

Algebra 2

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

24. september 2025

Algebra is the offer made by the devil
to the mathematician. The devil says:

»I will give you this powerful
machine, it will answer any question
you like.

All you need to do is give me your
soul: give up geometry and you will
have this marvelous machine.«

Michael Atiyah

Kazalo

I	Grupe	3
1	Grupe	3
1.1	Podgrupe	5
2	Homomorfizmi	7
3	Kvocientne grupe	8
4	Direktni ter notranji produkti	10
5	Delovanje grup	12
5.1	Izreki Sylowa	14
II	Kolobarji	15
6	Kolobarji ter njihove nadgradnje	15
6.0.1	Vaje	16
7	Ideali	18
8	Komutativni kolobarji	20
9	Ideali	22
10	Razširitve polj	24
III	Moduli in tenzorski produkt	25
11	Moduli	25
12	Tenzorski produkt	28
	Literatura	30

Del I

Grupe

1 Grupe

Definicija 1.1

Grupa je par (G, \cdot) , kjer je operacija \cdot asociativna, zanjo v G obstaja nevtralni element ter ima vsak element inverz.

Zahtevamo, da je nevtralni element obojestranski, prav tako so inverzi dvostranski. Asociativna zaprta množica je *polgrupa*, če pa v polgrupi obstaja nevtralni element ji pravimo *monoid*.

Vse simetrične grupe reda več kot 2 so nekomutativne.

Primer 1.2: Diedrska grupa reda $2n$

$$D_{2n} = \{1, r, \dots, r^{n-1}, z, rz, \dots, r^{n-1}z\} \quad r^n = 1, z^2 = 1, 1 = (rz)^2 \iff z^{-1} = r z r.$$

Z operacijami po komponentah lahko na množici $G_1 \times \dots \times G_n$ naredimo *zunanjji direktni produkt grup*, ki je prav tako grupa. V primeru aditivnih grup uporabimo izraz zunanja direktna vsota.

Definicija 1.3

Podgrupa je neprazna podmnožica zaprta za množenje in invertiranje. Ekvivalentno je $H \leq G$ natanko tedaj, ko je

$$x, y \in H \implies xy^{-1} \in H.$$

Za $H, K \leq G$ lahko definiramo $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$.

Trditev 1.4

Presek podgrup je podgrupa. Unija podgrup je podgrupa natanko tedaj, ko ena izmed podgrup vsebuje drugo.

Trditev 1.5

Če je $H, K \leq G$, potem HK ni nujno podgrupa G . Če pa velja $HK = KH$, pa je HK podgrupa G .

Oris dokaza. Protiprimer je H, K generirani s transpozicijama v S_3 . □

Izrek 1.6

Če sta $H, K \leq G$, potem je HK podgrupa G *natanko tedaj*, ko je $HK = KH$.

Oris dokaza. Zadostnost sledi iz zgornje trditve. Potrebno sledi iz

$$kh = (h^{-1}k^{-1})^{-1} \in HK \implies KH \subseteq HK.$$

□

Trditev 1.7

Če je $H \leq G$ in $a \in G$, potem je aHa^{-1} podgrupa G . Pravimo ji *konjugirana podgrupa* H .

1.1 Podgrupe

Definicija 1.8

Naj bo $H \leq G$. Na G tvorimo ekvivalenčno relacijo $x \sim y \iff x^{-1}y \in H$. Ekvivalenčnim razredom te relacije pravimo odseki, $[a] = a \cdot H$ pa pravimo odsek $a \in G$ po podgrupi H . Očitno sledi, da sta dva odseka bodisi enaka, bodisi disjunktna, ter da odseki tvorijo particijo G .

Pravzaprav smo definirali leve odseke aH , da bi dobili desne odseke bi morali definirati relacijo $x \sim y \iff xy^{-1} \in H$

Definicija 1.9

Jasno je, da so vsi odseki enake velikosti. Številu vseh različnih odsekov G po H pravimo indeks H , označimo pa ga z $[G : H]$.

Izrek 1.10: Lagrange

Naj bo $H \leq G$, kjer je G končna grupa. Potem je $|G| = |H| \cdot [G : H]$, kjer je $[G : H]$ število odsekov G po H .

Oris dokaza. Grupo G razdelimo na disjunktno odseke. Vsak odsek ima $|H|$ elementov, saj je $h \mapsto a_i h$ bijekcija med H in $a_i H$. \square

Definicija 1.11

Centralizator elementa a je $C(a) = \{x | ax = xa\}$. Centralizator je vedno podgrupa. Za $S \subseteq G$ definiramo njen centralizator kot

$$C(S) = \bigcap_{x \in S} C(x),$$

ki je kot presek podgrup tudi podgrupa.

Trditev 1.12

Naj sta $H, K \leq G$. Velja

$$|HK| = \frac{|H| |K|}{|H \cap K|}.$$

Oris dokaza. Enačbo pretvorimo v $|H| = \frac{|HK|}{|K|} \cdot |H \cap K|$. Dokažemo $[H : H \cap K] = \frac{|HK|}{|K|}$. Odseka $h_1 K$ in $h_2 K$ sta enaka natanko tedaj, ko je $h_1^{-1} h_2 \in H \cap K$. To pomeni, da obstaja bijekcija med množico različnih odsekov hK (ki ima kardinalnost $\frac{|HK|}{|K|}$) ter množico različnih odsekov $H \cap K$ v H . \square

Primer 1.13

Naj bo $H \leq G$ ter $a \in G$. Tedaj je množica aHa^{-1} podgrupa G .

