Analiza 2a

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

17. november 2024

Kazalo

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Notacija

Standardna baza $\mathbb{R}^n$ je $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, kjer se 1 pojavi na i-tem mestu. Definiramo lahko skalarni produkt vektorjev ter normo vektorja

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_i y_i \quad \text{ter} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2},$$

slednja porodi metriko

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Izrek 1.1: Heine-Borel

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ je kompaktna} \iff K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ je zaprta in omejena.}$$

Metriki d_1 in d_2 na prostoru M sta *topološko ekvivalentni*, če inducirata isto topologijo. Če pa obstajata $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, da za vse $x, y \in M$ velja:

$$\alpha d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le \beta d_1(x, y),$$

pravimo, da sta *močno ekvivalentni*. Hitro pokažemo tudi, da sta močno ekvivalentni metriki tudi topološko ekvivalentni. Da je močna ekvivalentnost prav tako ekvivalenčna relacija vidimo preko naslednjega razmisleka:

$$\begin{aligned}\alpha d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le \beta d_1(x, y) &\implies \alpha \le \frac{d_2(x, y)}{d_1(x, y)} \le \beta \implies \frac{1}{\alpha} \ge \frac{d_1(x, y)}{d_2(x, y)} \ge \frac{1}{\beta} \\ &\implies \frac{1}{\alpha} d_2(x, y) \ge d_1(x, y) \ge \frac{1}{\beta} d_2(x, y)\end{aligned}$$

Topološko ekvivalentnost metrik $\|\cdot\|_\infty$ ter $\|\cdot\|_2$ je lahko dokazati, saj so odprte krogle v prvi evklidski kvadrati, v drugi pa standardne krogle.

Lema 1.2: Močna ekvivalenca $\|\cdot\|_\infty$ ter $\|\cdot\|_2$

S preprostimi premisleki v $\mathbb{R}^n$ dobimo:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$$

kar prav tako poda ekvivalentnost topologij.

Analogen premislek poda ekvivalenco vseh metrik $\|\cdot\|_p$ za $p \in \overline{\mathbb{R}}$. Zgornja lema zelo dobro motivira dejstvo, da se večina lepih lastnosti funkcij, kot sta na primer zveznost in odvedljivost, prenese na projekcije funkcij, kot jih definiramo na naslednji strani.

1.2 Zaporedja

Definicija 1.3

Zaporedje v $\mathbb{R}^n$ označujemo kot $\{a_m\}$, kjer je posamezni člen a_m oblike

$$a_m = (a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m).$$

Trditev 1.4

Naj bo $\{a_m\}$ zaporedje v $\mathbb{R}^n$. Zaporedje konvergira natanko tedaj, ko konvergirajo zaporedja $\{a_1^m\}, \{a_2^m\}, \ldots, \{a_n^m\}$. V primeru konvergence velja:

$$\lim_{m\to\infty} a_m = (\lim_{m\to\infty} a_1^m, \lim_{m\to\infty} a_2^m, \ldots, \lim_{m\to\infty} a_n^m).$$

Analogni izreki veljajo za obstoj stekališča ter za Cauchyjevost zaporedja $\{a_m\}$.

Trditev 1.5

Razlika odprte in zaprte množice je odprta v $\mathbb{R}^n$.

Oris dokaza. $\mathcal{O} \setminus \mathcal{Z} = \mathcal{O} \cap \mathcal{Z}^c$. □

1.3 Zveznost

1.3.1 Zveznost funkcij

Praviloma imenujemo predpise $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcije, predpise $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pa preslikave.

Definicija 1.6

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ima v točki $a \in \mathbb{R}^n$ limito $A \in \mathbb{R}^m$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za $x \in D$ velja:

$$0 < \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - A\| < \varepsilon.$$

Lahko pokažemo, da ima funkcija v točki $a = (a_1, \ldots, a_n)$ limito $A = (A_1, \ldots, A_m)$ natanko tedaj, ko ima funkcija $f_j : D \to \mathbb{R}$, ki slika x v j-to komponento $f(x)$, v a limito A_j.

Definicija 1.7

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v notranji točki $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vse $x \in D$ velja:

$$\|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Preslikava $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v točki $a \in D$, ko velja standarden ε-δ pogoj. Zveznost lahko karakteriziramo tudi z limitami zaporedij. Analogno definiramo enakomerno zveznost. Kot pričakovano je zvezna funkcija na kompaktu enakomerno zvezna.

