Analiza 2a

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

24. september 2025

Kazalo

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Notacija

Standardna baza $\mathbb{R}^n$ je $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, kjer se 1 pojavi na i-tem mestu. Definiramo lahko skalarni produkt vektorjev ter normo vektorja

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_i y_i \quad \text{ter} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2},$$

slednja porodi metriko

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Izrek 1.1: Heine-Borel

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ je kompaktna} \iff K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ je zaprta in omejena.}$$

Metriki d_1 in d_2 na prostoru M sta *topološko ekvivalentni*, če inducirata isto topologijo. Če pa obstajata $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, da za vse $x, y \in M$ velja:

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y),$$

pravimo, da sta *močno ekvivalentni*. Hitro pokažemo tudi, da sta močno ekvivalentni metriki tudi topološko ekvivalentni. Da je močna ekvivalentnost prav tako ekvivalenčna relacija vidimo preko naslednjega razmisleka:

$$\begin{aligned} \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y) \implies \alpha \leq \frac{d_2(x, y)}{d_1(x, y)} \leq \beta \implies \frac{1}{\alpha} \geq \frac{d_1(x, y)}{d_2(x, y)} \geq \frac{1}{\beta} \\ \implies \frac{1}{\alpha} d_2(x, y) \geq d_1(x, y) \geq \frac{1}{\beta} d_2(x, y) \end{aligned}$$

Topološko ekvivalentnost metrik $\|\cdot\|_\infty$ ter $\|\cdot\|_2$ je lahko dokazati, saj so odprte krogle v prvi evklidski kvadrati, v drugi pa standardne krogle.

Lema 1.2: Močna ekvivalenca $\|\cdot\|_\infty$ ter $\|\cdot\|_2$

S preprostimi premisleki v $\mathbb{R}^n$ dobimo:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$$

kar prav tako poda ekvivalentnost topologij.

Analogen premislek poda ekvivalenco vseh metrik $\|\cdot\|_p$ za $p \in \overline{\mathbb{R}}$. Zgornja lema zelo dobro motivira dejstvo, da se večina lepih lastnosti funkcij, kot sta na primer zveznost in odvedljivost, prenese na projekcije funkcij, kot jih definiramo na naslednji strani.

1.2 Zaporedja

Definicija 1.3

Zaporedje v $\mathbb{R}^n$ označujemo kot $\{a_m\}$, kjer je posamezni člen a_m oblike

$$a_m = (a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m).$$

Trditev 1.4

Naj bo $\{a_m\}$ zaporedje v $\mathbb{R}^n$. Zaporedje konvergira natanko tedaj, ko konvergirajo zaporedja $\{a_1^m\}, \{a_2^m\}, \ldots, \{a_n^m\}$. V primeru konvergence velja:

$$\lim_{m\to\infty} a_m = (\lim_{m\to\infty} a_1^m, \lim_{m\to\infty} a_2^m, \ldots, \lim_{m\to\infty} a_n^m).$$

Analogni izreki veljajo za obstoj stekališča ter za Cauchyjevost zaporedja $\{a_m\}$.

Trditev 1.5

Razlika odprte in zaprte množice je odprta v $\mathbb{R}^n$.

Oris dokaza. $\mathcal{O} \setminus \mathcal{Z} = \mathcal{O} \cap \mathcal{Z}^c$. □

Nasvet

Izračun limite oblike

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\|x\|},$$

kjer je $x \in \mathbb{R}^n$ vektor lahko prevedemo na vprašanje o limitah 1-dimenzionalnih funkcij tako, da najdemo ustrezno $\mathbb{C}^1$ funkcijo $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, ter izračunamo njen diferencial v taki točki $a \in \mathbb{R}^m$, da je

$$g(a + x) - g(a) = (Dga)x + f(x)$$

na neki okolici a. Tako je po definiciji diferenciala začetna limita enaka 0.

Seveda lahko poljubno limito, ki ni enaka 0 prevedemo na ničelno limito podobne funkcije na trivialen način. Tako pristop ni tako ezoteričen, kot se morda zdi na prvi pogled.

1.3 Zveznost

1.3.1 Zveznost funkcij

Praviloma imenujemo predpise $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcije, predpise $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pa preslikave.

Definicija 1.6

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ima v točki $a \in \mathbb{R}^n$ limito $A \in \mathbb{R}^m$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za $x \in D$ velja:

$$0 < \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - A\| < \varepsilon.$$

Lahko pokažemo, da ima funkcija v točki $a = (a_1, \ldots, a_n)$ limito $A = (A_1, \ldots, A_m)$ natanko tedaj, ko ima funkcija $f_j : D \to \mathbb{R}$, ki slika x v j-to komponento $f(x)$, v a limito A_j.

Definicija 1.7

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v notranji točki $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vse $x \in D$ velja:

$$\|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Preslikava $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v točki $a \in D$, ko velja standarden ε-δ pogoj. Zveznost lahko karakteriziramo tudi z limitami zaporedij. Analogno definiramo enakomerno zveznost. Kot pričakovano je zvezna funkcija na kompaktu enakomerno zvezna.

Trditev 1.8

Preslikava $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kjer je K kompaktna množica, je omejena, doseže maksimum ter minimum, ter v primeru povezanosti K doseže tudi vse vmesne vrednosti.

Vsota, skalarni večkratnik, produkt ter kompozitum zveznih funkcij $D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je zvezna. Projekcija na i-to komponento, ki jo označimo kot π_i, polinomi v n spremenljivkah ter racionalne funkcije v točkah, kjer imenovalec nima ničle, so zvezne funkcije.

Izrek 1.9

Če je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna v točki $a \in D$, je tudi funkcija $f_j : D_j \to \mathbb{R}$, kjer je $f_j : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ ter $D_j = \pi_i(D)$, ki jo dobimo s projekcijo f na eno izmed koordinatnih osi, zvezna funkcija v a_j.

Primer 1.10

Zveznost funkcij posamezne koordinate ne implicira zveznosti večdimenzionalne funkcije. To ilustrira naslednji primer:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dokaz. f je zvezna na $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Poglejmo še komponentni funkciji $f(x, b)$ ter $f(a, y)$. Če je eno izmed števil a, b enako 0 je po definiciji $f(x, y)$ tedaj komponentna funkcija ničelna, ki je zvezna. Če sta obe izmed spremenljivk a, b neničelni pa sta projekciji prav tako zvezni. Da $f(x, y)$ ni zvezna pa lahko vidimo, saj je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, x) = 1 \neq 0 = f(0, 0)$. □

Nasvet

Če limita funkcije v $\mathbb{R}^n$ obstaja, potem je neodvisna od »poti«, po kateri se približujemo tej točki. V zgornjem primeru vidimo, da ob izbiri poti, ki je premica $x = y$ dobimo protislovje.

Žal pa obrat zgornjega nauka ne velja - če limita obstaja po vseh premicah, ki potekajo skozi dano točko to še ne pomeni, da dejansko obstaja. To pokaže naslednji primer

Primer 1.11

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{če } x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{če } x = y = 0 \end{cases}$$

ki ima ničelno limito v $(0, 0)$ po vsaki premici $x = \alpha t$ ter $y = \beta t$, obenem pa je v vsaki točki oblike (t, t^2) različna od 0.

Standarden način dokazovanja nezveznosti funkcije je ponovno uporaba zaporedij, med tem ko se zveznosti lotimo z $\varepsilon - \delta$ definicijo ter podobnimi idejami.

1.3.2 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

$F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kjer je

$$f : x \mapsto [f_1(x), \ldots, f_m(x)]^T$$

Vidimo, da F določa m funkcij n spremenljivk.

Trditev 1.12

Naj bo $a \in D \subset \mathbb{R}^n$. Naj bo $F = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$. Preslikava F je zvezna v a natanko tedaj, ko so $f_1, \ldots, f_m$ zvezne v a.

Dokaz. Dokaz je standarden. □

Zgornji izrek nam omogoča, da se pri zveznosti omejimo le na funkcionale.

Lema 1.13: Linearne preslikave so omejene

Naj bo $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Trdimo, da obstaja $M \geq 0$, da za vse $x \neq 0$ velja

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M.$$

Pravzaprav je **omejenost linearne preslikave ekvivalentna njeni zveznosti**.

Oris dokaza. $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\| < \infty$, kjer enakost sledi po homogenosti A, neenakost pa po zveznosti linearnih preslikav (kar z lahkoto preverimo) ter kompaktnostni sfere v $\mathbb{R}^m$. Ker je količina $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ končna lahko definiramo $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, ki je dejansko norma na $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Ekvivalenca je iz desne v levo očitna, iz leve v desno pa jo implicira to, da je linearna preslikava zvezna natanko tedaj, ko je zvezna v 0, tam pa je zvezna, ker je Lipschitzova. □

Naj bo $f : D \subseteq R^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava, ki slika $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$ v $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m^(x)]^T$. Potem imenujemo funkcijo $f_j : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ki slika $x \in \mathbb{R}^n$ v $\pi_j \circ (x) = f_j(x)$ j**- ta komponenta funkcija**.

1.4 Odvod in diferencial

1.4.1 Parcialni odvod in diferenciabilnost funkcij

Iz Analize 1 vemo, da je odvod neka limita, diferenciabilnost pa poda neko afino aproksimacijo. To podedujemo.

Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ notranja točka D. Sledi, da obstaja tak $r > 0$, da so $(a_1, \ldots, a_j - r, \ldots, a_n)$ ter $(a_1, \ldots, a_j + r, \ldots, a_n)$ znotraj D.

Definicija 1.14

Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *parcialno odvedljiva* po spremenljivki x_j v točki $a = (a_1, \ldots, a_n)$, če obstaja limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{h},$$

oziroma, če je naslednja funkcija odvedljiva v točki a_j

$$x_j \mapsto f(a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_n).$$

Odvod v točki a po spremenljivki x_j označimo kot:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{ali} \quad f_{x_j}(a)$$

Vse elementarne funkcije so parcialno odvedljive, po vseh spremenljivkah, povsod kjer so definirane.

Definicija 1.15

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ter a notranja točka D. f je *diferenciabilna*, v točki a, če obstaja tak linearen funkcional $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da velja:

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0$$

Če tak L obstaja, je seveda enolično določen, kar pomeni, da lahko govorimo o diferencialu funkcije v določeni točki. Diferencial funkcije f v točki a označujemo kot $L = (Df)(a)$ ali kar (Dfa).

Trditev 1.16

Če je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciabilna v notranji točki $a = (a_1, \ldots, a_n)$, potem f zvezna v točki a ter je f v a parcialno odvedljiva po vseh spremeljivkah.
Pri tem velja, da je za $h = (h_1, \ldots, h_n)$:

$$(Dfa)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Opomnimo, da ker linearni funkcional zapišemo kot $1 \times n$ matriko, ter vektor kot $n \times 1$ matriko, potem izračun linearnega funkcionala ustreza »skalarnemu produktu« vrstice in stolpca. Zapišemo:

$$(Dfa) = [\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)] \quad \text{ter} \quad \vec{h} = [h_1, \ldots, h_n]^T,$$

ter

$$(Dfa)(h) = (Dfa)^T \cdot \vec{h}.$$

Oris dokaza. Zveznost f v a je očitna. Naj bo $L = (l_1, \ldots, l_n)$ ter $h = (h_1, 0, \ldots, 0)$, kjer $h_1 \neq 0$. Sledi:

$$f(a+h) = f(a) + l_1 h_1 + o(h) \implies \frac{f(a+h) - f(a)}{h_1} = l_1 + \frac{o(h)}{h_1},$$

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h_1} = l_1.$$

Analogen postopek dokaže odvedljivost tudi v ostalih komponentah □

Primer 1.17

Ali je funkcija, ki je parcialno odvedljiva v vseh spremenljivkah tudi diferenciabilna v dani točki? Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ta funkcija je parcialno odvedljiva v obeh spremenljivkah. Velja $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ ter $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Ker pa funkcija f ni niti zvezna v $(0,0)$, ne more biti tam diferenciabilna.

Primer 1.18

Opazujmo še

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

f je gotovo zvezna v $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Če zapišemo v polarnih koordinatah je

$$f(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi))=\begin{cases}2r\cos(\varphi)^2\sin(\varphi); r>0\\ 0; r=0\end{cases}$$

Ni težko preveriti, da je f parcialno odvedljiva povsod v obeh spremenjivkah. Če bi bila f diferenciabilna v $(0,0)$ bi bil $df_{(0,0)}=[0,0]$. Toraj bi moralo veljati, da je

$$f(h,k)=f(0,0)+df_{(0,0)}[h,k]^T+o(h,k).$$

Ker sta prva dva sumanda ničelna je $f(h,k)=o(h,k)$. Sledi, da naj bi bilo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|2r\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)|}{r},$$

kar je protislovno.

Izrek 1.19

Naj bo $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funkcija in naj bo $a\in D$ notranja točka. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremeljivkah v okolici točke a in so parcialni odvodi zvezni v a. Tedaj je f diferenciabilna v a.

Oris dokaza. Dokažemo za $n=2$, saj profesor trdi, da je dokaz v splošnem analogen. Naj bo $a=(a,b)$ ter (h,k) tak, da je $\|(h,k)\|\leq\varepsilon$. Sledi

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)-f(a,b)&=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)+f(a,b+k)-f(a,b)=\\&=f_x(a^*,b+k)\cdot h+f_y(a,b^*)\cdot k=f_x(a,b)\cdot h+\epsilon_1(h,k)+f_y(a,b)\cdot k+\epsilon_2(h,k)=\\&=f_x(a,b)\cdot h+f_y(a,b)\cdot k,\end{aligned}$$

kjer druga enakost sledi po dvakratni uporabi Lagrangevega izreka, tretja pa po zveznosti parcialnih odvodov. □

Komentar 1.20

Zgornji izrek pove, da če je $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ ter so funkcije

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{|h|}$$

zvezne kot funkcije n spremenljivk, potem je f diferenciabilna

1.4.2 Višji parcialni odvodi

Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija in je D odprta. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na D. Sledi, da so $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ tudi funkcije n spremenljivk, Tudi te so lahko parcialno odvedljive.

Preprosti zgled poda domnevo, da je $(f_x)_y = (f_y)_x$. *Mešani odvodi so enaki* oz. *operatorji odvoda komutirajo.*

Izrek 1.21

Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ parcialno odvedljiva po spremenljivkah x_j in x_k v okolici točke $a \in \mathbb{R}^n$. Naj sta parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ter $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ zvezna v okolici točke a ter sta prav tako $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ ter $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ obstoječa ter zvezna v okolici a. Potem sta odvoda v točki a enaka:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).$$

Oris dokaza. Dovolj je dokazati za funkcije dveh spremenljivk, saj pri parcialnem odvajanju vzamemo vse ostale spremenljivke za konstante. Definiramo

$$J = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$$

ter

$$g(x) = f(x, b+k) - f(x, b) \implies J = g(a+h) - g(a).$$

Po Lagrangevem izreku obstaja točka x^* med a in $a+h$, da velja $J = g'(x^*)h = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, b+k) - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, b)$, po ponovni uporabi Lagrangevega izreka dobimo

$$J = hk \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^*, y^*).$$

Enak postopek ponovino na funkciji

$$p(y) = f(a+h, y) - f(a, y) \implies J = p(b+k) - h(b),$$

ter dobimo $J = hk \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^{**}, y^{**})$. Ker smo izbrali neničelna h, k za ustrezno majhen $\sqrt{h^2 + k^2}$ velja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^{**}, y^{**}).$$

Ker pa smo predpostavili, da sta $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ter $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ zvezna, sledi želena enakost. $\square$

1.4.3 Diferenciabilnost preslikav

Definicija 1.22

Naj bo $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikava ter $a \in D$ notranja točka. F je *diferenciabilna* v a, če obstaja linearna preslikava $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da velja

$$F(a+h) = F(a) + L \cdot h + o(h), \quad \text{kjer} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Z analognim argumentom kot pri zveznosti pokažemo, da je diferenciabilnost preslikave F v a ekvivalentna diferenciabilnosti m-koordinatnih funkcij v točki a

Trditev 1.23

$f : D \to \mathbb{R}^m$ je diferenciabilna v točki $e \in D$, natanko tedaj, ko so diferenciabilne komponentne funkcije $f^i(x) : D \to \mathbb{R}$, za katere velja:

$$f^i(x) = \pi_i \circ f(x)$$

Podobno lahko pokažemo, da če so komponentne funkcije parcialno odvedljive v a po vseh spremenljivkah ter so parcialni odvodi zvezni v a, potem je f diferenciabilna v a.

Naloga 1.24

Tangentna ravnina na graf funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki (x_0, y_0) je določena z enačbo

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Tako je prazvaprav podana s točko $f(x_0, y_0)$ ter normalnim vektorjem

$$[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1]^T.$$

Trditev 1.25: Jacobijeva matrika

Matrika linearne preslikave $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ iz definicije diferenciabilnosti preslikav je oblike:

$$L = (Df)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Kot trivialna posledica trditve 1.4.3 sledi, da če so vse komponentne funkcije preslikave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah, ter so parcialni odvodi zvezni, potem diferencial obstaja.

Trditev 1.26

Če je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciabilna v točki a ter je $g : D' \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ diferenciabilna v točki $f(a)$, potem je $g \circ f$ diferenciabilna v a ter velja:

$$(Dg \circ f)(a) = (Dg)(f(a)) \cdot (Df)(a)$$

Dokaz. Dokaz je standarden. □

Kot zanimivost omenimo, da lahko na prostoru matrik definiramo normo $\|A\| = \sqrt{\sum a_{i,j}^2}$, kjer vsota teče po vseh členih. Upoštevajoč Cauchy-Schwartzevo neenakost lahko pokažemo, da je $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, kar nam omogoča, da npr. izračunamo diferencial preslikave $X \mapsto X^2$ na prostoru kvadratnih matrik v poljubni matriki.

1.5 Inverzna in implicitna preslikava

1.5.1 Inverzna preslikava

Definicija 1.27

- Preslikavi pravimo $\mathcal{C}^1$, če so vsi parcialni odvodi vseh koordinatnih funkcij zvezni na definicijskem območju.
- Preslikava je *difeomorfizem*, če je obrnljiva diferenciabilna preslikava katere inverz je diferenciabilna preslikava.