2 Homomorfizmi

Definicija 2.1

Homomorfizem grup je multiplikativna preslikava med njima.

Homomorfizem grup slika enoto v enoto ter inverz elementa v inverz slike elementa.

Definicija 2.2

Naj bo $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfizem grup.

- Množico $\ker \varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = 1_H\}$ imenujemo jedro φ . Je podgrupa G .
- Množico $\operatorname{im} \varphi = \{\varphi(x) \mid x \in G\}$ imenujemo slika φ . Je podgrupa H .

Homomorfizem je injektiven (monomorfizem) natanko tedaj, ko je trivialno.

Primer 2.3

Za $a \in G$ definiramo $\varphi_a(x) = axa^{-1}$, kateremu pravimo *notranji avtomorfizem* grupe G . φ_a je homomorfizem.

Grupo vseh notranjih avtomorfizmov grupe G za operacijo kompozitum označimo z $\operatorname{Inn}(G)$.

3 Kvocientne grupe

Definicija 3.1

N je **podgrupa edinka** grupe G , če velja $N \leq G$ ter

$$gNg^{-1} \subseteq N \quad \forall g \in G.$$

Netrivialna grupa brez pravih edink (različnih od same sebe) je *enostavna* grupa.

Trditev 3.2

Ekvivalenten pogoj, da je N podgrupa edinka grupe G je enakost

$$gNg^{-1} = N \text{ za vse } g \in G.$$

Podobne enakosti ter vsebovanosti lahko dosežemo z levim ter desnim 'množenjem' z g^{-1} oz. g .

Trditev 3.3: Operacije z edinkami

- $H \leq G$ ter $N \trianglelefteq G \implies HN = NH \leq G$.
- $M, N \triangleleft G \implies MN = NM \triangleleft G$ ter $M \cap N \triangleleft G$.

Lema 3.4: Kanonični epimorfizem

Naj bo N podgrupa edinka grupe G . Preslikava $\pi : G \rightarrow G/N$, za katero velja $\pi(a) = aN$, je epimorfizem grup.

Jedro te preslikave je edinka. Odkrijemo, da velja tudi obrat - vsaka edinka je jedro nekega epimorfizma.

Izrek 3.5: O izomorfizmu

- Naj bo $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfizem. Potem je

$$G/\ker \varphi \cong \text{im} \varphi.$$

- $H \leq G$ ter $N \triangleleft G$. Tedaj je $H \cap N \triangleleft G$, $N \triangleleft HN$ ter

$$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$

- Naj bo $M, N \triangleleft G$ ter $N \subseteq M$. Tedaj je

$$G/M \cong (G/N)/(M/N)$$

Izrek 3.6: Cauchyjev izrek

Naj bo G končna grupa. Če praštevilo p deli $|G|$, potem G vsebuje element reda p .

Oris dokaza. V primeru Abelovih grup: Če G nima pravih netrivialnih podgrup smo končali. Drugače tvorimo kvocient z podgrupo, ki je v Abelovem primeru edinka, ter dobimo dve manjši grupi. Nadaljujemo z indukcijo. \square

Trditev 3.7

Naj bo $N \triangleleft G$ in $H \leq G$, ter analogno $N' \triangleleft G$ in $H' \leq G$. Naj bo $\varphi : G \rightarrow G'$ homomorfizem. Velja:

- $\varphi^{-1}(H') \leq G$
- $\varphi^{-1}(N') \triangleleft G$
- $\varphi(H) \leq G'$
- Če je φ surjektivna je $\varphi(N) \triangleleft G'$

Oris dokaza. Surjektivnost potrebujemo za konjugiranje z vsemi preko multiplikativnosti. \square

Izrek 3.8: Korespondenčni izrek

Naj bo $N \triangleleft G$. Velja:

- Vsaka podgrupa G/N je oblike H/N za $H \leq G$.
- Vsaka edinka G/N je oblike M/N za $M \triangleleft G$.

Oris dokaza. Uporabimo zgornjo trditev za kanonični epimorfizem $G \rightarrow G/N$. \square

Lema 3.9

Vsaka podgrupa indeksa 2 je edinka.

Dokaz. Naj bo $[G : H] = 2$. Potem je $G = H \cup (G \setminus H)$. Tako je $xH \in \{H, G \setminus H\}$, prav tako tudi $Hx \in \{H, G \setminus H\}$. Če je vsaj en izmed odsekov enak H , potem je gotovo tudi drugi enak H . \square

4 Direktni ter notranji produkti

Naj so G_1, \dots, G_n grupe. Potem je $G = G_1 \times \dots \times G_n$ prav tako grupa za očitno operacijo na n -tericah. Grupi G pravimo *direktni produkt* grup G_1, \dots, G_n .

Opazimo, da je $\tilde{G}_j = \langle (1_1, \dots, g_j, \dots, 1_n) \mid g_j \in G_j \rangle$ podgrupa edinka v G , ter da celo velja $G = \prod_{i=1}^n \tilde{G}_i$, kar motivira naslednjo definicijo.

Definicija 4.1

Če so $N_1, \dots, N_s \triangleleft G$ ter velja:

- $G = \prod_{i=1}^s N_i$
- $N_i \cap (N_1 \dots N_{i-1} N_{i+1} \dots N_s) = 1$,

potem je G *notranji direktni produkt* N_1, \dots, N_s .

Trditev 4.2

G je notranji direktni produkt svojih edink N_1, \dots, N_s natanko tedaj, ko lahko vsak element x grupe G zapišemo na enoličen način kot produkt elementov $n_i \in N_i$.

