Hugo Tallys Martins Oliveira
Leonardo Silva Marinho

Problema 1. Considere a cadeia de Markov em $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ com

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

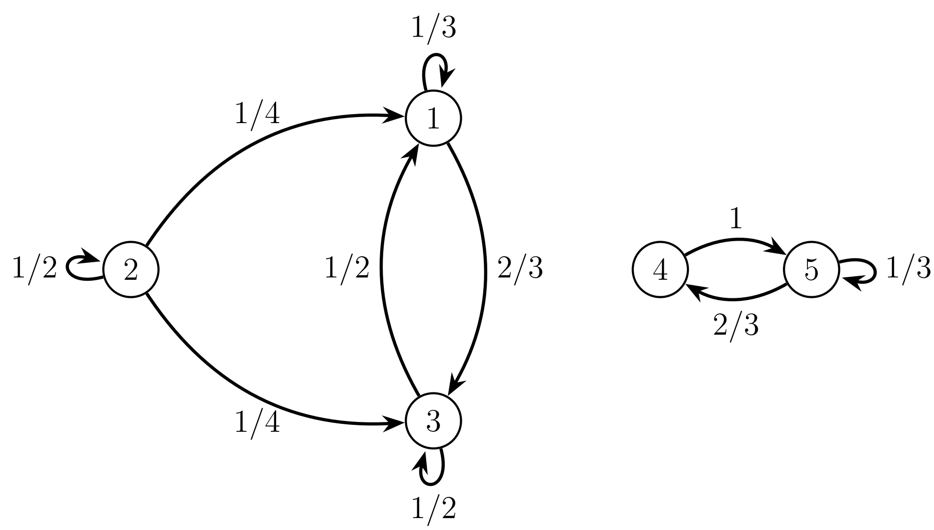
Classifique seus estados e ache as distribuições estacionárias dessa cadeia. Simule essa cadeia considerando $X_0 = 1, 2, 3, 4, 5$ e aproxime o limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$$

para todos $i, j \in I$. Verifique que os resultados encontrados estão convergindo para os valores corretos.

Solução:

Observando o diagrama da cadeia podemos ver que o estado 2 é transiente e os outros estados são recorrentes e se dividem em duas Classes irredutíveis $R_1 = \{1, 3\}$, $R_2 = \{4, 5\} \in I$. Portanto, $T = \{2\}$ (estado transiente) e $R = R_1 \cup R_2$ (estados recorrentes).



Agora vamos calcular as distribuições estacionárias dessa cadeia. Seja $\pi = [\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_5]$ tal distribuição. Devemos ter $\pi P = \pi$ e $\sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1$.

Resolvendo o sistema, obtemos: $\pi_2 = 0$, $\pi_3 = \frac{4}{3}\pi_1$ e $\pi_5 = \frac{3}{2}\pi_4$. Além disso, pela segunda equação temos $\pi_4 = \frac{6 - 14\pi_1}{15}$. Seja $\pi_1 = \alpha$. A distribuição estacionária dessa cadeia é dada por:

$$\pi(\alpha) = \left[\alpha \quad 0 \quad \frac{4}{3}\alpha \quad \frac{6 - 14\alpha}{15} \quad \frac{3 - 7\alpha}{5}\right].$$

Como $0 \leq \pi_i \leq 1$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ devemos ter $0 \leq \alpha \leq \frac{3}{7}$. Para calcular os valores do limite

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i),$$

para cada $i \in I$, devemos separar nosso espaço de estados em dois casos:

Problema 2. Considere a cadeia de Markov em $I = \{1, 2, 3, 4\}$ com

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

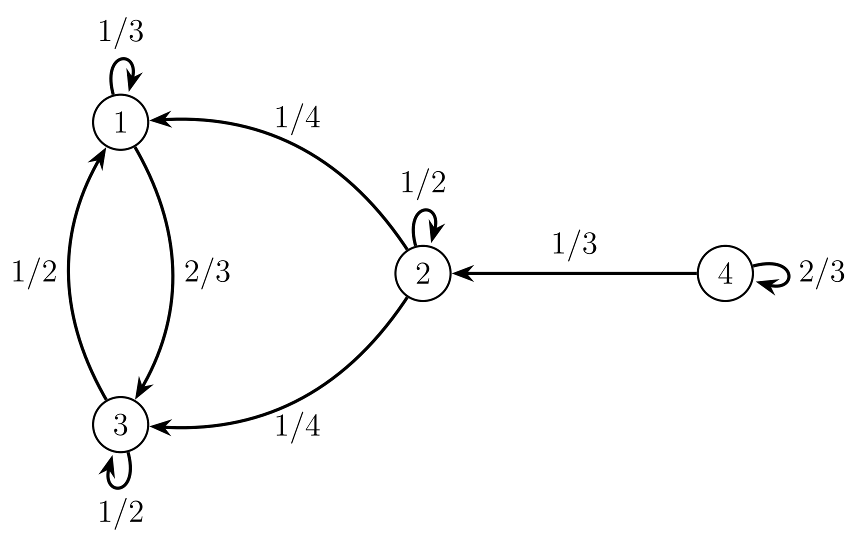
Simule essa cadeia considerando $X_0 = 1$ e aproxime o limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$$

Verifique que o resultado encontrado está convergindo para o valor correto.

