Hugo Tallys Martins Oliveira
Leonardo Silva Marinho

Problema 1. Considere a cadeia de Markov em $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ com

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

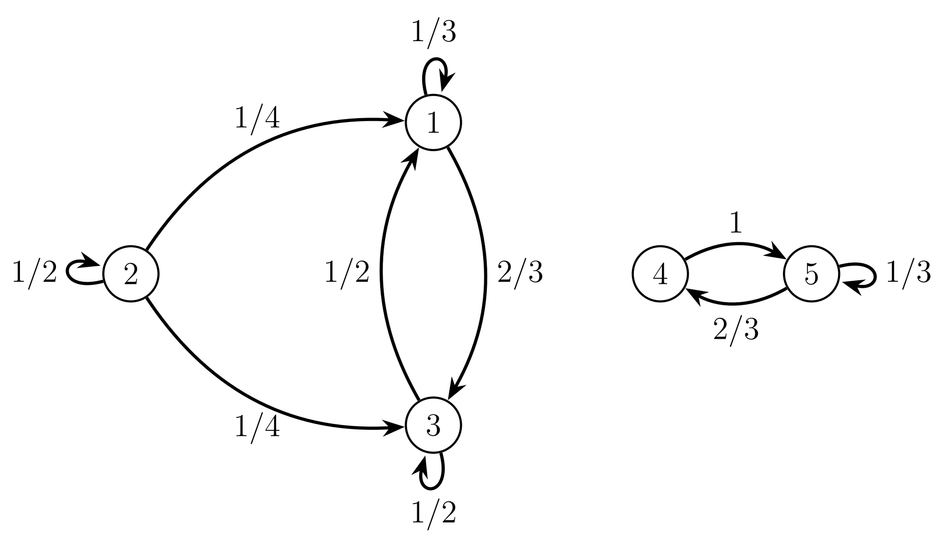
Classifique seus estados e ache as distribuições estacionárias dessa cadeia. Simule essa cadeia considerando $X_0 = 1, 2, 3, 4, 5$ e aproxime o limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$$

para todos $i, j \in I$. Verifique que os resultados encontrados estão convergindo para os valores corretos.

Solução:

Observando o diagrama da cadeia podemos ver que o estado 2 é transiente e os outros estados são recorrentes e se dividem em duas Classes irredutíveis $R_1 = \{1, 3\}$, $R_2 = \{4, 5\} \in I$. Portanto, $T = \{2\}$ (estado transiente) e $R = R_1 \cup R_2$ (estados recorrentes).



Agora vamos calcular as distribuições estacionárias dessa cadeia. Seja $\pi = [\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_5]$ tal distribuição. Devemos ter $\pi P = \pi$ e $\sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1$.

Resolvendo o sistema, obtemos: $\pi_2 = 0$, $\pi_3 = \frac{4}{3}\pi_1$ e $\pi_5 = \frac{3}{2}\pi_4$. Além disso, pela segunda equação temos $\pi_4 = \frac{6 - 14\pi_1}{15}$. Seja $\pi_1 = \alpha$. As distribuições estacionárias dessa cadeia são dadas por:

$$\pi(\alpha) = \left[\alpha \quad 0 \quad \frac{4}{3}\alpha \quad \frac{6-14\alpha}{15} \quad \frac{3-7\alpha}{5}\right] \quad , \alpha \in \left[0, \frac{3}{7}\right]$$

Para calcular o limite vamos considerar separadamente as classes $C_1 = \{1, 2, 3\}$ e $C_2 = \{4, 5\}$ observe que:

- Se $i \in C_1$ então: $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = 0$ para $j \in C_2$, uma vez que os estados não são atingíveis. Pelo mesmo motivo, se $i \in C_2$ então: $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = 0$ para $j \in C_1$.
- Se $i, j \in C_1$ então o limite é 0 se $j = 2$ (estado transiente). Se $j = 1, 3$ temos uma cadeia irredutível, recorrente positiva e aperiódica no espaço $I' = \{1, 3\}$. Se π' é a distribuição estacionária dessa cadeia então:

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \pi'_j$$
$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \pi_j \left(\frac{3}{7}\right)$$

Isto é: $\mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = i) = 3/7$ e $\mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = i) = 4/7$

- Analogamente, se $i, j \in C_2$ temos uma cadeia irredutível, recorrente positiva e aperiódica no espaço $I'' = \{4, 5\}$. Se π'' é a distribuição estacionária dessa cadeia então:

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \pi''_j$$
$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \pi_j \,(0)$$

Isto é: $\mathbb{P}(X_n = 4 \mid X_0 = i) = 2/5$ e $\mathbb{P}(X_n = 5 \mid X_0 = i) = 3/5$.