Dokaz trditve je popolnoma klasičen.

Lema 4.3

Če je $|G| = mn$, kjer sta m in n tuji si naravni števili, potem za podgrupi

$$H = \{x \in G \mid mx = 0\} \quad \text{in} \quad K = \{x \in G \mid nx = 0\}$$

velja $G = H \oplus K$ ter $|H| = m$ in $|K| = n$.

Oris dokaza. H in K sta očitno podgrupi. Seveda je $nx \in H$ in $mx \in K$ za vse $x \in G$. Po Bezoutovi lemi obstajata števili $u, v \in \mathbb{Z}$, da je $x = u(nx) + v(mx)$, kar dokaže $G = H + K$. Da je $H \cap K = \{0\}$ je prav tako očitno, kar dokazuje direktnost vsote. Z enostavno uporabo Cauchyjevega izreka dokažemo tudi ustrezne kardinalnosti H in K . \square

Izrek 4.4: Osnovni izrek o končnih Abelovih grupah

Vsaka končna Abelova grupa G je direktna vsota cikličnih p grup.
Natančneje je

$$G \cong G_1 \oplus \cdots \oplus G_n,$$

kjer je n enolično določen ter je p praštevilo in

$$G_i \cong \mathbb{Z}_{p^{k_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_l}},$$

ter so $\{k_i\}$ enolično določeni za vsak G_i .

Definicija 4.5

- $K \leq G$ je *karakteristična podgrupa*, če je $\varphi(K) \subseteq K \forall \varphi \in \text{Aut}(G)$. Vse karakteristične podgrupe so normalne, saj je za slednje zadosti enakost za $\varphi \in \text{Inn}(G)$.
- Grupa je *torzijska*, če ima vsaka njena podgrupa končen red, ter *torzijsko prosta*, če je edini element s končnim redom enota.

5 Delovanje grup

Izrek 5.1: Cayleyjev izrek

Naj bo G grupa in S_n simetrična grupa reda n . Za vsak $a \in G$ lahko definiramo preslikavo $\ell_a(x) = ax$, za katero hitro preverimo, da je avtomorfizem G . Trdimo, da je preslikava $\varphi : G \rightarrow \text{Sim}(G)$, definirana kot $\varphi(a) = \ell_a$ injektivna, kar z lahkoto dokažemo.

Sledi, da lahko vsako grupo G vložimo v neko simetrično grupo (gotovo v simetrično grupo $S_{|G|}$).

Definicija 5.2

Grupa G deluje na množici X , če obstaja preslikava iz $G \times X$ v X , ki paru (a, x) priredi element $a \cdot x$, da velja:

- $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Primeri delovanja so trivialno delovanje, levo množenje ter konjugiranje - $a \cdot x = axa^{-1}$.

Definicija 5.3

Naj grupa G deluje na množici X .

- *Orbita* elementa $x \in X$ je množica $G \cdot x = \{a \cdot x | a \in G\}$,
- *Stabilizator* elementa x pa množica $G_x = \{g \in G | g \cdot x = x\}$.

Definicija 5.4

Naj bo $x \in G$. Potem je množica $C(x) = \{g \in G | xg = gx\}$ centralizator elementa x .

Lema 5.5

Naj grupa G deluje na množici X .

- S predpisom $x \sim y \iff y = a \cdot x$ za nek $a \in G$ je definirana ekvivalenčna relacija na množici X . Za vsak $x \in X$ je orbita $G \cdot x$ enaka ekvivalenčnem razredu, ki vsebuje x .
- Vsak stabilizator G_x je podgrupa G .

Izrek 5.6: O orbiti in stabilizatorju

Naj grupa G deluje na množici X . Potem za vsak $x \in X$ velja

$$|G \cdot x| = [G : G_x].$$

Če je G končna, je torej $|G| = |G \cdot x| \cdot |G_x|$

Izrek 5.7: Particija orbit

Naj grupa G deluje na končni množici X in naj Z označuje množico vseh elementov $x \in X$, za katere velja $a \cdot x = x$ za vse $a \in G$. Če je $X \neq Z$ (delovanje je netrivialno), potem obstajajo $x_1, \dots, x_m \in X \setminus Z$, da je

$$|X| = |Z| + \sum_{j=1}^m |G \cdot x_j| = |Z| + \sum_{j=1}^m [G : G_{x_j}]$$

Posledica izreka je:

Trditev 5.8

Naj končna p -grupa G deluje na končni množici X in naj Z označuje množico elementov $x \in X$, da je $a \cdot x = x$ za vse $a \in G$. Potem p deli $|X| - |Z|$.

Če za delovanje izberemo konjugiranje dobimo naslednjo formulo:

Izrek 5.9: Razredna formula

Naj bo G končna grupa, ki ni Abelova. Potem obstajajo $x_1, \dots, x_n \in G \setminus Z(G)$, da je

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{j=1}^m [G : C(x_j)].$$

Če za G izberemo netrivialno p -grupo pridemo do zaključka: **Vsaka netrivialna p grupa ima netrivialen center.** Ponovno dobimo naslednjo posledico:

Naloga 5.10

Če za grupo G velja, da je $|G| = p^2$ za $p \in \mathbb{P}$, potem je G Abelova.

