Hevristika

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

16. november 2025

Prehod na reševanje nalog iz matematičnih olimpijad zna biti za dijaka, ki je v takoimenovani šolski matematiki blestel, nekoliko travmatičen. Namen teh zapiskov je zmanjšati to bereme, tako da bralca opremimo z nekaterimi osnovnimi principi reševanja nalog, ki so uporabni ne zgolj pri specifični temi, temveč v splošnem.

Za vse napake ter netočnosti je odgovoren avtor sam. Če imate vprašanje ali popravek se obrnite na e-poštni naslov zgoraj.

Zahvaljujem se Luku Horjaku za pomoč pri urejanju ter mnoge nasvete.

Guttae cadentes excavant lapidem;
sic etiam mores hominum, si
continuentur, mutantur.

Padajoča kaplja izdolbe kamen; tako tudi človeka, če vztraja, spreminja navada.

Plinij starejši

Kazalo

1 O tem izočku

V matematičnem kontekstu se beseda hevristika nanaša na neformalne razmisleke, ki nas vodijo do domnev ter morebitnih poti do rešitve problema. Cilj tega izročka je bralko oziroma bralca opremiti z nekaterimi osnovnimi hevrističnimi razmisleki, ki so uporabni pri reševanju skoraj vseh nalog, ki se pojavljajo na matematičnih tekmovanjih.

Specifične načine uporabe hevristik bomo ilustrirali na nalogah. Četudi je bralka oziroma bralec seznanjena z rešitvami predstavljenih nalog svetujem, da si rešitve prebere. Cilj namreč ni, da bi pokazali specifične izreke in tehnike, ki jih potrebujemo za reševanje nalog, temveč predstaviti miselni proces, ki naravno vodi do rešitve naloge.

Splošneje prav tako predlagam, da se med branjem izročkov, poslušanjem predavanj ter reševanjem nalog ne osredotočate samo na predstavljene izreke in trditve, temveč tudi na manj oprijemljive pojme, kot so v katerih kontekstih so te uporabni, ter kako videti, da nek pristop ne more voditi do rešitve.

2 Splošne smernice

Pri reševanju nalog iz olimpijad se bomo brez dvoma znašli v situaciji, ko nimamo nobene ideje kako bi dokazali želeno, prav tako pa povrhu nimamo niti nobenih teoretičnih orodij, na katere bi se lahko obrnili v naši stiski. Kaj naredimo tedaj? Delni odgovor na to vprašanje ponuja György Polya v svoji knjigi »How to solve it« [2]:

Nasvet : Polya

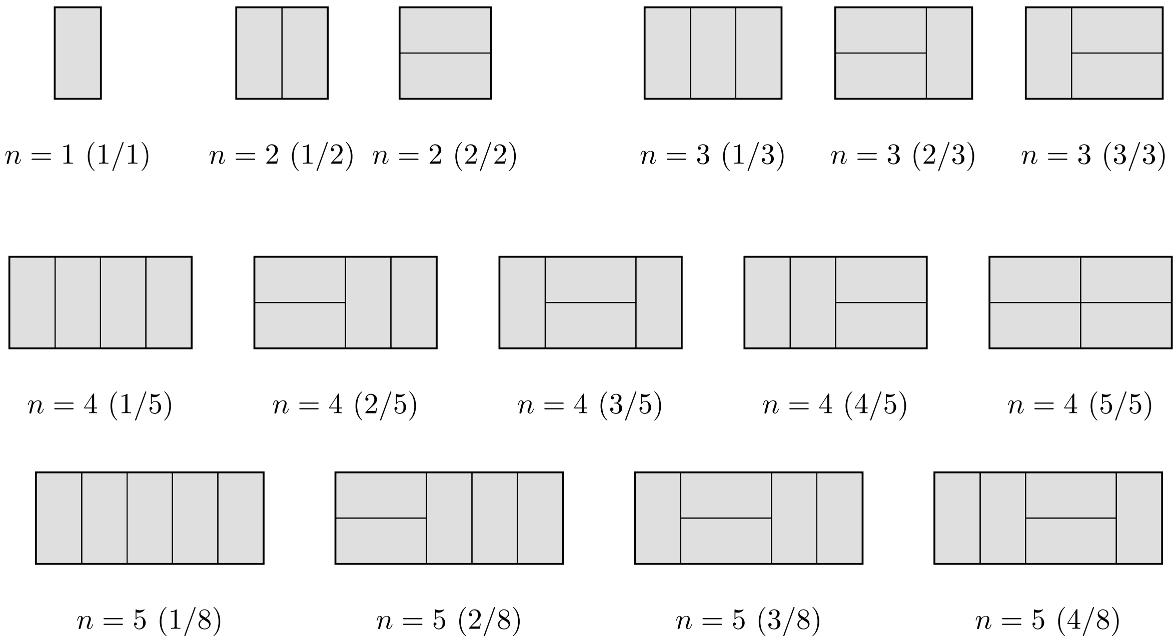
- Obravnavaj majhne oz. specifične primere
- Obravnavaj lažjo obliko problema, ki jo znaš rešiti.
- Nariši diagram
- Si že rešil podoben problem? Poizkusi povezati dani problem z preteklimi.

