Naloge s tekmovanja Putnam

Seminar

Hugo Trebše
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

28. april 2025

Kazalo

1 Uvod

Tekmovanje William Lowell Putnam Mathematical Competition, znano pod imenom Putnam, je letno matematično tekmovanje za študente v ZDA ter Kanadi. Putnam velja za eno izmed najzahtevnejših matematičnih tekmovanj za študente. Sestoji iz 12 problemov, vsak izmed katerih je ocenjen s točkami od 0 do 10. V letu 2024 je bil najpogostejši rezultat 2 točki, povprečen rezultat pa 8 točk.

V tem članku bomo predstavili nekaj zanimivih problemov s tekmovanja Putnam skupaj z njihovimi rešitvami. Naloge so razporejene v različnih razdelkih glede na temo. Cilj članka je ponuditi vpogled v strategije in tehnike, ki so ključne pri reševanju tovrstnih matematičnih izzivov ter bralcu razširiti razumevanje kreativnega reševanja problemov.

Vir vseh nalog je The Putnam Archive [5] - spletni arhiv rešitev ter nalog s tekmovanja Putnam.

Rešitve nalog v članku so praviloma avtorjeve. Pri nekaterih rešitvah sem se zaradi elegantnejše oziroma bolj pedagoške ekspozicije oprl na rešitve drugih oziroma na uradne rešitve, ki so na ustreznih mestih citirane.

2 Kombinatorika

Naloga 2.1: Putnam 2004, A1

Košarkaška zvezda Duka Lončić[1]spremlja število uspešnih prostih metov, ki jih je zadel med prvimi n prostimi meti igre. V začetku igre je Duka zadel manj kot 80% prostih metov, proti koncu igre pa je kumulativno zadel več kot 80 % prostih metov, ki jih je izvajal. Ali nujno obstaja trenutek v igri, v katerem je Duka zadel natanko 80 % prostih metov?

Rešitev. Morda rahlo nepričakovano je odgovor na vprašanje pritrdilen. Zelo naravna točka, na kateri bi Duka lahko dosegel natančnost 80%, je prva točka na kateri Duka preseže ali ima natančnost 80%. Če bi namreč Duka po tem trenutku zadel vse proste mete bi njegova natančnost ostala večja od 80% tekom celotne igre, kar eliminira vse ostale kandidate. Izziv je sedaj pokazati, da na omenjeni točki Duka ne strogo presega natančnosti 80%.

Definiramo $S(k)$ kot število prostih metov, ki jih je Duka zadel med prvimi k poizkusi. Naj bo i najmanjše tako naravno število, večje od 1, za katerega je $\frac{S(i)}{i} \geq 80\%$. Iz minimalnosti i sledi, da je $S(i-1) = S(i) - 1$. Tedaj je

$$\frac{S(i-1)}{i-1} < \frac{4}{5} \iff 5 \cdot S(i) - 4i < 1.$$

Prav tako velja

$$\frac{S(i)}{i} \geq \frac{4}{5} \iff 5 \cdot S(i) - 4i \geq 0,$$

iz česar sledi

$$0 \leq 5 \cdot S(i) - 4i < 1.$$

Ker je izraz $5 \cdot S(i) - 4 \cdot i$ celo število je leva neenakost pravzaprav enakost, kar implicira željeni zaključek. $\square$

Komentar 2.2: Diskretni izrek o vmesni vrednosti

Definirali smo proces, v katerem dani ulomek (ki je manjši od 1) slikamo v eno izmed dveh različnih vrednosti

$$\frac{k}{n} \mapsto \begin{cases} \frac{k+1}{n+1} \\ \frac{k}{n+1} \end{cases}.$$

Pokazali smo, da če začnemo z ulomkom, manjšim od $\frac{4}{5}$ ter končamo z ulomkom večjim od $\frac{4}{5}$, potem smo gotovo na neki točki dosegli vrednost $\frac{4}{5}$. To spominja na izrek o vmesni vrednosti: zvezna funkcija, definirana na intervalu, ki doseže negativno ter pozitivno vrednost nujno doseže tudi ničelno vrednost.

[1]Originalna oblika naloge v angleščini na tem mestu uporabi ime Shanille O'Keal, ki je besedna igra na ime košarkaša Shaquille O'Neal. Uporaba fiktivnega imena Duka Lončić je tako na mestu.