Oris dokaza. $Z(G)$ je netrivialna, zato reda p ali p^2 . Če je reda p^2 smo končali, drugače pa je $G = Z(G) \oplus G/Z(G)$. Ker je $|G/Z(G)| = p$ je ciklična, kar hitro preverimo, da je nemogoče. \square

Izrek 5.11: Dvornjivo Burnsideova lema

Naj G deluje na X . Potem je število orbit delovanja enako količini

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{FixPt } g|,$$

kjer je $\text{FixPt } g$ število elementov $x \in X$, za katere je $g \cdot x = x$.

Izrek 5.12: Cauchyjev izrek

Naj bo G končna grupa in $p \mid |G|$. Potem G vsebuje element reda p .

Oris dokaza. Definirajmo

$$X = \{(a_1, \dots, a_p) \mid a_i \in G \text{ in } a_1 \dots a_p = 1\}.$$

Grupa \mathbb{Z}_p s predpisom $k \cdot (a_1, \dots, a_p) = (a_{k+1}, \dots, a_p, a_1, \dots, a_k)$ deluje na množici X . Po izreku 5.7 ugotovimo, da $p \mid |X|$, saj je $|X| = |G|^{p-1}$. Hitro dokažemo, da je $(a_1, \dots, a_p) \in Z$ natanko tedaj, ko je $a_1 = a_2 = \dots = a_p$. Ker je $(1, \dots, 1) \in Z$ ter $p \mid |Z|$, slednji vsebuje nek element različen od enote, posledično je $(a, \dots, a) \in Z$, kar implicira $a^p = 1$. \square

5.1 Izreki Sylowa

Definicija 5.13

- $H \leq G$. Potem je naslednja množica *normalizator* H :

$$N(H) = \{a \in G \mid aHa^{-1} = H\}$$

- $H \leq G$, kjer je G končna grupa, je p -podgrupa Sylowa, če je

$$|H| = p^k \text{ ter } p^{k+1} \nmid |G|$$

Seveda je $N(H) = G$ natanko tedaj, ko je H edinka. Venomer pa je $N(H) \leq G$ in $H \triangleleft N(H)$.

Izrek 5.14: Izreki Sylowa

Naj $p \in \mathbb{P}$ deli red končne grupe G .

- Če $p^\ell \mid |G|$, potem G vsebuje p -podgrupo reda p^ℓ .
- Vsaka p -podgrupa G je vsebovana v neki p -podgrupi Sylowa.
- Vsaki p -podgrupi Sylowa G sta konjugirani.
- Število p -podgrup Sylowa G deli $|G|$ ter je oblike $pm + 1$ za $m \geq 0$.

Število p -podgrup Sylowa označujemo z n_p .

Del II

Kolobarji

6 Kolobarji ter njihove nadgradnje

Definicija 6.1

$(K, +, \cdot)$ je *kolobar*, če velja, da je $(K, +)$ Abelova grupa, (K, \cdot) monoid ter veljata leva in desna distributivnost.

Od homomorfizma zahtevamo, da je aditiven, multiplikativen ter slika enoto v enoto.

Naloga 6.2

Prakolobar kolobarja K je presek vseh podkolobarjev K . Pokaži, da je prakolobar K enak $\{1_K \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Kot dodatek povemo: Če je e idempotent, oz. je $e^2 = e$, potem je tudi $(1 - e)$ idempotent.

Definicija 6.3

- Če je (K, \cdot) Abelova je kolobar *komutativen*.
- Komutativen kolobar brez deliteljev nič je *cel* kolobar.
- Neničelen kolobar v katerem je vsak neničelen element obrnljiv je *obseg*.
- Komutativen obseg je *polje*.

Definicija 6.4

$(A, +, \cdot, \circ)$ je *algebra* nad poljem \mathbb{F} , če je $(A, +, \circ)$ kolobar ter $(A, +, \cdot)$ vektorski prostor nad \mathbb{F} .

Od homomorfizma algeber zahtevamo, da je za $(A, +, \circ)$ homomorfizem kolobarjev (aditiven, ohranja komponiranje ter slika enoto komponiranja v enoto komponiranja), ter da je homogen v skalarjih \mathbb{F} .

Naloga 6.5

Naj bo A realna algebra lihe dimenzije $n > 1$. Pokaži, da A ni obseg.

Oris dokaza. $\text{Lin } \{1\} \neq A$, ker je $\dim(A) > 1$. Izberimo $a \notin \text{Lin } \{1\}$. Naj bo $\mathcal{A} : x \mapsto ax$ linearna preslikava. Karakteristični polinom \mathcal{A} je realen polinom lihe

stopnje, zato ima vsaj eno realno lastno vrednost λ . Sledi, da obstaja $x \in A$, $x \neq 0$, da je $\mathcal{A}x = \lambda x$. Sledi, da je $(a - \lambda \cdot 1)(x) = 0$, protislovje. \square

\mathbb{C} je algebra stopnje 2 nad \mathbb{R} , iščemo algebro dimenzije 4 nad \mathbb{R} . Naj bo $\mathbb{H} = \{1, i, j, k\}$ vektorski prostor dimenzije 4 nad \mathbb{R} . V luči distributivnost definiramo množenje le na baznih vektorjih. 1 naj bo identiteta, ter določimo $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. i, j, k množimo z leve proti desni, upoštevajoč ciklične permutacije, ter definiramo množenje kot *antikomutativno*.

Algebra se imenuje kvaternioni.

Trditev 6.6

\mathbb{H} je obseg.

Inverz elementa $z = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$ je $z^{-1} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2}(\alpha_1 - \alpha_2 i - \alpha_3 j - \alpha_4 k)$.