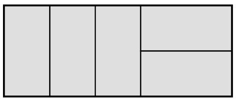
Zgornji seznam je daleč od celovitosti, a je dobra osnova za začetek. Tekom matematičnega izobraževanja bomo pridobili še druge prijeme, ki ji lahko uporabimo v situaciji opisani zgoraj. Bralcu svetujem naj te prijemi ne ostanejo zgolj na podzavestnem nivoju, temveč jih poiskusi ubesediti ter zavestno dodati zgornjim.

Vsaj prvi dve točki zgornjega nasveta si zaslužita dodatna pojasnila. Na primeru pokažemo uporabnost prve točke.

Naloga 2.1. *Naj bo a_n število načinov, kako lahko tlakujemo pravokotnik dimenzije $2 \times n$ s tlakovci dimenzije 2×1. Določi formulo za a_n.*

Rešitev. Narišimo si možna tlakovanja za $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

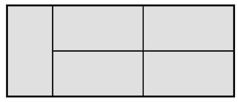




$n = 5$ (5/8)

$n = 5$ (6/8)

$n = 5$ (7/8)

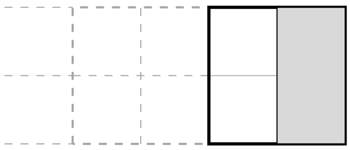


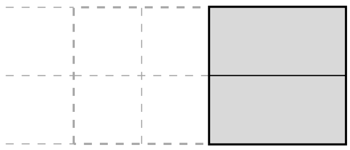
$n = 5$ (8/8)

Ugotovili smo, da je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$ ter $a_5 = 8$. Primeri $n \in \{1, 2, 3\}$ bi nas lahko zavedli do domneve, da je $a_n = n$, k sreči pa je to (napačno) domnevo porušila ugotovitev $a_4 = 5$. Zaporedje števil $(1, 2, 3, 5, 8 \ldots)$ nas morda spomni na Fibonaccijeva števila F_n, definirana kot $F_0 = F_1 = 1$ ter $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Prišli smo do domneve, da je $F_n = a_n$.

Ker so Fibonaccijeva števila definirana preko rekurzivne zveze bi morda poiskusili rešiti nalogo z rekurzijo. Glede na to, da rekurzivna zveza, ki definira Fibonaccijeva števila, poveže število F_{n+2}, ki po naši domnevi opisuje število tlakovanj pravototnika $2 \times (n+2)$, s številoma F_{n+1} in F_n, ki naj bi opisovali tlakovanja pravokotnikov $2 \times (n+1)$ ter $2 \times n$, poiskusimo najti povezavo med tlakovanji pravokotnika $2 \times (n + 2)$ ter pravokotnikov $2 \times (n + 1)$ in $2 \times n$.

Opazujmo tlakovanje v skrajno desnem 2×2 kvadratku pravokotnika $2 \times (n + 2)$. Do opazovanja točno tega dela pravokotnika nas je privedla domneva o povezavi med tlakovanji pravokotnika $2 \times (n+2)$ in tlakovanji pravokotnikov $2 \times (n+1)$ ter $2 \times n$, ki je sama osnovana na podlagi domneve $a_n = F_n$.





Imamo le dve možnosti, bodisi 2×1 tlakovec pokriva skrajno desen 2×1 del pravokotnika dimenzije $2 \times (n+2)$, bodisi dva horizontalno orientirana tlakovca 1×2 pokrivata skrajno desni 2×2 kvadrat pravokotnika dimenzije $2 \times (n + 2)$.

Pri prvi možnosti je preostali del pravokotnika dimenzije $2 \times (n + 1)$. Število načinov tlakovanja tega je a_{n+1}. Pri drugi možnosti je presotali del pravokotnika dimenzije $2 \times n$, katerega lahko tlakujemo na a_n načinov. Sledi, da je $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, kar smo želeli pokazati. □

Komentar 1. Na podlagi opazovanja majhnih primerov smo prišli do domneve $a_n = F_n$, kjer so F_n Fibonaccijeva števila. Ker za Fibonaccijeva števila velja specifična rekurzivna zveza, ki poveže F_{n+2} z F_{n+1} in F_n smo prišli do ideje, da bi opazovali skrajno desni del pravotkonika $2 \times (n + 2)$ ter ga poiskusili povezati s tlakovanji pravokotnikov dimenzij $2 \times (n + 1)$ ter $2 \times n$.

Kaj pa je mišljeno s specifičnimi primeri? V kombinatoričnem kontekstu je to najpogosteje *ekstremni element*, ki je element neke množice, ki je na določen način največji ali najmanjši.

Naloga 2.2. *V razredu je nekaj ljudi prijateljev. Predpostavljamo, da če je a prijatelj b je tudi b prijatelj a. Pokaži, da obstajata dva dijaka, ki imata enako število prijateljev.*

Rešitev. Recimo, da je v razredu n dijakov. Kaj so tedaj možna števila prijateljev, ki jih lahko ima dijak? Število prijateljev dijaka je večje ali enako 0 ter manjše od n. Res lahko obstaja dijak z 0 prijatelji, kaj pa dijak z n prijatelji? Ta ne more obstajati, saj je ostalih dijakov le $n-1$, človek pa (žal) ne more biti sam svoj prijatelj. Sledi, da je največje možno število prijateljev dijaka $n-1$ in dijak z $n-1$ prijatelji resnično obstaja.

Želeli bi pokazati, da obstajata dva dijaka z istim številom prijateljev. Dijakov je n, možna števila prijateljev pa so $0, 1, \cdots, n-1$. Ker je možnih števil prijatljev n ne moremo zaključiti, da taka dijaka obstaja, če pa bi bilo le $n-1$ možnih števil prijatljev bi bila naloga praktično rešena. V zagato nas pravzaprav spravljata ekstremna elementa - dijak brez prijatljev ter dijak, ki je prijatelj z vsemi.