Trditev 1.8

Preslikava $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kjer je K kompaktna množica, je omejena, doseže maksimum ter minimum, ter v primeru povezanosti K doseže tudi vse vmesne vrednosti.

Vsota, skalarni večkratnik, produkt ter kompozitum zveznih funkcij $D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je zvezna. Projekcija na i-to komponento, ki jo označimo kot π_i, polinomi v n spremenljivkah ter racionalne funkcije v točkah, kjer imenovalec nima ničle, so zvezne funkcije.

Izrek 1.9

Če je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna v točki $a \in D$, je tudi funkcija $f_j : D_j \to \mathbb{R}$, kjer je $f_j : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ ter $D_j = \pi_i(D)$, ki jo dobimo s projekcijo f na eno izmed koordinatnih osi, zvezna funkcija v a_j.

Primer 1.10

Zveznost funkcij posamezne koordinate ne implicira zveznosti večdimenzionalne funkcije. To ilustrira naslednji primer:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dokaz. f je zvezna na $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Poglejmo še komponentni funkciji $f(x,b)$ ter $f(a,y)$. Če je eno izmed števil a, b enako 0 je po definiciji $f(x,y)$ tedaj komponentna funkcija ničelna, ki je zvezna. Če sta obe izmed spremenljivk a, b neničelni pa sta projekciji prav tako zvezni. Da $f(x,y)$ ni zvezna pa lahko vidimo, saj je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x) = 1 \neq 0 = f(0,0)$. $\square$

Nasvet

Če limita funkcije v $\mathbb{R}^n$ obstaja, potem je neodvisna od »poti«, po kateri se približujemo tej točki. V zgornjem primeru vidimo, da ob izbiri poti, ki je premica $x = y$ dobimo protislovje.

Žal pa obrat zgornjega nauka ne velja - če limita obstaja po vseh premicah, ki potekajo skozi dano točko to še ne pomeni, da dejansko obstaja. To pokaže naslednji primer

Primer 1.11

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{če } x^4+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{če } x = y = 0 \end{cases}$$

ki ima ničelno limito v $(0,0)$ po vsaki premici $x = \alpha t$ ter $y = \beta t$, obenem pa je v vsaki točki oblike (t, t^2) različna od 0.

1.3.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

$F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kjer je

$$f : x \mapsto [f_1(x), \dots, f_m(x)]^T$$

Vidimo, da F določa m funkcij n spremenljivk.

Trditev 1.12

Naj bo $a \in D \subset \mathbb{R}^n$. Naj bo $F = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$. Preslikava F je zvezna v a natanko tedaj, ko so $f_1, \dots, f_m$ zvezne v a.

Dokaz. Dokaz je standarden. $\square$

Zgornji izrek nam omogoča, da se pri zveznosti omejimo le na funkcionale.

Lema 1.13: Linearne preslikave so omejene

Naj bo $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Trdimo, da obstaja $M \geq 0$, da za vse $x \neq 0$ velja

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M.$$

Pravzaprav je **omejenost linearne preslikave ekvivalentna njeni zveznosti**.

Oris dokaza. $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\| < \infty$, kjer enakost sledi po homogenosti A, neenakost pa po zveznosti linearnih preslikav (kar z lahkoto preverimo) ter kompaktnostni sfere v $\mathbb{R}^m$. Ker je količina $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ končna lahko definiramo $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, ki je dejansko norma na $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Ekvivalenca je iz desne v levo očitna, iz leve v desno pa jo implicira to, da je linearna preslikava zvezna natanko tedaj, ko je zvezna v 0, tam pa je zvezna, ker je Lipschitzova. $\square$

Naj bo $f : D \subseteq R^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava, ki slika $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ v $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m^(x)]^T$. Potem imenujemo funkcijo $f_j : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ki slika $x \in \mathbb{R}^n$ v $\pi_j \circ (x) = f_j(x)$ j**- ta komponenta funkcija**.

1.4 Odvod in diferencial

1.4.1 Parcialni odvod in diferenciabilnost funkcij

Iz Analize 1 vemo, da je odvod neka limita, diferenciabilnost pa poda neko afino aproksimacijo. To podedujemo.

Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ notranja točka D. Sledi, da obstaja tak $r > 0$, da so $(a_1, \dots, a_j - r, \dots, a_n)$ ter $(a_1, \dots, a_j + r, \dots, a_n)$ znotraj D.