Primer 1.28

Funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana z $F : x \mapsto x^3$ je $\mathcal{C}^1$ ter ima globalen inverz, a ta ni zvezen v 0.

Izrek 1.29: O inverzni preslikavi

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ odprta množica in $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ razreda $\mathcal{C}^1$. Naj bo $a \in \Omega$ in naj bo $(Df)(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ izomorfizem (obrnljiva matrika). Potem obstaja okolica $\mathcal{U}$ točke a ter okolica $\mathcal{V}$ točke $f(a)$, da je $f\mid_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ difeomorfizem.

Po znanem postopku dokažemo, da je

$$\left(D((f\mid_{\mathcal{U}})^{-1})\right)(y) = \left((Df\mid_{\mathcal{U}})(f^{-1}(y))\right)^{-1}$$

Velja, da je Φ^{-1} lokalni inverz.

Komentar 1.30

V točkah (a, b), kjer je $(Df)(a, b) = 0$ f ne more biti lokalni difeomorfizem, saj diferencial odvoda ne more biti definiran.

Naloga 1.31

Denimo, da imamo preslikavo $F : (x, y) \mapsto (p_1(x, y), p_2(x, y)$, kjer sta p_1 in p_2 polinoma v dveh spremenljivkah. Kakšna je povezava med točkami (a, b), v katerih F ni lokalni difeomorfizem ter rešitvami sistema enačb $F(x, y) = F(a, b) = (C_0, D_0)$?

Rešitev. V 2-D primeru v točki (a, b) F ni lokalni difeomorfizem, če je determinanta matrike $\begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial p_1}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial p_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial p_2}{\partial y}(a,b) \end{bmatrix}$ ničelna. Sledi, da sta vrstici linearno odvisni. Obenem imamo sistem:

$$
\begin{aligned}
p_1(x,y) = C_0 &\implies \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \\
p_2(x,y) = D_0 &\implies \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0
\end{aligned}
$$

Ker sta vrstici matrike linearno odvisni je zgornji sistem »underdetermined«, zato nimamo enolične rešitve za sistem. $\square$

Izrek 1.32: Hadamardov izrek o globalnem inverzu

Naj sta M_1 ter M_2 gladki povezani n-dimenzionalni mnogoterosti. Če je $f : M_1 \to M_2$ $\mathcal{C}^1$ funkcija ter je:

- f je *proper*.
- Jacobijeva matrika f je povsod obrnljiva.
- M_2 je *simply connected*.

Potem je f homeomorfizem ter zato globalno obrnljiva.

Komentar 1.33

Posebni primer zgornjega relativno naprednega izreka je sledeče: Če je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gladka preslikava, ki ima povsod obrnljivo Jacobijevo matriko, ter je f *proper.*, potem je f homeomorfizem - ima gladek globalen inverz.
Preslikava med topološkima prostoroma je *proper*, če je praslika kompaktne množice prav tako kompaktna. Za metrične prostore je to ekvivaletno temu, da za vsako zaporedje $\{x_n\}$ ki pobegne proti neskončnosti (v vsakem kompaktu je kvečjemu končno mnogo členov $\{x_n\}$), tudi zaporedje $\{f(x_n)\}$ pobegne proti neskončnosti.

1.5.2 Implicitna funkcija

Če imamo sistem enačb:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n + \beta_{1,1}y_1 + \cdots + \beta_{1,m}y_m &= 0 \\ \vdots &= 0 \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n + \beta_{m,1}y_1 + \cdots + \beta_{m,m}y_m &= 0 \end{aligned}$$

je rešljivost slednjega za vsako izbiro vektorja $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ odvisna od neničelnosti determinante matrike: $\begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \dots & \beta_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m,1} & \dots & \beta_{m,m} \end{bmatrix}$ saj je sistem ekvivalenten

$$[\alpha_{ij}]x + [\beta_{ij}]y = 0 \implies y = -[\beta_{ij}]^{-1}[\alpha_{ij}]x$$

Motivira nas iskanje rešitev *nelinearnih* sistemov enačb. Denimo, da imamo zadosti lepo funkcijo $f(x, y)$ ter enačbo $f(x, y) = 0$. Želeli bi graf točk, ki zadoščajo enačbi v okolici poljubne točke (a, b) zapisali kot graf funkcije $y = \varphi(x)$. Geometrijski razmislek pove, da v primeru $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ to ne bo vedno mogoče. Iščemo zadosten pogoj za obstoj take funkcije.

Izrek 1.34: Osnovna oblika izreka o implicitni funkciji

Naj bo D odprta podmnožica $\mathbb{R}^2$ ter $(a, b) \in D$. Naj bo $f \in \mathcal{C}^1(D)$ ter velja:

- $f(a, b) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$

Sledi, da obstaja $\delta > 0$ ter $\varepsilon > 0$, da je $(a - \delta, a + \delta) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = I \times J \subseteq D$, ter da obstaja enolično določena $\mathcal{C}^1$ funkcija $\varphi : I \to J$, za katero velja:

- $\varphi(a) = b$
- $\forall\,(x, y) \in I \times J$ je $f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$.

Sledi, da so rešitve enačbe znotraj pravokotnika natanko točke grafa $y = \varphi(x)$. Ker je

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \implies \varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

Definicija 1.35

Naj bo $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda $\mathcal{C}^1$. Če je preslikava $x \mapsto F(x, y)$ odvedljiva za nek fiksen $y \in \mathbb{R}^m$, potem označimo njen odvod kot

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = (D_x F))(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Če je $f : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$, potem je

$$(D_x f)(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a,b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a,b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a,b) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a,b) \end{bmatrix}$$

ter analogno za $(D_y f)(a,b)$. Sledi, da je

$$(Df)(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a,b) & \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_m} \end{bmatrix}$$

Izrek 1.36: Izrek o implicitni funkciji

Naj bo $D^{\text{odp.}} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ter $(a,b) \in D$. Naj bo $F : D \to \mathbb{R}^m$ razreda $\mathcal{C}^1(D)$ ter:

- $F(a,b) = 0$
- $\det((D_y f)(a,b)) = \det(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)) \neq 0$,

potem obstaja okolica U točke a ter okolica V točke b, da je $U \times V \subseteq D$ ter taka enolično določena $\mathcal{C}^1$ preslikava $\varphi : U \to V$, da velja:

- $\varphi(a) = b$
- $\forall (x,y) \in U \times V$ je $F(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$
- $(D\varphi)(x) = -(D_y F)(x,y)^{-1} \circ (D_x F)(x,y)$ v ustrezno majhni okolici (a,b).

Dokaz. Dokažemo ga z uporabo izreka o inverzni preslikavi. □

Izrek nam pove naslednje: Če imamo m funkcij $n+m$ spremenljivk in želimo rešiti sistem enačb

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ \vdots &= 0 \\ f_m(x_1, \dots, xn, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

za spremenljivke $y_1, \dots, y_m$ - želimo izraziti vsak y_j kot funkcijo spremenljivk $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$.

Če so vse $\{f_i\}_{1 \leq i \leq m}$ v okolici točke (a,b) razreda $\mathcal{C}^1$ ter velja $f_i(a,b) = 0$ za vse i in je

$$(D_y f)(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}(a,b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(a,b) \end{bmatrix}$$

obrnljiva, potem obstajata okolici U točke a ter okolica V točke b, da za vsak $(x_1, \dots, x_n) \in U$ obstaja natanko en $(y_1, \dots, y_m) \in V$, ki reši željeni sistem enačb. Funkcije, $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, ki točki $(x_1, \dots, x_n)$ priredijo koordinato $y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, pa so prav tako razreda $\mathcal{C}^1$.

1.5.3 Vaje

Naj bosta $x \in \mathbb{R}^m$ in $y \in \mathbb{R}^n$ ter preslikava $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Enakost $f(x, y) = 0$ določna n enačb. Če je f razreda $\mathcal{C}^{r \geq 1}$. Želimo izraziti y kot funkcijo x (ali ekvivalentno vsakega izmed y_j kot funkcijo komponent vektorja x). Izrek o implicitni funkciji nam pove, da v primeru $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)) \neq 0$, kjer je $\frac{\partial f}{\partial y}$ desni $n \times n$ blok $n \times m$ matrike $(Df)(a, b)$, taka $\mathcal{C}^r$ funkcija φ obstaja.

1.6 Gladke podmnogoterosti

Motivira nas koncept krivulje v $\mathbb{R}^2$, ki jo lahko razumemo na več načinov: graf funkcije, množica ničel funkcije ali pa pot (preslikava $f : I \to \mathbb{R}^2$).

Mnogoterost bomo definirali kot analog druge definicije krivulje zgoraj, nato pa pokazali povezavo med temi različnimi perspektivami.

Naloga 1.37

Naj bo S zaprta množica v $\mathbb{R}^n$ ter $f : x \mapsto d(x, S)$, kjer je razdalja evklidska. Pokaži, da je f zvezna ter $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\} = S$.

Ker ne želimo, da so vse zaprte množice mnogoterosti, je naslednja definicija naravna.

Definicija 1.38

Točka $a \in \mathbb{R}^p$ je *regularna* točka funkcije $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, če je f $\mathcal{C}^1$ na okolici a ter je $(Df)(a)$ največjega možnega ranka $(\min\{p, q\})$.