2.1 Posplošitev

Trditev 2.3

Če ulomek $\frac{4}{5}$ v zgornji nalogi zamenjamo z poljubnim ulomkom oblike $\frac{n-1}{n}$, potem nujno obstaja trenutek v igri, v katerem je Duka zadel $\frac{n-1}{n}$ prostih metov.

Dokaz. Analogno definiramo $S(k)$ in predpostavimo, da je i najmanjše naravno število, večje od 1, za katero velja $\frac{S(i)}{i} \geq \frac{n-1}{n}$. Tedaj velja

$$\frac{S(i-1)}{i-1} = \frac{S(i)-1}{i-1} < \frac{n-1}{n} \iff n \cdot (S(i)-1) < (n-1) \cdot (i-1).$$

Velja tudi

$$\frac{S(i)}{i} \geq \frac{n-1}{n} \iff n \cdot S(i) \geq (n-1) \cdot i.$$

Enakosti preobrazimo

$$n \cdot S(i) - n < (n-1) \cdot i - n + 1 \iff n \cdot S(n) - (n-1) \cdot i < 1$$

ter

$$n \cdot S(i) - (n-1) \cdot i \geq 0.$$

Tako dobimo

$$0 \leq n \cdot S(i) - (n-1) \cdot i < 1.$$

Ker je $n \cdot S(i) - (n-1) \cdot i$ celo število sledi, da je

$$n \cdot S(i) - (n-1) \cdot i = 0 \iff \frac{S(i)}{i} = \frac{n-1}{n},$$

kar smo želeli pokazati. □

Trditev 2.4

Analogna trditev ne velja za vse $p \in (0,1)$, ki niso oblike $\frac{n-1}{n}$.

Dokaz. Denimo, da Duka zgreši prvi met, nato pa zadane vse mete do n-tega, potem pa zapusti igro (morda zaradi poškodbe gležnja). Naj bo n tako naravno število, da je $\frac{n-1}{n} > p$, kar zagotovi, da Duka preseže natančnost p. Po prvem metu ima Duka natančnost 0, po vsakem naslednjem metu pa ima natančnost $\frac{k-1}{k}$, kjer je k število metov, ki jih je do tiste točke izstrelil. Ker p ni število ni oblike $\frac{n-1}{n}$, Duka nikoli ne doseže natančnosti p. □

Naloga 2.5: Putnam 2012 B3

$2n$ ekip je sodelovalo v turnirju, ki je trajal $2n-1$ dni. Vsak dan je potekalo n tekem, tako da je vsaka ekipa igrala v natanko eni tekmi. Vsako tekmo ena izmed sodelujočih ekip zmaga, druga ekipa pa jo izgubi. Tekom turnirja je vsaka ekipa igrala z vsako drugo ekipo.
Vsak dan turnirja stavimo na neko ekipo, a na nobeno ekipo dvakrat. Stavo dobimo, če izbrana ekipa tisti dan zmaga svojo tekmo. Ali je ne glede na strukturo turnirja (na kateri dan se pomerijo ekipe) ter izide tekem mogoče, da smo zmagali vse svoje stave?

Rešitev. [1] Problem pretvorimo v jezik teorije grafov. Naj bo $G = (E \cup D, E \times D)$ graf, kjer je $|E| = 2n$ množica ekip ter $|D| = 2n-1$ množica dni. Naj bo (e, d) povezava v grafu G natanko tedaj, ko je ekipa e zmagala svojo tekmo na dan d. Problem se sedaj pretvori v iskanje popolnega prirejanja množici D; za vsak dan d namreč želimo najti ekipo e, ki je zmagala na ta dan, hkrati pa nobene ekipe iz E nočemo izbrati dvakrat.

Definicija 2.6

Naj bo (X, Y, P) dvodelni graf z deloma X ter Y ter množico povezav P.

- *Popolno prirejanje* množici X je množica disjunktnih povezav, ki pokrijejo X.
- Za $W \subseteq X$ definiramo *okolico* podmnožice W $N_G(W)$ kot množico vseh vozlišč v Y, ki so povezane z vsaj enim elementom W.

Izrek 2.7: Hallov poročni izrek

Naj bo $G = (X, Y, P)$ dvodelen graf. Potem v grafu G obstaja popolno prirejanje množici X natanko tedaj, ko je

$$|W| \leq |N_G(W)|$$

za vse $W \subseteq G$.

