Vaje iz analize 2b

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

1. april 2025

Once you leave the ground, you fly.
Some people fly longer than others.

Michael Jordan

Kazalo

1 Fourierova vrsta

Izrek 1.1

Če je $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ nezvezna v končno mnogo točkah, kjer obstajata levi in desni odvod, ter je med točkami nezveznosti odvedljiva, potem definiramo:

$$FV(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

kjer je

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

$FV(f)(x)$ konvergira $\forall x \in [-\pi, \pi]$ proti

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

V krajiščih definicijskega območja prav tako velja:

$$FV(f)(\pm\pi) = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$$

Trditev 1.2

- Će je f liha funkcija je $a_n = 0$ za vse n.
- Če je f soda funkcija je $b_n = 0$ za vse n.

Trditev 1.3: Defaktorizacijske formule

- $$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$$
- $$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$$
- $$\cos(x) - \cos(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{y-x}{2})$$

Trditev 1.4

Naslednji integrali so standardni pri računanju Fourierovih vrst:

- $$\int x\cos(nx)\,dx = \frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} + C$$
- $$\int x\sin(nx)\,dx = \frac{-x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} + C$$

Dokaz. Lahko per partes, lahko pa tudi upoštevajoč $cos(nx) + i\cdot\sin(nx) = e^{inx}$. □

Komentar 1.5

Če imamo zadosti lepo funkcijo (zvezno, razen v končno mnogo točkah, kjer obstajata leva in desna limita, ter odvedljivo med točkami nezveznosti) $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ jo lahko razširimo na $[-\pi,\pi]$ bodisi kot sodo, bodisi kot liho funkcijo. Tako dobimo za f bodisi *kosinusno*, bodisi *sinusno Fourierovo vrsto.*

Trditev 1.6

Naslednji integrali so standardni pri računanju Fourierovih vrst:

- $$\int x^2\cos(nx)dx = \frac{x^2}{n}\sin(nx) + \frac{2x}{n^2}\cos(nx) - \frac{2}{n^3}\sin(nx) + C$$
- $$\int x^2\sin(nx)dx = \frac{-x^2}{n}\cos(nx) + \frac{2x}{n^2}\sin(nx) + \frac{2}{n^3}\cos(nx) + C$$

Izrek 1.7: Parsevalova enakost

Naj bo prostor X Hilbertov in $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ kompleten ortonormiran sistem. Tedaj za vse $x \in X$ velja:

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

V specifičnem primeru prostora $L^2[-\pi,\pi]$ se Parsevalova enakost glasi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 = 2\pi a_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i^2 + b_i^2),$$

kjer je Fourierova vrsta funkcije $f(x)$ enaka

$$FV(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

2 Vektorska analiza

Pravilen pogled na skalarna ter vektorska polja ni kot funkcije treh spremenljivk nad $\mathbb{R}$, temveč kot funkcije, ki sprejmejo vektorje v $\mathbb{R}^3$. V izbrani bazi takemu polju seveda pripada neka neka zvezna funkcija treh spremenljivk, a nista a priori enaka.

Definicija 2.1

Gradient polja je operator ∇, ki ima v standardni bazi obliko $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Divergenca vektorskega polja $g(\vec{r}) = g(x, y, z) = (X(\vec{r}), Y(\vec{r}), Z(\vec{r}))$ je definirana kot

$$\operatorname{div}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Vektorsko polje je *solenoidalno polje*, če je $\operatorname{div}(\vec{g}) = \vec{0}$

Komentar 2.2

$$\operatorname{rot}(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{a}) \neq (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{r} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{a}$$

Enakost iz prvega letnika v tem primeru **ne velja**.

Trditev 2.3: Lagrangeva identiteta

Naj sta $\vec{a}$ ter $\vec{b}$ vektorja v $\mathbb{R}^3$. Tedaj velja

$$|\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2$$

Definicija 2.4

Vektorsko polje $\vec{f}$ je potencialno, če obstaja skalarno polje u, da velja

$$\vec{f} = \operatorname{grad}(u).$$

Polje u imenujemo potencial vektorskega polja $\vec{f}$.

