Splošna topologija

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

19. oktober 2024

Kazalo

1 Topološki prostori ter zvezne funkcije

Iz metričnih prostorov vemo: $f : (X, d_x) \to (Y, d_y)$ je zvezna, če je za vsako odprto množico $U \subseteq Y$ njena praslika $f^{-1}(U)$ odprta v X. $U \subseteq X$ je odprta, če so vse točke U notranje. Točka $x \in U$ je notranja, če obstaja $r > 0$, da je $K(x, r) \subseteq U$.

V topologiji namesto opisovanja odprtih množic glede na druge pogoje predpišemo, katere množice so odprte.

Opomnimo se še naslednjega dejstva o odprtih množicah: v metričnem prostoru je množica odprta, natanko tedaj, ko jo lahko zapišemo kot unijo odprtih krogel.

Z hitrim premislekom pridemo do ugotovitve, da lahko odprto množico v eni metriki zapišemo kot unijo odprtih krogel v drugi metriki.

Definicija 1.1: Topologija

Topologija na množici X je družina množic $\mathcal{T} \subseteq X$, ki zadošča pogojem:

- (T0) $\emptyset \in \mathcal{T}$ ter $X \in \mathcal{T}$.
- (T1) Poljubna unija elementov $\mathcal{T}$ je element $\mathcal{T}$.
- (T2) Poljuben končni presek elementov $\mathcal{T}$ je element $\mathcal{T}$.

Elemente $\mathcal{T}$ imenujemo odprte množice. *Topološki prostor* je množica X z neko topologijo $(X, \mathcal{T})$.

Pogoj (T0) pravzaprav sledi iz pogojev (T1) in (T2) z presekom ter unijo prazne družine.

Bližina točk pravzaprav meri kako težko je ločiti dve točki, kar motivira topologijo.

Primer 1.2

Metrika porodi topologijo: (X, d) metrični prostor in $\mathcal{T}_d = \{\text{vse unije odprtih krogel}\}$.

Oris dokaza. Unija unij krogel je seveda unija krogel, kar zadosti pogoju (T1). Pogoj (T2) dokažemo za presek dveh krogel, z indukcijo za končno mnogo. Presek odprtih krogel je odprta množica, zato unija odprtih krogel. □

Definicija 1.3

Topolologija je *metrizabilna*, če je porojena z neko metriko.

Primer 1.4

Če je (X, d) metrični prostor je tudi (X, d') metrični prostor, kjer je

$$d'(x, y) = \min \{d(x, y), 1\}.$$

Velja, da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$, kjer vzamemo standardno topologijo porojeno z metriko. Posledično lahko različne metrike porodijo isto topologijo.

Definicija 1.5

Toplogijo $\mathcal{T}_{\text{triv}} = \{\emptyset, X\}$ imenujemo *trivialna topologija*, topologijo $\mathcal{T}_{\text{disc}} = \mathcal{P}(X)$ pa *diskretna topologija*.

Primer 1.6: Metrizabilnost trivialne in diskretne topologije

Mar sta te topologiji metrizabilni? Za trivialno topologijo to ne velja, če ima le X vsaj dva elementa. Temu je tako, ker imata vsaki točki v metričnem prostoru disjunktni okolici - obstaja taka okolica ene točke, ki ne vsebuje druge točke. Za diskretno topologijo pa je odgovor da, saj jo porodi diskretna metrika:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{če } x = y \\ 1, & \text{če } x \neq y \end{cases}$$

Vsak element $x \in X$ je namreč vsebovan v odprti krogli $K(x, \frac{1}{2})$, posledično lahko dobimo vsak element $\mathcal{T}_{disc}$ z unijami.

Definicija 1.7

$\text{Int}(A) = \bigcup\{U \in \mathcal{T} \ \mid U \subseteq A\}$ je največja odprta podmnožica množice A. Pravimo, da je A *zaprta*, če je $A^T \in T$. Definiramo tudi *zaprtje* množice A kot $\text{Cl}(A) = \overline{A} = \bigcap\{A \subset Z\}$. Le-ta je najmanjša zaprta množica, ki vsebuje A.