Hallov poročni izrek nam pove, da če za popolno prirejanje množici X ne obstaja nobena lokalna obstrukcija, potem popolno prirejanje gotovo obstaja. Lokalna obstrukcija je v tem primeru neenakost

$$|W| > |N_G(W)|,$$

veljavnost katere gotovo onemogoči obstoj popolnega prirejanja.

Denimo, da obstaja taka podmnožica $S \subseteq D$, za katero velja

$$|S| > |N_G(S)|$$

ter naj bo $t \in E \setminus N_G(S)$ ekipa, ki ni zmagala nobene tekme na dan v S. Množica $E \setminus N_G(S)$ je očitno neprazna, saj je

$$|E \setminus N_G(S)| \geq |E| - |N_G(S)| > |E| - |S| = 2n - (2n-1) = 1,$$

zato taka ekipa t resnično obstaja. Ekipa t je na vsak dan iz S igrala z drugo ekipo, obenem pa je ekipa s katero je igrala t vedno zmagala. Po definiciji množice $N_G(S)$ je tako ekipa t vsak dan iz S igrala z neko ekipo iz $N_G(S)$ ter bila poražena. Sledi, da je

$$|N_G(S)| \geq |S|\,,$$

kar je v protislovju z našo predpostavko. Sledi, da taka podmnožica $S \subseteq D$, za katero velja

$$|S| > |N_G(S)|$$

ne obstaja, kar poda želeni zaključek po Hallovem poročnem izreku. $\square$

3 Analiza

Naloga 3.1: Putnam 2000 B4

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, za katero velja

$$f(2x^2 - 1) = 2xf(x)$$

za vse x. Pokaži, da je $f(x) = 0$ za vse $x \in [-1, 1]$.

Rešitev. [4] Argument funkcije na levi strani enakosti spominja na adicijski izrek $2\cos(x)^2 - 1 = \cos(2x)$. Skupaj z dejstvom, da nas zanimajo vrednosti f na sliki funkcije cos to motivira substitucijo $x = \cos(t)$, kar dano enakost preobrazi v naslednjo

$$f(\cos(2t)) = 2\cos(t) \cdot f(\cos(t)).$$

Faktorja $2\cos(t)$ se lahko znebimo z uporabo formule za dvojni kot funkcije sinus, zato za vsak $x \in \mathbb{R}$, ki ni celoštevilski večkratnik π, definiramo

$$g(t) = \frac{f(\cos(t))}{\sin(t)}.$$

Tako sledi

$$g(2t) = \frac{f(\cos(2t))}{\sin(2t)} = \frac{2\cos(t)f(\cos(t))}{\sin(2t)} = \frac{2\cos(t)f(\cos(t))}{2\sin(t)\cos(t)} = \frac{f(\cos(t))}{\sin(t)} = g(t).$$

Če bi bila g zvezna funkcija na intervalu bi lahko s klasičnimi argumenti iz Analize 1 zaključili, da je konstantna. Ker pa je njeno definicijsko območje bolj zapletena množica moramo postopati previdneje. Funkcija g je definirana na množici $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, na kateri je tudi zvezna, ter je periodična s periodo π, obenem pa za vsaka $t, 2t \in D$ velja $g(t) = g(2t)$. Te tri dejstva uporabimo ter ugotovimo, da za vsaki celi števili k, m velja

$$g(1 + \frac{\pi m}{2^k}) = g(2^k + \pi m) = g(2^k) = g(1).$$

Zaključili smo, da je g konstantna na množici

$$G = \{1 + \frac{\pi a}{2^b} | a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Ta množica je gosta v $\mathbb{R}$, kar lahko utemeljimo s preprostim topološkim argumentom. Preslikava

$$\mathcal{L} : x \mapsto \frac{1}{\pi}(x - 1)$$

preslika množico G v množico $\{\frac{a}{2^b} | a, b \in \mathbb{Z}\}$, ki je znano gosta v $\mathbb{R}$. Preslikava $\mathcal{L}$ je linearna, v posebnem primeru je homeomorfizem. Ker homeomorfizmi slikajo goste množice v goste množice sledi da $\mathcal{L}^{-1}$ slika množico, ki je gosta v $\mathbb{R}$, v množico G, ki je posledično tudi gosta v $\mathbb{R}$. Ker je G gosta v $\mathbb{R}$ je gotovo gosta tudi v D. Sklepanje nas je vodilo do zaključka, da je zvezna funkcija g konstantna na gosti podmnožici svojega definicijskega območja, kar pomeni, da je konstantna na celotnem definicijskem območju.

