

Vaje iz analize 2b

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

20. marec 2025

Kazalo

1	Fourierova vrsta	3
2	Vektorska analiza	5
2.1	Integrali po ploskvah	7
	Literatura	14

1 Fourierova vrsta

Izrek 1.1

Če je $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ nezvezna v končno mnogo točkah, kjer obstajata levi in desni odvod, ter je med točkami nezveznosti odvedljiva, potem definiramo:

$$FV(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kjer je

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \end{aligned}$$

$FV(f)(x)$ konvergira $\forall x \in [-\pi, \pi]$ proti

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

V krajših definicijskega območja prav tako velja:

$$FV(f)(\pm\pi) = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$$

Trditev 1.2

- Če je f liha funkcija je $a_n = 0$ za vse n .
- Če je f soda funkcija je $b_n = 0$ za vse n .

Trditev 1.3: Defaktorizacijske formule

-
-
-

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

Trditev 1.4

Naslednji integrali so standardni pri računanju Fourierovih vrst:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \int x \cos(nx) \, dx = \frac{x \sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} + C \\ \bullet \quad & \int x \sin(nx) \, dx = \frac{-x \cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} + C \end{aligned}$$

Dokaz. Lahko per partes, lahko pa tudi upoštevajoč $\cos(nx) + i \cdot \sin(nx) = e^{inx}$. □

Komentar 1.5

Če imamo zadosti lepo funkcijo (zvezno, razen v končno mnogo točkah, kjer obstajata leva in desna limita, ter odvedljivo med točkami nezveznosti) $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ jo lahko razširimo na $[-\pi, \pi]$ bodisi kot sodo, bodisi kot liho funkcijo. Tako dobimo za f bodisi *kosinusno*, bodisi *sinusno Fourierovo vrsto*.

Trditev 1.6

Naslednji integrali so standardni pri računanju Fourierovih vrst:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \int x^2 \cos(nx) \, dx = \frac{x^2}{n} \sin(nx) + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin(nx) + C \\ \bullet \quad & \int x^2 \sin(nx) \, dx = \frac{-x^2}{n} \cos(nx) + \frac{2x}{n^2} \sin(nx) + \frac{2}{n^3} \cos(nx) + C \end{aligned}$$

Izrek 1.7: Parsevalova enakost

Naj bo prostor X Hilbertov in $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ kompleten ortonormiran sistem. Tedaj za vse $x \in X$ velja:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

V specifičnem primeru prostora $L^2[-\pi, \pi]$ se Parsevalova enakost glasi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = 2\pi a_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2),$$

kjer je Fourierova vrsta funkcije $f(x)$ enaka

$$FV(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

2 Vektorska analiza

Pravilen pogled na skalarna ter vektorska polja ni kot funkcije treh spremenljivk nad \mathbb{R} , temveč kot funkcije, ki sprejmejo vektorje v \mathbb{R}^3 . V izbrani bazi takemu polju seveda pripada neka zvezna funkcija treh spremenljivk, a nista a priori enaka.

Definicija 2.1

Gradient polja je operator ∇ , ki ima v standardni bazi obliko $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Divergenca vektorskega polja $g(\vec{r}) = g(x, y, z) = (X(\vec{r}), Y(\vec{r}), Z(\vec{r}))$ je definirana kot

$$\operatorname{div}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Vektorsko polje je *solenoidalno polje*, če je $\operatorname{div}(\vec{g}) = 0$

Komentar 2.2

$$\operatorname{rot}(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{a}) \neq (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{r} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{a}$$

Enakost iz prvega letnika v tem primeru **ne velja**.

Trditev 2.3: Lagrangeva identiteta

Naj sta \vec{a} ter \vec{b} vektorja v \mathbb{R}^3 . Tedaj velja

$$|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2$$

Definicija 2.4

Vektorsko polje \vec{f} je potencialno, če obstaja skalarno polje u , da velja

$$\vec{f} = \operatorname{grad}(u).$$

Polje u imenujemo potencial vektorskega polja \vec{f} .

Primer 2.5

- Pokaži, da je $\vec{f} = (2x \cos(y) - y^2 \sin(x), 2y \cos(x) - x^2 \sin(y), 4)$ potencialno polje ter določi njegov potencial.
- Določi $a, b \in \mathbb{R}$, da bo $\vec{f} = (2 \cdot (axy^4 - y), 2 \cdot (bx^2zy^3 - x), 3x^2y^4)$ potencialno polje.