Ali res lahko oba obenem obstajata? Če ne bi, bi bila naloga rešena. Taka dijaka res ne moreta sočasno obstajati, saj je dijak, ki je prijatelj z vsemi prijatelj tudi z dijakom, ki nima prijateljev. To pa ni mogoče, saj slednji nima prijateljev, mi pa predpsotavljamo da je prijateljstvo simetrično. Ker ne moreta hkrati obstajati dijaka z 0 ter $n-1$ prijatelji je ne glede na situaciji le $n-1$ različnih števil prijateljev, ki jih imajo lahko dijaki. Ker je dijakov n po Dirichletovem principu obstajata dijaka z istim številom prijateljev.

□

Načelo ekstremnega elementa je uporabno tudi pri naslednji nalogi, rešitev katere prepuščamo bralki oziroma bralcu.

Naloga 2.3. *Profesor na tablo napiše nekaj naravnih števil. Dijakom je dovoljeno, da iz table izbrišejo števili a in b, ter namesto nju napišejo $|a-b|$. Pokaži, da lahko dijaki dosežejo, da so na tabli napisana sama enaka števila.*

Kako pa bi analizirali specifični primer v kontekstu teorije števil?

Naloga 2.4. *Določi formulo za število pozitivnih deliteljev $\tau(n)$ naravnega števila n.*

Rešitev. Analizirajmo najprej primer, ko je $n = p$ praštevilo. Tedaj ima n samo dva pozitivna delitelja, namreč 1 in p. Kaj pa, če je $n = p^k$ potenca praštevila? Možni delitelji so tedaj $\left\{1, p, p^2, \ldots, p^k\right\}$, katerih je $k+1$.

V primeru, ko je $n = pq$ produkt praštevil so delitelji štirje, namreč $\{1, p, q, pq\}$.

V primeru, ko je $n = p^k q$ je deliteljev $2(k+1)$, namreč $\left\{1, p, p^2, \ldots, p^k\right\} \cup \left\{q, pq, p^2q, \ldots, p^kq\right\}$.

Raziskovanje specifičnih primerov nas vodi do domneve, da je

$$\tau(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}) = (k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_m+1).$$

Domneva je resnična. Na podlagi obravnavanih specifičnih primerov se spomnimo na osnovni izrek aritmetike - vsako naravno število lahko zapišemo kot produkt potenc praštevil. Obenem opazimo, da je vsak delitelj d naravnega števila $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$ oblike

$$d = p_1^{\ell_1} p_2^{\ell_2} \ldots p_m^{\ell_m},$$

kjer je vsak izmed ℓ_i med 0 in k_i.

Za eksponent praštevila p_i v razcepu delitelja d imamo tako $k_i + 1$ različnih izbir - vsa cela števila med 0 in k_i. Obenem dve različni izbiri potenc praštevil v razcepu delitelja d podata dva različna delitelja.

Sledi, da je število deliteljev n res $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_m + 1)$. $\square$

S podobnimi postopnimi razmisleki kot zgoraj reši naslednjo nalogo.

Naloga 2.5. *Določi formulo za vsoto pozitivnih deliteljev $\sigma(n)$ naravnega števila n.*

Komentar 2. Zgornja dva primera iz teorije števil demonstrirata moč obravnavanja specifičnih primerov, obenem pa pokažeta tudi uporabnost tega, da rešimo lažjo obliko problema, kot je na primer ko naravno število zamenjamo s praštevilom ali s potenco praštevila. Lažjo obliko problema lahko dobimo tudi na druge načine. Danim predpostavkam lahko dodamo predpostavke, za katere sumimo, da so resnične, ter problem nato rešimo z uporabo dodatnih predpostavk. Na diagramu geometrijske konfiguracije bi lahko na primer opazili dve premici, ki zgledata sumljivo vzporedni. Nato bi lahko poiskusili rešiti problem z dodatno predpsotavko vzporednosti.

2.1 O indukciji

Indukcija je eno izmed najbolj uporabnih orodij na matematičnih tekmovanjih. Do te ugotovitve ste brez dvoma že prišli sami, rad pa bi izpostavil nekaj, kar ni vedno omenjeno na predavanju iz indukcije.

Denimo, da želimo dokazati neko trditev za vsa naravna števila n. V dokazu z indukcijo pokažemo bazo, privzamemo trditev za naravno število n ter jo dokažemo za naravno število $n + 1$. Kar nam indukcija omogoča je pravzaprav, da pri dokazovanju trditve za naravno število n brez dodatne »cene« privzamemo, da trditev velja za vse $1 \leq k \leq n$.

To je zelo očiten opazek, do katerega bi lahko gotovo prišli tudi sami. Vrednost te opazke ni v tem, da nam pomaga pri formalnem dokazovanju, temveč pri temu, da ko raziskujemo, kako bi dokazali neko specifično trditev za vse $n \in \mathbb{N}$, lahko brez kakršnekoli izgube splošnosti interno privzamemo, da velja za vsako manjše število. Če naše raziskovanje vodi do rešitve smo lahko gotovi, da jo bomo lahko formalno zapisali z uporabo indukcije.