Primer 2.5

- Pokaži, da je $\vec{f} = (2x\cos(y) - y^2\sin(x), 2y\cos(x) - x^2\sin(y), 4)$ potencialno polje ter določi njegov potencial.
- Določi $a, b \in \mathbb{R}$, da bo $\vec{f} = (2 \cdot (axzy^4 - y), 2 \cdot (bx^2zy^3 - x), 3x^2y^4$ potencialno polje.

Rešitev. • Ker je $u_z = 4$ velja $u(x, y, z) = c_3(x, y)+4z$. Z integriranjem analogno izpeljemo

$$u = x^2 \cos(y) + y^2 \cos(x) + c_1(y, z)$$

ter

$$u = y^2 \cos(x) + x^2 \cos(y) + c_2(x, z).$$

Vemo, da je potencial do konstante natančno določen. Asist. dr. Gregor Cigler poda naslednji nasvet za to kako uganemo potencial: "Vzamemo vsoto unije členov, ki se pojavijo pri posamezni integraciji."Če sledimo tej mordrosti uganemo:

$$u(x, y, z) = x^2 \cos(y) + y^2 \cos(x) + 4z + c,$$

kjer je $c \in \mathbb{R}$.

•

$$\text{rot}(\vec{f}) = \left(12y^3x^2 - 2bx^2y^3, 2axy^4 - 6xy^4, 4bxzy^3 - 2 - 8axzy^3 + 2\right).$$

Opazimo, da je $b = 6$ ter $a = 3$. Določimo še potencial:

$$u_x = 2(3xzy^4 - y) \implies u = 2\left(\frac{3x^2zy^4}{2} - xy\right) + c_1(y, z)$$

$$u_y = 2(6x^2zy^3 - x) \implies u = 2\left(\frac{6x^2zy^4 - xy}{4} - xy\right) + c_2(x, z)$$

$$u_z = 3x^3y_4 \implies u = 3x^2y^4z + c_3(x, y)$$

Tako uganemo $u = 3x^2y^4z - 2xy + c$ □

Izrek 2.6

Naj bo $\vec{f} : D \to R^3$ funkcija razreda C^1 ter D odprta podmnožica R^3, ki je zvezdasto območje. Tedaj velja:

$$\vec{f} \text{ je potencialno polje} \iff \text{rot}(\vec{f}) = \vec{0}.$$

Implikacija iz leve v desno velja v vsakem primeru.

Primer 2.7

Naj sta $a, b \in \mathbb{R}^3$. Pokaži, da je

$$\text{grad}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\vec{b} \cdot \vec{r}}\right) = \frac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{b} \cdot \vec{r})^2}$$

Rešitev. Preden začnemo se pokrižamo, nato pa gremo bash. □

2.1 Integrali po ploskvah ter krivuljah

Primer 2.8

Izračunaj površino torusa s polmeroma $0 < a < R$.

Rešitev. Plašč torusa parametriziramo kot

$$x = (R + a \cdot \cos(\theta)) \cos(\varphi) \wedge y = (R + a \cdot \cos(\theta)) \sin(\varphi) \wedge z = a \sin(\theta),$$

kjer $\varphi \in [0, 2\pi)$ ter $\theta \in [0, 2\pi)$. Tako je $\vec{r}(\varphi, \theta) = (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$ parametrizacija torusa.

$$\begin{gathered}\vec{r}_\varphi = ((R + a\cos(\theta))\sin(\varphi), (R + a\cos(\theta)cos(\varphi), 0) \\ \vec{r}_\theta = (-a\sin(\theta)\cos(\varphi), -a\sin(\theta)\sin(\varphi), a\cos(\theta)) \\ E = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = (R + a\cos(\theta))^2 \\ G = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = a^2 \\ F = 0\end{gathered}$$