Če je $p < q$ je $(Df)(a)$ injektivna, če pa je $q < p$ pa je $(Df)(a)$ surjektivna.

Definicija 1.39

Gladka podmnogoterost dimenzije m v prostoru $\mathbb{R}^n$ je množica M z naslednjo lastnostjo: za vsak $a \in M$ obstaja funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$, ki je regularna na okolici $\mathcal{O}$ točke a, ter velja, da je

$$M \cap \mathcal{O} = \{x | F(x) = 0\} \cap \mathcal{O}.$$

V okolici točke a je M tako množica ničel neke regularne funkcije.

Primer 1.40

Če je $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ razreda $\mathcal{C}^1$ na odprti množici $\mathcal{O}$, potem je graf te funkcije gladka m-dimenzionalna podmnogoterost.

Izrek 1.41

Če je M m-dimenzionalna gladka podmnogoterost, potem je lokalno graf $\mathcal{C}^1$ funkcije. Natančneje, za vsako $a \in M$ obstaja okolica a ter ustrezna preureditev koordinat M, da je M graf funkcije $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ razreda $\mathcal{C}^1$.

Oris dokaza. Sledi po izreku o implicitni funkciji. □

Komentar 1.42

Denimo, da našo mnogoterost definirajo ničle polinomskega funkcionala $p(x_1, \ldots, x_n)$ s členom stopnje 1 (npr. $y = x^2$), ki je maksimalnega ranga v okolici točki $(0, \ldots, 0)$. Isto mnogoterost definira tudi enačba $p(x_1, \ldots, x_n)^3 = 0$, a Jacobijeva matrika slednje ni polnega ranka, saj so vsi parcialni odvodi, evalvirani v 0, enaki 0 (Jacobijeva matrika $f(x, y) = y^3 - x^6$ je $[0, 0]$ v točki $(x, y) = (0, 0)$).
Sledi: **Neobrnljivost diferenciala ni zadosten pogoj, da množica v dani točki ni mnogoterost.**

Izrek 1.43: Obstoj lokalne parametrizacije

Naj bo M gladka m-dimenzionalna mnogoterost v $\mathbb{R}^n$ ter $a \in M$. Obstaja funkcija $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, ki je regularna na odprti množici $G \subseteq \mathbb{R}^m$, da je $\varphi(G)$ okolica a v M. Obstaja tudi funkcija $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ki je $\mathbb{C}^1$ na okolici $a \in \mathbb{R}^n$, ki zadošča

$$\begin{aligned} P \circ \varphi &= I \quad \text{na okolici} \quad Pa \in \mathbb{R}^m \quad \text{ter} \\ \varphi \circ P &= I \quad \text{na okolici} \quad a \in M. \end{aligned}$$

Opozorimo, da je $\varphi(G)$ okolica a znotraj M, tj. obstaja okolica $G_n \in \mathbb{R}^n$, da je $G = M \cap G_n$. Inverzna funkcija P je definirana in razreda $\mathbb{C}^1$ na G_n, a njena restrikcija na M je prava inverzna funkcija φ.

Oris dokaza. Po izreku 1.6 obstaja funkcija $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$, da je na okolici a G_n $M = \{x | x_i = f_i(\overline{x})\ \forall i > m\}$, po ustrezni permutaciji koordinat. Nastavimo $\varphi : t \mapsto (t, f(t))$, očitno je φ polnega ranga v okolici a. $P : t \mapsto \overline{t}$ pa je njen inverz. □

Komentar 1.44

Kombinacija zgornjega in spodnjega izreka poda dobro metodo za dokaz, da množica ni mnogoterost. Če najdemo funkcijo $\psi : \mathbb{R}^m \to M$, ki je regularna v točki t_0, potem mora ta funkcija biti lokalna parametrizacija mnogoterosti M v točki $\psi(t_0)$, ki pa je po zgornjem izreku obrnljiva. Če pa z uporabo izreka o inverzni preslikavi ugotovimo, da ψ ni obrnljiva, potem sledi, da M ni mnogoterost.

Izrek 1.45

Naj bo M gladka podmnogoterost dimenzije m v $\mathbb{R}^n$. Naj bo $\psi : \mathbb{R}^m \to M$ regularna v t_0. Potem je ψ lokalna parametrizacija M v $a = \phi(t_0)$.

Seveda je nujno, da funkcija ψ slika v M, saj bi v nasprotnem primeru $\psi(t_0)$ ležala zunaj mnogoterosti, kar je seveda nemogoče za parametrizacijo.

1.7 Taylorjev izrek in ekstremi

1.7.1 Taylorjev izrek

Izrek 1.46: Taylor

Naj bo $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$ zvezna funkcija in D odprta podmnožica $\mathbb{R}^n$. Naj bosta $a \in D$ ter $h \in \mathbb{R}^n$ taka, da celotna daljica $a + th$ za $t \in [0,1]$ leži v D. Potem obstaja $\theta \in (0,1)$, da je

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + \frac{1}{(k+1)!}(D_h^{k+1} f)(a + \theta h)$$

ter je

$$(D_h f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} h_i$$

Dokaz. Funkcija $\varphi(t) = f(a+th)$ je razreda $\mathcal{C}^{k+1}$ na $[0,1]$. Njen Taylorjev razvoj je

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}(1-0)^i + \frac{1}{(k+1)!}\varphi^{(k+1)}(\theta).$$

Obenem velja $\varphi^{(i)}(t) = (D_h^i f)(a+th)$ □

1.7.2 Ekstremi

Trditev 1.47

Zvezna funkcija na kompaktu doseže minimum in maksimum.

Definicija 1.48

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta. Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna.

- Točka $a \in D$ je *lokalni maksimum* f, če obstaja $r > 0$, da je za vse $x \in D \cap K(a,r)$
$$f(x) \leq f(a).$$
- Točka $a \in D$ je *globalni maksimum* f, če za vse $x \in D$ velja
$$f(x) \leq f(a).$$

Analogno definiramo *lokalni minimum* ter *globalni minimum.*

1.7.3 Potrebni pogoji za nastop ekstremov

Trditev 1.49

Če $f : D \to \mathbb{R}$ v a doseže lokalni ekstrem je $(Df)(a) = 0$.

Dokaz.
$$\varphi_i(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots)$$
dosežejo lokalni ekstrem v a_i. □

Definicija 1.50

Naj bo $f : D \to R$ razreda $\mathcal{C}^2(D)$. *Hessejeva matrika* f v točki a je
$$(Hf)(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

Komentar 1.51

Po Taylorjevem izreku velja
$$f(a+h) = f(a) + (Df)(a)h + \frac{1}{2}\langle (H_f)(a+\theta h)h, h\rangle.$$

Izrek 1.52

Naj bo $f \in \mathcal{C}^2(D)$, kjer je D odprta podmnožica $\mathbb{R}^n$ ter $a \in D$.

- Če ima f lokalni minimum v a je $(Hf)(a) \geq 0$.
- Če ima f lokalni maksimum v a je $(Hf)(a) \leq 0$.

Dokaz. Tudi funkcija $\varphi(t) = f(a+th)$ ima lokalni minimum v $t = 0$ (φ je definirana na zadosti majhni okolici a). Ker je $\varphi \in \mathbb{C}^2$ je $\varphi'(0) = 0$ ter $\varphi''(0) \geq 0$. Obenem je
$$0 \leq \varphi''(t) = \langle (Hf)(a+th)h, h\rangle.$$
□

1.7.4 Zadostni pogoji za nastop ekstremov

Izrek 1.53

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $f \in \mathcal{C}^2(D)$ in a stacionarna točka f.

- Če je $(Hf)(a) > 0$, ima f v a strogi lokalni minimum.
- Če je $(Hf)(a) < 0$, ima f v a strogi lokalni maksimum.
- Če ima $(Hf)(a)$ tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti, f v a nima lokalnega ekstrema.

Dokaz. Tretja točka sledi iz prejšnjega izreka. Dokažemo prvo točko, druga je analogna. Za vsak $h \in \mathbb{R}^n$, ki je ustrezno majhne velikosti, velja
$$f(a+h) - f(a) = (Df)(a)h + \frac{1}{2}\langle (Hf)(a+\theta h)h, h\rangle = \frac{1}{2}\left\|h\right\|^2 \langle (Hf)(a+\theta h)v, v\rangle,$$

kjer je $v = \frac{h}{\|h\|}$. Naj bo $E(h) = (Hf)(a + \theta h) - (H_f)(a)$. Sledi

$$f(a + h) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2} \left(\langle (Hf)(a)v, v\rangle + \langle E(h)v, v\rangle \right).$$

Ker je $(Hf)(a) > 0$ in je $\{v \in \mathbb{R}^n | \, \|v\| = 1\}$ kompaktna, obstaja $m > 0$, da je $\langle (Hf)(a)v, v\rangle \geq m$. Ker je $f \in \mathcal{C}^{\in}(D)$ je (H_f) zvezna, zato je $\lim_{h \to 0} E(h) = 0$ (saj je $\theta \in (0, 1)$). Tako za dovolj majhne h velja $|\rangle E(h)v, v\rangle| \leq \frac{m}{2}$. Posledično je

$$f(a + h) - f(a) \geq \frac{\|h\|^2}{2} \frac{m}{2} > 0 \quad \forall \; h \neq 0.$$

□

Trditev 1.54

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta ter $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna. Naj bo a stacionarna točka f.