Zaradi lihosti funkcije sin ter sodosti funkcije cos za vse $t \in D$ velja

$$g(-t) = -g(t).$$

Ker je g konstantna na D je $g(t) = g(-t) = -g(t)$, iz česar sledi

$$g(t) = 0 \text{ za vse } t \in D.$$

Sledi, da je $f(\cos(x)) = 0$ za vse $x \in D$. Tako sledi, da je

$$f(x) = 0 \text{ za vse } x \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

Iz zveznosti f sledi, da je $f(0) = 0$. Vrednosti v krajiščih pa lahko izračunamo iz začetne enakosti, namreč

$$f(2 \cdot 0^2 - 1) = f(-1) = 2 \cdot 0 \cdot f(0) \implies f(-1) = 0$$
$$f(2 \cdot 1^2 - 1) = f(1) = 2 \cdot 1 \cdot f(1) = 2 \cdot f(1) \implies f(1) = 0.$$

□

4 Algebra

Naloga 4.1: Putnam 2015 B3

Naj bo S množica vseh realnih 2×2 matrik

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

katerih elementi a, b, c, d v tem vrstnem redu tvorijo aritmetično zaporedje. Določi vse matrike M v S, za katere obstaja neko naravno število $k > 1$, da je M^k prav tako element S.

Rešitev. [2]
Naj bosta $a, d \in \mathbb{R}$ ter

$$M = \begin{pmatrix} a & a+d \\ a+2d & a+3d \end{pmatrix}.$$

Sledi, da je

$$\operatorname{char}(M)(t) = \det(M - tI) = t^2 - (2a+3d)t - 2d^2$$

ter

$$\det(M) = -2d^2.$$

Diskriminanta karakterističnega polinoma je $(2a+3d)^2 + 8d^2 \geq 0$, kar pomeni, da ima karakteristični polinom dve realni ničli. Primer $d = 0$ bomo obravnavali kasneje, zato predpostavimo $d \neq 0$. Sledi, da je prosti člen karakterističnega polinoma strogo negativen, kar pomeni, da sta realni lastni vrednosti λ_1 ter λ_2 neničelni in različno predznačeni. Ker obstajata dve različni lastni vrednosti lahko M diagonaliziramo

$$M = \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ps\lambda_1 - qr\lambda_2 & qs(\lambda_1 - \lambda_2) \\ pr(\lambda_2 - \lambda_1) & ps\lambda_2 - sq\lambda_1 \end{pmatrix},$$

kjer so konstante p, s, q, r realna števila, za katera velja

$$ps - qr = 1.$$

Ker je $M \in S$ sledi, da je vsota elementov na diagonali enaka vsoti elementov na anti-diagonali, kar implicira

$$(ps - qr)(\lambda_1 + \lambda_2) = (qs - pr)(\lambda_1 - \lambda_2) \implies qs - pr = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Če je M^k za neki $k > 1$ prav tako element S analogen izračun pokaže, da je

$$qs - pr = \frac{\lambda_1^k + \lambda_2^k}{\lambda_1^k - \lambda_2^k}.$$

Ker sta obe lastni vrednosti neničelni ter drugače predznačeni lahko definiramo $x = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$. V tem primeru je $x \neq 1$, zato sledi

$$\frac{x+1}{x-1} = qs - pr = \frac{x^k + 1}{x^k - 1} \implies 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x^k - 1}$$
$$\implies \frac{2}{x-1} = \frac{2}{x^k - 1} \implies x = x^k \implies x \in \{-1, 0\}.$$

V primeru $x = 0$ je $\lambda_1 = 0$, kar je v protislovju z ugotovitvijo o neničelnosti lastnih vrednosti. Tako je edina možnost $x = -1$ oziroma $\lambda_1 = -\lambda_2$. Primerjanje lastnih vrednosti z linearnim členom karakterističnega polinoma poda $2a + 3d = 0$. V tem primeru je M oblike

$$\begin{pmatrix} -3t & -t \\ t & 3t \end{pmatrix}, \text{ kjer je } t = \frac{-a}{3} = \frac{d}{2}.$$