2.2 Naloge za vajo

Sledi nekaj nalog, ki jih lahko rešite za vajo. Rešitve nalog praviloma ne sledijo procesu reševanja, ki sem ga predstavil v tem poglavju, kar jih za začetnika naredi nekoliko težavnejše. Ne počutite se dolžne rešiti vse izmed nalog, predlagam pa da poiskusite razmisliti o vsaj kakšno.

Predlagam, da poleg sledenja omenjenim smernicam čim pogosteje razmišljate vnazaj; to pomeni, da iščete trditev, ki ni očitna posledica danih podatkov, a je *zadostna* - njena resničnosti bi podala rešitev problema.

Naloga 2.6. *Vsako celo število pobarvamo z eno izmed treh barv: rdečo, modro in zeleno. Pokaži, da obstajata celi števili iste barve, razlika katerih je popolen kvadrat.*

Naloga 2.7. *Pokaži, da ima vsaka podmnožica* $A \subset \{1, 2, \cdots, 10\}$ *s šestimi elementi dve neprazni, disjunktni podmnožici z enako vsoto.*

Naloga 2.8. *Določi vse pare tujih naravnih števil* (a, b)*, da lahko vsako dovolj veliko naravno število zapišemo kot vsoto različnih členov oblike* $a^x \cdot b^y$.

Naloga 2.9. *Naj bo* $S \subset \{1, 2, \cdots, 2n\}$ *z* $n + 1$ *elementi.*

- *Pokaži, da* S *vsebuje dve tuji si števili.*
- *Pokaži, da* S *vsebuje dve števili, eno izmed katerih deli drugo.*

Naloga 2.10 (Jožefov problem). n *ljudi, ki so oštevilčeni od* 1 *do* n*, stoji v krogu. Začenši z osebo* 2 *je vsaka druga oseba izločena, dokler ne ostane le še ena oseba. Tako je najprej izločena oseba* 2*, nato oseba* 4*, itd. Za katere* n *je zadnja oseba številka* 1*?*

Naloga 2.11 (Beatty). *Definirajmo zaporedji* $a_n = \left\lfloor n\sqrt{2} \right\rfloor$ *ter* $b_n = \left\lfloor n\left(2 + \sqrt{2}\right) \right\rfloor$*. Pokaži, da je unija členov* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ter členov* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *celoten* $\mathbb{N}$*, njun presek pa je prazen. Opomba: Za realno število* c *z* $\lfloor c \rfloor$ *označimo največje celo število, ki ne presega* c*.*

Naloga 2.12. *Krog skupaj s svojim robom vsebuje* 7 *točk. Razdalja med katerimakoli dvema točkama je večja ali enaka radiju kroga. Pokaži, da ena izmed točk leži v središču kroga.*

Naloga 2.13. *Garry Kasparov se pripravlja na partijo šaha proti Viktorju Kramniku. Garry ima za pripravo* 77 *dni časa. Kot del svoje priprave bi Garry rad odigral vsaj eno partijo šaha na dan, a skupaj ne več kot* 132 *partij, saj bi se tako lahko preutrudil. Dokaži, da obstaja nekaj zaporednih dni, znotraj katerih Garry odigra natanko* 21 *partij šaha.*

Naloga 2.14. *Ajda ima nekaj kamenčkov, katerih teže so naravna števila. Skupna teža vseh kamenčkov je* 2026*. Ajda ugotovi, da ni mogoče razdeliti kamenčkov na dva kupa z enako težo. Kaj je največje možno število kamenčkov, ki jih Ajda lahko ima?*

3 Druge smernice

Poleg relativno konkretnih smernic v prvem poglavju dodamo še nekaj bolj »mehkih« nasvetov. Te ne povejo točno kaj naj bi počeli, da bi nalogo rešili, a pomagajo pri izločanju nekaterih nekonstruktivnih navad pri reševanju problemov.

Nasvet

- Najpreprostejšo idejo/metodo poiskusi najprej.
- Ne izoliraj ideje brez ustreznega razloga.
- Ne zavrži ideje brez ustreznega razloga.
- Glej naprej. Ali lahko metoda sploh deluje oz. ti lahko pove kaj novega?

Kot vsi dobri nasveti so zgornji na prvi pogled trivialni, čeprav pogosto povzročajo preglavice tekmovalcem in tekmovalkam.

Očitno je, da je najprej smoterno poiskusiti najpreprostejšo idejo oz. metodo, saj ta najverjetneje porabi najmanj časa. Pogosto pa se zgodi, da tekmovalec, ki je ravnokar spoznal neko novo teoretično orodje, kot na primer lemo o dvigu eksponenta ali pa inverzijo, to orodje poiskusi uporabiti pri vseh nalogah, ne glede na kontekst. Na mestu je znani pregovor:

»When all you have is a hammer, everything looks like a nail.«

Pomembno je razumeti v katerih kontekstih so določene metode pogosto uporabne. Lema o dvigu eksponenta je pogosto uporabna, ko analiziramo izraze oblike $a^n \pm b^n$, inverzija pa je najuporabnejša, ko se v nalogi pojavljajo predvsem krožnice, po možnosti take, ki potekajo skozi neko skupno točko. Ne glede na to kako popolna se zdi situacijo za uporabo teoretičnega orodja je vedno smoterno pomisliti za trenutek, ali bi kakšen bolj elementaren premislek lahko podal isti zaključek.