- Če je $\det((H_f)) > 0$

2 Integral s parametrom

Definicija 2.1

Množica X je *lokalno kompaktna*, če za vsak $x \in X$ obstaja $r > 0$, da je $X \cap \overline{K(x,r)}$ kompaktna.

Izrek 2.2: Zveznost integrala s parametrom

Naj bo $I = [a, b]$ ter X lokalno zaprta množica ter $f : I \times X \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je $F : I \times I \times X \to \mathbb{R}$ definirana z

$$F(x, u, v) = \int_u^v f(x, t)dt$$

zvezna funkcija.

Oris dokaza. Dokažemo zveznost v točki $F(x_0, u_0, v_0)$. V absolutno vrednost vsilimo $\int_{u_0}^{v_0} f(x, t)dt$, nato uporabimo kompaktnost. □

Izrek 2.3: Odvajanje integrala s parametrom

$f : [a, b] \times (c, d) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija ter naj bo f parcialno odvedljiva na 2 spremenljivko z zveznim parcialnim odvodom. Potem velja:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(t, x)dt\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt$$

Oris dokaza. Od kandidata odštejemo diferenčni kvocient, nato uporabimo Lagrangev izrek ter uporabimo kompaktnost. □

Izrek 2.4: Fubini

Naj bo $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

Oris dokaza.

$$\psi(t) = \int_a^t \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx \quad \text{ter} \quad \Phi(t) = \int_c^d \int_a^t f(x, y)\, dx\, dy$$

imata enak odvod ter zavzameta isto vrednost v točki 0. □

Definicija 2.5: Enakomerna konvergence integralov

Integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

je *enakomerno konvergenten*, če $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $b > a$, da je za vse $c > b$

$$\left|\int_c^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Ekvivalentno je limita funkcij

$$F_b(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \longrightarrow F(y)$$

enakomerna.

Trditev 2.6: Weierstraß

Naj bo $f : [a,\infty) \times Y \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je za vsak $y \in Y$ zvezna kot funkcija prve spremenljivke. Če obstaja taka zvezna funkcija $\varphi : [a,\infty) \to \mathbb{R}^+$, da velja:

- $\forall (x,y) \in [a,\infty) \times Y : |f(x,y)| \leq \varphi(x)$.
- $$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx < \infty.$$

Tedaj je

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

enakomerno konvergentna funkcija na Y.

Oris dokaza. Očitno. □

Komentar 2.7

Ker sta zveznost ter odvedljivost lokalna pojava lahko včasih od integralov zadoščamo le *lokalno enakomerno konvergenco*.

Izrek 2.8: Zveznost izlimitiranega integrala s parametrom

Naj bo funkcija $f : [a,b] \times Y \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija ter Y lokalno kompaktna. Če

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

konvergira lokalno enakomerno na Y je F zvezna na Y

Oris dokaza. Lokalna enakomerna limita zveznih funkcij je lokalno zvezna (iz Analize 1 ter lokalnosti), zato je tudi globalno zvezna. □

Izrek 2.9: Fubini 1

Naj bo $f : [a, \infty) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

konvergira enakomerno na $[c, d]$. Potem je

$$\int_c^d F(y)\, dy = \int_a^\infty \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

Dokaz. Vemo, da je limita $\lim_{b\to\infty} F_b(y) \longrightarrow F(y)$ enakomerna na $[c, d]$. Iz Analize 1 vemo, da je integral limite enakomerno konvergentnih funkcij limita integralov funkcij, zato sledi

$$\int_c^d F(y)\, dy = \int_c^d \lim_{b\to\infty} F_b(y)\, dy = \lim_{b\to\infty} \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \\ \lim_{b\to\infty} \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^\infty \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

□

Izrek 2.10: Fubini 2

Naj bo $f : [a, \infty) \times [c, \infty) \to [0, \infty)$ zvezna. Če integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

konvergira enakomerno na $[c, \infty)$ ter integral

$$G(x) = \int_c^\infty f(x, y)\, dy$$

konvergira enakomerno na $[a, \infty)$ ter če je

$$\int_c^\infty \int_a^\infty f(x, y)\, dx\, dy < \infty,$$

potem je

$$\int_a^\infty \int_c^\infty f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^\infty \int_a^\infty f(x, y)\, dx\, dy.$$

Oris dokaza.

$$\int_a^b G(x)\, dx \le \int_c^\infty \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy \le \int_c^\infty \int_a^\infty f(x, y)\, dx\, dy.$$

Iz limite dobimo

$$\int_a^\infty G(x)\, dx \le \int_c^\infty F(y)\, dy.$$

Analogno v drugo smer ter dobimo enakost. □

Izrek 2.11: Fubini 3

Naj bo $f : [a, \infty) \times [c, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija ter naj

$$y \mapsto \int_a^\infty |f(x, y)|\, dx$$

konvergira enakomerno na $[c, \infty)$, naj

$$x \mapsto \int_c^\infty |f(x, y)|\, dy$$

konvergira enakomerno na $[a, \infty)$, ter naj bo

$$\int_a^\infty \int_c^\infty |f(x, y)|\, dy\, dx < \infty.$$

Tedaj je

$$\int_a^\infty \int_c^\infty f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^\infty \int_a^\infty f(x, y)\, dx\, dy.$$

Dokaz. Po Weierstraßovem testu sta tudi $F(y) = \int_c^\infty f(x, y)\, dx$ ter $G(x) = \int_c^\infty f(x, y)\, dy$ enakomerno konvergentni. Vemo, da je

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b G(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_c^\infty F_b(y)\, dy.$$

Želimo omejiti naslednji izraz:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^\infty G(x)\, dx - \int_c^\infty F(y)\, dy \right| &= \left| \lim_{b\to\infty} \int_c^\infty F_b(y)\, dy - \int_c^\infty F(y)\, dy \right| \\ &\leq \left| \int_d^\infty F_b(y)\, dy \right| + \left| \int_d^\infty F(y)\, dy \right| + \left| \int_c^d F_b(y) - F(y)\, dy \right|. \end{aligned}$$

Za prva dva sumanda poskrbi obstoj dvojnega integrala $|f|$, za tretjega pa poskrbi enakomerna konvergenca integrala $F(y)$. $\square$

Izrek 2.12: Odvajanje izlimitiranega integrala s parametrom

Naj bo $f : [a, \infty) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ zvezna ter parcialno odvedljiva na 2. spremenljivko, ter naj ta parcialni odvod zvezen kot funkcija obeh spremenljivk. Naj za vse $y \in (c, d)$ obstaja integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

ter naj

$$y \mapsto \int_a^\infty f_y(x, y)\, dx$$

konvergira lokalno enakomerno na (c, d). Tedaj je $F \in \mathcal{C}^1$ ter je

$$\frac{d}{dy} \left(\int_a^\infty f(x, y)\, dx \right) = \int_a^\infty f_y(x, y)\, dx.$$

Oris dokaza. Naj bo

$$G(y) = \int_a^\infty f_y(x,y)\,dx \quad \text{ter} \quad \Psi(y) = \int_{y_0}^y G(t)\,dt.$$

$\Psi \in \mathcal{C}^1(c,d)$. Po osnovnem izreku analize sledi:

$$\Psi(y) = \int_{y_0}^y \int_a^\infty f_y(x,y)\,dx\,dt = \int_a^\infty \int_{y_0}^y f_y(x,y)\,dt\,dx = \int_a^\infty f(x,y) - f(x,y_0)\,dx = F(y) - F(y_0).$$

Tako je odvod $\Psi(y)$ enak obema želenima izrazoma. □

2.1 Znani integrali

Trditev 2.13. *Za $a \neq 0$ ima funkcija*

$$f(x) = x^\alpha e^{-x}$$

maksimum v točki $x = \alpha$.

Trditev 2.14

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Dokaz.

$$F(a) = \int_a^\infty e^{-ax}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

F konvergira enakomerno na $[c,\infty)$ (za $c > 0$), zato konvergira enakomerno na $(0,\infty)$, želimo pa pokazati, da konvergira enakomerno na $[0,\infty)$. Poslužimo se naslednje trditve iz Analize 1.

Trditev 2.15. *Če je funkcija g zvezno odvedljiva, padajoča, ter nenegativna, potem obstaja tak $c \in [a,b]$, da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx.$$

Funkcija $\frac{e^{-ax}}{x}$ ustreza pogojem za funkcijo g, funkcija sin pa ustreza pogojem za funkcijo f. Sledi:

$$\int_\alpha^\beta e^{-ax}\frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{e^{-a\alpha}}{\alpha}\int_\alpha^\beta \sin(x)\,dx \leq 2\frac{e^{-a\alpha}}{\alpha} \leq \frac{2}{\alpha}.$$

Sledi, da F konvergira enakomerno na $[0,\infty)$ in je tam zvezna. Tako je

$$F(0) = \lim_{a\to 0} F(a).$$

Kandidat za odvod F je funkcija

$$-\int_0^\infty e^{-ax}\sin(x)\,dx,$$

ki očitno konvergira enakomerno na $(0,\infty)$. Tako je F res odvedljiva z zgornjim odvodom, ki ga lahko z integriranjem po delih evalviramo kot

$$F'(a) = -\frac{1}{1+a^2} \implies F(a) = -\arctan(a) + C.$$

Ker je $\lim_{a\to\infty} F(a) = 0$ sledi, da je $C = \frac{\pi}{2}$, kar pomeni, da je $F(0) = \frac{\pi}{2}$. $\square$

Trditev 2.16

Funkcija

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

je zvezna na $(0,\infty)$.