Matrike te oblike izpolnjujejo pogoj za $k = 3$, kar lahko preverimo računsko.

$$\begin{pmatrix} -3t & -t \\ t & 3t \end{pmatrix}^3 = t^3 \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 = t^3 \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (2t)^3 \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Če je $d = 0$ je M oblike

$$\begin{pmatrix} t & t \\ t & t \end{pmatrix} \text{ za neki } t \in \mathbb{R}.$$

Ker so vsi elementi M enaki bo enako veljalo za vse potence M, kar pomeni, da ta družina matrik izpolnjuje pogoj za $k = 2$.

Družini matrik nista tako sporadični kot se morda zdi na prvi pogled, prva je specifični primer konstantnega aritmetičnega zaporedja, med tem ko je druga oblika poljubne matrike z želeno lastnostjo ter ničelno sledjo. $\square$

5 Teorija števil

Naloga 5.1: Putnam 1996 A5

Dokaži, da za vsa praštevila $p > 3$ število p^2 deli

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{p}{i}, \quad \text{kjer je} \quad k = \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor .$$

Rešitev. [3] Opazimo, da je

$$\frac{1}{p}\binom{p}{i} = \frac{p-1}{1} \cdot \frac{p-2}{2} \cdots \frac{p-i+1}{i-1} \cdot \frac{1}{i} \equiv \frac{(-1)^{i-1}}{i},$$

ter prevedemo pogoj na

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^i}{i} = 0 \pmod{p}.$$

Ločimo sumande vsote na sledeči način

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^i}{i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} - 2 \cdot \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \frac{1}{p-i} =$$
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{p-k-1} \frac{1}{p-i} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} \pmod{p}.$$

Prva enakost sledi po ločevanju sumandov glede na predznak (oziroma na sode ter lihe imenovalce), druga sledi po krajšanju faktorjev 2 ter $\frac{1}{2}$ (kar lahko storimo za $p \neq 2$) ter upoštevajoč

$$-i = p - i \pmod{p},$$

tretja enakost pa sledi po enakosti naslednjih množic

$$\left\{p-1, p-2, \ldots, p - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right\} = \left\{ \left\lfloor \frac{2}{3p} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{2}{3p} \right\rfloor + 2, \ldots, p-1 \right\}.$$

Dobljeno vsoto moramo še evalvirati. V ta namen definiramo *primitivni koren* multiplikativne grupe ostankov $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ kot število katerega potence generirajo celotno grupo.

Lema 5.2

Multiplikativna grupa ostankov $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ima primitivni koren.

Dokaz. Najprej navedemo dve pomožni trditvi.

Trditev 5.3

Če obstaja element reda λ po modulu p, potem je elementov reda λ natanko $\varphi(\lambda)$.

Dokaz. Če je x element reda λ, potem je ničla polinoma

$$f(T) = T^\lambda - 1 \in \mathbb{F}_p[T].$$

Sledi, da so ostale ničle polinoma ravno

$$x^0, x, x^2, \dots, x^{\lambda-1}.$$

Da so to resnično ničle f je očitno, da več ničel ne obstaja pa je posledica znanega dejstva, da ima polinom stopnje k nad poljem $\mathbb{F}$ kvečjemu k ničel. Obenem vemo, da je red elementa x^k natanko

$$\frac{\lambda}{\gcd(\lambda, k)}.$$

Elementov reda λ je tako natanko $\varphi(\lambda)$, saj ima vsaka potenca x, ki ima eksponent tuj λ red natanko λ, obenem pa so vsi elementi reda λ med naštetimi ničlami f. $\square$

Brez dokaza navedemo še naslednjo kombinatorično lemo, ki jo poznamo iz Diskretne matematike 1.