Druga točka nasveta se v angleščini pogosto imenuje *tunnel-visioning*. Pri slednjem gre za to, da se tekmovalec še preden se dodobra spozna z nalogo, odloči, kako jo bo rešil. Če se že takoj po branju navodila odločimo, da bomo nalogo rešili z določeno metodo postane (morda nujna) sprememba pristopa dosti težja.

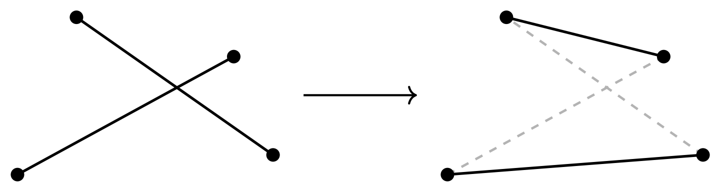
Tretja točka je dualna drugi točki. Navigirati trenje med njima je zahtevno, a dobro ju je vsaj imeti v mislih.

Čeprav je četrta točka samoumevna je vredna pomnenja. Sla do rešitve naloge nas pogosto lahko zavede do poti, ki ne vodi k njej.

Pred leti je bila naslednja naloga del predavanja na temo monovariant ter invariant. Na predavanju je bila predstavljena prva rešitev naloge.

Naloga 3.1. *$2n$ točk je razporejenih v ravnini. Dokaži, da lahko točke povežemo z n daljicami tako, da je vsaka točka povezana z neko drugo točko, ter da se nobeni dve daljici ne sekata.*

Rešitev. Rešitev naloge z monovariantami zgleda približno tako: Če je $n = 1$ je odgovor očiten. Točke povežemo na poljuben način. Poglejmo par križajočih se daljic med štirimi točkami. Daljici lahko »prevežemo« na način, da se ne križata več, a se morda sedaj križata z drugimi daljicami.



Opazimo, da sta novi daljici krajši od starih. Potezo ponavljamo. Dokler obstajata dve daljici, ki se sekata, lahko manjšamo dolžino daljic. Pomembno je opaziti, da obstaja konstanta $\varepsilon > 0$, za katero se pri vsaki potezi zmanjšajo dolžine daljic, ne glede na to kateri dve specifični daljici »razkrižamo«. Ta pozitivna konstanta je v našem primeru enaka najmanjši razliki med dvema stranicama enega izmed vseh trikotnikov, ki jih tvorijo točke.

Seveda pa so dolžine vseh daljic pozitivne. Sledi, da se mora proces na neki točki ustaviti; v nasprotnem primeru bi lahko od pozitivnega števila poljubno mnogokrat odšteli pozitivno konstanto ε in dobili pozitivno število, kar seveda ni mogoče. Ker se proces ustavi natanko tedaj, ko ne obstajata dve daljici, ki se sekata, sledi, da obstaja konfiguracija, v kateri se nobeni dve daljici ne križata. $\square$

Rešitev naloge je razmeroma kreativna; dobiti moramo namreč idejo o »razkrižanju« daljic. Prav tako je nekoliko tehnično okorna, saj moramo utemeljiti obstoj ε. Obstajajo namreč neskončna zaporedja pozitivnih realnih števil, ki jih lahko členoma odštevamo od pozitivne konstante, a nikoli ne dobimo negativnega rezultata; od 2 bi lahko odštevali števila $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Ker je vsota elementov tega zaporedja enaka 1 na vsakem koraku dobimo pozitivno število. Lahko bi se izognili utemeljevanju obstoja ε tako, da bi opazovali konfiguracijo povezav med točkami, ki minimizira vsoto dolžin križajočih se daljic (prepričajte se o tem), a še zmeraj je potrebna ideja razkrižanja.

Naloga ima dosti manj kreativno ter frustrirajoče preprosto rešitev.

Rešitev. Točke razporedimo v verigo po naslednjem pravilu. Izmed vseh točk z največjo y koordinato izberemo tisto z največjo x koordinato ter jo dodamo na prvo mesto verige. Nato to točko izbrišemo iz ravnine ter preko enakega pravila določimo točko, ki jo damo na drugo mesto verige. Postopek ponavljamo dokler v verigi niso vse točke.

Sedaj z daljicami povežemo prvi in drugi element verige, tretji in četrti element verige ter v splošnem $2i-1$-ti in $2i$-ti element verige za $1 \leq i \leq n$. Daljice se ne križajo. V primeru, ko so vse y koordinate točk različne je to očitno, naša konstrukcija pa poskrbi, da je temu tako tudi v primeru enakih y koordinat. $\square$

Resnično se najpreprostejšo metodo, v tem primeru požrešni algoritem, splača poiskusiti preden nadaljujemo z naprednejšimi metodami, kot so monovariante.

3.1 Rešena naloga z miselnim procesom

V tem razdelku bom predstavil svoj miselni proces med reševanjem 1. naloge iz MMO 2024. Kar sledi **ni** primer zgledne rešitve naloge.

Naloga 3.2: MMO 2024, 1. naloga

Določi vsa realna števila α, da za vsa naravna števila n velja

$$n \mid (\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor)$$

Opomba: za realno število c označimo s $\lfloor c \rfloor$ največje celo število, ki ne presega c.

Rešitev.

Če je α celo število se znebim celih delov.