Vrednost $F = 0$ smo uganili, saj je $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \iff \vec{r}_u \perp \vec{r}_v$. To se zgodi natanko tedaj, ko so koordinatne krivulje pravokotne (koordinatna krivulja je pot, ki jo oriše ena koordinata pri fiksni drugi koordinati v parametrizaciji). Pri torusu sta koordinatni krivulji krog z radijem R v xy ravnini ter krog z radijem a, ki opiše obseg torusa. Sledja sta pravokotna. Dobimo

$$P(S) = \int_S dS = \int_D a \cdot (R + a\cos(\theta)) d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a \cdot (R + a\cos(\theta)) d\theta d\varphi = 2\pi a \cdot 2\pi R$$

Zelo pomenljiv rezultat. □

Komentar 2.9

Imamo parametrizacijo, ki iz "lepega"podprostora $D \subseteq \mathbb{R}^2$ slika v naš ciljni objekt v $\mathbb{R}^3$. Od parametrizacije zahtevamo injektivnost ter regularnost (odvodi so nevzporedni):

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0} \quad \forall (u, v) \in D$$

Trditev 2.10: Površina ploskve

$$P(S) = \int_S dS = \int_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \; du\, dv = \int_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

kjer je $E = |\vec{r}_u|^2 = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$, $G = |\vec{r}_v|^2 = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$ ter $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$

Primer 2.11

Na enotski sferi je dana krivulja K z enačbo

$$\varphi = \tan(\theta),$$

kjer sta ϕ ter θ sferična kota. Določi dolžino krivulje K.

Rešitev. Dopusten interval za θ je $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kjer krajišči, kot množici z mero 0, ignoriramo. θ je tukaj zemljepisna višina, φ pa zemljepisna širina.

$$\begin{gathered}
\vec{r}(\varphi, \theta) = (\cos(\varphi)\cos(\theta), \sin(\varphi)\cos(\theta), \sin(\theta)) \\
\vec{r}_\varphi = (-\sin(\varphi)\cos(\theta), \cos(\varphi)\cos(\theta), 0) \\
\vec{r}_\theta = (-\cos(\varphi)\sin(\theta), -\sin(\varphi)\sin(\theta), 0) \\
E = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = \cos(\theta)^2 \\
F = 0 \\
G = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = 1,
\end{gathered}$$

kjer smo $F = 0$ določili iz pravokotnosti poldnevnikov ter vzporednikov.

$$d\varphi = \frac{1}{\cos(\theta)^2} d\theta.$$

Tako velja

$$\ell(K) = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(\theta)^2 (\frac{1}{\cos(\theta)^2} d\theta^2)^2 + 1(d\theta)^2} = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos(\theta)^2}}{\cos\theta}\, d\theta$$

Konvergenco slednjega obravnavamo upoštevajoč

$$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \quad \text{ter} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Dobimo, da integral ne obstaja. □

Komentar 2.12

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ter $\vec{r}(u,v)$ parametrizacija. Naj bo $\gamma(t) = \{(u(t), v(t)) \mid t \in [t_1, t_2]\}$ krivulja v definicijskem območju $\vec{r}$. Tedaj je

$$\ell(K) = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d}{dt}(\vec{r}(u(t), v(t))) \right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2} dt,$$

kjer je $du = \frac{\partial u}{\partial t} dt$ ter $dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt$ ter

$$d^2 s = E\, du^2 + F\, du\, dv + G\, dv^2$$

Primer 2.13

Naj bo $a > 0$. Izračunaj težišče homogenega loka astroide, ki je podana z enačbo

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad x, y \geq 0$$

Rešitev.

$$x_T = \frac{1}{m(K)} \cdot \int_K x\, dm = \frac{1}{m(K)} \int_K x \cdot \rho\, ds = \frac{1}{\int_K \rho\, ds} \cdot \int_K x\rho\, ds\,,$$

kjer je ds "delček"dolžine ter ρ dolžinska gostota. Ker je K homogena se ρ pokrajša

$$x_T = \frac{1}{\ell(K)} \int_K x\, ds.$$

Kaj pa je ds? Po fizikalno lahko pot enačimo s produktom hitrosti ter spremembe časa. Tako velja

$$ds = |\vec{r}'| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Prvi korak je, da krivuljo parametriziramo, kot funkcijo $\vec{r}(t)$, ko parameter t preteče neko območje, v tem primeru interval.