Solução:

Observando o diagrama da cadeia podemos ver que os estados 2 e 4 são transientes e os outros estados são recorrentes. Portanto, se $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$ é distribuição estacionária da cadeia então $\pi_2 = \pi_4 = 0$.



Além disso, resolvendo

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \pi_3 \end{bmatrix}$$

em conjunto com $\pi_1 + \pi_3 = 1$, encontramos $\pi_1 = \frac{3}{7}$ e $\pi_3 = \frac{4}{7}$, então a distribuição estacionária da cadeia é:

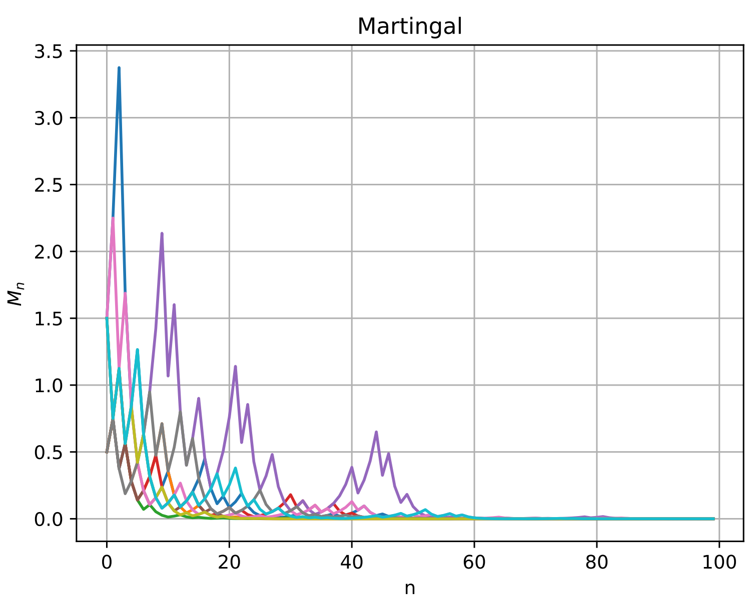
$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

Como $n \to +\infty$ então podemos aproximar o limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 &\approx \sum_{i \in I} \pi_i {X_i}^2 \\
&\approx 1\pi_1 + 4\pi_2 + 9\pi_3 + 16\pi_4 \\
&\approx 1\frac{3}{7} + 9\frac{4}{7} = \frac{39}{7} \\
\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 &\approx 5.57
\end{aligned}$$

Problema 3. Simule vários caminhos do martingal $M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ com $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *iid* e $\mathbb{P}(X_n = 1/2) = \mathbb{P}(X_n = 3/2) = 1/2$ e mostre graficamente que $M_n \to 0$ *q.c*

Solução: A seguir segue o gráfico com 10 simulações do martingal M_n. Foram utilizadas 100 iterações para cada simulação.



Problema 4. Simule J caminhos do processo de Poisson com $\lambda = 1$ até o tempo $T = 5$ de duas maneiras:

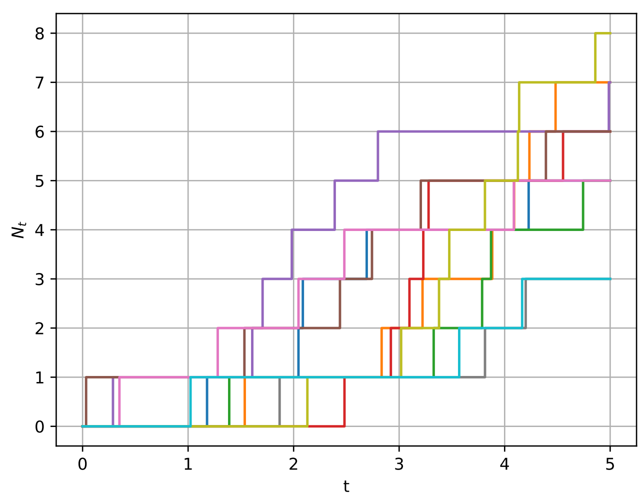
- usando os tempos entre-chegadas $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- usando o Teorema 4.4.8 das notas de aula

Calcule a esperança

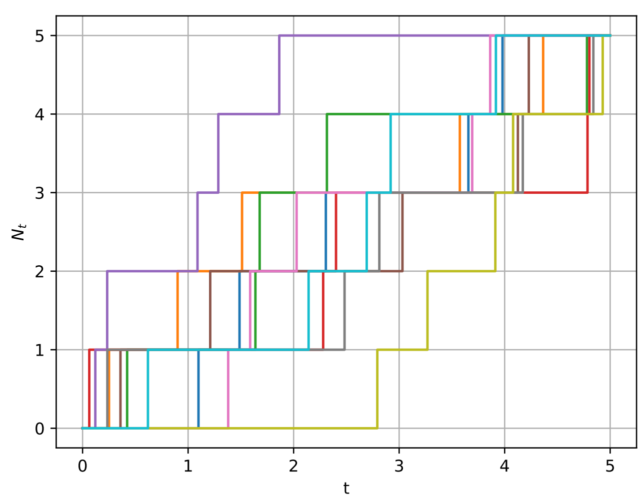
$$\mathbb{E}\left[\int_0^T N_t dt\right] \approx \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T N_t^{(j)} dt$$

usando os caminhos simulados acima e compare com o valor exato.