Rešitev. • Ker je $u_z = 4$ velja $u(x, y, z) = c_3(x, y) + 4z$. Z integriranjem analogno izpeljemo

$$u = x^2 \cos(y) + y^2 \cos(x) + c_1(y, z)$$

ter

$$u = y^2 \cos(x) + x^2 \cos(y) + c_2(x, z).$$

Vemo, da je potencial do konstante natančno določen. Asist. dr. Gregor Cigler poda naslednji nasvet za to kako uganemo potencial: "Vzamemo vsoto unije členov, ki se pojavijo pri posamezni integraciji." Če sledimo tej mordrosti uganemo:

$$u(x, y, z) = x^2 \cos(y) + y^2 \cos(x) + 4z + c,$$

kjer je $c \in \mathbb{R}$.

•

$$\text{rot}(\vec{f}) = (12y^3x^2 - 2bx^2y^3, 2axy^4 - 6xy^4, 4bxzy^3 - 2 - 8axy^3 + 2).$$

Opazimo, da je $b = 6$ ter $a = 3$. Določimo še potencial:

$$\begin{aligned} u_x = 2(3xzy^4 - y) &\implies u = 2\left(\frac{3x^2zy^4}{2} - xy\right) + c_1(y, z) \\ u_y = 2(6x^2zy^3 - x) &\implies u = 2\left(\frac{6x^2zy^4 - xy}{4} - xy\right) + c_2(x, z) \\ u_z = 3x^3y^4 &\implies u = 3x^2y^4z + c_3(x, y) \end{aligned}$$

Tako uganemo $u = 3x^2y^4z - 2xy + c$

□

Izrek 2.6

Naj bo $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ funkcija razreda C^1 ter D odprta podmnožica \mathbb{R}^3 , ki je zvezdasto območje. Tedaj velja:

$$\vec{f} \text{ je potencialno polje} \iff \text{rot}(\vec{f}) = \vec{0}.$$

Implikacija iz leve v desno velja v vsakem primeru.

Primer 2.7

Naj sta $a, b \in \mathbb{R}^3$. Pokaži, da je

$$\text{grad} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\vec{b} \cdot \vec{r}} \right) = \frac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{b} \cdot \vec{r})^2}$$

Rešitev. Preden začnemo se pokrižamo, nato pa gremo bash.

□

2.1 Integrali po ploskvah

Primer 2.8

Izračunaj površino torusa s polmeroma $0 < a < R$.

Rešitev. Plašč torusa parametriziramo kot

$$x = (R + a \cdot \cos(\theta)) \cos(\varphi) \wedge y = (R + a \cdot \cos(\theta)) \sin(\varphi) \wedge z = a \sin(\theta),$$

kjer $\varphi \in [0, 2\pi)$ ter $\theta \in [0, 2\pi)$. Tako je $\vec{r}(\varphi, \theta) = (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$ parametrizacija torusa.

$$\begin{aligned}\vec{r}_\varphi &= ((R + a \cos(\theta)) \sin(\varphi), (R + a \cos(\theta)) \cos(\varphi), 0) \\ \vec{r}_\theta &= (-a \sin(\theta) \cos(\varphi), -a \sin(\theta) \sin(\varphi), a \cos(\theta)) \\ E &= \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = (R + a \cos(\theta))^2 \\ G &= \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = a^2 \\ F &= 0\end{aligned}$$

Vrednost $F = 0$ smo uganili, saj je $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \iff \vec{r}_u \perp \vec{r}_v$. To se zgodi natanko tedaj, ko so koordinatne krivulje pravokotne (koordinatna krivulja je pot, ki jo opiše ena koordinata pri fiksni drugi koordinati v parametrizaciji). Pri torusu sta koordinatni krivulji krog z radijem R v xy ravnini ter krog z radijem a , ki opiše obseg torusa. Sledja sta pravokotna. Dobimo

$$P(S) = \int_S dS = \int_D a \cdot (R + a \cos(\theta)) d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a \cdot (R + a \cos(\theta)) d\theta d\varphi = 2\pi a \cdot 2\pi R$$

Zelo pomenljiv rezultat. □

Komentar 2.9

Imamo parametrizacijo, ki iz "lepega" podprostora $D \subseteq \mathbb{R}^2$ slika v naš ciljni objekt v \mathbb{R}^3 . Od parametrizacije zahtevamo injektivnost ter regularnost (odvodi so nevzporedni):

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0} \quad \forall (u, v) \in D$$

Trditev 2.10: Površina ploskve

$$P(S) = \int_S dS = \int_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv = \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

kjer je $E = |\vec{r}_u|^2 = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$, $G = |\vec{r}_v|^2 = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$ ter $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$

Primer 2.11

Na enotski sferi je dana krivulja K z enačbo

$$\varphi = \tan(\theta),$$

kjer sta ϕ ter θ sferična kota. Določi dolžino krivulje K .

