

Problema 1. Considere a cadeia de Markov em $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ com

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

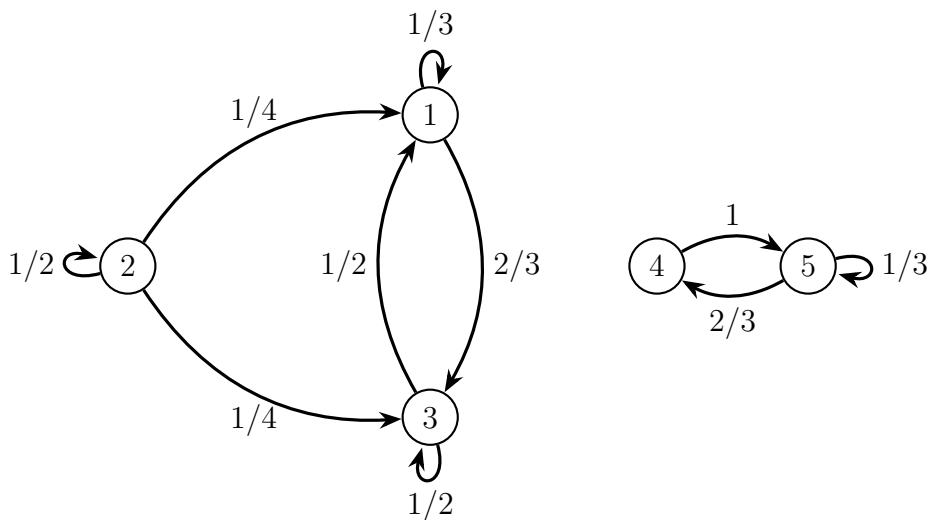
Classifique seus estados e ache as distribuições estacionárias dessa cadeia. Simule essa cadeia considerando $X_0 = 1, 2, 3, 4, 5$ e aproxime o limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$$

para todos $i, j \in I$. Verifique que os resultados encontrados estão convergindo para os valores corretos.

Solução:

Observando o diagrama da cadeia podemos ver que o estado 2 é transiente e os outros estados são recorrentes e se dividem em duas Classes irreduzíveis $R_1 = \{1, 3\}$, $R_2 = \{4, 5\} \in I$. Portanto, $T = \{2\}$ (estado transiente) e $R = R_1 \cup R_2$ (estados recorrentes).



Agora vamos calcular as distribuições estacionárias dessa cadeia. Seja $\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4 \ \pi_5]$ tal distribuição. Devemos ter $\pi P = \pi$ e $\sum_{i=1}^5 \pi_i = 1$.

Resolvendo o sistema, obtemos: $\pi_2 = 0$, $\pi_3 = \frac{4}{3}\pi_1$ e $\pi_5 = \frac{3}{2}\pi_4$. Além disso, pela segunda equação temos $\pi_4 = \frac{6 - 14\pi_1}{15}$. Seja $\pi_1 = \alpha$. As distribuições estacionárias dessa cadeia são dadas por:

$$\pi(\alpha) = \left[\alpha \quad 0 \quad \frac{4}{3}\alpha \quad \frac{6 - 14\alpha}{15} \quad \frac{3 - 7\alpha}{5} \right], \alpha \in \left[0, \frac{3}{7} \right]$$

Para calcular o limite vamos considerar separadamente as classes $C_1 = \{1, 2, 3\}$ e $C_2 = \{4, 5\}$ observe que:

- Se $i \in C_1$ então: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = 0$ para $j \in C_2$, uma vez que os estados não são atingíveis. Pelo mesmo motivo, se $i \in C_2$ então: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = 0$ para $j \in C_1$.
- Se $i, j \in C_1$ então o limite é 0 se $j = 2$ (estado transiente). Se $j = 1, 3$ temos uma cadeia irreduzível, recorrente positiva e aperiódica no espaço $I' = \{1, 3\}$. Se π' é a distribuição estacionária dessa cadeia então:

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \pi'_j$$

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \pi_j \left(\frac{3}{7} \right)$$

Isto é: $\mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = i) = 3/7$ e $\mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = i) = 4/7$

- Analogamente, se $i, j \in C_2$ temos uma cadeia irreduzível, recorrente positiva e aperiódica no espaço $I'' = \{4, 5\}$. Se π'' é a distribuição estacionária dessa cadeia então:

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \pi''_j$$

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \pi_j(0)$$

Isto é: $\mathbb{P}(X_n = 4 \mid X_0 = i) = 2/5$ e $\mathbb{P}(X_n = 5 \mid X_0 = i) = 3/5$.

(i, j)	1	2	3	4	5
1	0.428355	0.0	0.571645	0.0	0.0
2	0.428798	3e-06	0.571199	0.0	0.0
3	0.429315	0.0	0.570685	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	0.400402	0.599598
5	0.0	0.0	0.0	0.399926	0.600074

Tabela 1: Valores da probabilidade-limite para cada $i, j \in I$

Problema 2. Considere a cadeia de Markov em $I = \{1, 2, 3, 4\}$ com

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

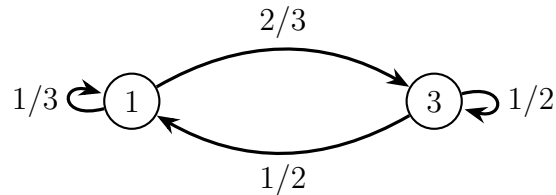
Simule essa cadeia considerando $X_0 = 1$ e aproxime o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Verifique que o resultado encontrado está convergindo para o valor correto.

Solução:

Note que a cadeia dada em I pode ser particionada em três classes irreduzíveis disjuntas: $T_1 = \{2\}$, $T_2 = \{4\}$ e $R = \{1, 3\}$. Dado $X_0 = 1$, temos que $X_n \in R$ para todo $n \geq 0$. Então basta considerar a cadeia R formada exclusivamente pelos estados 1 e 3.



Resolvendo a equação

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_3 \end{bmatrix}$$

em conjunto com $\pi_1 + \pi_3 = 1$, encontramos $\pi_1 = \frac{3}{7}$ e $\pi_3 = \frac{4}{7}$. Logo, a distribuição estacionária dessa cadeia é

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

Como R é uma cadeia recorrente positiva e irreduzível, podemos usar o teorema ergódico para calcular o limite. Seja $f : \{1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ e $I' = \{1, 3\}$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \\ &= \sum_{i \in I'} f(i) \pi_i \\ &= 1 \cdot \frac{3}{7} + 9 \cdot \frac{4}{7} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 &= \frac{39}{7}. \end{aligned}$$

Problema 3. Simule vários caminhos do martingal $M_n = \prod_{k=1}^n X_k$ com $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *iid* e $\mathbb{P}(X_n = 1/2) = \mathbb{P}(X_n = 3/2) = 1/2$ e mostre graficamente que $M_n \rightarrow 0$ q.c

Solução:

A seguir segue o gráfico com 20 simulações do martingal M_n . Foram utilizadas 200 iterações para cada simulação.

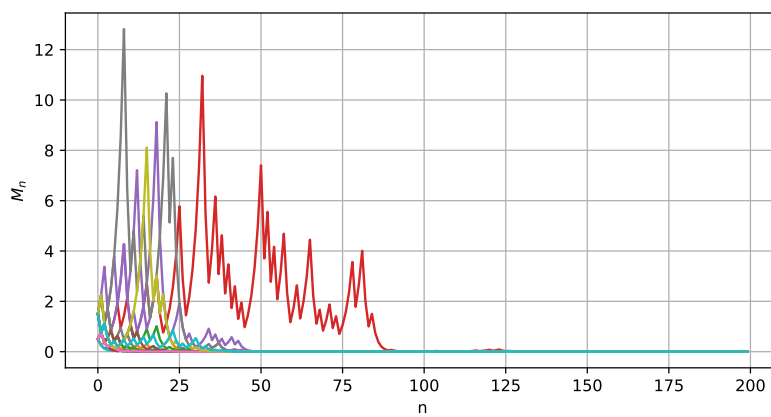


Figura 1: Simulação de diversos caminhos do martingal M_n .