Dokaz.

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx + \int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

Trdim, da je prvi integral lokalno enakomerno konvergenten, drugi pa je enakomerno konvergenten. Pokažemo enakomerno konvergenco prvega integrala na množicah oblike $[a,\infty)$ za $a>0$.

$$\left|\int_0^c x^{s-1}e^{-x}\,dx\right| \leq \left|\int_0^c x^{a-1}e^{-x}\,dx\right| \leq \left|\int_0^c x^{\frac{a}{2}}\cdot x^{\frac{a}{2}-1}e^{-x}\,dx\right| \leq \left|\int_0^c x^{\frac{a}{2}}\cdot\left(\frac{a}{2}-1\right)^{\frac{a}{2}-1} e^{\frac{a}{2}-1}\,dx\right|$$

Na drugi množici imamo enakomerno konvergenco, ker je maksimum funkcije $x^{s-1}e^{-\frac{x}{2}}$ končen, kar pomeni, da lahko integrand omejimo z $M\cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

$\square$

Trditev 2.17

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^\infty x^{s-1}(\ln x)^k e^{-x}\,dx$$

Dokaz. Γ je zvezna ter na $(0,\infty)$ konvergira enakomerno. Kandidata za odvod ločimo na dva dela

$$\int_0^1 x^{s-1}(\ln x)^k e^{-x}\,dx \quad \text{ter} \quad \int_1^\infty x^{s-1}(\ln x)^k e^{-x}\,dx,$$

prvi konvergira lokalno enakomerno na $(0,\infty)$, drugi pa konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$, kar vemo iz zgornjega dokaza. $\square$

Trditev 2.18

Funkcija $\log(\Gamma)$ je konveksna.

Dokaz.

$$\Gamma(\frac{x+y}{2}) = \int_0^\infty t^{\frac{x+y}{2}-1}e^{-t}\,dx = \int_0^\infty \left(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)\left(t^{\frac{y-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)\,dx \leq$$
$$\left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{2}} = \Gamma(x)^{\frac{1}{2}}\Gamma(y)^{\frac{1}{2}}$$

□

Trditev 2.19

- $$\beta(p,q) = \beta(q,p) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad \text{za } p,q > 0$$
- $$\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx$$
- $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^p\cos(x)^q\,dx = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right)$$

Oris dokaza. Ustrezni substituciji sta $t = \frac{x}{1-x}$ ter $t^2 = x$ □

Med drugim velja

Trditev 2.20

$$\beta(p,1-p) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1+x)}\,dx, \quad \beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi, \quad \beta(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$

Izrek 2.21

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Dokaz.

$$\beta(p,q)\Gamma(p+q) = \left(\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt\right)\left(\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x}\,dx\right) = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left(\frac{x}{1+t}\right)^{p+q-1}\cdot\frac{e^{-x}t^{p-1}}{1+t}\,dx\right)dt$$

Substituiramo $x = (1+t)u$, kar pretvori zgornji integral v

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty u^{p+q-1}e^{-(1+t)u}t^{p-1}\,du\right)\,dt = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty (ut)^{p-1}e^{-ut}\,dt\right)u^q e^{-u}\,du =$$
$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty v^{p-1}e^{-v}\,dv\right)u^{q-1}e^{-u}\,du,$$

kjer smo v zadnjem koraku uporabili substitucijo $ut = v$. □

Izrek 2.22: Stirling

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Gamma(s+1)}{s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}} = 1.$$

Dokaz. V definicijo $\Gamma(s+1)$ substituiramo $x = (1+u)s$ ter dobimo

$$\Gamma(s+1) = \int_{-1}^{\infty} (1+u)^s s^{s+1} e^{-s} e^{-su}\, du = s^s e^{-s}\sqrt{s}\left(\sqrt{s}\int_{-1}^{\infty}\left((1+u)e^{-u}\right)^s\, du\right)$$

$\square$

2.2 Vaje

Trditev 2.23: Feynmanov trik

- $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+2x+x^2)}{1+x^2}dx,$$
  zato definiramo
  $$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(2x+t(1+x^2))}{1+x^2}dx \implies$$
  $$I'(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2x+t(1+x^2)}dx = \frac{1}{4}\frac{\ln(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t})}{\sqrt{1-t^2}}$$
- Za
  $$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$$
  definiramo
  $$I(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}dx,$$
  ki je rešljiv z uporabo integracije po delih. Dodatni faktor e^{-xt} nam pokrajša x iz števca; morda bolj intuitivna vpeljava parametra t v argument sinusa ne vodi do rešitve, saj po odvajanju dobimo divergentni integral.

Trditev 2.24

Če je v integrandu faktor oblike $\frac{1}{1+x^k}$ ali faktor oblike $\frac{1}{1-x^k}$ lahko uporabimo formulo o vsoti geometrijske vrste ter se znebimo imenovalca. Vrsta ter integral komutirata, če so meje integrala znotraj območja absolutne konvergence geometrijske vrste.

3 Riemmanov integral v $\mathbb{R}^n$

Definicija 3.1

Omejena funkcija $f : K \to \mathbb{R}$ je *Darbouxovo* integrabilna, če sta supremum spodnjih Darbouxovih vsot ter infimum zgornjih Darbouxovih vsot enaka.

Definicija 3.2

Omejena funkcija $f : K \to \mathbb{R}$ je *Riemmanovo* integrabilna, če obsta limita Riemmanovih vsot, ko gre dolžina stranice največjega kvadra v delitvi proti 0.
Natančneje to pomeni, da obstaja tak $I_R \in \mathbb{R}$, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev kvadra K D, stranice kvadrov katere so pod δ, ter vsako izbiro testnih točk $\{t_i\}$ velja

$$\left| I_R - \sum_{K_i \in D} f(t_i)V(K_i) \right| < \varepsilon$$

Trditev 3.3

Naslednje trditve so ekvivalentne za omejeno funkcijo $f : K \to \mathbb{R}$

- f je integrabila po Darbouxu.
- f je integrabilna po Riemmanu.
- Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja delitev D, da je $S(D) - s(D) < \varepsilon$.

Dokaz. Prva točka je očitno ekvivalentna tretji. Ločimo na dva dela

- (2) $\implies$ (3). Naj bosta $\frac{\varepsilon}{4}$ ter δ kot v definiciji Riemmanove integrabilnosti ter D delitev, stranice kvadrov katere so pod δ. Na kvadru K_i izberemo tako testno točko t_i, da je
$$\left| \sup_{K_i}(f) - f(t_i) \right| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot V(K)}.$$
Tako je
$$\left| \sum_{K_i \in D} f(t_i)V(K_i) - \sum_{K_i \in D} \sup_{K_i}(f)V(K_i) \right| < \left| \sum_{K_i \in D} \left(f(t_i) - \sup_{K_i}(f) \right) V(K_i) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$
Ker je $R(f, D, \{t_i\})$ v $\frac{\varepsilon}{4}$ okolici I_R je $S(D)$ v $\frac{\varepsilon}{2}$ okolici I_R. Analogno izberemo druge testne točke zadosti blizu infimuma f na kvadru K_i ter s podobnim izračunom ugotovimo, da je $s(D)$ v $\frac{\varepsilon}{2}$ okolici I_R. Tako sta $S(D)$ ter $s(D)$ v ε okolici drug drugega, kar smo želeli.

- (3) $\implies$ (2). Najprej pokažemo naslednjo pomožno trditev.