Zgornjetrikotne matrike dimenzije $n \times n$ tvorijo algebro nad \mathbb{R} . Dimenzija je $n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$.

Primer 6.7: Kako prodamo algebro analitikom?

Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}$ ter $\mathbb{R}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$. $\mathcal{C}(X)$ je za operaciji $+$, \cdot in množenje s skalarji po točkah podalgebra \mathbb{R}^X .

Trditev 6.8

Končen cel kolobar je polje.

Oris dokaza. Cel kolobar je komutativen brez deliteljev nič. $\varphi : x \mapsto ax$ je injektivna preslikava, če je a neničelen, zato surjektivna kot preslikava med končnimi množicami. Sledi, da je $1 \in \text{Im}(\varphi)$. \square

Izrek 6.9: Wedderburn

Vsak končen obseg je polje.

6.0.1 Vaje

Naloga 6.10

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrika ranga največ 1. Pokaži, da je $A = \lambda A$ za nek $\lambda \in \mathbb{R}$. Poišči še kak idempotent, ki ni diagonalna matrika in kak nilpotent, ki ni strogo zgoraj (ali spodaj) diagonalna matrika.

Oris dokaza. Ker je A ranga največ 1 jo lahko zapišemo na naslednji način:

$$A = [\lambda_1 \dots \lambda_n]^T [a_1 \dots a_n].$$

Kvadriranje poda želeno. Če izberemo $[\lambda_1 \dots \lambda_n]^T$ ter $[a_1 \dots a_n]$ tako, da dobimo $\lambda = 1$ dobimo novi idempotent. Podoben premislek za $\lambda = 0$ nam poda nilpotent. \square

Naloga 6.11

Če je x nilpotent kolobarja K , potem je $1 - x$ obrnljiv. Naj sta $x, y \in K$. Potem je $1 - xy$ obrnljiv natanko tedaj, ko je obrnljiv $1 - yx$.

Oris dokaza. Prva je standardna posledica faktorizacije $x^k - 1$. Pri drugi točki opazimo $\frac{1}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = 1 + x(\sum_{k=0}^{\infty} yx^k)y$, kar motivira idejo $(1-xy)^{-1} = 1 + x(1-yx)^{-1}y$. \square

Naloga 6.12

Naj bo K kolobar, v katerem za vsak $x \in K$ obstaja $y \in K$, da je

$$x^2y = x.$$

Pokaži, da x in y komutirata.

Oris dokaza. S preprostim protislovjem o indeksu nilpotentnosti dobimo, da K nima neničelnih nilpotentov. Z nekaj računanja ugotovimo

$$(yx^2 - x)^2 = 0 = (yxy - x)^2,$$

kar nam pomaga dokazati

$$(xy - yx)^2 = 0.$$

\square

7 Ideali

Z željo podobnega objekta kot je normalna podgrupa, ki bi omogočal kvociente, definiramo naslednji objekt.

Definicija 7.1: Ideal

Naj bo I podgrupa kolobarja K za seštevanje. Če za vse $a \in K$ in $u \in I$ velja $au \in I$ ter $ua \in I$, potem imenujemo I *ideal* kolobarja K .

Ponovno ugotovimo, da obstaja dualnost med jedri homomorfizmov kolobarjev ter ideali

Trditev 7.2: Operacije z ideali

- Vsota, produkt in presek idealov I in J so prav tako ideali:

$$I + J = \{u + v \mid u \in I, v \in J\}$$

$$IJ = \langle uv \mid u \in I, v \in J \rangle.$$

- Velja inkluzija

$$IJ \subseteq I \cap J \subseteq I \subseteq I + J$$

Podane trditve veljajo za enostranske in za dvostranske ideale. Prav tako obstaja kanonični epimorfizem iz kolobarja v kvocien kolobarja po nekem idealu, ter velja, da je ideal jedro tega epimorfizma. Kot pri grupah velja, da je aditivna podgrupa $(K, +)$ ideal natanko tedaj, ko je jedro nekega homomorfizma.

Ideal algebre definiramo analogno, dodatno zahtevamo le zaprtje za množenje s skalarji. Za ideale algebr veljajo analogne trditve o operacijah ter definirajo kanonični epimorfizem.

Izrek 7.3: Izrek o izomorfizmu

Naj bo $\varphi : A \rightarrow A'$ homomorfizem (grup, kolobarjev ali algebr). Potem je

$$A/\ker\varphi \cong \operatorname{im}\varphi$$

Definicija 7.4

Ideal $I \triangleleft K$ je maksimalen, če ne obstaja noben ideal J , da je $I \subset J \subset K$.

Ideal I je maksimalen ideal komutativnega kolobarja K natanko tedaj, ko je K/I polje.

Izrek 7.5: Izrek o ohranjanju idealov

Naj bo $I \triangleleft K$. Preslikava $\varphi : A \rightarrow A/I$ je bijekcija, ki ohranja podmnožice, med množico podkolobarjev A kolobarja K , ki vsebujejo I , ter množico podkolobarjev K/I . Dodatno je A ideal K natanko tedaj, ko je A/I ideal K/I .

8 Komutativni kolobarji

Naj bo \mathbb{F} polje in $\mathbb{F}[X]$ kolobar polinomov nad F . Z analizo stopnje produkta polinomov ugotovimo, da je kolobar $\mathbb{F}[X]$ komutativen ter brez deliteljev nič, posledično cel. Vsi njegovi obrnljivi elementi pa so neničelni konstantni polinomi.