Primer 1.8

Na množici X lahko definiramo topologijo $\mathcal{T}_{\text{kk}} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ je končna}\} \cup \emptyset$, ki ji pravimo *topologija končnih komplementov*. Isto topologijo dobimo, če razglasimo vse elemente X za zaprte množice.

Definiramo tudi *mejo* množice A kot $\text{Fr}(A) = \text{Cl}(A) \setminus \text{Int}(A)$. Ta ni enaka robu množice ter je venomer zaprta, saj je $\text{Fr}(A) = \text{Cl}(A) \cup (X \setminus \text{Int}(A)) = \text{Cl}(A) \cup \text{Int}(A)^c$.

2 Zvezne preslikave

Definicija 2.1

Preslikava $f : X \to Y$ je *zvezna*, če velja $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$.

To je seveda le znani pogoj o odprtosti praslik odprtih množic.

Obstajajo topologije, ki zagotovijo zveznost vseh funkcij.

Primer 2.2

- Če je $\mathcal{T}_Y$ trivialna je f venomer zvezna.
- Če je $\mathcal{T}_X$ diskretna je f venomer zvezna.

Poetično se lahko izrazimo *če je topologija domene bogata glede na topologijo kodomene, potem je f zvezna.*

Trditev 2.3

Konstantna funkcije je zvezna ne glede na topologijo.

Oris dokaza. Če je $f(X) = y_0$ in je $U \in \mathcal{T}_Y$ velja

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} X \mid y_0 \in U \\ \emptyset \mid y_0 \notin U \end{cases}$$

□

Ali obstaja kakšna topologija, da velja obratno?

Primer 2.4

$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{kk}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{evk}})$ je nezvezna, če je nekonstantna.

Oris dokaza. $\mathcal{T}_{\text{kk}}$ ne vsebuje disjunktnih nepraznih množic. **Disjunktni množici imata disjunktni prasliki**. Ker topologija kodomene vsebuje disjunktni množici smo končali. □

Pravzaprav lahko zgornji zgled posplošimo na neobstoj zvezne nekonstantne funkcije $g : (X, \mathcal{T}_{\text{kk}} \to (Y, \mathcal{T}))$, kjer je $\mathcal{T}$ metrizabilna ter X neskončna.

Vpeljemo oznako za množico zveznih preslikav med topološkima prostoroma: $\mathrm{C}((X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)) = \mathrm{C}(X, Y)$. Pogosto pišemo: $\mathrm{C}((X, \mathcal{T}_X), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{evk}})) = \mathrm{C}(X)$. V topološkem kontekstu pogosto uporabimo izraz prostor za topološki prostor ter preslikava za funkcijo, ki je zvezna glede na izbrano topologijo.

Trditev 2.5

- Kompozitum zveznih funkcij je zvezna.
- Naslednje trditve so ekvivalentne:
  - † f je zvezna.
  - † praslika vsake zaprte množice je zaprta.
  - † $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Oris dokaza. Velja $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ ter $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Ker je $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ ter ker je zaprtje A gotovo znotraj zaprte množice na desni sledi $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Naj bo B zaprta. Velja $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B} = B$. To pokaže, da je zaprtje praslike podmnožica praslike, kar dokaže željeno. □

Zadnja karakterizacija je topološka analogija znane karakterizacije z konvergenco funkcijskih vrednosti ter funkcijsko vrednostjo limite. Elementi roba so namreč na nek način limite zaporedij. Prednost zadnje karakterizacije je tudi to, da se nam pri eksplicitno podani funkcijo f ni treba ukvarjati z računanjem praslike.

Primer 2.6

Omenimo dve »znani« topologiji.

- Naj bo $x \in X$. $\mathcal{T}_{\text{VT}} = \{U \subseteq X \mid x \in U \vee X = \emptyset\}$. To topologijo imenujemo *topologija vsebovane točke*.
- *Prostor Sierpinskega* je topologija na dveh točkah, kjer je razen prazne in polne mnozice odprta le ena izmed tock.

