Mravljica na tetraedru

Hugo Trebše

22. september 2025

1 Naloga

Med mladimi estonskimi matematiki se je razširila naslednja zanimiva uganka na temo pobega, ki naj bi se prvotno pojavila na spletnih ugankarskih forumih v zgodnjih dvatisočih.

Naloga. Na robove pravilnega tetraedra so postavljeni trije pajki ter mravljica, ki se lahko premikajo le po robovih tetraedra. Bitja se lahko po stranicah premikajo s poljubno hitrostjo manjšo od svoje maksimalne hitrosti, s tem da je najvišja hitrost mravljice strogo manjša od najvišje hitrosti pajkov. Ker je mravljica zelo majhna ter pajki slabovidni položaj mravljice pajkom nikoli ni viden. Obenem pajek mravljico ujame le, če se v nekem trenutku znajde na isti točki kot ona. Pred začetkom igre se pajki posvetujejo in skupaj izberejo deterministično strategijo za iskanje mravljice. Njen začetni položaj jim ni znan, lahko pa med igro spremljajo lokacije drug drugega. Na srečo ima mravljica zelo dober sluh; strategijo pajkov je preslišala ter lahko svoje premikanje prilagodi načrtu pajkov.

Ali lahko pajki, ne glede na začetne položaje ter strategijo mravljice, zagotovijo, da bodo mravljico ujeli v končnem času? Ali je odgovor odvisen od razmerja med najvišjo hitrostjo pajkov ter najvišjo hitrostjo mravljice, če je razmerje večje od 1*?*

2 Rešitev

Pokažemo, da lahko pajki mravljico vedno ujamejo, če je le njihova hitrost nekoliko večja od mravljičine. Najprej opišemo strategijo pajkov, nato pa pokažemo, da ta strategija vedno vodi do ujetja mravljice.

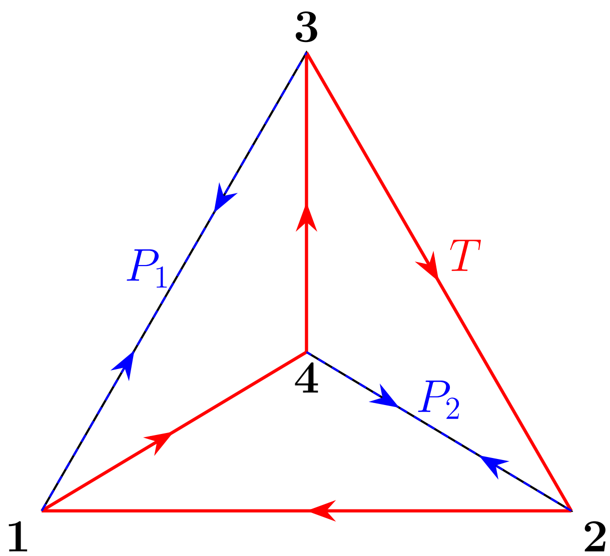
Strategija pajkov

Oglišča tetraedra označimo s številkami $1, 2, 3$ in 4. Poimenujmo enega izmed pajkov T, ostala dva pa P_1 in P_2. Najprej se vsi trije pajki zberejo v oglišču 1, nato pa se P_2 premakne v oglišče 2. Pajki se premikajo na sledeči način, kjer smer premikanja označimo z znakom $\rightarrow$:

- T se ves čas premika po ciklu $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.
- P_1 se premika po stranici $1 - 3$ ali pa miruje v enem izmed oglišč.
- P_2 ravna enako kot P_1, a na stranici $2 - 4$.

Določimo še, kdaj P_1 in P_2 mirujeta in kdaj se premikata:

- Ko se T začne premikati po povezavi $1 \rightarrow 4$, se P_2 začne premikati po povezavi $2 \rightarrow 4$. Ko sočasno prispeta v oglišče 4, se P_2 ustavi.
- Ko se T začne premikati po povezavi $4 \rightarrow 3$, se P_1 začne premikati po povezavi $1 \rightarrow 3$. Ko sočasno prispeta v oglišče 3, se P_1 ustavi.
- Ko se T začne premikati po povezavi $3 \rightarrow 2$, se P_2 začne premikati po povezavi $4 \rightarrow 2$. Ko sočasno prispeta v oglišče 2, se P_2 ustavi.
- Ko se T začne premikati po povezavi $2 \rightarrow 1$, se P_1 začne premikati po povezavi $3 \rightarrow 1$. Ko sočasno prispeta v oglišče 1, se P_1 ustavi.