Ker je za $\alpha, m \in \mathbb{Z}$ $\lfloor m\alpha \rfloor = m\alpha$ v primeru, ko je $\alpha \in \mathbb{Z}$, po znani formuli o vsoti aritmetičnega zaporedja dobimo

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor = \sum_{i=1}^{n} \lfloor i\alpha \rfloor = \sum_{i=1}^{n} i\alpha = \alpha \frac{n(n+1)}{2}$$

Kdaj pa je število na desni deljivo z n za vse $n \in \mathbb{N}$? Natanko tedaj, ko je za vse $n \in \mathbb{N}$ število $\alpha\frac{n+1}{2}$ celo. To pa je zagotovo celo samo za sode α, če je α lih in n lih dobimo ulomek. Tako zaključimo, da je za cele α pogoj izpolnjen samo pri sodih α. Na tej točki se pojavi sum, da so to tudi vsi ustrezni α, saj se kakšne grde družine rešitev gotovo ne bi pojavile pri prvi nalogi na MMO.

Primer $\alpha \in \mathbb{Z}$ smo obravnavali v celoti. Naslednji najpreprostejši primer za obravnavo je $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Najprej se zdi smoterno pogledati primer $n = 2$. Ker je $\alpha = \frac{a}{b}$ racionalen dobimo

$$2 \mid \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{b} \right\rfloor.$$

Kakšen dodaten pogoj bi lahko dodal na α, da bi pogoj zelo očitno propadel? Če je prvi sumand enak 0 in drugi enak 1 bi se to gotovo zgodilo. $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = 0 \iff 0 \leq \frac{a}{b} < 1$ ter $\left\lfloor \frac{2a}{b} \right\rfloor = 1 \iff 1 \leq \frac{2a}{b} < 2 \iff \frac{1}{2} \leq \frac{a}{b} < 1$. Pogoj tako propade, če je $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Ali dobim za $n = 3$ protislovje, če je $\frac{1}{3} \leq \alpha < 1$? V tem primeru ni popolnoma očitno čemu sta enaka $\lfloor 2\alpha \rfloor$ ter $\lfloor 3\alpha \rfloor$; lahko bi bila zaporedoma enaka 1 in 2, kar mi ne bi dalo protislovja. Zgleda, da sem posplošil na napačen način. Kako pa bi zagotovil čisto isto situacijo kot v primeru $n = 2$, ko je prvi sumand enak 0, drugi pa 1?

Kaj mora veljati za α in n, da je prvih $n - 1$ sumandov 0, zadnji pa je 1?

Sistem enačb se tedaj glasi $\lfloor i\alpha \rfloor = 0$ za vse $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, ter $\lfloor n\alpha \rfloor = 1$. Podobno kot v primeru $n = 2$ ugotovimo, da prvi pogoj zahteva $0 \le \alpha < \frac{1}{n-1}$, drugi pa $\frac{1}{n} \le \alpha < \frac{2}{n}$.

Za katere α pa sta izpolnjena oba izmed teh pogojev? Ostrejša spodnja meja je gotovo $\frac{1}{n}$, obenem pa je za skoraj vse $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n-1} \le \frac{2}{n}$, kar pomeni, da je ostrejša zgornja meja $\frac{1}{n-1}$. Edino naravno število n za katero velja $\frac{2}{n} \le \frac{1}{n-1}$ je ravno $n = 1$, ki ga pa lahko ignoriramo, saj $n = 1$ gotovo deli vsa cela števila.

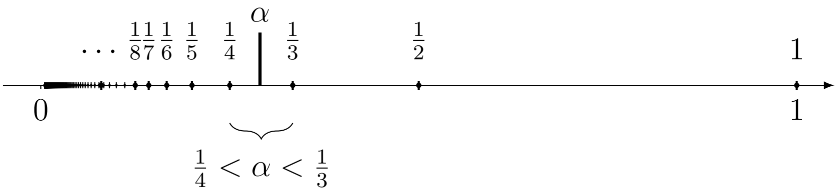
Naša ugotovitev se glasi: Če obstaja $1 \neq n \in \mathbb{N}$, da velja $\frac{1}{n} \le \alpha < \frac{1}{n-1}$, potem je

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor i\alpha \rfloor = 0 + 0 + \cdots + 0 + 1 = 1.$$

Ker $n \neq 1$ sledi, da

$$n \nmid 1 = \sum_{i=1}^{n} \lfloor i\alpha \rfloor .$$

Za katere α pa tak $n \in \mathbb{N}$ obstaja? Če na številski premici pobarvamo vse točke oblike $\frac{1}{n}$, ko n preteče naravna števila bodo vse ležale na intervalu $(0, 1]$. Potem sledi, da če je $\alpha \in (0, 1)$ tak n gotovo obstaja!



Slika 1: Primer, ko α leži med $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{3}$.

Ugotovili smo, da za $\alpha \in (0, 1)$ pogoj ni izpolnjen. Od prej že vemo, da če je $\alpha \in \mathbb{Z}$ je pogoj izpolnjen samo za sode α.

Primer $\alpha \notin (0, 1)$ predelajmo v primer $\alpha \in (0, 1)$ upoštevajoč ugotovitve v primeru $\alpha \in \mathbb{Z}$

Na tej točki dobim idejo, da bi lahko za α vsoto »prestavili« navzdol (kar upam, da reši tudi problem negativnih α), saj je namreč $\lfloor m + \beta \rfloor = m + \lfloor \beta \rfloor$ za $m \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{R}$. Ta ideja je deloma motivirana z razmislekom o predstavljeni lastnosti funkcije celi del (tako imenujemo funkcijo $\lfloor \cdot \rfloor$), deloma motivirana s tem, da bi rad združil že obravnavana primera, ter deloma motivirana z ustaljeno modrostjo, da je pri nalogah, ki vsebujejo funkcijo celi del pogosto dosti bolj intuitivno opazovati funkcijo neceli del, definirano kot $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Kakorkoli že, za $\alpha > 1$ bi upoštevajoč $\lfloor i\alpha \rfloor = i \cdot \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor i \cdot \{\alpha\} \rfloor$ rad pogoj deljivosti predelal v že obravnavani primer deljivosti za $\{\alpha\}$.