Rešitev. Dopusten interval za θ je $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kjer krajišči, kot množici z mero 0, ignoriramo. θ je tukaj zemljepisna višina, φ pa zemljepisna širina.

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (\cos(\varphi) \cos(\theta), \sin(\varphi) \cos(\theta), \sin(\theta))$$

$$\vec{r}_\varphi = (-\sin(\varphi) \cos(\theta), \cos(\varphi) \cos(\theta), 0)$$

$$\vec{r}_\theta = (-\cos(\varphi) \sin(\theta), -\sin(\varphi) \sin(\theta), 0)$$

$$E = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = \cos(\theta)^2$$

$$F = 0$$

$$G = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = 1,$$

kjer smo $F = 0$ določili iz pravokotnosti poldnevnikov ter vzporednikov.

$$d\varphi = \frac{1}{\cos(\theta)^2} d\theta.$$

Tako velja

$$\ell(K) = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(\theta)^2 \left(\frac{1}{\cos(\theta)^2} d\theta^2 \right)^2 + 1(d\theta)^2} = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \cos(\theta)^2}}{\cos \theta} d\theta$$

Konvergenco slednjega obravnavamo upoštevajoč

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{ter} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Dobimo, da integral ne obstaja. □

Komentar 2.12

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ter $\vec{r}(u, v)$ parametrizacija. Naj bo $\gamma(t) = \{(u(t), v(t)) \mid t \in [t_1, t_2]\}$ krivulja v definicijskem območju \vec{r} . Tedaj je

$$\ell(K) = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d}{dt}(\vec{r}(u(t), v(t))) \right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} dt,$$

kjer je $du = \frac{\partial u}{\partial t} dt$ ter $dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt$ ter

$$d^2s = E du^2 + F du dv + G dv^2$$

Primer 2.13

Naj bo $a > 0$. Izračunaj težišče homogenega loka astroide, ki je podana z enačbo

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad x, y \geq 0$$

Rešitev.

$$x_T = \frac{1}{m(K)} \cdot \int_K x \, dm = \frac{1}{m(K)} \int_K x \cdot \rho \, ds = \frac{1}{\int_K \rho \, ds} \cdot \int_K x \rho \, ds,$$

kjer je ds "delček" dolžine ter ρ dolžinska gostota. Ker je K homogena se ρ pokrajša

$$x_T = \frac{1}{\ell(K)} \int_K x \, ds.$$

Kaj pa je ds ? Po fizikalno lahko pot enačimo s produktom hitrosti ter spremembe časa. Tako velja

$$ds = |\vec{r}'| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Prvi korak je, da krivuljo parametriziramo, kot funkcijo $\vec{r}(t)$, ko parameter t preteče neko območje, v tem primeru interval.

Komentar 2.14: Integral skalarne polja po krivulji

Če je $u(x, y, z)$ skalarno polje je

$$\int_K u \, ds = \int_a^b u(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| dt.$$

V našem specifičnem primeru je ustrezna parametrizacija

$$x = a \cos(t)^3 \quad \text{ter} \quad y = a \sin(t)^3, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

$$\ell(K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\vec{r}'(t)| dt.$$

$$\vec{r}'(t) = (-3a \cos(t)^2 \sin(t), 3a \sin(t)^2 \cos(t))$$

$$\begin{aligned} |\vec{r}'(t)| &= \sqrt{9a^2 \cos(t)^4 \sin(t)^2 + 9a^2 \sin(t)^4 \cos(t)^2} = \\ &= 3a \sin(t) \cos(t) \cdot \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2} = 3a \sin(t) \cos(t), \end{aligned}$$

kjer smo izraz znotraj korena nesli ven, ker je venomer pozitiven.

$$\ell(K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos(t) \sin(t) \, dt = \frac{3}{2}a.$$

$$\int_K x \, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos(t)^3 \cdot 3a \cos(t) \sin(t) \, dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^4 \sin(t) \, dt = 3a^2 \int_0^1 t^4 \, dt = \frac{3}{5}a^2.$$

Sledi, da je $x_T = \frac{2}{5}a$, iz razlogov simetrije je $y_T = \frac{2}{5}a$. □

Primer 2.15

Izračunaj

$$\int_{\partial D} \frac{dS}{(1+x+y)^2}, \text{ kjer je } D = \{(x, y, z) \mid x+y+z \leq 1 \wedge x, y, z, \geq 0\}$$

Rešitev. D je tetraeder. Ker je ∂D ploskev gre za integral funkcije po ploskvi, ki je odsekoma gladka. $g(x, y, z) = \frac{1}{(1+x+y)^2}$. Integriramo po gladkih kosih ploskve ∂D .