Komentar 2.14: Integral skalarnega polja po krivulji

Če je $u(x, y, z)$ skalarno polje je

$$\int_K u\, ds = \int_a^b u(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| dt.$$

V našem specifičnem primeru je ustrezna parametrizacija

$$x = a\cos(t)^3 \quad \text{ter} \quad y = a\sin(t)^3, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

$$\ell(K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\vec{r}'(t)| dt.$$

$$\vec{r}'(t) = (-3a\cos(t)^2 \sin(t), 3a\sin(t)^2 \cos(t))$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{9a^2 \cos(t)^4 \sin(t)^2 + 9a^2 \sin(t)^4 \cos(t)^2} =$$
$$= 3a\sin(t)\cos(t) \cdot \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2} = 3a\sin(t)\cos(t),$$

kjer smo izraz znotraj korena nesli ven, ker je venomer pozitiven.

$$\ell(K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos(t)\sin(t)\, dt = \frac{3}{2}a.$$

$$\int_K x\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos(t)^3 \cdot 3a\cos(t)\sin(t)\, dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^4 \sin(t) = 3a^2 \int_0^1 t^4 dt = \frac{3}{5}a^2.$$

Sledi, da je $x_T = \frac{2}{5}a$, iz razlogov simetrije je $y_T = \frac{2}{5}a$. □

Primer 2.15

Izračunaj

$$\int_{\partial D} \frac{dS}{(1+x+y)^2}, \quad \text{kjer je } D = \{(x,y,z) \mid x+y+z+ \leq 1 \wedge x,y,z, \geq 0\}$$

Rešitev. D je tetraeder. Ker je ∂D ploskev gre za integral funkcije po ploskvi, ki je odsekoma gladka. $g(x,y,z) = \frac{1}{(1+x+y)^2}$. Integriramo po gladkih kosih ploskve ∂D.

Komentar 2.16: Integral skalarnega polja po ploskvi

Naj bo $\vec{r}(u,v)$ parametrizacija območja S, ko (u,v) pretečeta območje Δ.

$$\int_S g\, dS = \int_\Delta g(\vec{r}(u,v))\, |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, du\, dv,$$

kjer je

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, du\, dv$$

Najprej integriramo po ravninskem odseku, ki ga parametriziramo na sledeči način

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, 1-x-y).$$

Tako je $\vec{r}_x = (1,0,-1)$ ter $\vec{r}_y = (0,1,-1)$. Sledi $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (1,1,1)$ ter $|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{3}$.

$$\int_{S_0} g\, dS = \sqrt{3} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} g\, dy = \sqrt{3} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2}\, dy =$$
$$= \sqrt{3} \int_0^1 dx \left(\frac{-1}{1+x+y} \Big|_0^{1-x} \right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\ln(2)$$

Poglejmo še ostale robne ploskve. Ko je $y = 0$ je ustrezna parametrizacija $\vec{r}(x,z) = (x,0,z)$. Sledi $\vec{r}_x = (1,0,0)$ ter $\vec{r}_y = (0,0,1)$, zato je $|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = 1$.

$$\int_{S_y} g\, dS = 1 \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x)^2}\, dz = \int_0^1 \frac{z}{(1+x)^2} \Big|_{z=0}^{z=1-x} dx = 1 - \ln(2)$$

Iz razlogov simetrije je

$$\int_{S_x} g\, dS = \int_{S_y} g\, dS = 1 - \ln(2).$$

Sedaj izračunamo še integral po zadnjem gladkem delu

$$\int_{S_z} g\, dS = 1 \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2}\, dy = \frac{-1}{2} + \ln(2),$$

kjer smo upoštevali rezultat iz izračuna integrala po S_0.

