol91 D. Goldberg. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys*, 23(1):5–48, 1991.

Hig02 N. J. Higham. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. SIAM, 2ª edição, 2002.

IEE85 *IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic, ANSI/IEEE Standard 754-1985*. Institute for Electrical and Electronics Engineers, New York, 1985.

Ove01 M. L. Overton. *Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic*. SIAM, New York, 2001.

Wil63 J. H. Wilkinson. *Rounding Errors in Algebraic Processes*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963.

Nos seguintes endereços encontrará exemplos curiosos de casos verídicos de problemas causados por erros de arredondamento:

http://www5.in.tum.de/ huckle/bugse.html   http://catless.ncl.ac.uk/Risks/

2. Problemas

2.1 Exercícios

Exercício 1. Considere uma máquina com sistema de numeração $\mathcal{F} = F(2, 3, -2, 2)$, com arredondamento usual.

a) Quantos números têm representação exata em $\mathcal{F}$? Quantos desses números são inteiros?

b) Para cada uma das alíneas seguintes, indique, caso exista, um número $x \neq 0$, tal que:

i) $fl(x) = 0$; ii) $fl(x) = -\infty$; iii) $fl(1 + x) = 1$; iv) $fl(x) > x$;

v) $x \in \mathcal{F}$ e $x \notin R_{\mathcal{F}}$, sendo $R_{\mathcal{F}}$ o conjunto dos números representáveis deste sistema.

c) Calcule $fl(7.125)$.

Exercício 2.

a) Use a ajuda do Matlab para obter informação sobre as funções pré-definidas `realmax`, `realmin` e `eps`.

b) Justifique os valores obtidos quando as usa (sem especificação do argumento).

c) Que espera obter se efetuar cada uma das instruções seguintes no Matlab? Confirme a sua resposta.

```
>> (1+2^-52)-1                >> isequal(2^-1074,0)

>> (1+2^-53)-1                >> isequal(2^-1075,0)
```

Exercício 3. Obtenha a representação IEEE dos números

1.0			
0.1			
194.375			

Exercício 4. Obtenha a representação decimal dos números representados abaixo.

1	10000010	10100000000000000000000
0	00000001	00000000000000000000000
0	11111110	11111111111111111111111
0	00000000	10000000000000000000000
0	00000000	00000000000000000000001

Exercício 5. Justifique que num sistema de vírgula flutuante de base b, a divisão ou multiplicação por uma potência de b, se não conduzir a *overflow* ou *underflow*, é uma operação exata.

Exercício 6. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, considerando que está trabalhar num sistema de vírgula flutuante IEEE (com o arredondamento usual):

a) $x \leq y \Longrightarrow fl(x) \leq fl(y)$;

b) $x < y \Longrightarrow fl(x) < fl(y)$;

c) $x \leq y \Longrightarrow x \leq fl(\frac{x+y}{2}) \leq y \quad (x, y \in F)$.

d) Mostre, através de um exemplo, que a afirmação contida na alínea *c)* pode ser falsa se trabalharmos num sistema de vírgula flutuante de base 10.

Exercício 7. Escreva uma *script* destinada a calcular aproximações para o número de Nepper e, usando a expressão

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Esta *script* deverá produzir uma tabela com os valores das aproximações $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e dos respetivos erros, para

a) $n = 10^k; k = 1, 2 \ldots, 20$;

b) $n = 2^k; k = 45, 46, \ldots, 55$.

Comente os resultados obtidos.

Exercício 8. Considere a função $f(x,h) = \dfrac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$.

a) Use a fórmula trigonométrica $\text{sen}(a) - \text{sen}(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\,\text{sen}(\frac{a-b}{2})$ para obter a expressão da função $g(x,h)$, matematicamente equivalente a $f(x,h)$.

b) Avalie $f(x,h)$ e $g(x,h)$, em $(1.2, h)$, para $h = 1, 10^{-1}, \ldots, 10^{-20}$.

c) Explique a diferença dos resultados obtidos.

d) Sugira uma fórmula para calcular uma aproximação para a derivada da função $\text{sen}(x)$.

Exercício 9. Considere a função $f(x) = 1 - \cos x$.

a) Sejam $\tilde{a} = 0.292$ e $\tilde{b} = 0.049$ aproximações para os valores $a = f(\frac{\pi}{4})$ e $b = f(\frac{\pi}{10})$. Indique o número de casas decimais corretas e o número de algarismos significativos de cada uma destas aproximações.

b) Mostre que as funções $f(x)$ e $g(x) = 2\,\text{sen}^2\,\frac{x}{2}$ são iguais.

c) Faça as representações gráficas de f e g no intervalo $[0, t]$, considerando sucessivamente $t = 10^{-7}$, $t = 3 \times 10^{-8}$ e $t = 10^{-8}$ (use três figuras diferentes). Justifique o comportamento observado.

Exercício 10. Represente graficamente os polinómios $p(x) = (x-1)^6$ e $q(x) = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$, para $x \in [0.999, 1.001]$. Notando que $q(x)$ é a forma expandida de $p(x)$, comente os resultados obtidos.

2.2 Trabalhos

Trabalho 1. A média de uma amostra de n valores $x_i; i = 1, \ldots, n$, é dada por

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

sendo o desvio padrão amostral dado por

$$s = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Para maior eficiência, é frequentemente sugerido o uso da seguinte fórmula alternativa para o cálculo do desvio padrão

$$s = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - n\overline{x}^2\right)\right)^{1/2}. \tag{2.2}$$

Escreva uma função,

$$[media, desvio1, desvio2] = \textbf{mediaDesvios}(x),$$

destinada a calcular a média e o desvio padrão de uma amostra, sendo usadas as duas fórmulas (2.1) e (2.2) para o cálculo do desvio padrão.

Teste a sua função para várias amostras $\{x_i\}$. Em particular, tente encontrar uma amostra para a qual as duas fórmulas do cálculo do desvio padrão produzam valores bastante diferentes. Justifique a diferença dos resultados.

Trabalho 2. Considere o desenvolvimento em série da função exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

a) Utilize este desenvolvimento, com 101 termos, para calcular uma aproximação para o valor de e^{-25}.

b) Obtenha uma aproximação para e^{25} usando a série referida e calcule, então, e^{-25} através da fórmula $e^{-25} = \frac{1}{e^{25}}$.

c) Compare os resultados obtidos nas alíneas anteriores com o valor de e^{-25} dado usando a função $\mathbf{exp}$ do MATLAB e explique-os.

Trabalho 3. Relembrando as expansões em série das funções $\operatorname{arctan} x$ e $\operatorname{arcsen} x$

$$\operatorname{arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

e

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\,\frac{x^7}{7} + \ldots,$$

obtenha duas fórmulas alternativas para o cálculo de π.

Escreva uma *script* para calcular aproximações para π usando as fórmulas referidas e considerando um número de termos em cada série sucessivamente igual a $10, 20, \ldots, 100, 200, 300, \ldots, 1000$. Comente os resultados obtidos.