(i, j)	1	2	3	4	5
1	0.42869	0	0.57131	0	0
2	0.428459	4e-07	0.57154	0	0
3	0.428313	0	0.571687	0	0
4	0	0	0	0.400049	0.599951
5	0	0	0	0.400024	0.599976

Tabela 1: Valores simulados da probabilidade-limite para cada $i, j \in I$

Problema 2. Considere a cadeia de Markov em $I = \{1, 2, 3, 4\}$ com

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

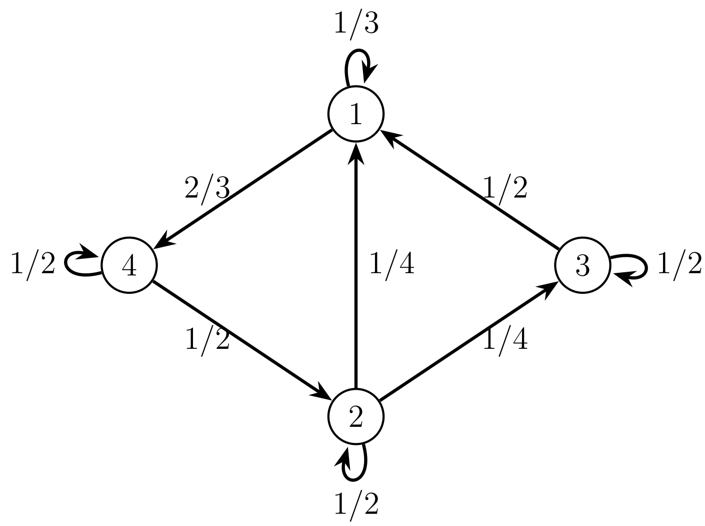
Simule essa cadeia considerando $X_0 = 1$ e aproxime o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$$

Verifique que o resultado encontrado está convergindo para o valor correto.

Solução:

Vamos encontrar a distribuição estacionária da cadeia e usar o Teorema Ergódico para calcular o limite. Com efeito, veja que a cadeia é irredutível, recorrente positiva e aperiódica, logo possui distribuição estacionária π.



Resolvendo a equação $\pi P = \pi$, o que equivale a

$$\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4\end{bmatrix}$$

em conjunto com $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$, concluimos que a distribuição estacionária da nossa cadeia é

$$\pi = \begin{bmatrix}\frac{3}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{6}{15}\end{bmatrix}$$

Como a cadeia é recorrente positiva e irredutível, podemos usar o teorema ergódico para calcular o limite. Seja $I = \{1, 2, 3, 4\}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \\ &= \sum_{i\in I} f(i)\pi_i \\ &= 1\cdot\frac{3}{15} + 4\cdot\frac{4}{15} + 9\cdot\frac{2}{15} + 16\cdot\frac{6}{15}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{133}{15}.$$

Simulando a cadeia com 10000000 de iterações chegamos ao resultado de:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \approx 8.8676$$

Problema 3. Simule vários caminhos do martingal $M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ com $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *iid* e $\mathbb{P}(X_n = 1/2) = \mathbb{P}(X_n = 3/2) = 1/2$ e mostre graficamente que $M_n \to 0$ *q.c*

Solução:

A seguir segue o gráfico com 20 simulações do martingal M_n. Foram utilizadas 200 iterações para cada simulação.

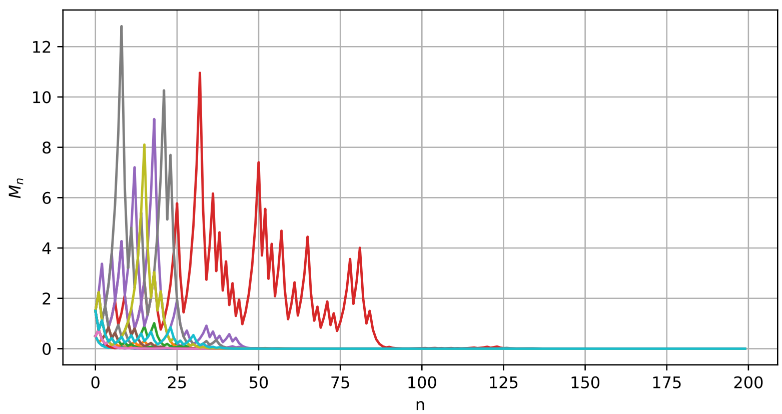


Figura 1: Simulação de diversos caminhos do martingal M_n.

