EMap - FGV

Hugo Tallys Martins Oliveira — Trabalho de Simulação

Leonardo Silva Marinho — Processos Estocásticos - 2019.2

Problema 1. Considere a cadeia de Markov em $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ com

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

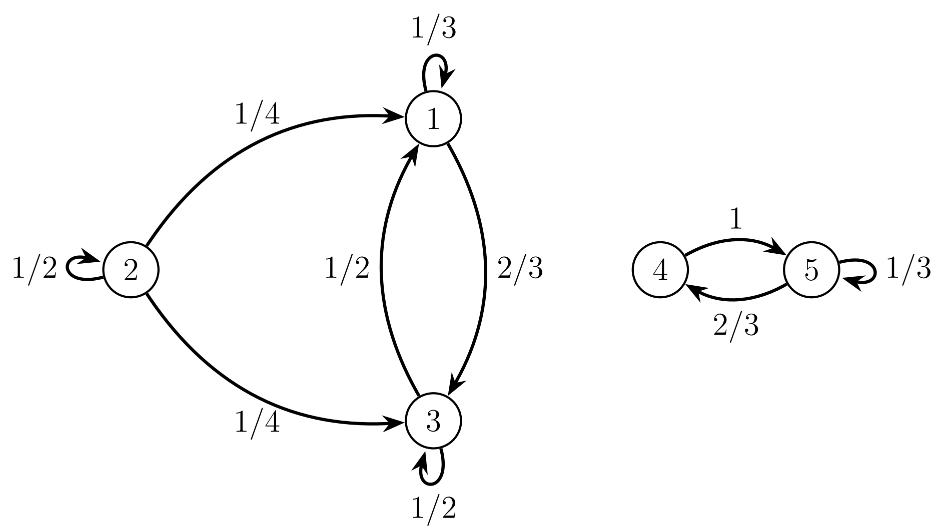
Classifique seus estados e ache as distribuições estacionárias dessa cadeia. Simule essa cadeia considerando $X_0 = 1, 2, 3, 4, 5$ e aproxime o limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$$

para todos $i, j \in I$. Verifique que os resultados encontrados estão convergindo para os valores corretos.

Solução:

Observando o diagrama da cadeia podemos ver que o estado 2 é transiente e os outros estados são recorrentes e se dividem em duas Classes irredutíveis $R_1 = \{1, 3\}$, $R_2 = \{4, 5\} \in I$. Portanto, $T = \{2\}$ (estado transiente) e $R = R_1 \cup R_2$ (estados recorrentes).



Problema 2. Considere a cadeia de Markov em $I = \{1, 2, 3, 4\}$ com

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

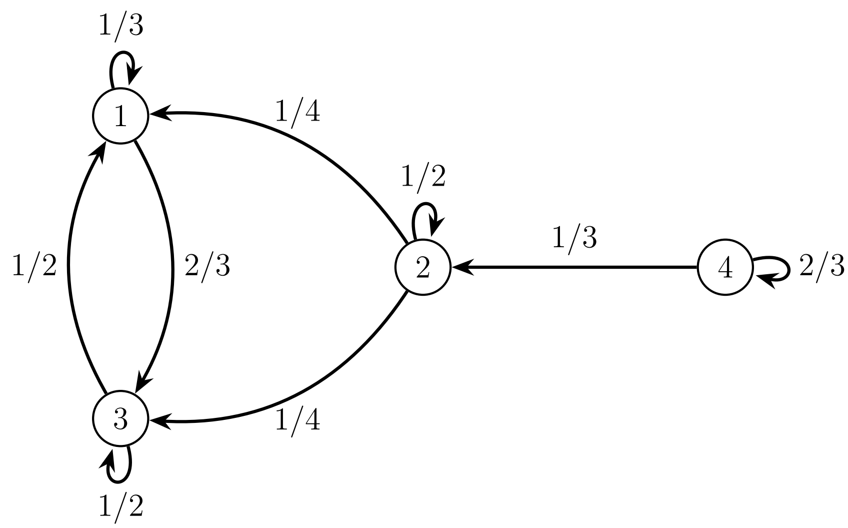
Simule essa cadeia considerando $X_0 = 1$ e aproxime o limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$$

Verifique que o resultado encontrado está convergindo para o valor correto.

Solução:

Observando o diagrama da cadeia podemos ver que os estados 2 e 4 são transientes e os outros estados são recorrentes. Portanto, se $\Pi = (\pi)_{i \in I}$ é distribuição estacionária da cadeia então $\pi_2 = \pi_4 = 0$.



Além disso, resolvendo

$$\begin{bmatrix}\pi_1 \pi_3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pi_1 \pi_3\end{bmatrix}$$

em conjunto com $\pi_1 + \pi_3 = 1$, encontramos $\pi_1 = \frac{3}{7}$ e $\pi_3 = \frac{4}{7}$, então a distribuição estacionária da cadeia é:

$$\Pi = \begin{bmatrix}\frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{7} & 0\end{bmatrix}$$

Como $n \to +\infty$ então podemos aproximar o limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 &\approx \sum_{i \in I} \pi_i {X_i}^2 \\
&\approx 1\pi_1 + 4\pi_2 + 9\pi_3 + 16\pi_4 \\
&\approx 1\frac{3}{7} + 9\frac{4}{7} \\
\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 &\approx \frac{39}{7}
\end{aligned}$$