Komentar 2.16: Integral skalarne polja po ploskvi

Naj bo $\vec{r}(u, v)$ parametrizacija območja S , ko (u, v) pretečeta območje Δ .

$$\int_S g dS = \int_{\Delta} g(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv,$$

kjer je

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

Najprej integriramo po ravninskem odseku, ki ga parametriziramo na sledeči način

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, 1 - x - y).$$

Tako je $\vec{r}_x = (1, 0, -1)$ ter $\vec{r}_y = (0, 1, -1)$. Sledi $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (1, 1, 1)$ ter $|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \int_{S_0} g dS &= \sqrt{3} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} g dy = \sqrt{3} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dy = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 dx \left(\frac{-1}{1+x+y} \Big|_0^{1-x} \right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \ln(2) \end{aligned}$$

Poglejmo še ostale robne ploskve. Ko je $y = 0$ je ustrezna parametrizacija $\vec{r}(x, z) = (x, 0, z)$. Sledi $\vec{r}_x = (1, 0, 0)$ ter $\vec{r}_y = (0, 0, 1)$, zato je $|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = 1$.

$$\int_{S_y} g dS = 1 \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x)^2} dz = \int_0^1 \frac{z}{(1+x)^2} \Big|_{z=0}^{z=1-x} dx = 1 - \ln(2)$$

Iz razlogov simetrije je

$$\int_{S_x} g dS = \int_{S_y} g dS = 1 - \ln(2).$$

Sedaj izračunamo še integral po zadnjem gladkem delu

$$\int_{S_z} g dS = 1 \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dy = \frac{-1}{2} + \ln(2),$$

kjer smo upoštevali rezultat iz izračuna integrala po S_0 .

Tako je

$$\int_{\partial D} g dS = 2 \cdot (1 - \ln(2)) + (1 + \sqrt{3})(\ln(2) - \frac{1}{2})$$

□

Komentar 2.17

Če je $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{a\}$, potem je

$$\int_S g \, dS = \int_{\Delta} g(x, y, a) \, dx \, dy,$$

kjer je Δ projekcija S na (x, y) ravnino.

Primer 2.18

Naj bo $a > 0$ ter $\alpha \in [0, 2\pi]$. $K = S(0, a) \cap \Pi$, kjer je Π ravnina z enačbo $y = x \tan(\alpha)$. Izračunaj

$$\int_K (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

Opazimo, da želimo integrirati vektorsko polje, namreč

$$\vec{f}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y), \text{ zanima nas } \int_K \vec{f} d\vec{r}.$$

Če je $\vec{r} = (x, y, z) \implies d\vec{r} = (dx, dy, dz)$. Integrand je sedaj skalarni produkt \vec{f} ter $d\vec{r}$. Parametrizirajmo krivuljo. Kot presek ravnine ter sfere, kjer ravnina poteka skozi središče sfere dobimo glavni krog. Naš parameter bo kot, ki ga predstavlja geografska višina. Asist. prof. dr. Gregor Cigler nam svetuje, da potegnemo asa iz rokava (med vajami je dejansko pogledal v rokav svoje jopice), ter se poslužimo sferičnih koordinat. Tako je

$$x = a \cos(\theta) \cos(\varphi), \quad y = a \cos(\theta) \sin(\varphi), \quad z = a \sin(\theta), \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \wedge \varphi \in [0, \pi].$$

Kot θ predstavlja geografsko višino, kot φ pa geografsko širino. V našem problemu fiksiramo $\varphi = \alpha$, kar poda ustrezno parametrizacijo glede na θ , namreč

$$\begin{aligned} \vec{r}(\theta) &= (a \cos(\alpha) \cos(\theta), a \sin(\alpha) \cos(\theta), a \sin(\theta)) \\ \implies \vec{r}'(\theta) &= (-a \cos(\alpha) \sin(\theta), -a \sin(\alpha) \sin(\theta), a \cos(\theta)) \wedge \vec{f}(\vec{r}(\theta)) \end{aligned}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(\theta)) = (a \sin(\alpha) \cos(\theta) - a \sin(\theta), a \sin(\theta) - a \cos(\theta) \sin(\alpha), a \cos(\theta) \cos(\alpha) - a \cos(\theta) \sin(\alpha))$$

Daljši izračun pokaže

$$\vec{f} \cdot \vec{r}' = a^2(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)).$$

Tako je

$$\int_K \vec{f} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} a^2(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) \, d\theta = 2\pi a^2 (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))$$

Ko računamo integral vektorskega polja po krivulji moramo skrbeti še za orientacijo. Naša orientacija je bila v nasprotni smeri urinega kazalca.