Problema 4. Simule J caminhos do processo de Poisson com $\lambda = 1$ até o tempo $T = 5$ de duas maneiras:

- usando os tempos entre-chegadas $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- usando o Teorema 4.4.8 das notas de aula

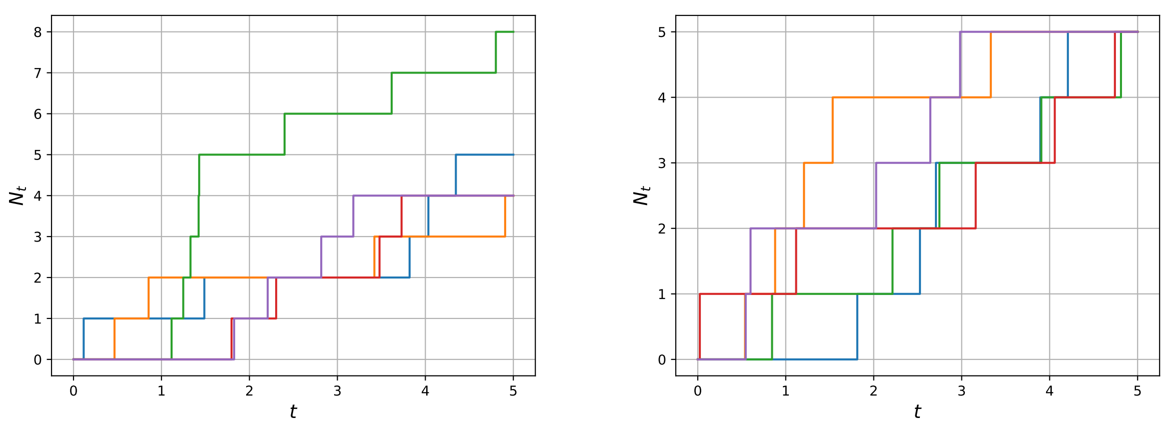
Calcule a esperança

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T N_t dt\right] \approx \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T N_t^{(j)} dt$$

usando os caminhos simulados acima e compare com o valor exato.

Solução:

Foram simulados 5 caminhos distintos do processo de Poisson para visualização. Os resultados podem ser observados na figura abaixo.



(a) Intervalos $X_n \sim exp(\lambda)$.

(b) Tempos $T_i \sim \overline{U}(0, T)$

Figura 2: Gráficos do Processo de Poisson N_t de parâmetro $\lambda = 1$ no intervalo $[0, 5]$.

O valor exato da esperança $E = \mathbb{E}\left[\int_0^T N_t dt\right]$ é dado por:

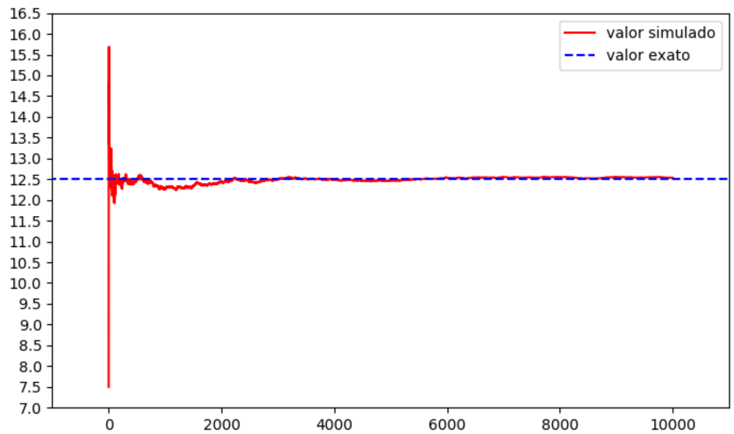
$$\begin{aligned} E &= \int_0^T \mathbb{E}\left[N_t\right] dt \\ &= \int_0^T \lambda t \quad dt \\ E &= \lambda \cdot \frac{T^2}{2} \end{aligned}$$

Pondo $\lambda = 1$ e $T = 5$, temos:

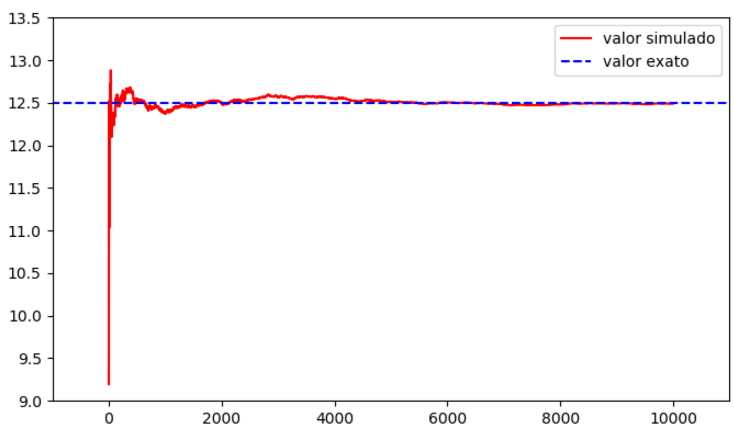
$$\mathbb{E}\left[\int_0^5 N_t dt\right] = 1 \cdot \frac{5^2}{2} = 12.5$$

Para simular E geramos $J = 10000$ caminhos do processo de Poisson para cada método. Na tabela a seguir, podemos ver alguns valores aproximados para a esperança E em função do número de iterações:

N	$X_n \sim exp(\lambda)$	$T_i \sim \overline{U}(0, T)$
1	7.49846	9.3354
100	11.9502	12.3694
1000	12.2824	12.3824
10000	12.5336	12.4912



(a) Simulação exponencial.



(b) Simulação uniforme.

Figura 3: Gráficos com os valores simulados de E em função do número de iterações.

Problema 5. Use processos Gaussianos para estimar uma regressão não-paramétrica. Implemente sua própria função para calcular a função média e o kernel de covariância. Simule os dados usando a seguinte equação:

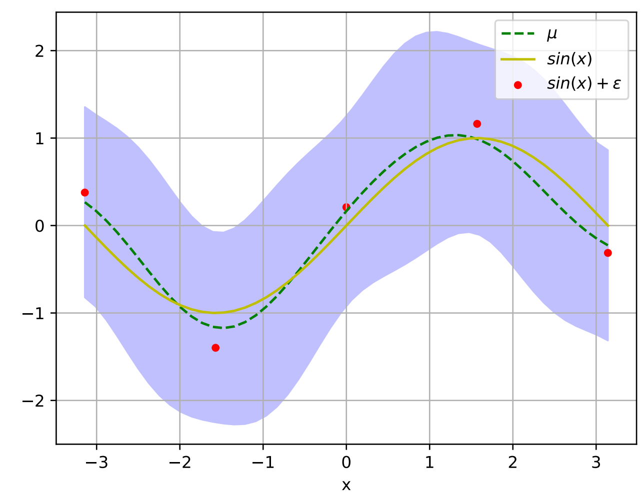
$$y(x) = sin(x) + \epsilon$$

Use kernel RBF:

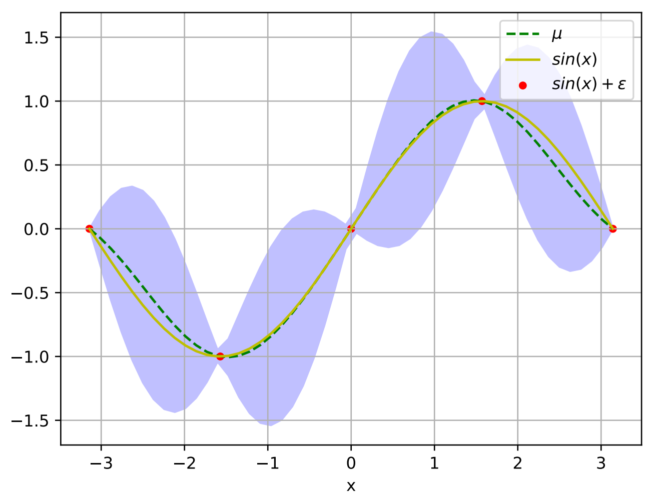
$$k(x, x') = \sigma_f^2 exp\left\{-\frac{1}{2l^2}(x - x')^2\right\}$$

com $l = 1$, $\sigma_f = 1$ e $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$, com $\sigma^2 = 0.16$ e $\sigma^2 = 0$. Você pode usar $x \in [-\pi, \pi]$ com 5 pontos para o treinamento e 50 pontos para o teste. Faça também o gráfico da função exata, os pontos observados, a função média estimada (no conjunto total de pontos de treino e teste) e o intervalo de confiança de 95%.

Solução:



(a) Regressão com $\sigma^2 = 0.16$.



(b) Regressão com $\sigma^2 = 0$.

Figura 4: Gráficos com os valores da função média e intervalo de confiança de 95%.