Tako je

$$\int_{\partial D} g\, dS = 2 \cdot (1 - \ln(2)) + (1+\sqrt{3})(\ln(2) - \frac{1}{2})$$

□

Komentar 2.17

Če je $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{a\}$, potem je

$$\int_S g\,dS = \int_\Delta g(x,y,a)\,dx\,dy,$$

kjer je Δ projekcija S na (x,y) ravnino.

Primer 2.18

Naj bo $a > 0$ ter $\alpha \in [0, 2\pi]$. $K = S(0,a) \cap \Pi$, kjer je Π ravnina z enačbo $y = x\tan(\alpha)$. Izračunaj

$$\int_K (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

Opazimo, da želimo integrirati vektorsko polje, namreč

$$\vec{f}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y), \text{ zanima nas } \int_K \vec{f} d\vec{r}.$$

Če je $\vec{r} = (x,y,z) \implies d\vec{r} = (dx, dy, dz)$. Integrand je sedaj skalarni produkt $\vec{f}$ ter $d\vec{r}$. Parametrizirajmo krivuljo. Kot presek ravnine ter sfere, kjer ravnina poteka skozi središče sfere dobimo glavni krog. Naš parameter bo kot, ki ga predstavlja geografska višina. Asist. prof. dr. Gregor Cigler nam svetuje, da potegnemo asa iz rokava (med vajami je dejansko pogledal v rokav svoje jopice), ter se poslužimo sferičnih koordinat. Tako je

$$x = a\cos(\theta)\cos(\varphi),\;\; y = a\cos(\theta)\sin(\varphi),\;\; z = a\sin(\theta),\;\; \theta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \wedge \varphi \in [0,\pi].$$

Kot θ predstavlja geografsko višino, kot φ pa geografsko širino. V našem problemu fiksiramo $\varphi = \alpha$, kar poda ustrezno parametrizacijo glede na θ, namreč

$$\vec{r}(\theta) = (a\cos(\alpha)\cos(\theta), a\sin(\alpha)\cos(\theta), a\sin(\theta))$$
$$\implies \vec{r}'(\theta) = (-a\cos(\alpha)\sin(\theta), -a\sin(\alpha)\sin(\theta), a\cos(\theta)) \wedge \vec{f}(\vec{r}(\theta))$$
$$\vec{f}(\vec{r}(\theta)) = (a\sin(\alpha)\cos(\theta) - a\sin(\theta), a\sin(\theta) - a\cos(\theta)\sin(\alpha), a\cos(\theta)\cos(\alpha) - a\cos(\theta)\sin(\alpha))$$

Daljši izračun pokaže

$$\vec{f} \cdot \vec{r}' = a^2(\cos(\alpha)) - \sin(\alpha).$$

Tako je

$$\int_K \vec{f}\,d\vec{r} = \int_0^{2\pi} a^2(\cos(\alpha) - \sin(\alpha))\,d\theta = 2\pi a^2\,(\cos(\alpha) - \sin(\alpha))$$

Ko računamo integral vektorskega polja po krivulji moramo skrbeti še za orientacijo. Naša orientacija je bila v nasprotni smeri urinega kazalca.

Komentar 2.19: Integral vektorskega polja po krivulji

Naj bo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ parametrizacija krivulje. Tedaj je

$$\int_K \vec{f} d\vec{r} = \int_a^b \left(\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\right) dt$$

Primer 2.20

Naj so $a, b, c \in \mathbb{R}$. Naj bo $S = \{(x, y, z) \mid x^+ y^2 + z^2 = 1 \wedge x, y, z, \geq 0\}$. Izračunaj

$$\int_S a\, dy\, dz + b\, dx\, dz + c\, dx\, dy.$$

Rešitev. Opazimo, da je želeni integral integral vektorskega polja po ploskvi.