Definicija 1.14

Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *parcialno odvedljiva* po spremenljivki x_j v točki $a = (a_1, \dots, a_n)$, če obstaja limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)}{h},$$

oziroma, če je naslednja funkcija odvedljiva v točki a_j

$$x_j \mapsto f(a_1, \dots, x_j, \dots, a_n).$$

Odvod v točki a po spremenljivki x_j označimo kot:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{ali} \quad f_{x_j}(a)$$

Vse elementarne funkcije so parcialno odvedljive, po vseh spremenljivkah, povsod kjer so definirane.

Definicija 1.15

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ter a notranja točka D. f je *diferenciabilna*, v točki a, če obstaja tak linearen funkcional $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da velja:

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0$$

Če tak L obstaja, je seveda enolično določen, kar pomeni, da lahko govorimo o diferencialu funkcije v določeni točki. Diferencial funkcije f v točki a označujemo kot $L = (Df)(a)$ ali kar (Dfa).

Trditev 1.16

Če je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciabilna v notranji točki $a = (a_1, \dots, a_n)$, potem f zvezna v točki a ter je f v a parcialno odvedljiva po vseh spremeljivkah.
Pri tem velja, da je za $h = (h_1, \dots, h_n)$:

$$(Dfa)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Opomnimo, da ker linearni funkcional zapišemo kot $1 \times n$ matriko, ter vektor kot $n \times 1$ matriko, potem izračun linearnega funkcionala ustreza »skalarnemu produktu« vrstice in stolpca. Zapišemo:

$$(Dfa) = [\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)] \quad \text{ter} \quad \vec{h} = [h_1, \dots, h_n]^T,$$

ter

$$(Dfa)(h) = (Dfa)^T \cdot \vec{h}.$$

Oris dokaza. Zveznost f v a je očitna. Naj bo $L = (l_1, \dots, l_n)$ ter $h = (h_1, 0, \dots, 0)$, kjer $h_1 \neq 0$. Sledi:

$$f(a+h) = f(a) + l_1 h_1 + o(h) \implies \frac{f(a+h) - f(a)}{h_1} = l_1 + \frac{o(h)}{h_1},$$

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h_1} = l_1.$$

Analogen postopek dokaže odvedljivost tudi v ostalih komponentah $\square$

Primer 1.17

Ali je funkcija, ki je parcialno odvedljiva v vseh spremenljivkah tudi diferenciabilna v dani točki? Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ta funkcija je parcialno odvedljiva v obeh spremenljivkah. Velja $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ ter $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Ker pa funkcija f ni niti zvezna v $(0,0)$, ne more biti tam diferenciabilna.

Primer 1.18

Opazujmo še

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y}{x^2+y^2};\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0;\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

f je gotovo zvezna v $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Če zapišemo v polarnih koordinatah je

$$f(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi))=\begin{cases}2r\cos(\varphi)^2\sin(\varphi); r>0\\ 0; r=0\end{cases}$$

Ni težko preveriti, da je f parcialno odvedljiva povsod v obeh spremenjivkah. Če bi bila f diferenciabilna v $(0,0)$ bi bil $df_{(0,0)}=[0,0]$. Toraj bi moralo veljati, da je

$$f(h,k)=f(0,0)+df_{(0,0)}[h,k]^T+o(h,k).$$

Ker sta prva dva sumanda ničelna je $f(h,k)=o(h,k)$. Sledi, da naj bi bilo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|2r\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)|}{r},$$

kar je protislovno.

Izrek 1.19

Naj bo $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funkcija in naj bo $a\in D$ notranja točka. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremeljivkah v okolici točke a in so parcialni odvodi zvezni v a. Tedaj je f diferenciabilna v a.

Oris dokaza. Dokažemo za $n=2$, saj profesor trdi, da je dokaz v splošnem analogen. Naj bo $a=(a,b)$ ter (h,k) tak, da je $\|(h,k)\|\leq\varepsilon$. Sledi

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)-f(a,b)&=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)+f(a,b+k)-f(a,b)=\\&=f_x(a^*,b+k)\cdot h+f_y(a,b^*)\cdot k=f_x(a,b)\cdot h+\epsilon_1(h,k)+f_y(a,b)\cdot k+\epsilon_2(h,k)=\\&=f_x(a,b)\cdot h+f_y(a,b)\cdot k,\end{aligned}$$

kjer druga enakost sledi po dvakratni uporabi Lagrangevega izreka, tretja pa po zveznosti parcialnih odvodov. □

1.4.2 Višji parcialni odvodi

Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija in je D odprta. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na D. Sledi, da so $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ tudi funkcije n spremenljivk, Tudi te so lahko parcialno odvedljive.