Dokaz, da je mravljica ujeta

Da je mravljica ujeta bomo dokazali z uporabo *monovariante*. To pomeni, da bomo definirali nenegativno količino, ki s časom pada, v tem primeru za nek fiksen faktor, obenem pa ničelnost količine pomeni, da je mravljica ujeta. Tako bomo dokazali, da je mravljica ujeta v končnem času.

Definirajmo od časa odvisno količino $M(t)$, s katero bomo poizkusili meriti razdaljo med mravljico in pajkom T.

- Če je mravljica na ciklu $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$, definiramo $M(t)$ kot razdaljo med trenutno lokacijo T in trenutno lokacijo mravljice, v smeri premikanja T.
- Če je mravljica v notranjosti stranice 1–3, definiramo $M(t)$ kot razdaljo med trenutnim položajem T in tistim ogliščem stranice 1–3, skozi katerega je mravljica vstopila na stranico 1-3.
- Če je mravljica v notranjosti stranice 2–4, definiramo $M(t)$ na enak način kot v prejšnjem primeru.

Če se mravljica premika samo po ciklu, po katerem se premika T, bo očitno prej ali slej ujeta, saj je pajek T hitrejši od nje. Denimo, da se mravljica med svojim begom zateče na eno izmed stranic 1–3 ali 2–4. Zaradi simetrične vloge teh dveh stranic in analognega vzorca premikanja P_1 in P_2, se brez izgube splošnosti omejimo na primer stranice 1–3. Mravljica na tej stranici ne more ostati dolgo, saj se P_1 premika iz enega oglišča v drugo. Poleg tega iz definicije premikanja P_1 sledi, da bo mravljica prisiljena to stranico zapustiti skozi isto oglišče, skozi katero je na stranico vstopila. Naj bo t_0 trenutek ob katerem se mravljica premakne iz enega izmed oglišč v notranjost stranice 1–3, in naj bo t_1 prvi trenutek, ko zapusti notranjost te stranice. Trdimo, da če mravljica ni bil ujeta, potem velja $M(t_0) > M(t_1)$. Denimo, da mravljica ni bil ujeta ter velja $M(t_0) \leq M(t_1)$. Ker se mravljica ob trenutkih t_0 in t_1 nahaja na ciklu, po katerem se premika T, je $M(t_0)$ razdalja med T in mravljico ob času t_0, enako velja za $M(t_1)$. Če je $M(t_0) \leq M(t_1)$, potem se T ob času t_1 nahaja pred mravljico (v smislu cikla). To pomeni, da je moral pajek T med mravljičinem postanku na stranici 1-3 prečkati oglišče, skozi katerega mravljica zapusti stranico 1–3. Ker pa P_1 in T hkrati prispeta v oglišča 1 in 3, sledi, de je bodisi P_1 ujel mravljico, bodisi je mravljica zapustila stranico 1-3 pred časom t_1. Slednje je v protislovju z definicijo t_1. Sledi torej, da velja $M(t_0) > M(t_1)$ ali pa je bil mravljica ujeta.

Naloga je praktično rešena. Če P_1 ali P_2 mravljice ne ujameta na njunih stranicah, se mora mravljica premikati po ciklu, na katerem ga postopoma dohiteva T. Količina $M(t)$ se s časom manjša za nek fiksen faktor, namreč vsaj za faktor razlike med hitrostjo pajkov ter hitrostjo mravljice, ne glede na to ali se mravljica premika po ciklu ali pa po eni izmed stranic zunaj cikla. Sledi, da je mravljica gotovo ujeta v končnem času, dokler je mravljica počasnejša od pajkov.

3 Nadaljevanje

Uporaba monovariante je posebej uporabna pri algoritmičnih razmislekih. Če definiramo zaporedje korakov, ki dosežejo naš cilj, moramo le še pokazati, da se vsi koraki v našem zaporedju zgodijo; lahko bi se na primer na kakšnem koraku za vedno ustavili. To pogosto naredimo z uporabo monovariante - količine, ki se z vsakim korakom algoritem zmanjša ter je enaka 0, ko se algoritem ustavi.