Problema 6. Simule os caminhos do movimento Browniano entre 0 e 1 e calcule $M_1 = max_{t\in[0,1]} B_t$. Plote o histograma de M_1 e compare com a densidade exata de M_1:

$$f_{M_1}(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-m^2/2}.$$

Solução: Dizemos que $(B_t)_{t\geq 0}$ é um movimento browniano, quando:

1. $B_0 = 0 \quad q.c.$
2. $B_t - B_s$ é independente de $(B_u)_{u\in[0,s]}$, para todo $t \geq s$. (*Incrementos independentes*)
3. $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$, para todo $t \geq s$.
4. $t \mapsto B_t$ é contínuo $q.c.$

Para realizar a simulação geramos n caminhos com m intervalos $X_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$, com $X_i \sim N(0, \Delta t)$ onde $\Delta t = 1/m$. Para obter B_{t_k} somamos, cumulativamente, os intervalos de cada caminho:

$$B_{t_k} = \sum_{j=0}^{k-1} X_j \quad , \forall k \in \{1, ..., m-1\}$$

Na figura abaixo podemos ver o resultado obtido para $n = 5$ e $m = 1000$:

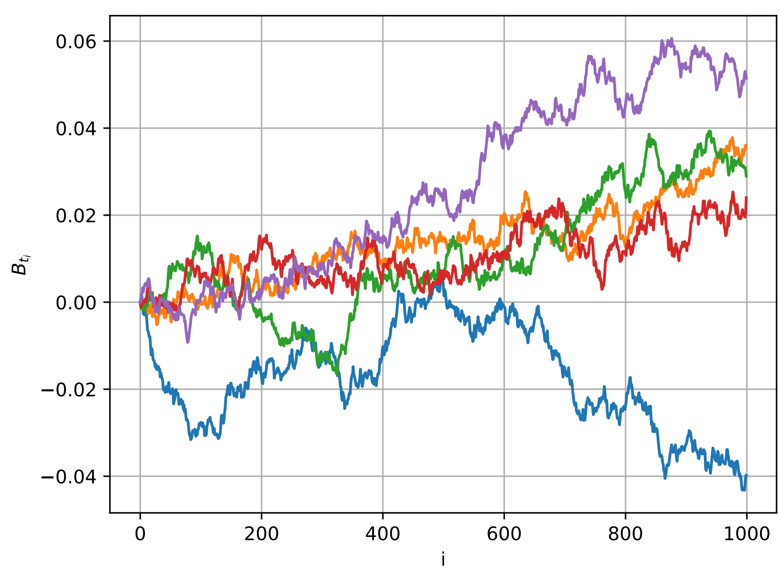
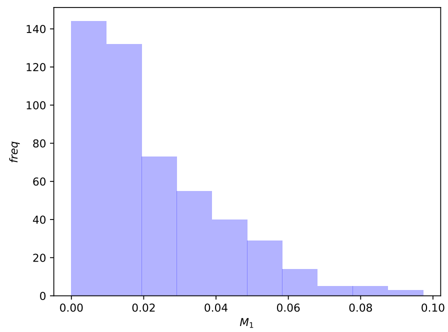
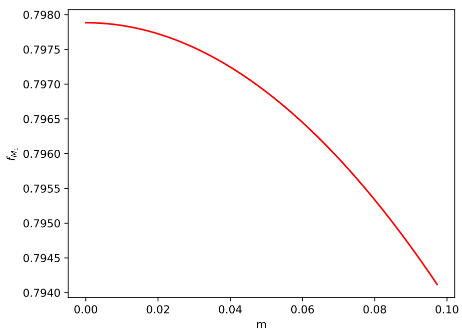


Figura 5: Simulação do movimento browniano no intervalo $[0, 1]$.

Para plotar o histograma de M_1 utilizamos $n = 500$ caminhos distintos.



(a) Histograma de M_1



(b) Densidade exata de M_1.

Figura 6: Variável aleatória: $M_1 = max_{t\in[0,1]} B_t$.

Problema 7. O modelo de Black-Scholes pode ser escrito como:

$$S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}.$$

Usando o item anterior, simule vários caminhos de S com $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$. Use eles para calcular a seguinte esperança para $K = [80, 85, 90, ..., 120]$:

$$C(K) = \mathbb{E}\left[e^{-rT}(S_T - K)^+\right] \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{-rT}(S_T^{(n)} - K)^+,$$

onde $x^+ = max\{x, 0\}$. Esse método é conhecido como Monte Carlo. Mostre o gráfico de C