Komentar 2.19: Integral vektorskega polja po krivulji

Naj bo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ parametrizacija krivulje. Tedaj je

$$\int_K \vec{f} d\vec{r} = \int_a^b \left(\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \right) dt$$

Primer 2.20

Naj so $a, b, c \in \mathbb{R}$. Naj bo $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge x, y, z, \geq 0\}$. Izračunaj

$$\int_S a dy dz + b dx dz + c dx dy.$$

Rešitev. Opazimo, da je želeni integral integral vektorskega polja po ploskvi.

$$I = \int_S \vec{f} d\vec{S}, \quad \vec{f} = (a, b, c).$$

Uvedemo sferične koordinate

$$x = \cos(\theta) \cos(\varphi), \quad y = \cos(\theta) \sin(\varphi), \quad z = \sin(\theta), \quad \varphi, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = (\cos(\theta) \cos(\varphi), \cos(\theta) \sin(\varphi), \sin(\theta))$$

$$\vec{r}_\theta = (-\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta))$$

$$\vec{r}_\varphi = (-\cos(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta) \cos(\varphi), 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi &= (-\cos(\theta)^2 \cos(\varphi), -\cos(\theta)^2 \sin(\varphi), -\cos(\theta) \sin(\theta)) = \\ &= -\cos(\theta) \cdot (\cos(\theta) \cos(\varphi), \cos(\theta) \sin(\varphi), \sin(\theta)) = -\cos(\theta) \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

V naši orientaciji \vec{N} kaže proti izhodišču.

$$I = \int_S \vec{f} d\vec{S} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a \cos(\theta)^2 \cos(\varphi) - b \cos(\theta)^2 \sin(\varphi) - c \sin(\theta) \cos(\theta) \right) d\theta.$$

V pomoč nam je lahko funkcija beta, namreč:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{2p-1} \sin(x)^{2q-1} = \frac{1}{2} B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 dx = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-\pi}{4} a \cos(\varphi) - \frac{\pi}{4} b \sin(\varphi) - \frac{c}{2} \right) d\varphi = \frac{-\pi}{4} (a + b + c)$$

□

Komentar 2.21: Integral vektorskega polja po ploskvi

Integral vektorskega polja po ploskvi lahko pretvorimo na integral skalarnega polja po ploskvi na naslednji način

$$\int_S \vec{f} d\vec{S} = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{N}) dS, \text{ kjer je } \vec{N} \text{ enotska normala na } d\vec{S}.$$

Orientacija ploskve je določena s smerjo normale.

Če imamo parametrizacijo S kot $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, kjer sta $(u, v) \in \Delta$, potlej je

$$\int_S \vec{f} d\vec{S} = \int_{\Delta} (\vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)) du dv,$$

kjer se smer $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ usklajena z orientacijo.

Primer 2.22

$a > 0$. Naj bo

$$\vec{f}(x, y, z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2).$$

Izračunaj cirkulacijo \vec{f} vzdolž preseka roba kocke $[0, a]^3$ in ravnine $x + y + z = \frac{3a}{2}$.

Rešitev. K razpade na 6 gladih kosov - daljic. Cirkulacija je integral vektorskega polja vzdolž sklenjene krivulje - ima fizikalno interpretacijo glede pretakanja vode ter hitrosti oz. poti delcev. Parametrizacija ene izmed daljic je

$$\vec{r}(t) = \left\{ \left(t, \frac{3a}{2} - t, 0 \right) \mid t \in \left[\frac{a}{2}, a \right] \right\} \implies \vec{r}_t(t) = (1, 0, -1).$$

Tako je

$$\int_{K_1} \vec{f} d\vec{r} = \int_{\frac{a}{2}}^a \vec{f} \cdot \vec{r}_t dt = \int_{\frac{a}{2}}^a \left(\frac{-9a^2}{4} + 3at - 2t^2 \right) dt = \dots$$

Izračunati moramo še $\int_{K_i} \vec{f} d\vec{r}$ za $i \in \{2, 3, \dots, 6\}$

□

Literatura

- [1] asist. prof. dr. Gregor Cigler. *Vaje iz Analize 2b*. 2025.