Pri vprašanjih o končnih množicah je ponavadi monovarianta nenegativno celo število. Da naš algoritem terminira je tedaj jasno, saj ne obstaja padajoče zaporedje naravnih števil. V primeru neskončnih množic ter realnih monovariant je potreben dodaten razmislek. Zgodilo bi se lahko namreč, da monovarianta strogo pada z vsakim korakom, a nikoli ne doseže nič. V rešitvi zgornje naloge bi v principu lahko veljalo, da je $M(t) = \frac{1}{t}$, kar ne bi impliciralo, da je mravljica ujeta v končnem času. Tej težavi smo se izognili tako, da smo argumentirali, da je monovarianta pada za fiksen faktor. Če se mravljica kadarkoli zateče na stranico 1-3 ali na stranico 2-4 bo s tem skrajšala čas do svojega ujetja, saj se bo na cikel, ki ga obhodi T, vrnila skozi isto oglišče, skozi katerega je vstopila na eno izmed omenjenih stranic, še zmeraj pa se bo nahajala pred T v smislu cikla. Monovarianta $M(t)$ bo tako enaka kot če bi se mravljica le ustavila na oglišču, kar očitno le skrajša njeno ujetje. V ekstremnem primeru se mravljica ob začetku lova nahaja direktno za pajkom T ter se vedno premika le po ciklu, ki ga obhodi T. V tem primeru je mravljica ujeta v času

$$\frac{4}{v_p - v_m},$$

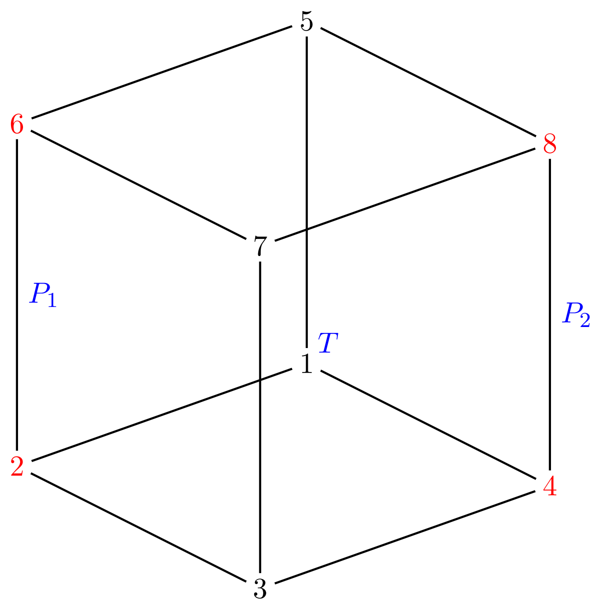
kjer je v_p najvišja hitrost pajkov ter v_m najvišja hitrost mravljice.

4 Izziv

Naslednja naloga je nekoliko lažja od prejšnje. Bralki oz. bralcu predlagam, da nekaj časa posveti razmisleku ter namig prebere kasneje. Skoraj vse lastnosti bitij ter njihovega premikanje so enake kot v prvi nalogi, a tokrat imajo pajki odličen vid ter vedno vidijo točno kje se nahaja mravljica.

Naloga. [1] Trije pajki in mravljica se premikajo po robovih kocke. Mravljica se premika s trikrat večjo hitrostjo od pajkov. Ali lahko pajki ujamejo mravljico ne glede na to, kako so bitja postavljena na začetku in kako se mravljica premika?

Namig. Oznake oglišč kocke ter lokacije pajkov so prikazane na diagramu. Na ogliščih $2, 4, 6$ in 8 pajki postavijo dvobarvne semaforje. Ti svetijo rdeče, če je mravljica od njih oddaljena manj kot 1.5 dolžine stranice kocke, sicer pa zeleno. Glede na barve semaforjev opiši, kako naj se pajka P_1 in P_2 premikata, da bi iz mravljičine perspektive kocko »prerezala« na dva dela. Kaj naj sedaj stori pajek T? □



Literatura

[1] Peter Winkler, *Mathematical Mind-Benders*, Wellesley, MA, 2007.