Trditev 5.4

Velja enakost

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Kot posledica zgornjih trditev sledi, da je število elementov reda λ bodisi 0, bodisi $\varphi(\lambda)$. Sledi:

$$p - 1 = \sum_{d|p-1} \text{število elementov reda } d = \sum_{d|p-1} (0 \text{ ali } \varphi(d)).$$

Če bi bil katerikoli izmed sumandov enak nič bi dobili protislovje z zgornjo trditvijo, zato so vsi sumandi neničelni. V posebnem primeru je število elementov reda $p-1$ neničelno. $\square$

Tako vemo, da po modulu p obstaja tako število $g \not\equiv 0 \pmod p$, ki generira celotno grupo ostankov. Velja

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} = \sum_{i=0}^{p-2} g^{-i} = \frac{1 - g^{p-1}}{1 - g} = 0,$$

kjer zadnja enakost sledi po malem Fermatovem izreku. $\square$

Naloga 5.5: Putnam 2015 A2

Definiramo $a_0 = 1, a_1 = 2$ ter

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Najdi liho praštevilo, ki deli a_{2015}.

Rešitev. Izračunajmo nekaj členov zaporedja

n	a_n	n	a_n
2	$7 = 1 \cdot 7$	6	$1351 = 7 \cdot 193$
3	$26 = 2 \cdot 13$	7	$5042 = 2 \cdot 2521$
4	$97 = 1 \cdot 97$	8	$18817 = 31 \cdot 607$
5	$362 = 2 \cdot 181$	9	$70226 = 2 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 73$

Tabela 1: Nekaj členov zaporedja $\{a_n\}$.

Opazimo, da za izračunane elemente velja $a_2 \mid a_6$ ter $a_3 \mid a_9$, ne velja pa $a_2 \mid a_4$ ali $a_3 \mid a_6$. To motivira domnevo, da za vsako liho število ℓ velja

$$a_k \mid a_{\ell k}.$$

Kot smo vajeni iz Diskretne matematike 1 s pomočjo karakterističnega polinoma rekurzivne enačbe ter začetnih vrednosti zaporedja izračunamo eksplicitno formulo

$$a_n = \frac{1}{2}\left((2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n\right).$$

Domneva o deljivosti motivira naslednji izračun

$$\frac{a_{\ell k}}{a_k} = \frac{(2-\sqrt{3})^{\ell k} + (2+\sqrt{3})^{\ell k}}{(2-\sqrt{3})^k + (2+\sqrt{3})^k} = \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^j (2-\sqrt{3})^j (2+\sqrt{3})^{\ell-1-j}$$

Vemo, da algebraična cela števila $\overline{\mathbb{Z}}$ (ničle moničnih celoštevilskih polinomov) tvorijo kolobar. Ker sta $2-\sqrt{3}$ ter $2+\sqrt{3}$ ničli polinoma $X^2 - 4X + 1$ sledi

$$\frac{a_{\ell k}}{a_k} \in \overline{\mathbb{Z}}.$$

Iz rekurzivne zveze je očitno, da so elementi zaporedja cela števila. Tako velja

$$\frac{a_{\ell k}}{a_k} \in \mathbb{Q}.$$

Znana lema (izrek o racionalnih ničlah) pa nam pove, da je

$$\overline{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}.$$

Tako sledi, da je za vsako liho naravno število ℓ

$$\frac{a_{\ell k}}{a_k} \in \mathbb{Z}.$$

Ker je $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ sledi

$$\frac{a_{2015}}{a_5} \in \mathbb{Z},$$

oziroma ekvivalentno $a_5 \mid a_{2015}$. Izračunali smo $a_5 = 2 \cdot 181$, zato sledi, da 181 deli a_{2015}. □

5.1 Posplošitev

Koeficienti v rekurzivni zvezi v našem dokazu niso igrali pomembne vloge. Ključno je bilo, da so koeficienti celi, kar zagotavlja racionalnost obravnavanega ulomka ter celost koeficientov karakterističnega polinoma, ter da je koeficient a_n enak 1, kar je zagotovilo, da sta ničli karakterističnega polinoma algebraični celi števili. Prav tako je bilo ključnega pomena, da je rekurzivna zveza stopnje 2, saj lahko le v tem primeru zagotovimo, da je eksplicitna rešitev vsota večkratnikov dveh eksponentnih funkcij. To je omogočalo deljenje izrazov za $a_{k\ell}$ ter a_k preko znane formule o vsoti enakih potenc.