$$I = \int_S \vec{f} d\vec{S}, \;\; \vec{f} = (a, b, c).$$

Uvedemo sferične koordinate

$$x = \cos(\theta)\cos(\varphi), \;\; y = \cos(\theta)\sin(\varphi), \;\; z = \sin(\theta), \;\; \varphi, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}(\theta, \varphi) &= (\cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)) \\
\vec{r}_\theta &= (-\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)) \\
\vec{r}_\varphi &= (-\cos(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)\cos(\varphi), 0) \\
\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi &= (-\cos(\theta)^2\cos(\varphi), -\cos(\theta)^2\sin(\varphi), -\cos(\theta)\sin(\theta)) = \\
&= -\cos(\theta) \cdot (\cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)) = -\cos(\theta) \cdot \vec{r}
\end{aligned}$$

V naši orientaciji $\vec{N}$ kaže proti izhodišču.

$$I = \int_S \vec{f}\, d\vec{S} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a\cos(\theta)^2\cos(\varphi) - b\cos(\theta)^2\sin(\varphi) - c\sin(\theta)\cos(\theta)\right) d\theta.$$

V pomoč nam je lahko funkcija beta, namreč:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{2p-1}\sin(x)^{2q-1} = \frac{1}{2}B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 dx = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-\pi}{4}a\cos(\varphi) - \frac{\pi}{4}b\sin(\varphi) - \frac{c}{2}\right) d\varphi = \frac{-\pi}{4}(a + b + c+)$$

□

Komentar 2.21: Integral vektorskega polja po ploskvi

Integral vektorskega polja po ploskvi lahko pretvorimo na integral skalarnega polja po ploskvi na naslednji način

$$\int_S \vec{f}\, d\vec{S} = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{N})\, dS, \text{ kjer je } \vec{N} \text{ enotska normala na } d\vec{S}.$$

Orientacija ploskve je določena s smerjo normale.
Če imamo parametrizacijo S kot $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, kjer sta $(u, v) \in \Delta$, potlej je

$$\int_S \vec{f}\, d\vec{S} = \int_\Delta \left(\vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\right) du\, dv,$$

kjer se smer $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ usklajena z orientacijo.

Primer 2.22

$a > 0$. Naj bo

$$\vec{f}(x, y, z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2).$$

Izračunaj cirkulacijo $\vec{f}$ vzdolž preseka roba kocke $[0, a]^3$ in ravnine $x + y + z = \frac{3a}{2}$.

Rešitev. K razpade na 6 gladkih kosov - daljic. Cirkulacija je integral vektorskega polja vzdolž sklenjene krivulje - ima fizikalno interpretacijo glede pretakanja vode ter hitrosti oz. poti delcev. Parametrizacija ene izmed daljic je

$$\vec{r}(t) = \{(t, \frac{3a}{2} - t, 0) \mid t \in [\frac{a}{2}, a]\} \implies \vec{r}_t(t) = (1, 0, -1).$$

Tako je

$$\int_{K_1} \vec{f} d\vec{r} = \int_{\frac{a}{2}}^{a} \vec{f} \cdot \vec{r}_t\, dt = \int_{\frac{a}{2}}^{a} (\frac{-9a^2}{4} + 3at - 2t^2) dt = \dots.$$

Izračunati moramo še $\int_{K_i} \vec{f} d\vec{r}$ za $i \in \{2, 3, \dots, 6\}$ □

Izrek 2.23: Gauss-Ostrogradski

Naj bo D omejeno območje v $\mathbb{R}^3$, katerega rob je sestavljen iz končnega števila gladkih ploskev. Orientiramo rob ∂D tako, da izberemo zunanjo normalo. Naj bo $\vec{F}$ gladko vektorsko polje v okolici $D \cup \partial D$. Potem velja

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

Primer 2.24

$m, n, p > 0$ ter $a, b, c \in \mathbb{R}$. Izračunaj

$$I = \int_S x^2 dzdy + y^2 dxdz + z^2 dxdy,$$

če je naslednje formula zunanje strani ploskve S

$$\left(\frac{x-a}{m}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{n}\right)^2 + \left(\frac{z-c}{p}\right)^2 = 1.$$

Rešitev. S je plašč elipsoida s središčem v (a, b, c) ter glavnimi polradiji m, n, p.