Trditev 8.1: Osnovni izrek o deljenju polinomov

Za vsak par polinomov $f(X), g(X) \in \mathbb{F}[X]$, pri čemer je $g(X) \neq 0$ obstajata enolično določena polinoma $q(X), r(X) \in \mathbb{F}[X]$, da velja:

$$f(X) = q(X)g(X) + r(X),$$

in je $r(X) = 0$ ali $\deg(r) < \deg(g)$

Trditev 8.2: Faktorski izrek

Vsak polinom f nad poljem \mathbb{F} ima največ $\deg(f)$ ničel.

Definicija 8.3

- Polinom je *nerazcepen*, če je nekonstanten ter ni produkt nobenih dveh nekonstantnih polinomov.
- Polinom v $\mathbb{Z}[X]$ je *primitiven*, če so si njegovi koeficienti tuji.

Lema 8.4: Gauss

Produkt primitivnih polinomov je primitiven. Prav tako je celoštevilski polinom nerazcepen nad $\mathbb{Z}[X]$ natanko tedaj, ko je nerazcepen nad $\mathbb{Q}[X]$.

Izrek 8.5: Eisensteinov kriterij

Naj bo $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ v $\mathbb{Z}[X]$. Če obstaja tako praštevilo p , da velja:

$$\dagger \quad p \mid a_i \text{ za vse } i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

$$\dagger \quad p^2 \nmid a_0 \text{ ter } p \nmid a_n,$$

potem je f nerazcepen nad $\mathbb{Z}[X]$.

Naloga 8.6

Pokaži, da je polinom $\Phi_p(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + 1$ nerazcepen nad $\mathbb{Z}[X]$.

Oris dokaza. $\Phi_p(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} \implies \Phi_p(X + 1) = \frac{1}{X} ((X + 1)^p - 1).$

□

Trditev 8.7

Naj bo $f(X) = a_n X^n + \dots + a_0$ polinom nad \mathbb{Q} ter praštevilo p ne deli a_n . Če je polinom $f(X) = (a_n + p\mathbb{Z})X^n + \dots + (a_0 + p\mathbb{Z})$ nerazcepen nad \mathbb{Z}_p , potem je nerazcepen tudi nad \mathbb{Q} .

9 Ideali

Ideal je *glavni*, če je generiran z enim elementom, ter *končno generiran*, če ga generira končno mnogo elementov. Elementi a_1, \dots, a_n generirajo ideal $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, za katerega velja

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_1 \rangle + \dots + \langle a_n \rangle.$$

Kolobar je *glavni*, če so vsi ideali nad njim glavni.

Definicija 9.1

Cel kolobar K imenujemo *Evklidski kolobar*, če obstaja preslikava $\delta : K \rightarrow \mathbb{N}_0$ z naslednjima lastnostima:

- Za vsak par elementov $a, b \in K$ obstaja par elementov $q, r \in K$, da je $a = qb + r$ in je $r = 0$ ali $\delta(r) < \delta(b)$.
- $\delta(a) < \delta(ab)$ za vse $a, b \in K \setminus \{0\}$.

Primeri evklidskih kolobarjev so $\mathbb{Z}, \mathbb{F}[X], \mathbb{Z}[i]$, ki imajo norme $|\cdot|, \deg(\cdot)$ ter $\delta(a + bi) = a^2 + b^2$.

Znano dejstvo iz kolobarja celih števil, znano pod imenom »Bezoutova lema«, v resnici velja v vseh glavnih kolobarjih. Namreč: $a, b \in K \setminus \{0\}$ imata največji skupni delitelj d , ki je oblike $d = ua + vb$ za neka $u, v \in K$

Trditev 9.2

Naj bo p neničelen element glavnega kolobarja K . Naslednje trditve so potlej ekvivalentne:

- p je nerazcepen.
- Ideal $\langle p \rangle$ je glavni.
- $K/\langle p \rangle$ je polje.

Definicija 9.3

Komutativen kolobar K se imenuje *Noetherski*, če se vsaka naraščajoča veriga idealov kolobarja K

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$$

ustavi, sepravi obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $I_n = I_{n+1} = \dots$

Trditev 9.4

Vsak komutativen kolobar, v katerem je vsak ideal končno generiran je Noetherski.

Izrek 9.5: Hilbertov izrek o bazi

Če je K komutativen Noetherski kolobar, potem je tudi kolobar $K[X]$ Noetherski.

Definicija 9.6

Naj bo K komutativen kolobar. Elementu $p \in K$ pravimo *praelement*, če ni ničlen in ni obrnljiv, ter iz

$$p|ab \implies p|a \text{ ali } p|b.$$

Evklidova lema iz \mathbb{Z} motivira naslednjo trditev

Trditev 9.7

V vsakem celem kolobarju je vsak praelement nerazcepen, v glavnem kolobarju pa praelementi in nerazcepni elementi sovpadajo.

Definicija 9.8

Cel kolobar K imenujemo *kolobar z enolično faktorizacijo*, če za vsak $a \in K$, ki je ne ničlen in neobrnljiv, velja, da ga lahko zapišemo kot produkt nerazcepnih elementov, ter da je ta zapis enoličen do vrstnega reda ter asociiranosti natančno.

Trditev 9.9

- Za cel kolobar K velja naslednja veriga implikacij:

$$K \text{ je evklidski} \implies K \text{ je glavni} \implies K \text{ je kolobar z enolično faktorizacijo}$$

- V kolobarju z enolično faktorizacijo praelementi ter nerazcepni elementi sovpadajo.