  Trditev 3.4. *Naj bo D delitev kvadra K ter $\varepsilon > 0$. Potem obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev kvadra K D_0, stranice kvadrov katere so pod δ, velja, da je volumen vseh kvadrov D_0, ki niso v celoti vsebovani znotraj nekega kvadra D, največ ε.*

Dokaz. Naj bo T množica vseh stranic, ki si jih delijo kvadri v D ter naj $V(T)$ označuje njen $n-1$-dimenzionalni volumen. Naj bo $\delta = \frac{\varepsilon}{V(T)}$. Naj bo U množica vseh kvadrov D_0, ki niso v celoti vsebovani v kvadrih iz D. Velja

$$\sum_{K_i \in U} V(K_i) = \sum_{K_i \in U} V(\text{presečišče } K_i \text{ z mejo med kvadroma iz } D) \cdot \text{širina } K_i <$$
$$\delta \sum_{K_i \in U} V(\text{presečišče } K_i \text{ z mejo med kvadroma iz } D) < \delta V(T) < \varepsilon,$$

kjer predzadnja neenakost sledi iz opazke, da dva kvadra iz U ne moreta sekati meje med dvema kvadroma iz D na istem območju. □

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben ter D taka delitev, da sta $s(D)$ ter $S(D)$ v $\frac{\varepsilon}{2}$ okolici I_D. Uporabimo zgornjo trditev za $\frac{\varepsilon}{2|M|}$, kjer je $M = \sup_K(f)$. Naj bo $D_0 = \{K_i\}_{i=1}^N$ neka delitev K ter $\{t_i\}$ neka usklajena izbira testnih točk, kjer so stranice kvadrov v D_0 krajše od δ, ki ga poda zgornja trditev. Naj bodo kvadri, ki niso v celoti vsebovani znotraj kvadrov D kvadri $K_1, \ldots, K_m$ Pokažemo, da je Riemmanova vsota v $2 \cdot \varepsilon$ okolici I_D.

$$\sum_{i=1}^N f(t_i)V(K_i) = \sum_{i=1}^m f(t_i)V(K_i) + \sum_{m+1}^N f(t_i)V(K_i) \le M \sum_{i=1}^m V(K_i) + S(D) \le 2 \cdot \varepsilon + I_D$$

$$\sum_{i=1}^N f(t_i)V(K_i) = \sum_{i=1}^m f(t_i)V(K_i) + \sum_{m+1}^N f(t_i)V(K_i) \ge \inf_K(f) \sum_{i=1}^m V(K_i)$$

□

Izrek 3.5: Fubini

Naj sta $A \in \mathbb{R}^n$ ter $B \in \mathbb{R}^m$ kvadra ter $f : A \times B \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Naj bo za vsak $x \in A$ na B integrabilna funkcija $f^{(x)}(y) = f(x, y)$. Tedaj je na A integrabilna funkcija

$$g(x) : x \mapsto \int_B f(x, y)\, dy$$

ter velja

$$\int_{A \times B} f(x, y)\, dy\, dx = \int_A \int_B f(x, y)\, dy\, dx.$$

Dokaz. Naj bosta $D_A = \{A_1, \ldots, A^N\}$ ter $D_B = \{B_1, \ldots, B_M\}$ zaporedoma delitvi kvadrov A in B. Potem je $\{K_{i,j} = A_i \times B_j \mid 1 \le i \le N, 1 \le j \le M\}$ delitev kvadra $A \times B$. Velja

$$\inf_{K_{i,j}}(f) \le \inf_{B_j}(f^{(x)}) \quad \text{ter} \quad \sup_{K_{i,j}}(f) \ge \sup_{B_j}(f^{(x)}).$$

Tako sledi:

$$\sum_{j=1}^M \inf_{K_{i,j}}(f)V(B_j) \le s(f^{(x)}, D_B) \le S(f^{(x)}, D_B) \le \sum_{j=1}^M \sup_{K_{i,j}}(f)V(B_j)$$

Ker zgornje neenakosti veljajo za vse x sledi tudi

$$\sum_{j=1}^M \inf_{K_{i,j}}(f)V(B_j) \le \inf_{A_i}(g(x)) \le \sup_{A_i}(g) \le \sum_{j=1}^M \sup_{K_{i,j}}(f)V(B_j)$$

Neenakost pomnožimo z $V(A_i)$ ter seštejemo N takih neenakosti. Tako dobimo

$$s(f, D_A \times D_B) \leq s(g, D_A) \leq S(g, D_A) \leq S(f, D_A \times D_B),$$

kar pomeni, da je g integrabilna na A z želenim integralom. $\square$

3.1 Prostornina

Definicija 3.6

Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena s kvadrom K ter $f : A \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Definiramo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \mid x \in A \\ 0 \mid x \notin A \end{cases}$$

Pravimo, da je f integrabilna na A, če je $\tilde{f}$ integrabilna na K. Integral f pod A je tedaj enak integralu $\tilde{f}$ pod K.

Komentar 3.7

Definicija je dobra - enak integral dobimo neodvisno od izbire K.

Definicija 3.8

Karakteristična funkcija množice A je funkcija

$$\chi_A = \begin{cases} 1 \mid x \in A \\ 0 \mid x \notin A \end{cases}$$

Omejena množica $A \subset \mathbb{R}^n$ ima *Jordanovo prostornino*, če je karakteristična funkcija množice A integrabilna.

Definicija 3.9

Definiramo zunanji volumen omejene množice A kot supremum zgornjih Darbouxovih vsot karakteristične funkcije A. Analogno definiramo notranji volumen. Vsaka omejena množica ima notranji in zunanji volumen, a le tiste z Jordanovo prostornino imajo enak notranji ter zunanji volumen.

Trditev 3.10

Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena. A ima volumen 0 natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstajajo taki kvadri $Q_1, \ldots, Q_N$, da je

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} Q_i \quad \text{ter} \quad \sum_{i=1}^{N} V(Q_i) < \varepsilon$$

Dokaz. Očitno. $\square$

Trditev 3.11

Končna unija množic z ničelnim Jordanovim volumnom ima Jordanov volumen 0.

Dokaz. Očitno. □

Trditev 3.12

Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ kvader ter $f : K \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Tedaj ima graf f ničelni volumen v $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstaja $D = \{K_i\}$, ki je delitev K, da je

$$S(D) - s(D) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \sup_K |f|}.$$

Izberemo pokritje grafa s kvadri

$$K_i \times [\inf_{K_i} f, \sup_{K_i} f].$$

□

Trditev 3.13

Omejena množica A ima Jordanovo prostornino natanko tedaj, ko je

$$V(\partial A) = 0$$

Dokaz. Denimo $V(\partial A) = 0$. Velja

$$0 \leq V_m^+(A) - V_m^-(A) \leq V_m(\partial A).$$

Ker je $\lim_{m\to\infty} V_m(\partial A) = 0$ sta notranji ter zunanji volumen enaka. Denimo, da ima A Jordanovo prostornino.

$$V_m^+(A) - V_m^-(A) = \text{prostornina kock, ki sekajo } A\text{, a ne ležijo v celoti znotraj } A.$$

□

Trditev 3.14

Če ima $A \subseteq K \subset \mathbb{R}^n$ prostornino jo ima tudi komplement A znotraj K prostornino, ter velja

$$V(A) + V(A^c) = V(K)$$

Dokaz. $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$. □

Trditev 3.15

Naj bo $A \subseteq K$ množica z ničelno prostornino ter $f : K \to \mathbb{R}$ omejena in taka, da za vse $x \in K \setminus A$ velja $f(x) = 0$. Potem je f integrabilna na K z ničelnim integralom.

Dokaz. Naj so $Q_1, \ldots, Q_n$ kvadri, ki pokrijejo A, ter imajo skupno prostornino $\frac{\varepsilon}{2M}$, kjer je $|f| \leq M$. Brez škode za splošnost je A v notranjosti unije kvadrov $\{Q_i\}$. Naj bo $D = \{K_i\}$ delitev, ki jo generirajo točke, ki jih dobimo z projekcijo oglišč kvadrov na vsako koordinatno os. Velja

$$S(f, D) = \sum M(K_i)V(K_i) = \sum_{\exists j.\, K_j \subseteq Q_i} M(K_i)V(K_i) \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogno pokažemo za $s(D)$. □

Trditev 3.16

Naj sta $f, g : K \to \mathbb{R}$ omejeni ter f integrabilna na K. Če je

$$V(\{x \in K \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0,$$

potem je g integrabilna na K in velja

$$\int_K f(x)\, dx = \int_K g(x)\, dx$$

Dokaz. Očitno. □

Definicija 3.17

Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Pravimo, da ima A mero 0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja števno mnogo kvadrov $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$, da je

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \text{ter} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(Q_i) < \varepsilon.$$

Komentar 3.18

Ekvivalentno lahko za Q_i vzamemo odprte kvadre. Množica z ničelno prostornino ima tudi ničelno mero.

Trditev 3.19

Števna unija množic z ničelno mero ima ničelno mero.

Dokaz. Očitno. □

Trditev 3.20

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem ima njen graf ničelno mero.

Dokaz.

$$\Gamma(f) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma(f|_{[-j,j]^n}).$$

Množice znotraj unije imajo ničelno prostornino po že dokazanem izreku. □

Trditev 3.21

Kompaktna množica ima ničelno prostornino natanko tedaj, ko ima ničelno mero.

Dokaz. Končno podpokritje. □

Trditev 3.22

Množica z mero 0 ima prazno notranjost.

Dokaz. Očitno. □

Trditev 3.23

Naj bo $f : K \to [o, \infty)$ integrabilna. Če je

$$\int_K f(x)\, dx = 0,$$

potem je za vsak $c > 0$

$$V(\{x \in K \mid f(x) \geq c\}) = 0$$

Trditev 3.24

Naj bo $C = \{x \in K \mid f(x) \geq c\}$ ter $S(f, D) < c \cdot \varepsilon$. Potem je

$$c \cdot \sum_{K_i \cup C \neq \emptyset} V(K_i) \leq \sum_{K_i \cup C \neq \emptyset} M(K_i)V(K_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M(K_i)V(K_i) \leq c \cdot \varepsilon.$$

Trditev 3.25

Naj bo $f : K \to [0, \infty)$ integrabilna. Če je

$$\int_K f(x)\, dx = 0,$$

potem je $f(x) = 0$ skoraj povsod.

