Zaporedja po Švicarsko

Hugo Trebše

6. avgust 2025

1 Uvod

Med 16. in 21. februarjem letošnjega leta je v švicarskem alpskem mestecu Les Diablerets potekal mednarodni EDMO kamp, ki pripravlja tekmovalke na Evropsko dekliško matematično olimpijado, ki bo letos potekala v Prištini na Kosovu od 11. do 17. aprila. Poleg ekip iz Bolgarije, Francije, Italije, Nemčije, Španije ter Švice so se priprav udeležile tudi slovenske matematičarke Tifani Bergel (Gimnazija Jesenice), Tadeja Bone (Srednja šola Veno Pilon Ajdovščina), Sara Ferreira (Gimnazija Škofja Loka), Ekaterina Chizhova, Particia Király ter Anja Završki (vse Gimnazija Bežigrad). Spremljevalec ekipe ter predavatelj je bil Hugo Trebše.

Slika 1: Ekipa v snegu

Vsak dan sta bili na sporedu dve triurni matematični predavanji, ki so jih praviloma sestavili spremljevalci ekip. Poleg olimpijskih tem so imele tekmovalke privilegij poslušati predavanji dveh prejemnikov Fieldsove medalje: prof. Maryne Viazovske ter prof. Stanislava Smirnova. Profesorica Viazovska je s tekmovalkami delila misli o svojih najljubših matematičnih filmih ter komentirala njihovo matematično vsebino, prof. Smirnov pa je predstavil osnovne rezultate o tlakovanjih ravnine.

Kot spremljevalec slovenske ekipe sem pripravil predavanje o zaporedjih. Poudarek je na reševanju nalog z elementarnimi, a ne preprostimi, metodami – znanje limit tako ni potrebno. Naloge praviloma z rekurzivno zvezo definirajo neko zaporedje, nato pa od tekmovalca zahtevajo, da

Slika 2: Med predavanjem prof. Smirnova

pokaže neko lastnost definiranega zaporedja. V pomoč naj ti bodo naslednji nasveti:

- Definiraj pomožno zaporedje.
- Ugani kakšno lastnost zaporedja.
- Opazuj ekstremne elemente (če obstajajo).

V mislih imej tudi dejstvo, da so celoštevilska zaporedja dosti krotkejša od zaporedij racionalnih ali realnih števil. Eden izmed razlogov za to je, da so razlike med zaporednimi členi »velike«; zaporedna člena sta namreč bodisi enaka, bodisi se razlikujeta za vsaj 1, kar očitno ne velja za zaporedja racionalnih ali realnih števil.

2 Naloge

Naloga 1 (APMO 1995)**.** Določi vse nize realnih števil $\{a_1, \ldots, a_{2025}\}$, za katere velja

$$2 \cdot \sqrt{a_n - n + 1} \geq a_{n+1} - n + 1$$

za vse $1 \leq n \leq 2024$ ter $2 \cdot \sqrt{a_{2025} - 2024} \geq a_1 + 1$.

Rešitev. Zaradi definiranosti korenov sklepamo, da so vsi elementi niza pozitivna realna števila.

Prisotnost faktorja 2 ter kvadratnega korena v izrazu spominja na neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino v primeru dveh spremenljivk. Za vse $1 \leq n \leq 2024$ velja

$$(a_n - n + 1) + (1) \geq 2\sqrt{(a_n - n + 1) \cdot 1} \geq a_{n+1} - n + 1 \implies a_n \geq a_{n+1} - 1.$$

Prav tako velja

$$(a_{2025} - 2024) + (1) \geq 2\sqrt{a_{2025} - 2024} \geq a_1 + 1.$$

Sledi

$$a_1 \geq a_2 - 1 \geq \ldots \geq a_{2025} - 2024 \geq a_1.$$

Sledi, da so vse neenakosti pravzaprav enakosti

$$a_1 = a_2 - 1 = a_3 - 2 = \ldots = a_{2025} - 2024.$$

Z lahkoto preverimo, da niz $\{a_1, \ldots, a_{2025}\}$, kjer za vse $1 \leq n \leq 2025$ velja

$$a_n = a_1 + n - 1$$

izpolni pogoj naloge natanko tedaj, ko je $a_1 = 1$, kar poda edino rešitev. $\square$

Naloga 2 (Nemška državna olimpijada 2025)**.** Definirajmo zaporedje $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, kjer je $a_1 = 1$ ter velja

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(3a_n + \sqrt{5a_n^2 + 20}\right).$$

Pokaži, da so vsi členi zaporedja naravna števila.