10 Razširitve polj

Izrek 10.1

Naj bo \mathbb{F} polje ter p nerazcepen polinom nad \mathbb{F} . Potem obstaja razširitev polja \mathbb{F} , ki jo imenujmo \mathbb{G} , v kateri ima p ničlo.

Dokaz. Naj bo $\mathbb{G} = \mathbb{F}[x]/\langle p(x) \rangle$. Ker je p nerazcepen nad \mathbb{F} je ideal $\langle p \rangle$ maksimalen, posledično je \mathbb{G} polje. \mathbb{G} vsebuje \mathbb{F} , saj je restrikcija kanoničnega epimorfizma na \mathbb{F} izomorfna \mathbb{F} . Naj bo \bar{x} slika x pod kanoničnim epimorfizmom v \mathbb{G} . Velja:

$$p(\bar{x}) = \overline{p(x)} = p(x) = 0,$$

kar pomeni, da je odsek $x \bmod \langle p(x) \rangle$ ničla p v \mathbb{G} . □

Trditev 10.2

Naj bo $\theta = x \bmod p(x)$ ničla p v $\mathbb{F}[x]/\langle p(x) \rangle$. Potem so elementi $1, \theta, \dots, \theta^{n-1}$ baza $\mathbb{F}[x]/\langle p(x) \rangle$ kot vektorski prostor nad \mathbb{F} , kjer je n stopnja razširitve ter polinoma p .

Izrek 10.3

Naj so $F \subseteq K \subseteq L$ polja ter $[L : K], [K : F]$ končna. Potem je:

$$[L : F] = [L : K][K : F]$$

Dosti preprosto pridemo tudi do ugotovitve, da je razširitev polj končna natanko tedaj, ko jo generira končno mnogo algebraičnih elementov.

Del III

Moduli in tenzorski produkt

11 Moduli

Na podoben način kot smo splošno grupo vložili v neko simetrično grupo lahko tudi poljuben kolobar oz. algebro vložimo v kolobar endomorfizmov aditivne grupe oz. algebro endomorfizmov vektorskega prostora. Slednje pomeni, da lahko vsako končno-razsežno algebro vložimo v matrično algebro $M_n(\mathbb{F})$ za nek $n \in \mathbb{N}$.

Posledica tega dejstva je naslednje:

Naloga 11.1

Ali končno-razsežna algebra lahko vsebuje elementa s, t , za katera velja

$$st - ts = 1.$$

Oris dokaza. Ne, saj vložimo v matrično algebro ter uporabimo znano lastnost sledi. \square

Zgornji primer je relevanten, saj je pojem modula ekvivalenten pojmu homomorfizma iz kolobarja K v kolobar endomorfizmov aditivne grupe M , kar lahko preverimo po definiciji. Drugače, pa si lahko module predstavljamo tudi kot posplošitve vektorskih prostorov.

Definicija 11.2

Naj bo $(K, +, \cdot)$ kolobar in M množica. Potem je M K -modul, če je $(M, +)$ Abelova grupa in obstaja prelikava $K \times M \rightarrow M$, ki slika $(k, m) \mapsto km$, ki je homogena, zanj veljata obe distributivnosti, ter velja $1_K \cdot m = m$.

$N \subseteq M$ je *podmodul* modula M , če je za isti operaciji sam modul, oz. je aditivna podgrupa M ter sočasno zaprta za modulsko množenje.

Vsota ter presek podmodul je prav tako modul. Če neničelen modul nima pravega podmodula, mu pravimo enostavni modul.

Uvedemo tudi pojem homomorfizma modulov (nad istim kolobarjem), ki je aditivna ter multiplikativna preslikava, ki fiksira elemente kolobarja: $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ ter $\varphi(au) = a\varphi(u)$. Kot po navadi sta jedro ter slika homomorfizma modulov podmodula.

Definicija 11.3: Kolobar endomorfizmov

Množica endomorfizmov $\text{End}_K(M)$ K -modula M postane kolobar, če definiramo seštevanje endomorfizmov na očiten način ter množenje endomorfizmov kot komponiranje.

Lema 11.4: Schur

Če je M enostaven K -modul je kolobar $\text{End}_K(M)$ obseg

Oris dokaza. Naj bo $\varphi \in \text{End}(M)$ neničelen. Potem je $\ker(\varphi)$ pravi, $\text{im}(\varphi)$ pa netrivialen podmodul enostavnega modula M . Sledi $\ker(\varphi) = \{0\}$ ter $\text{im}(\varphi) = M$, sledi da je φ avtomorfizem, posledično obrnljiv. \square

Kot je zdaj že navada lahko definiramo kvocientni modul K -modula M po svojem podmodulu N z enakima operacijama seštevanja in modulskega množenja odsekov.

Kot bi pričakovali od razširitve pojma vektorskega prostora lahko definiramo tudi linearno neodvisnost ter bazo modula. Moduli pa žal ne podedujejo vseh lastnosti vektorskih prostorov, kot ilustrira naslednji primer.

Primer 11.5

Če je G končna aditivna grupa, potem za $|G| = n$ velja $nu = 0 \ \forall u \in G$. Sledi, da nobena neprazna podmnožica \mathbb{Z} -modula G ni linearno neodvisna.

Definicija 11.6

Modul, ki ima bazo, se imenuje *prost* modul.

Prostemu \mathbb{Z} -modulu M pravimo *prosta Abelova grupa*.