Če je $\lfloor \alpha \rfloor$ sod to lahko gotovo storim, saj velja

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor i \cdot \alpha \rfloor = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor i \cdot \{\alpha\} \rfloor = \lfloor \alpha \rfloor \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} \lfloor i \cdot \{\alpha\} \rfloor ,$$

prvi sumand na skrajni desni pa je deljiv z n, kar vemo iz obravnavanega primera, ko je α sodo celo število. Če pa je $\lfloor\alpha\rfloor$ liho ni očitno kaj bi storili. Zgornji izračun je še vedno pravilen, a izraz $\lfloor\alpha\rfloor \frac{n(n+1)}{2}$ več ni nujno deljiv z n.

Prva ideja, ki jo dobim, je, da poiskusimo obravnavanemu primeru $\alpha \in (0,1)$ dodati še primer $\alpha \in (1,2)$. Stvari se tu konkretno zapletejo, saj ideja z ničelnostjo prvih $n-1$ sumandov ni več izvedljiva. Za $\alpha > 1$ so števila $\lfloor i\alpha\rfloor$ večja od i, sepravi konkretno stran od 0.

Sedaj ugotovim, da ničelnosti prvih $n-1$ sumandov pravzaprav ne moremo več zagotoviti; primer $\alpha \in (0,1)$ karakterizira vse situacije, ko je prvih $n-1$ sumandov enakih 0. Poleg ničelnosti prvih $n-1$ sumandov je najpreprostejša situacija, ko je prvih $n-1$ sumandov enakih 1, zadnji pa je nekje na intervalu $(1, n+1)$. Tedaj je namreč vsota nekje na intervalu $(n, 2n)$, kar pomeni, da gotovo ni deljiva z n.

Poračunajmo kdaj se to zgodi.

$$\lfloor\alpha i\rfloor = 1 \iff 1 \leq \alpha i < 2 \iff \frac{1}{i} \leq \alpha < \frac{2}{i}$$

za vse $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ ter

$$\lfloor\alpha n\rfloor \in (1, n+1) \iff 1 \leq \alpha n < n+1 \iff \frac{1}{n} \leq \alpha < 1 + \frac{1}{n}.$$

Oba pogoja sta izpolnjena, ko je

$$\max\left\{\frac{1}{n}, \max_{i\in\{1,2,\ldots,n-1\}} \frac{1}{i}\right\} \leq \alpha < \min\left\{\frac{n+1}{n}, \min_{i\in\{1,2,\ldots,n-1\}} \frac{2}{i}\right\}$$
$$1 \leq \alpha < \min\left\{\frac{n+1}{n}, \frac{2}{n-1}\right\} = \min\left\{\frac{2}{n-1}, \frac{3}{2}\right\},$$

kjer zadnja enakost sledi po obravnavanju primerov, ko je $n \geq 3$ in ko je $n \in \{1, 2\}$. Če je $n = 1$ imamo kot prvo problem z deljenjem z 0, kar je sicer irelevantno, saj 1 deli vsako celo število in je pogoj izpolnjen. Če je $n \geq 3$ je tako zgornja meja na α manjša ali enaka 1, kar nam ne pove nič novega (dodatno pa dobimo, da je zgornja meja manjša od spodnje meje, kar ne more biti res). Vse kar smo ugotovili je, da če je $\alpha \in (1, \frac{3}{2})$, potem naša konstrukcija poda protislovje za $n = 2$.

To je boleče očitno, saj je tedaj $\lfloor\alpha\rfloor = 1$ in $\lfloor 2\alpha\rfloor = 2$.

Kaj pa če je prvih $n-1$ sumandov enakih 2, zadnji pa je na intevalu $(2, n+2)$? Sistem enačb se glasi

$$\lfloor\alpha i\rfloor = 2 \iff 2 \leq \alpha i < 3 \iff \frac{2}{i} \leq \alpha < \frac{3}{i}$$

za vse $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ ter

$$\lfloor\alpha n\rfloor \in (2, n+2) \iff 2 \leq \alpha n < n+2 \iff \frac{2}{n} \leq \alpha < \frac{n+2}{n}.$$

Oba pogoja sta tokrat izpolnjena, ko je

$$2 \leq \alpha < \min\left\{\frac{3}{n-1}, \frac{n+2}{n}\right\} = \frac{3}{n-1},$$

kjer zadnjo enakost dobimo z analizo primerov ter izločevanjem primera $n = 1$. Za $n = 2$ dobimo zgornjo mejo 3, kar pomeni, da smo tako izločili $\alpha \in (2, 3)$; za $n \geq 4$ pa dobimo zgornjo mejo manjšo od spodnje, kar ne gre. Ampak to nam ne pove nič novega, saj že znamo rešiti primer sodega $\lfloor \alpha \rfloor$.