Preprosti zgled poda domnevo, da je $(f_x)_y = (f_y)_x$. *Mešani odvodi so enaki* oz. *operatorji odvoda komutirajo.*

Izrek 1.20

Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ parcialno odvedljiva po spremenljivkah x_j in x_k v okolici točke $a \in \mathbb{R}^n$. Naj sta parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ter $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ zvezna v okolici točke a ter sta prav tako $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ ter $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ obstoječa ter zvezna v okolici a. Potem sta odvoda v točki a enaka:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).$$

Oris dokaza. Dovolj je dokazati za funkcije dveh spremenljivk, saj pri parcialnem odvajanju vzamemo vse ostale spremenljivke za konstante. Definiramo

$$J = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$$

ter

$$g(x) = f(x, b+k) - f(x, b) \implies J = g(a+h) - g(a).$$

Po Lagrangevem izreku obstaja točka x^* med a in $a+h$, da velja $J = g'(x^*)h = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, b+k) - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, b)$, po ponovni uporabi Lagrangevega izreka dobimo

$$J = hk \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^*, y^*).$$

Enak postopek ponovino na funkciji

$$p(y) = f(a+h, y) - f(a, y) \implies J = p(b+k) - h(b),$$

ter dobimo $J = hk \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^{**}, y^{**})$. Ker smo izbrali neničelna h, k za ustrezno majhen $\sqrt{h^2 + k^2}$ velja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^{**}, y^{**}).$$

Ker pa smo predpostavili, da sta $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ter $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ zvezna, sledi želena enakost. □

1.4.3 Diferenciabilnost preslikav

Definicija 1.21

Naj bo $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava ter $a \in D$ notranja točka. F je *diferenciabilna* v a, če obstaja linearna preslikava $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da velja

$$F(a+h) = F(a) + L \cdot h + o(h), \text{ kjer } \lim_{h\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Z analognim argumentom kot pri zveznosti pokažemo, da je diferenciabilnost preslikave F v a ekvivalentna diferenciabilnosti m-koordinatnih funkcij v točki a

Trditev 1.22

$f : D \to \mathbb{R}^m$ je diferenciabilna v točki $e \in D$, natanko tedaj, ko so diferenciabilne komponentne funkcije $f^i(x) : D \to \mathbb{R}$, za katere velja:

$$f^i(x) = \pi_i \circ f(x)$$

Podobno lahko pokažemo, da če so komponentne funkcije parcialno odvedljive v a po vseh spremenljivkah ter so parcialni odvodi zvezni v a, potem je f diferenciabilna v a.

Naloga 1.23

Tangentna ravnina na graf funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki (x_0, y_0) je določena z enačbo

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Tako je prazvaprav podana s točko $f(x_0, y_0)$ ter normalnim vektorjem

$$[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1]^T.$$

Trditev 1.24: Jacobijeva matrika

Matrika linearne preslikave $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ iz definicije diferenciabilnosti preslikav je oblike:

$$L = (Df)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Kot trivialna posledica trditve 1.4.3 sledi, da če so vse komponentne funkcije preslikave

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah, ter so parcialni odvodi zvezni, potem diferencial obstaja.

Trditev 1.25

Če je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciabilna v točki a ter je $g : D' \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ diferenciabilna v točki $f(a)$, potem je $g \circ f$ diferenciabilna v a ter velja:

$$(Dg \circ f)(a) = (Dg)(f(a)) \cdot (Df)(a)$$

Dokaz. Dokaz je standarden. $\square$

Kot zanimivost omenimo, da lahko na prostoru matrik definiramo normo $\|A\| = \sqrt{\sum a_{i,j}^2}$, kjer vsota teče po vseh členih. Upoštevajoč Cauchy-Schwartzevo neenakost lahko pokažemo, da je $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, kar nam omogoča, da npr. izračunamo diferencial preslikave $X \mapsto X^2$ na prostoru kvadratnih matrik v poljubni matriki.