Dokaz.
$$\{x \in K \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{x \in K \mid f(x) \geq \frac{1}{i}\right\}$$
□

Trditev 3.26

Naj sta $f, g : K \to \mathbb{R}$ integrabilni ter $f \leq g$. Če je
$$\int_K f(x)\, dx = \int_K g(x)\, dx,$$
potem je $f = g$ skoraj povsod.

Dokaz. Očitno. □

Trditev 3.27

Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena ter $f : A \to \mathbb{R}$ integrabilna. Če ima A mero 0, potem je
$$\int_A f(x)\, dx = 0.$$

Dokaz.
$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) \mid x \in A \\ 0 \mid x \notin A \end{cases}$$
je integrabilna. Naj bo $D = \{K_i\}$ delitev kvadra K. Za vsak K_i je $K_i \cap A^c \neq \emptyset$. Tako je $M(K_i) \geq 0$ ter $m(K_i) \leq 0$. Sledi
$$\inf_D S(\tilde{f}, D) \geq 0 \geq \sup_D s(\tilde{f}, D).$$
□

Trditev 3.28

Naj sta $A, B \subset \mathbb{R}^n$ omejeni ter $f, g : A \to \mathbb{R}$ integrabilni.

- Integrabilne funkcije tvorijo vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, in integral je linearen funkcional.
- Če je $f(x) \leq g(x)$ na A, potem je
$$\int_A f(x)\, dx \leq \int_A g(x)\, dx.$$
- $|f|$ je integrabilna in velja
$$\left| \int_A f(x)\, dx \right| \leq \int_A |f(x)|\, dx.$$
- Če ima A prostornino in je $m \leq f(x) \leq M$, potem je
$$m \cdot V(A) \leq \int_A f(x)\, dx \leq M \cdot V(A).$$
- Če je A kompaktna povezana množica s prostornino in $f \in \mathcal{C}(A)$, potem obstaja $x_0 \in A$, da je
$$\int_A f(x)\, dx = f(x_0) \cdot V(A)$$
- Naj bo $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ integrabilna na A in na B ter $V(A \cup B) = 0$. Potem je f integrabilna na $A \cup B$ ter velja
$$\int_{A\cup B} f(x)\, dx = \int_A f(x)\, dx + \int_B f(x)\, dx.$$

Dokaz. Prva točka je očitna. Druga točka sledi iz analognega izreka za $\tilde{f}$ ter $\tilde{g}$. Tretja točka sledi iz Lebesgueovega izreka ter ocene
$$-\left|\tilde{f}\right| \leq \tilde{f} \leq \left|\tilde{f}\right|.$$
Četrta točka sledi iz ocene
$$m \cdot \chi_A \leq \tilde{f} \leq M \cdot \chi_A.$$
Če je $V(A) = 0$ je peta točka očitna, drugače sledi po četrti točki upoštevajoč izrek o vmesni vrednosti. Šesta točka sledi po sledečem premisleku.
$$f_1 = f \cdot \chi_A \quad f_2 = f \cdot \chi_B \quad f_3 = f \cdot \chi_{A\cap B}$$
so integrabilne na $K \supseteq A \cup B$ ter velja
$$\int_{A\cup B} f_1(x)\, dx = \int_A f(x) \quad \int_{A\cup B} f_2(x)\, dx = \int_B f(x)\, dx \quad \int_{A\cup B} f_3(x)\, dx = \int_{A\cap B} f(x)\, dx.$$
Na $A \cap B$ velja $f = f_1 + f_2 - f_3$, kar poda željeno enakost. $\square$

Izrek 3.29: Lebesgue

Naj bo f omejena funkcija na kvadru K. Tedaj je f integrabilna natanko tedaj, ko ima množica točk nezveznosti f mero 0.

Dokaz. Pokažemo implikacijo iz nezveznosti na množici mere 0 v integrabilnost. Naj bo E množica točk nezveznosti f in denimo, da ima E mero 0. Naj bo $\varepsilon > 0$ ter $|f| \leq M$. Obstajajo taki kvadri $Q_1, Q_2, \ldots$, da je

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \text{ter} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(Q_i) \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Naj bo $x \in K \setminus E$. Ker je f v točki x zvezna lahko tvorimo kvader P_x, da v njegovi notranjosti velja

$$|f(y) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2V(K)}.$$

Obenem je

$$K = \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{int}(Q_i) \cup \bigcup_{x \in K \setminus E} \operatorname{int}(P_x).$$

Ker je K kompakten obstaja končno podpokritje. Ta končna družina inducira delitev D kvadra K, kjer je vsak izmed kvadrov v končni družini unija nekaj kvadrov delitve D (robove kvadrov projeciramo na koordinatne osi). Velja

$$S(D) - s(D) = \sum_{K_i \in D} \left(\sup_{K_i}(f) - \inf_{K_i}(f) \right) \cdot V(K_i) =$$
$$\sum_{\exists l: K_i \subseteq Q_l} \left(\sup_{K_i}(f) - \inf_{K_i}(f) \right) \cdot V(K_i) + \sum_{\forall l: K_i \not\subseteq Q_l} \left(\sup_{K_i}(f) - \inf_{K_i}(f) \right) \cdot V(K_i) <$$
$$2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2V(K)} \cdot V(K) = \varepsilon.$$

$\square$

Komentar 3.30

Trditev 3.1 je posledica Lebesgueovega izreka, saj $V(D)$ obstaja natanko tedaj, ko je χ_A zvezna skoraj povsod, χ_A pa ni zvezna natanko na robu A, ki je kompaktna.

Trditev 3.31

Naj bo A omejena množica s prostornino ter $f : A \to \mathbb{R}$ omejena. Potem je f integrabilna na A natanko tedaj, ko je f zvezna skoraj povsod na A.

Dokaz. f je integrabilna na A natanko tedaj, ko je $\tilde{f}$ integrabilna na K, kar je ekvivalentno zveznosti $\tilde{f}$ skoraj povsod na K. Zveznost $\tilde{f}$ skoraj povsod na K je ekvivalentno zveznosti f skoraj povsod na A, saj so poleg točk znotraj A možne točke nezveznosti samo na ∂A, ki je množica z mero 0. $\square$

3.2 Posledice Fubinijevega izreka

Trditev 3.32

Naj bo K kvader v $\mathbb{R}^n$ in $\varphi, \psi : K \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji, za kateri je $\varphi(x) \leq \psi(x)$ za vse x. Naj bo

$$A = \{(x, y) \in K \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Naj bo $f : A \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj je

$$\int_A f(x)\, dx = \int_K \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Dokaz. Naj $a \leq \varphi \leq \psi \leq b$. Sledi, da je $A \subseteq K \times [a, b] = Q$. Naj bo $\tilde{f} = f \cdot \chi_A$. F je tedaj zveza $\square$

A Norme na matrikah

Definicija A.1: Operatorska norma

Kot v prvem poglavju definiramo naslednjo normo na matrikah:

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_{\mathrm{evk}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n,\, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Oris dokaza. Ker so linearne preslikave zvezne (hitro dokažemo po definiciji) ter ker je enotska sfera kompaktna sledi, da funkcija $x \mapsto \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ manjša od neke realne konstante, kar je bilo treba dokazati. Pozitivna definitnost ter homogenost norme sta očitni, trikotniška neenakost pa sledi po naslednjem razmisleku:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|(A+B)Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}.$$

□

Trditev A.2

- $$\|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|B\|_{\mathrm{op}}$$
- $$\|A+B\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} + \|B\|_{\mathrm{op}} \quad \text{(trikotniška neenakost)}$$

Kot vemo, norma inducira metriko. Sledi, da lahko govorimo o prostoru matrik kot o metričnem prostoru. Velja:

Trditev A.3

- Če je $A \in \mathrm{GL}_n(X), B \in \mathcal{L}(X)$ ter je
$$\|A - B\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$
potem je $B \in \mathrm{GL}_n(X)$. V posebnem primeru je $\mathrm{GL}_n(X)$ odprta.
- Preslikava $A \mapsto A^{-1}$ je zvezna.

Trditev A.4

$$\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \leq n \cdot \|A\|.$$

Oris dokaza. Upoštevajoč Cauchy-Schwartzevo neenakost velja:

$$\|Ax\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j) \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left((\sum_{j=0}^{n} a_{ij}^2)(\sum_{k=1}^{n} x_k^2) \right) < \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right) \|x\|^2 .$$

Druga neenakost sledi po opazovanju največjega elementa matrike. □

Topologija prostora $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ je enaka, če uporabimo operatorsko normo na $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ali pa evklidsko normo na $\mathbb{R}^{n^2}$.

Literatura

[1] dr. Kennan T. Smith. *Primer of modern analysis*. 1971. URL: https://archive.org/details/primerofmodernan0000smit/mode/2up.

[2] prof. dr. Miran Černe. *Predavanja iz Analize 2a*. 2025.

[3] dr. Vladimir Zorich. *Mathematical Analysis 1*. 2002. URL: https://zr9558.com/wp-content/uploads/2013/11/mathematical-analysis-zorich1.pdf.

[4] dr. Vladimir Zorich. *Mathematical Analysis 2*. 2002. URL: https://zr9558.com/wp-content/uploads/2013/11/mathematical-analysis-zorich2.pdf.