Nekaj zaupanja v matematične vzorce (ali pa sposobnost matematične indukcije) sugerira, da bomo z nadaljevanjem ideje, da je prvih $n - 1$ členov enakih $k \in \mathbb{N}$, zadnji pa je nekje na intervalu $(k, n + k)$, dobili meje

$$k \leq \alpha < \frac{k}{n-1}.$$

Primer $n = 1$ smo že ovrgli, primer $n = 2$ nam pove $k \leq \alpha < k$, kar ni mogoče, za $n \geq 3$ pa ponovno dobimo zgornjo mejo manjšo od spodnje, kar ne gre.

Če malo pomislim je to relativno pričakovano. Če je namreč $\lfloor \alpha \rfloor = k \in \mathbb{N}$ bi pričakovali, da je $\lfloor 2\alpha \rfloor \approx 2k$, k in $2k$ pa sta dve zelo različni števili. Največ uspeha smo imeli za $k = 0$, prav tako pa je primer $k = 1$ podal delno razširitev, saj tudi $\alpha \in (1, \frac{3}{2})$ niso ustrezni. Dokazali smo tudi, da se lahko »premikamo« za 2 - če α izpolni pogoj ga izpolni tudi $\alpha \pm 2$. Sajres, α in $\lfloor \alpha \rfloor$ so lahko tudi negativne!

Ideja: Kaj pa če je prvih $n - 1$ členov enakih -1, zadnji pa je v $(-1, -n - 1)$?

Kot že približno štirikrat prej dobimo sistem enačb

$$\lfloor \alpha i \rfloor = -1 \iff -1 \leq \alpha i < 0 \iff \frac{-1}{i} \leq \alpha < 0$$

za vse $i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ ter

$$\lfloor \alpha n \rfloor \in (-1, -n-1) \iff -n - 1 \leq \alpha n < -1 \iff \frac{-n-1}{n} = -1 - \frac{1}{n} \leq \alpha < \frac{-1}{n}.$$

Oba pogoja sta izpolnjena za $\frac{-1}{n-1} \leq \alpha < \frac{-1}{n}$. Na moje veliko olajšanje tak $n \in \mathbb{N}$ obstaja za vse $\alpha \in (-1, 0)$. Argument je enak kot v primeru sumandov $0, 0, \ldots, 0, 1$.

Ugotovili smo, da pogoj ni izpolnjen v primeru $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ (ovrgli smo tudi $\alpha \in (1, \frac{3}{2})$, a tega sploh ne potrebujemo). Prav tako smo pokazali, da če α izpolnjuje pogoj, potem $\alpha \pm 2$ tudi izpolnjuje pogoj, saj je

$$n \mid \sum_{i=1}^{n} \lfloor \alpha i \rfloor \implies n \mid \sum_{i=1}^{n} \lfloor \alpha i \rfloor \pm 2i = \sum_{i=1}^{n} \lfloor \alpha i \pm 2i \rfloor = \sum_{i=1}^{n} \lfloor (\alpha \pm 2) i \rfloor,$$

kjer smo uporabili enakost $n(n + 1) = \sum_{i=1}^{n} 2i$.

Ker smo čisto na začetku pokazali, da izmed celih števil pogoj izpolnjujejo samo sodi α lahko vsak $\alpha \notin (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \mathbb{Z}$ preko ugotovitve o »premikanju« za ± 2 premaknemo v množico $(-1, 0) \cup (0, 1)$, kjer pogoj dokazano ni izpolnjen.

Tako res sledi, da so edini realni α, ki ustezajo pogoju sodi celi α. $\square$

Proces reševanja naloge iz mednarodne matematične olimpijade s strani zlatega medalista ter Fieldsovega nagrajenca Timothyja Gowersa je na voljo na naslednji povezavi.

4 Zaključek

Naslednji korak na vašem matematičnem potovanju je reševanje nalog. Spoznavanje teoretičnega ozadja je lahko razsvetljujoče, a reševanje nalog je neprecenljivo. Mnoge naloge iz matematičnih tekmovanj se zbirajo na spletni strani AoPS.

Zaključim še z dvema nasvetoma. Prvi korak razumevanja uporabnosti opazovanja majhnih oz. specifičnih primerov ter reševanja preprostejše oblike naloge je soočenje z dejstvom, da njihove uporabnosti ne cenite zadosti. Praktično ne obstaja naloga, pri kateri vam ta principa ne bi pomagala.

K drugi točki pa bi vam rad svetoval, da vaš prvi cilj, ko preberete nalogo, ne bi smel biti rešiti nalogo. Čeprav je to na koncu koncev cilj matematičnih tekmovanj obstaja obratna sorazmernost med željo, da bi nalogo rešili, in verjetnostjo, da jo dejansko bomo. Vaša prvotni cilj naj bo nalogo razumeti. To dosežete tako, da se igrate z majhnimi in specifičnimi primeri ter poenostavljenimi oblikami naloge. Razumevanje naloge na tak način pogosto posredno vodi do rešitve, saj tako raziskovanje vodi do ugotovitev o tem, kaj je ključen del naloge, ter kaj je odvečno - pove vam v čem leži dejanska težavnost.

Literatura

[1] Timothy Gowers. *Mini-monomath*. 2014. URL: https://gowers.wordpress.com/2014/07/19/mini-monomath/ (pridobljeno 11. 11. 2025).

[2] György Polya. *How to solve it*. Princeton University Press, 1945.

[3] Pythag011. *Random Trivial Problems*. 2011. URL: https://artofproblemsolving.com/community/c1352 (pridobljeno 30. 4. 2024).