1.5 Implicitna in inverzna preslikava

1.5.1 Inverzna preslikava

Definicija 1.26

- Preslikavi pravimo $\mathcal{C}^1$, če so vsi parcialni odvodi vseh koordinatnih funkcij zvezni na definicijskem območju.
- Preslikava je *difeomorfizem*, če je obrnljiva diferenciabilna preslikava katere inverz je diferenciabilna preslikava.

Primer 1.27

Funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana z $F : x \mapsto x^3$ je $\mathcal{C}^1$ ter ima globalen inverz, a ta ni zvezen v 0.

Izrek 1.28: O inverzni preslikavi

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ odprta množica in $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ razreda $\mathcal{C}^1$. Naj bo $a \in \Omega$ in naj bo $(Df)(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ izomorfizem (obrnljiva matrika). Potem obstaja okolica $\mathcal{U}$ točke a ter okolica $\mathcal{V}$ točke $f(a)$, da je $f\,|_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ difeomorfizem.

Po znanem postopku dokažemo, da je

$$\Big(D((f\,|_{\mathcal{U}})^{-1})\Big)(y) = \Big((Df\,|_{\mathcal{U}})(f^{-1}(y))\Big)^{-1}$$

Velja, da je Φ^{-1} lokalni inverz.

Komentar 1.29

V točkah (a, b), kjer je $(Df)(a, b) = 0$ f ne more biti lokalni difeomorfizem, saj diferencial odvoda ne more biti definiran.

Naloga 1.30

Denimo, da imamo preslikavo $F : (x, y) \mapsto (p_1(x, y), p_2(x, y)$, kjer sta p_1 in p_2 polinoma v dveh spremenljivkah. Kakšna je povezava med točkami (a, b), v katerih F ni lokalni difeomorfizem ter rešitvami sistema enačb $F(x, y) = F(a, b) = (C_0, D_0)$?

Rešitev. V 2-D primeru v točki (a, b) F ni lokalni difeomorfizem, če je determinanta matrike $\begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial p_1}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial p_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial p_2}{\partial y}(a,b) \end{bmatrix}$ ničelna. Sledi, da sta vrstici linearno odvisni. Obenem imamo sistem:

$$p_1(x,y) = C_0 \implies \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$
$$p_2(x,y) = D_0 \implies \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Ker sta vrstici matrike linearno odvisni je zgornji sistem »underdetermined«, zato nimamo enolične rešitve za sistem. □

Izrek 1.31: Hadamardov izrek o globalnem inverzu

Naj sta M_1 ter M_2 gladki povezani n-dimenzionalni mnogoterosti. Če je $f : M_1 \to M_2$ $\mathcal{C}^1$ funkcija ter je:

- f je *proper*.
- Jacobijeva matrika f je povsod obrnljiva.
- M_2 je *simply connected*.

Potem je f homeomorfizem ter zato globalno obrnljiva.

Komentar 1.32

Posebni primer zgornjega relativno naprednega izreka je sledeče: Če je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gladka preslikava, ki ima povsod obrnljivo Jacobijevo matriko, ter je f *proper.*, potem je f homeomorfizem - ima gladek globalen inverz.
Preslikava med topološkima prostoroma je *proper*, če je praslika kompaktne množice prav tako kompaktna. Za metrične prostore je to ekvivaletno temu, da za vsako zaporedje $\{x_n\}$ ki pobegne proti neskončnosti (v vsakem kompaktu je kvečjemu končno mnogo členov $\{x_n\}$), tudi zaporedje $\{f(x_n)\}$ pobegne proti neskončnosti.

1.5.2 Implicitna funkcija

Če imamo sistem enačb:

$$\begin{aligned}\alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n + \beta_{1,1}y_1 + \cdots + \beta_{1,m}y_m &= 0\\ \vdots &= 0\\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n + \beta_{m,1}y_1 + \cdots + \beta_{m,m}y_m &= 0\end{aligned}$$

je rešljivost slednjega za vsako izbiro vektorja $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ odvisna od neničelnosti determinante matrike: $\begin{bmatrix}\beta_{1,1} & \ldots & \beta_{1,m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_{m,1} & \ldots & \beta_{m,m}\end{bmatrix}$ saj je sistem ekvivalenten

$$[\alpha_{ij}]x + [\beta_{ij}]y = 0 \implies y = -[\beta_{ij}]^{-1}[\alpha_{ij}]x$$

Motivira nas iskanje rešitev *nelinearnih* sistemov enačb. Denimo, da imamo zadosti lepo funkcijo $f(x, y)$ ter enačbo $f(x, y) = 0$. Želeli bi graf točk, ki zadoščajo enačbi v okolici poljubne točke (a, b) zapisali kot graf funkcije $y = \varphi(x)$. Geometrijski razmislek pove, da v primeru $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ to ne bo vedno mogoče. Iščemo zadosten pogoj za obstoj take funkcije.