3 Homeomorfizmi

Definicija 3.1

$f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ je *homeomorfizem*, če je

- f je bijekcija med X in Y.
- f_* (preslikava med $\mathcal{T}_X$ in $\mathcal{T}_Y$) je bijekcija.

Trditev 3.2

Za $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ so ekvivalentne naslednje trditve:

- f je homeomorfizem.
- f je bijekcija, f ter f^{-1} sta zvezni.
- f je bijekcija, zvezna in *odprta* - slika vsake odprte množice je odprta.
- f je bijektivna, zvezna in *zaprta* - slika vsake zaprte množice je zaprta.

Homeomorfnost je ekvivalenčna relacija.

Nekatere zvezne funkcije so avtomatično zaprte oz. odprte. Primer je

$$f^{\text{zv.}} : X^{\text{komp.}} \to Y^{\text{metr.}}$$

Primer 3.3

Inverz zvezne funkcije ni nujno zvezen. Obravnavamo naravno preslikavo iz

$$[0, 1) \cup \{2\} \to [0, 1].$$

Preslikava je zvezna, a njen inverz ni.

Vsak končen interval na $\mathbb{R}$ je homeomorfen enemu izmed intervalov $[0, 1], (0, 1), [0, 1)$. Velja tudi, da sta $(-1, 1)$ in $\mathbb{R}$ homeomorfna, kar pokaže naslednja preslikava:

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|}.$$

Preslikava je homeomorfizem, saj ima zvezen inverz $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$

Noben izmed intervalov $(0, 1)$ in $[0, 1)$ ni homeomorfen $[0, 1]$, saj je slednji kompakten, slika kompaktne množice pod zvezno funkcijo je kompaktna, noben izmed $(0, 1)$ ter $[0, 1)$ pa ni kompakten.

Sta morda $(0, 1)$ in $[0, 1)$ homeomorfna? Denimo, da sta ter je $f(0) = a$. Potem moramo homeomorfno preslikati $(0, 1)$ v $(0, a) \cup (a, 1)$. $(0, 1)$ je *povezana s potmi*, med tem ko $(0, a) \cup (a, 1)$ ni, kar bomo v prihodnje pokazali, da je protislovno.

Pri dokazovanju da prostora nista homeomorfna se osredotočimo na iskanje lastnosti, ki jo ima le en prostor, obenem pa se ta lastnost ohranja pod homeomorfizmom.

Topološka lastnost je lastnost prostora, ki se ohranja pri homeomorfizmih. Povezanost in kompaktnost sta topološki lastnosti, omejenost in polnost pa nista topološki lastnosti.

Definicija 3.4

- $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ je enotska n krogla.
- $\mathring{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ je odprta enotska n krogla.
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ je enotska sfera.

Primer 3.5

$\mathring{B}^n \cong \mathbb{R}^n$. Homeomorfizem je namreč:

$$f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1 - \|\vec{x}\|}$$

Primer 3.6

$S^n \setminus \{t\} \cong \mathbb{R}^n$, kjer je t poljubna točka S^n. Žarki, definirani z točko t ter poljubno od t različno točko na S^n sekajo ekvator kroglo B^n v točno definirani točki. Funkcija je zvezna, prav tako je tudi njen inverz zvezen - majhne spremembe v argumentu dajo majhne spremembe v funkcijskih vrednostih.
Formalno podamo homeomorfizem kot: $f : S^n \setminus \{(0, \ldots, 1)\} \to \mathbb{R}^n$, kjer je

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 - x_{n+1}},$$

ter je inverz $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{(\vec{0}, 1)\}$ podan s predpisom

$$f^{-1}(\vec{x}) = \left(\frac{2\vec{x}}{\|\vec{x}\| + 1}, \frac{\|\vec{x}\| - 1}{\|\vec{x}\| + 1}\right)$$

Primer 3.7

Denimo, da je f homeomorfizem med $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$. Naj bo $f(0, 0) = a$. Protislovje po povezanosti s potmi.