Kar pa je bilo pomembno glede specifičnih vrednosti začetnih členov zaporedja ter koeficientov v rekurzivni zvezi je to, da so zagotavljali obstoj dveh različnih ničel karakterističnega polinoma ter enakost koeficientov, ko izrazimo rešitev rekurzivne enačbe kot vsoto eksponentnih rešitev. Prvo je ključno, saj bi v nasprotnem primeru dobili rešitev rekurzivne enačbe kot linearno kombinacijo eksponentne rešitve ter rešitve, ki je produkt linearne funkcije z eksponentno, kar bi onemogočalo deljenje izrazov za $a_{k\ell}$ ter a_k. Do podobne prepreke bi prišli, če absolutni vrednosti koeficientov v linearni kombinaciji eksponentnih rešitev ne bi bili enaki.

Trditev 5.6

Naj bosta a_0 ter a_1 celi števili ter naj bo zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podano z rekurzivno zvezo

$$a_n = a \cdot a_{n-1} + b \cdot a_{n-2}, \text{ za } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Naj bo $a^2 \neq -4b$ ter naj bo izpolnjen eden izmed naslednjih pogojev:

- $a_0 = 0$.
- $a_0 \in \mathbb{Z}$ ter $a_1 = \frac{a}{2} \cdot a_0 \in \mathbb{Z}$.

Če je $a_k \neq 0$, potem za vse lihe ℓ velja $a_k \mid a_{k\ell}$.

Dokaz. Naj bosta λ_1 ter λ_2 različni ničli $X^2 - aX - b$, ki obstajata, ker je $a^2 \neq -4b$. Tedaj je

$$a_n = C\lambda_1^n + D\lambda_2^n.$$

C ter D določimo iz začetnih členov zaporedja $a_0 = C + D$ ter $a_1 = C\lambda_1 + D\lambda_2$.

Najprej pokažimo, da je $|C| = |D|$. Enačbo za prva dva člena zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zapišemo v matrični obliki.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Determinanta 2×2 matrike na levi je neničelna, saj sta ničli karakterističnega polinoma različni. Če je izpolnjen prvi izmed pogojev v trditvi gotovo velja $C + D = 0$, kar pomeni, da je $|C| = |D|$. Če je izpolnjen drugi izmed pogojev v trditvi sledi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{a_0}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}.$$

Ker je $-a$ linearni koeficient moničnega polinoma, katerega ničli sta λ_1 ter λ_2, velja $a = \lambda_1 + \lambda_2$. Sledi, da vektor

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{a_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

reši zgornjo enačbo. Rešitev sistema je enolična, saj je matrika obrnljiva, zato sledi enakost C ter D. Tudi v tem primeru imata konstanti C ter D enako absolutno vrednost.

Tako je

$$a_n = |C| \left(\lambda_1^n \pm \lambda_2^n \right).$$

Za lihe ℓ velja

$$\frac{a_{k\ell}}{a_k} = \frac{|C| \left(\lambda_1^{k\ell} \pm \lambda_2^{k\ell} \right)}{|C| \left(\lambda_1^k \pm \lambda_2^k \right)} = \sum_{i=0}^{\ell-1} (\pm 1)^i \left(\lambda_1^k \right)^i \left(\lambda_2^k \right)^{\ell-1-i} \in \overline{\mathbb{Z}}.$$

Ker so elementi zaporedja cela števila je

$$\frac{a_{k\ell}}{a_k} \in \mathbb{Q}.$$

Sedaj lahko zaključimo kot v rešitvi naloge. Vemo, da so edina racionalna algebraična cela števila natanko običajna cela števila, kar pomeni, da je

$$\frac{a_{k\ell}}{a_k} \in \mathbb{Z},$$

kar smo želeli pokazati.

$\square$

Literatura

[1] jonathanasdf (uporabniško ime). *Putnam 2012 B3*. 2012. URL: https://artofproblemsolving.com/community/c7h509875p2865753.

[2] Evan Chen. *Putnam 2015 B3*. 2015. URL: https://artofproblemsolving.com/community/c7h1171038p5624382.

[3] Kiran Kedlaya. *Solutions to the 57th William Lowell Putnam Mathematical Competition Saturday, December 7, 1996*. 1996. URL: https://kskedlaya.org/putnam-archive/1996s.pdf.

[4] Kiran Kedlaya. *Solutions to the 61st William Lowell Putnam Mathematical Competition Saturday, December 2, 2000*. 2000. URL: https://kskedlaya.org/putnam-archive/2000s.pdf.

[5] Kiran Kedlaya. *The Putnam Archive*. 2024. URL: https://kskedlaya.org/putnam-archive/.