Izrek 1.33: Osnovna oblika izreka o implicitni funkciji

Naj bo D odprta podmnožica $\mathbb{R}^2$ ter $(a, b) \in D$. Naj bo $f \in \mathcal{C}^1(D)$ ter velja:

- $f(a, b) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$

Sledi, da obstaja $\delta > 0$ ter $\varepsilon > 0$, da je $(a - \delta, a + \delta) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = I \times J \subseteq D$, ter da obstaja enolično določena $\mathcal{C}^1$ funkcija $\varphi : I \to J$, za katero velja:

- $\varphi(a) = b$
- $\forall\, (x, y) \in I \times J$ je $f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$.

Sledi, da so rešitve enačbe znotraj pravokotnika natanko točke grafa $y = \varphi(x)$. Ker je

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \implies \varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

Definicija 1.34

Naj bo $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda $\mathcal{C}^1$. Če je preslikava $x \mapsto F(x, y)$ odvedljiva za nek fiksen $y \in \mathbb{R}^m$, potem označimo njen odvod kot

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = (D_x F))(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Če je $f : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$, potem je

$$(D_x f)(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a, b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a, b) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a, b) \end{bmatrix}$$

ter analogno za $(D_y f)(a, b)$. Sledi, da je

$$(Df)(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a, b) & \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_m} \end{bmatrix}$$

Izrek 1.35: Izrek o implicitni funkciji

Naj bo $D^{\text{odp.}} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ter $(a, b) \in D$. Naj bo $F : D \to \mathbb{R}^m$ razreda $\mathcal{C}^1(D)$ ter:

- $F(a, b) = 0$
- $\det((D_y f)(a, b)) = \det(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)) \neq 0$,

potem obstaja okolica U točke a ter okolica V točke b, da je $U \times V \subseteq D$ ter taka enolično določena $\mathcal{C}^1$ preslikava $\varphi : U \to V$, da velja:

- $\varphi(a) = b$
- $\forall (x, y) \in U \times V$ je $F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$
- $(D\varphi)(x) = -(D_y f)(x, y)^{-1} \circ (D_x f)(x, y)$ v ustrezno majhni okolici (a, b).

Dokaz. Dokažemo ga z uporabo izreka o inverzni preslikavi. □

Izrek nam pove naslednje: Če imamo m funkcij $n+m$ spremenljivk in želimo rešiti sistem enačb

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ \vdots &= 0 \\ f_m(x_1, \dots, xn, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

za spremenljivke $y_1, \dots, y_m$ - želimo izraziti vsak y_j kot funkcijo spremenljivk $\{x_i\}_{1 \le i \le n}$. Če so vse $\{f_i\}_{1 \le i \le m}$ v okolici točke (a, b) razreda $\mathcal{C}^1$ ter velja $f_i(a, b) = 0$ za vse i in je

$$(D_2 f)(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(a, b) \end{bmatrix}$$

obrnljiva, potem obstajata okolici U točke a ter okolica V točke b, da za vsak $(x_1, \dots, x_n) \in U$ obstaja natanko en $(y_1, \dots, y_m) \in V$, ki reši želeni sistem enačb. Funkcije, $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, ki točki $(x_1, \dots, x_n)$ priredijo koordinato $y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, pa so prav tako razreda $\mathcal{C}^1$.

1.5.3 Vaje

Naj bosta $x \in \mathbb{R}^m$ in $y \in \mathbb{R}^n$ ter preslikava $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Enakost $f(x, y) = 0$ določna n enačb. Če je f razreda $\mathcal{C}^{r \ge 1}$. Želimo izraziti y kot funkcijo x (ali ekvivalentno vsakega izmed y_j kot funkcijo komponent vektorja x). Izrek o implicitni funkciji nam pove, da v primeru $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)) \neq 0$, kjer je $\frac{\partial f}{\partial y}$ desni $n \times n$ blok $n \times m$ matrike $(Df)(a, b)$, taka $\mathcal{C}^r$ funkcija φ obstaja.