Problema 4. Simule J caminhos do processo de Poisson com $\lambda = 1$ até o tempo $T = 5$ de duas maneiras:

- usando os tempos entre-chegadas $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- usando o Teorema 4.4.8 das notas de aula

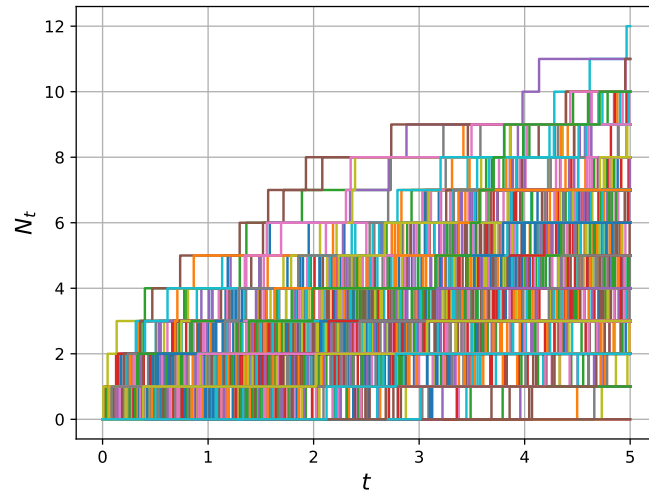
Calcule a esperança

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T N_t dt \right] \approx \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \int_0^T N_t^{(j)} dt$$

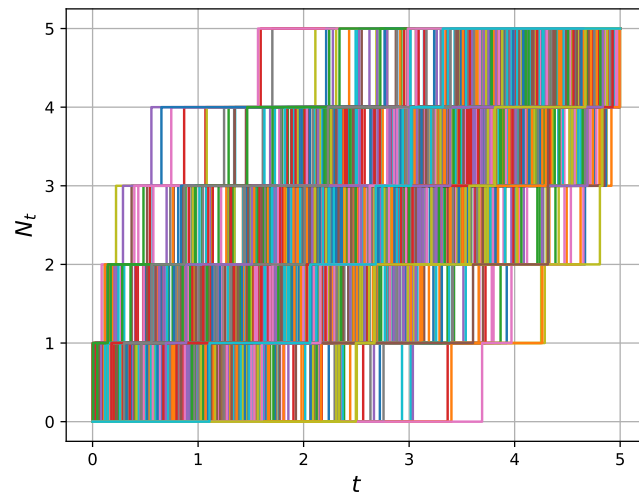
usando os caminhos simulados acima e compare com o valor exato.

Solução:

Foram simulados $J = 500$ caminhos distintos do processo de Poisson. Os resultados podem ser observados na figura abaixo.



(a) Intervalos $X_n \sim \exp(\lambda)$.



(b) Tempos de chegada T_i

Figura 2: Gráficos do Processo de Poisson N_t de parâmetro $\lambda = 1$ no intervalo $[0, 5]$.

O valor exato da esperança $E = \mathbb{E} \left[\int_0^T N_t dt \right]$ é dado por:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^T \mathbb{E} [N_t] dt \\ &= \int_0^T \lambda t dt \\ E &= \lambda \cdot \frac{T^2}{2} \end{aligned}$$

Pondo $\lambda = 1$ e $T = 5$, temos:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^5 N_t dt \right] = 1 \cdot \frac{5^2}{2} = 12.5$$

Os valores aproximados para a esperança E foram:

Simulação	E
$X_n \sim \exp(\lambda)$	12.5043
$T_i \sim \bar{U}([0, 5])$	12.2716

Problema 6. Simule os caminhos do movimento Browniano entre 0 e 1 e calcule $M_1 = \max_{t \in [0,1]} B_t$. Plote o histograma de M_1 e compare com a densidade exata de M_1 :

$$f_{M_1}(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-m^2/2}.$$

Solução:

Dizemos que $(B_t)_{t \geq 0}$ é um movimento browniano, quando:

1. $B_0 = 0$ *q.c.*
2. $B_t - B_s$ é independente de $(B_u)_{u \in [0,s]}$, para todo $t \geq s$. (*Incrementos independentes*)
3. $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$, para todo $t \geq s$.
4. $t \mapsto B_t$ é contínuo *q.c.*

Para realizar a simulação geramos n caminhos com m intervalos $X_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$, com $X_i \sim N(0, \Delta t)$ onde $\Delta t = 1/m$. Para obter B_{t_k} somamos, cumulativamente, os intervalos de cada caminho:

$$B_{t_k} = \sum_{j=0}^{k-1} X_j, \quad \forall k \in \{1, \dots, m-1\}$$

Na figura abaixo podemos ver o resultado obtido para $n = 5$ e $m = 1000$:

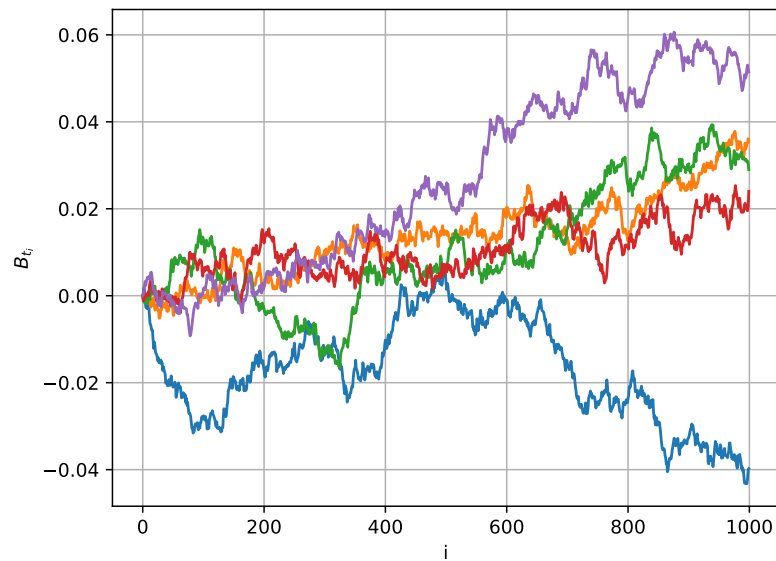
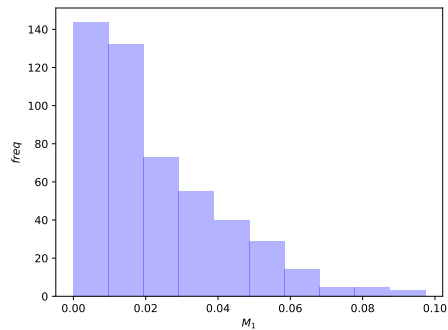
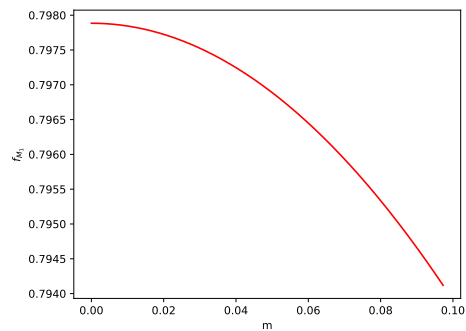


Figura 3: Simulação do movimento browniano no intervalo $[0, 1]$.

Para plotar o histograma de M_1 utilizamos $n = 500$ caminhos distintos.



(a) Histograma de M_1



(b) Densidade exata de M_1 .

Figura 4: Variável aleatória: $M_1 = \max_{t \in [0,1]} B_t$.