Solução: Foram simulados $J = 10$ caminhos distintos do processo de Poisson. Os resultados podem ser observados na figura abaixo.



(a) Intervalos X_n exponencialmente distribuídos.



(b) Instantes de chegada T_i uniformemente distribuídos.

Figura 1: Simulações do Processo de Poisson de parâmetro $\lambda = 1$ no intervalo $[0, 5]$.

O valor exato da esperança $E = \mathbb{E}\left[\int_0^T N_t dt\right]$ é dado por:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^T \mathbb{E}\left[N_t\right] dt \\ &= \int_0^T \lambda t \quad dt \\ E &= \lambda \cdot \frac{T^2}{2} \end{aligned}$$

Pondo $\lambda = 1$ e $T = 5$, temos:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T N_t dt\right] = 1 \cdot \frac{5^2}{2} = 12.5$$

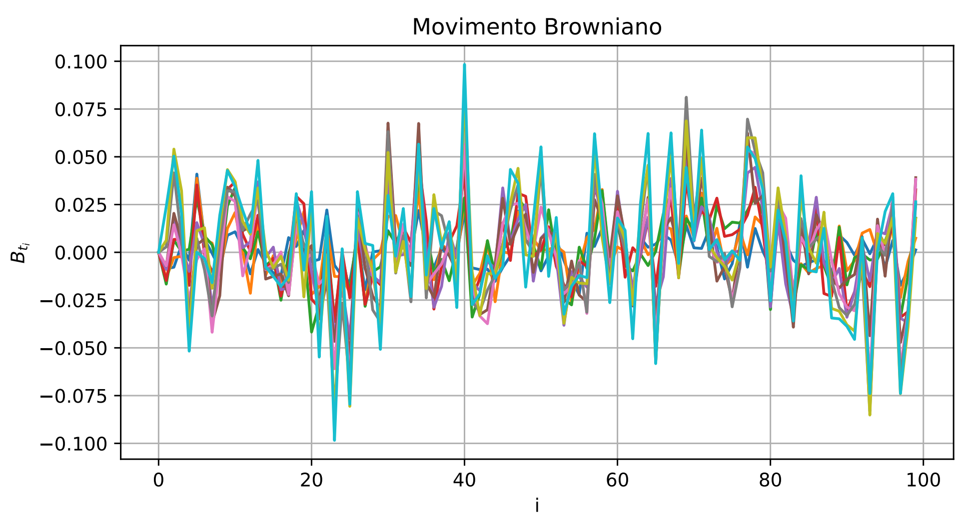
Os valores aproximados para a esperança E foram:

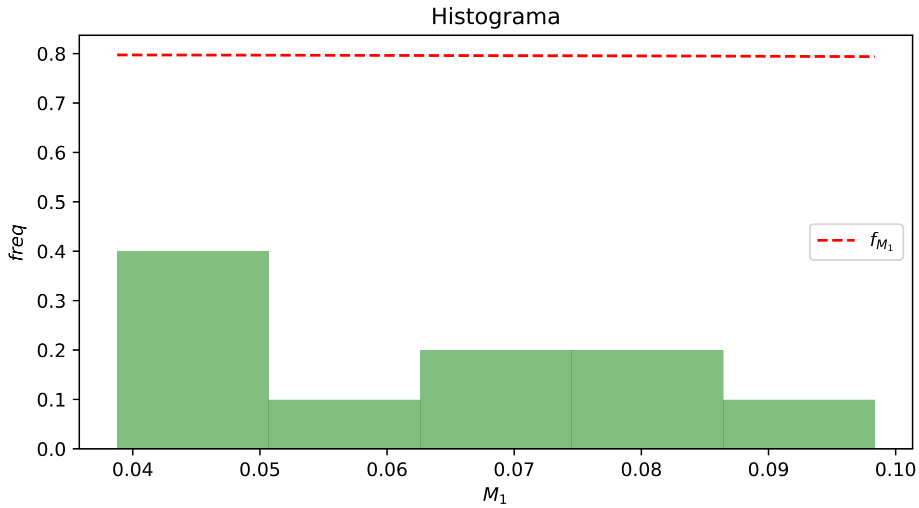
Simulação	E
(a)	11.3874
(b)	12.5784

Problema 6. Simule os caminhos do movimento Browniano entre 0 e 1 e calcule $M_1 = max_{t\in[0,1]} B_t$. Plote o histograma de M_1 e compare com a densidade exata de M_1:

$$f_{M_1}(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-m^2/2}.$$

Solução:




Histograma
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
freq
f_{M_1}
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.10
M_1