1.6 Gladke podmnogoterosti

Motivira nas koncept krivulje v $\mathbb{R}^2$, ki jo lahko razumemo na več načinov: graf funkcije, množica ničel funkcije ali pa pot (preslikava $f : I \to \mathbb{R}^2$).

Mnogoterost bomo definirali kot analog druge definicije krivulje zgoraj, nato pa pokazali povezavo med temi različnimi perspektivami.

Naloga 1.36

Naj bo S zaprta množica v $\mathbb{R}^n$ ter $f : x \mapsto d(x, S)$, kjer je razdalja evklidska. Pokaži, da je f zvezna ter $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} = S$.

Ker ne želimo, da so vse zaprte množice mnogoterosti, je naslednja definicija naravna.

Definicija 1.37

Točka $a \in \mathbb{R}^p$ je *regularna* točka funkcije $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, če je f $\mathcal{C}^1$ na okolici a ter je $(Df)(a)$ največjega možnega ranka ($\min\{p, q\}$).

Če je $p < q$ je $(Df)(a)$ injektivna, če pa je $q < p$ pa je $(Df)(a)$ surjektivna.

Definicija 1.38

Gladka podmnogoterost dimenzije m v prostoru $\mathbb{R}^n$ je množica M z naslednjo lastnostjo: za vsak $a \in M$ obstaja funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$, ki je regularna na okolici $\mathcal{O}$ točke a, ter velja, da je

$$M \cap \mathcal{O} = \{x \mid F(x) = 0\} \cap \mathcal{O}.$$

V okolici točke a je M tako množica ničel neke regularne funkcije.

Primer 1.39

Če je $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ razreda $\mathcal{C}^1$ na odprti množici $\mathcal{O}$, potem je graf te funkcije gladka m-dimenzionalna podmnogoterost.

Dodatek

A Norme na matrikah

Definicija A.1

Kot v prvem poglavju definiramo naslednjo normo na matrikah:

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Oris dokaza. Ker so linearne preslikave zvezne (hitro dokažemo po definiciji) ter ker je enotska sfera kompaktna sledi, da funkcija $x \mapsto \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ manjša od neke realne konstante, kar je bilo treba dokazati. Pozitivna definitnost ter homogenost norme sta očitni, trikotniška neenakost pa sledi po naslednjem razmisleku:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|(A+B)Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|}\right) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}.$$

$\square$

Trditev A.2

$$\|AB\| < \|A\| \, \|B\| \, .$$

Kot vemo, norma inducira metriko. Sledi, da lahko govorimo o prostoru matrik kot o metričnem prostoru. Velja:

Trditev A.3

- Če je $A \in \mathrm{GL}_n(X), B \in \mathcal{L}(X)$ ter je

  $$\|A - B\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

  potem je $B \in \mathrm{GL}_n(X)$. V posebnem primeru je $\mathrm{GL}_n X$ odprta.
- Preslikava $A \mapsto A^{-1}$ je zvezna.

Trditev A.4

$$\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \leq n \cdot \|A\| \, .$$

Oris dokaza. Upoštevajoč Cauchy-Schwartzevo neenakost velja:

$$\|Ax\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_j)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left((\sum_{j=0}^{n} a_{ij}^2)(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)\right) < \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)\|x\|^2 .$$

Druga neenakost sledi po opazovanju največjega elementa matrike. □

Topologija prostora $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ je enaka, če uporabimo operatorsko normo na $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ali pa evklidsko normo na $\mathbb{R}^{n2}$.

Literatura

[1] dr. Kennan T. Smith. *Primer of modern analysis*. 1971. URL: https://archive.org/details/primerofmodernan0000smit/mode/2up.

[2] prof. dr. Miran Černe. *Predavanja iz Analize 2a*. 2025.

[3] dr. Vladimir Zorich. *Mathematical Analysis 1*. 2002. URL: https://zr9558.com/wp-content/uploads/2013/11/mathematical-analysis-zorich1.pdf.

[4] dr. Vladimir Zorich. *Mathematical Analysis 2*. 2002. URL: https://zr9558.com/wp-content/uploads/2013/11/mathematical-analysis-zorich2.pdf.