I je integral vektorskega polja po ploskvi. Po Gaussovem izreku sledi

$$I = \int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_D \operatorname{div}(\vec{f}) dV = \int_D (2x + 2y + 2z)\, dV,$$

kjer je D predstavljen elipsoid, zato je $S = \partial D$. Pogoji za uporabo Gaussovega izreka so izpolnjeni, saj je orientacija zunanja normala D.

Pomnimo

$$\int_d x\, dV = x_T \cdot V(D),$$

kjer je x_T x-koordinata težišča in $V(D)$ volumen območja D. Očitno je x-koordinata težišča v primeru naše elipsoide natanko a. Ker je razteg linearna transformacija prav tako hitro izpeljemo, da je $V(D) = \frac{4}{3}\pi \cdot mnp$ (kroglo raztezamo za faktor m v smeri x, $\ldots$).

Ako bi nadaljevali računsko bi faktor mnp dobili, ko bi elipsoido parametrizirali s polarnimi koordinatami, ter izračunali vrednost Jacobijeve matrike. Tako dobimo

$$I = \frac{8}{3}\pi \cdot mnp \cdot (a + b + c)$$

□

Primer 2.25

$\vec{f}(\vec{r}) = |\vec{r}|^2 \cdot \vec{r}$ ter $b > 0$. Izračunaj pretok $\vec{f}$ skozi

- rob območja $D = \{(x, y, z) \mid 2z \geq x^2 + y^2, z \leq b\}$
- ploskev $2z = x^2 + y^2$, kjer je $z \leq b$

Rešitev. Pretok je integral vektorskega polja po ploskvi. Robova območja D sta $S = z = \frac{x^2+y^2}{2}, z \leq b$ ter krožnica $2z = 2b = x^2 + y^2$. Pretok skozi S je

$$\int_S \vec{f} d\vec{S} = \int_D \operatorname{div}(\vec{f}) dV,$$

kjer smo prvo enakost zapisali po Gaussovem izreku. Če f zapišemo v kanoničnih koordinatah dobimo

$$\vec{f} = \Big((x^2 + y^2 + z^2)x, (x^2 + y^2 + z^2)y, (x^2 + y^2 + z^2)z\Big) \implies \operatorname{div}(\vec{f}) = 5(x^2 + y^2 + z^2).$$

Tako je želen integral enak

$$5 \int_D x^2 + y^2 + z^2 dV.$$

Žal integral nima fizikalne interpretacije kot npr. vztrajnostni moment (kot se je zgodilo pri prejšnji nalogi), kar pomeni, da ga moramo izračunati sami. Vpeljemo cilindrične koordinate $x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi), z = z$. Parametri φ,r ter z zaporedoma tečejo po $[0, 2\pi)$, $[0, \sqrt{2b}]$ ter $[\frac{r^2}{2}, b]$. Integral se tako pretvori v

$$5 \int_D (x^2 + y^2 + z^2) dV = 5 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2b}} dr \int_{\frac{r^2}{2}}^b (r^2 + z^2)(r)\, dz = 10\pi(\frac{b^3}{3} + \frac{b^4}{4}),$$

kjer smo integrand pretvorili upoštevajoč novi spremenljivki ter Jacobijevo matriko po spremembi spremenljivk, izračun integrala pa smo spustili.

Pojdimo na drugo točko. S_b je tukaj krog, ki ga določi druga enačba. Ker je $\partial D = S \cup S_b$ velja po aditivnosti integrala

$$\int_S \vec{f} d\vec{S} = \int_{\partial D} \vec{f} d\vec{S} - \int_{S_b} \vec{f} d\vec{S},$$

sledi, da je

$$\int_{S_b} \vec{f} d\vec{S} = \int_{S_b} \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_b} (zx^2 + zy^2 + z^3) dS = \int_{S_b} bx^2 + by^2 + b^3 dS,$$

upoštevajoč aditivnost ter odsotnost arugmenta tretjega integrala dobimo, da je zgornji izraz enak

$$b^3(2\pi b) + \int_{S_b} (x^2 + y^2) dS = b^3(2\pi b) + (2\pi b^2),$$

kjer smo zadnji integral izračunali po uvedbi polarnih spremenljivk.