Rešitev. Pogoj je ekvivalenten enakosti

$$\begin{gathered}(2a_{n+1} - 3a_n)^2 = 5a_n^2 + 20 \iff 4a_{n+1}^2 - 12a_{n+1}a_n + 4a_n^2 - 20 = 0 \\ a_{n+1}^2 - 3a_{n+1}a_n + a_n^2 - 5 = 0.\end{gathered}$$

Sledi, da je a_{n+1} ničla polinoma

$$X^2 - 3a_nX + a_n^2 - 5.$$

Podobno lahko sklepamo za a_{n-1}, saj velja enakost

$$(2a_n - 3a_{n-1})^2 = 5a_{n-1}^2 + 20,$$

katero na enak način pretvorimo v

$$a_n^2 - 3a_na_{n-1} + a_{n-1}^2 - 5 = 0.$$

Sledi, da sta a_{n+1} ter a_{n-1} obe ničli polinoma

$$X^2 - 3a_nX + a_n^2 - 5.$$

Po Vietovih formulah sledi, da je $-3a_n = -a_{n+1} - a_{n-1}$. Če sta a_{n-1} ter a_n celi števili tako sledi, da je tudi a_{n+1} celo število.

Računsko preverimo, da je $a_2 = 4$. Induktivno zaključimo, da je a_{n+1} celo število za vse $n \in \mathbb{N}$. Ker pa so vsi členi zaporedja pozitivna realna števila (zaporedje je namreč naraščajoče) tako sledi, da so vsi členi zaporedja naravna števila. $\square$

Naloga 3 (MMO 2014)**.** Naj bo $a_0, a_1, \ldots$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Pokaži, da obstaja natanko en $n \in \mathbb{N}$, za katerega velja

$$a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Rešitev. Neenakost pretvorimo v ekvivalentno obliko

$$n \cdot a_n < \sum_{i=0}^{n} a_i \leq n \cdot a_{n+1}.$$

V iskanju simetrije odštejemo $a_1 + \ldots + a_n$ od vseh treh členov neenakosti

$$n \cdot a_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n < a_0 \leq n \cdot a_{n+1} - a_1 - a_2 - \ldots - a_n.$$

Definirajmo

$$b_k = (a_k - a_{k-1}) + (a_k - a_{k-2}) + \ldots + (a_k - a_1),$$

kar želeno neenakost pretvori v kompaktnejšo obliko

$$b_n < a_0 \leq b_{n+1}.$$

Očitno so elementi zaporedja $\{b_k\}$ cela števila. Sledeči račun pokaže, da je zaporedje $\{b_k\}$ strogo naraščajoče

$$b_k = (k-1) \cdot a_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_i < k \cdot (a_{k+1} - a_k) + (k-1) \cdot a_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_i = k \cdot a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} a_i = b_{k+1}.$$

Ker je $\{b_k\}$ strogo naraščajoče zaporedje celih števil sledi $1 + b_k \leq b_{k+1}$. Obstoj ter enoličnost $n \in \mathbb{N}$, ki izpolni želeno neenakost

$$b_n < a_0 \leq b_{n+1}$$

je tako na dlani. $\square$

Naslednji nalogi prepuščam bralcu v izziv.

Naloga 4 (Predizbor za MMO 2019)**.** Naj bo $u_1, \ldots, u_{2019}$ niz realnih števil, za katerega velja

$$\sum_{i=1}^{2019} u_i = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{2019} u_i^2 = 1.$$

Pokaži

$$\min\{u_i\} \cdot \max\{u_i\} \leq \frac{-1}{2019}.$$

Naloga 5 (Vsesovjetska olimpijada 1968)**.** Definiramo zaporedje realnih števil, za katerega velja $a_1 = 1$ ter

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}.$$

Določi celi del a_{100}. Z nekaj znanja analize lahko določiš tudi celi del a_{2025}.

Opomba: celi del realnega števila x je definiran kot največje celo število, ki ne presega x.