Tudi prosti moduli se substantivno razlikujejo od vektorskih prostorov; podmodul prostega modula na primer ni nujno prost (\mathbb{Z}_4 je kot modul nad samim sabo prost, a $2\mathbb{Z}_4$ ni prost kot modul nad \mathbb{Z}_4), ter velikost baze ni nujno enolično določena. Nam pa je v olajšanje dejstvo, da so linearne preslikave (homomorfizmi) med moduli enolično določeni z slikami baznih »vektorjev«.

V pričakovanju tenzorskega produkta omenimo naslednji trditvi:

Trditev 11.7

- Za vsako množico \mathcal{B} ter kolobar K obstaja prost modul nad K z bazo \mathcal{B} .
- Naj bo M prost K -modul z bazo \mathcal{B} ter N poljuben K -modul. Vsako preslikavo: $f : \mathcal{B} \rightarrow N$ lahko na enoličen način razširimo do homomorfizma modulov.

Presenetljivo je morda dejstvo, da prva trditev velja tudi v primeru, ko je \mathcal{B} neskončna - tedaj zahtevamo, da so vse razen končno mnogo komponent elementa modula ničelne.

Definicija 11.8

Modul nad obsegom D imenujemo *vektorski prostor*.

Za module nad obsegi potem veljajo pričakovane lastnosti. Zaradi simetrije se brez škode za splošnost omejimo na leve vektorske prostore.

Izrek 11.9

Vsaka linearno neodvisna množica T v vektorskem prostoru V nad obsegom D je vsebovana v neki bazi prostora V .

Oris dokaza. \mathcal{S} naj bo množica vseh linearno neodvisnih množic v V , ki vsebujejo T , ter jo delno uredimo z inkluzijo. Hiter premislek poda, da je množica, ki jo dobimo z unijo katerekoli verige, linearno neodvisna, kar pomeni, da vsaka veriga vsebuje zgornjo mejo - posledično ima vsaka veriga maksimalni element, po Zornovi lemi. Ta maksimalni element \mathcal{B} je baza, saj je $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \{v\}$ za vsak vektor $v \in V$, saj je \mathcal{B} zgornja meja verige. Sledi, da je v linearna kombinacija vektorjev iz \mathcal{B} , kar dokaže željeno. \square

Zvita posledica izreka je, da ima vsak vektorski prostor nad obsegom bazo, saj lahko vzamemo $T = \{\}$. Sledi:

Trditev 11.10

Vsak modul nad obsegom je prost.

Enoličnost velikosti baze lahko pokažemo z analognim postopkom kot nad poljem - izmenjavanjem vektorjev.

12 Tenzorski produkt

Obravnavali bomo tenzorski produkt modulov nad komutativnim kolobarjem K . Naj bosta M in N zaporedoma modula dimenzij m in n nad komutativnim kolobarjem K . Potem je $M \otimes N$ tenzorski produkt slednjih, ter je sam modul dimenzije $m \cdot n$ nad K .

Definicija 12.1

Formalno definiramo $M \otimes N$ kot kvocient $\mathcal{F}_{M,N}$ (modul, ki ima za bazo množico $M \times N$ - obstoj takega modula ni težko zagotoviti), ter $\mathcal{N}_{M,N}$, ki je podmodul $\mathcal{F}_{M,N}$, ki ga generirajo elementi oblike $(au + a'u', v) - a(u, v) - a'(u', v)$ ter $(u, bv + b'v') - b(u, v) - b'(u, v')$.

Izrek 12.2: Univerzalna lastnost tenzorskega produkta

Naj bosta M, N modula nad komutativnim kolobarjem K . Potem obstaja bilinearna preslikava $(u, v) \mapsto u \otimes v$ med $M \times N$ in $M \otimes N$, ki ima naslednjo lastnost: Za vsak K -modul P in vsako bilinearno preslikavo $\Phi : M \times N \rightarrow P$ obstaja enolično določena preslikava $\phi : M \otimes N \rightarrow P$, da je $\phi(u \otimes v) = \Phi(u, v)$.

Izrek nam pove, da smo tenzorski produkt, ob predpostavki bilinearnosti, definirali na najsplošnejši možen način.

Bilinearnost preslikave $(u, v) \mapsto u \otimes v$ ekvivalentno karakterizirajo enakosti: $(u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v$, $u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v'$ ter $a(u \otimes v) = au \otimes v = u \otimes av$.

Definicija 12.3

Tenzorski produkt linearnih preslikav $\phi : M \rightarrow M'$ in $\psi : N \rightarrow N'$ je linearna preslikava $\phi \otimes \psi : M \otimes N \rightarrow M' \otimes N'$, podana s predpisom

$$\phi \otimes \psi(u \otimes v) = \phi(u) \otimes \psi(v).$$

Z lahkoto preverimo lastnosti distributivnost tenzorskega produkta preslikav nad seštevanjem, homogenost ter $(\phi_1 \otimes \phi_2)(\psi_1 \otimes \psi_2) = \phi_1 \phi_2 \otimes \psi_1 \psi_2$.

Trditev 12.4

Če so M, N in P moduli nad K je:

- $M \oplus N \cong N \oplus M$.
- $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$.
- $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$.

Izrek 12.5

Če sta modula M in N prosta nad kolobarjem K , potem je tudi $M \otimes N$ prav tako prost. Velja tudi, da če sta $\{e_i\}$ in $\{f_j\}$ zaporedoma bazi M in N , potem je množica $\{e_i \otimes f_j\}$ baza $M \otimes N$.

Literatura

- [1] prof. dr. Matej Brešar. *Uvod v Algebro*. 2018.