Izračunali smo integral po odsekanem delu rotirane parabole ter po omejujočem krogu, kar pomeni, da je njuna vsota enaka integralu po celotni meji območja S. $\square$

Komentar 2.26: O izbiri parametrov

Najprej smo izbrali φ, ki gotovo teče po $[0, 2\pi)$. Za vsak φ na tem intervalu bo za nek r na $[0, \sqrt{2b}]$ izbrano neko podobmočje. Vse ustrezne izbire z-ja so potem seveda višje od $\frac{r^2}{2}$, ter nižje od b.

Izrek 2.27: Greenova formula

Naj bo D omejeno območje v ravnini, katerega rob je sestavljen iz končnega števila gladkih lokov in je pozitivno orientirana. Naj sta P in Q gladki funkciji na $D \cup \partial D$. Tedaj je

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Primer 2.28

Izračunaj

$$I = \int_K \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

kjer je $K \subseteq \mathbb{R}^2$ sklenjena krivulja, ki

- Ne obkroži izhodišča.
- Obkroži izhodišče.

Rešitev. Omejimo se na primer $K = \partial D$, za območje D s kosoma gladkim robom. V prvem primeru lahko predpostavimo, da $(0,0) \notin D$. Uporabimo Greenovo formulo za $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$ ter $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$, ki sta gladki dokler $(0,0) \notin D$. Tako se želeni integral pretvori v obliko

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D (Q_x - P_y) dxdy = \int_D \left(\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dxdy = 0.$$

V drugem primeru je strategija naslednja: iz D izrežemo dovolj majhen krog $K((0,0), \varepsilon)$, da je $\overline{K}((0,0), \varepsilon) \subset \operatorname{Int}(D)$ (če bi sledili prejšnji metodi bi dobili divergentni integral). Ideja je, da sedaj izračunamo integrala po notranji krožnici $\partial K((0,0), \varepsilon)$ ter po $D \setminus K((0,0), \varepsilon)$, nato pa po Greenovi formuli razberemo integral po krivulji kot razliko sledenjega in prvega. Definirajmo $D' = D \setminus K((0,0), \varepsilon)$, kar implicira $\partial D' = K \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \varepsilon^2\} = K \cup C$. Tako po Gaussovem izreku velja

$$\int_{D'} \operatorname{div}(\vec{f}) dS = \int_{\partial D'} \vec{f} \, d\vec{r} = \int_{K^+} f \, d\vec{r} + \int_{C^-} f \, d\vec{r}.$$

V prejšnjem primeru smo že izračunali divergenco polja $\vec{f}$ ter ugotovili, da je enaka 0. Tako je skrajno levi integral enak 0. Poskrbeti moramo le še za orientacijske težave, namreč ∂D je orientiran pozitivno, med tem ko je S orientiran negativno. Tako sledi, da je integral $\vec{f}$ po $K = \partial D$ enak integralu $\vec{f}$ po C.

$$\int_{K+} \vec{f}\,d\vec{r} = -\int_{C^-} \vec{f} d\vec{r} = \int_{C^-} \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} =$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon\sin(\varphi)\cdot\varepsilon\sin(\varphi) - (-\varepsilon\cos(\varphi))\cdot\varepsilon\cos(\varphi)}{\varepsilon^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi = 2\pi,$$

kjer smo negativno orientiran krog parametrizirali kot $x(\varphi) = -\varepsilon\cos(\varphi)$ ter $y(\varphi) = \varepsilon\sin(\varphi)$.

Tako za vse sklenjene gladke krivulje K, ki obkrožijo izhodišče, velja, da je

$$\int_{K+} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 2\pi$$

$\square$

Komentar 2.29

Kar smo storili je pretvorili integral po poljubni gladki sklenjeni krivulji na integral po krožnici. To smo lahko storili, saj sta objekta homotopna.

Literatura

[1] asist. prof. dr. Gregor Cigler. *Vaje iz Analize 2b*. 2025.