Algebra 1

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

24. september 2025

Kazalo

1 Vektorski prostori

Definicija 1.1: Vektorski prostor

Neprazni množici V s komutativno operacijo seštevanja elementov ter operacijo množenja elementov s skalarji iz polja $\mathbb{F}$, za katero velja

- $$(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$$
- $$\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$$
- $$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$$
- $$1 \cdot v = v$$

pravimo *vektorski prostor*. Elementi V so *vektorji*, elementi $\mathbb{F}$ pa skalarji.

Ključne lastnosti so tako komutativnost grupe $(V, +)$, obe distributivnosti, homogenost ter identična lastnost.

Množica $U \subseteq V$, kjer je V vektorski prostor je *vektorski podprostor*, če je za dani operaciji tudi U vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Sepravi zahtevamo, da je $(U, +) \leq (V, +)$ ter je U zaprta za množenje s skalarji. Ekvivalentno je U zaprta za tvorjenje linearnih kombinacij.

Definicija 1.2

Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, U pa njegov podprostor. Na množici V definiramo relacijo $\sim$

$$x \sim y \iff x - y \in U.$$

Ni težko preveriti, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija. Elementi V/U so odseki $v + U$. Za očitni operaciji seštevanja odsekov ter množenja odsekov s skalarji postane V/U *kvocientni prostor* V po U.

Komentar 1.3

Vsota podprostorov $V_1, V_2 \leq V$

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 | v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2\}$$

je vektorski prostor. Prav tako je presek podprostorov vektorski prostor. Unija je vektorski prostor, le če je eden izmed prostorov vsebovan v drugem.

Definicija 1.4

Naj bodo $V_1, V_2, \ldots, V_n \leq V$. Pravimo, da je V *direktna vsota* podprostorov $V_1, \ldots, V_n$, če je

- $$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

- $$V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_i) = \{0\}$$

Označimo $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$

Trditev 1.5

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

natanko tedaj, ko lahko vsak $v \in V$ zapišemo na enoličen način kot vsoto elementov $\{V_i\}$.

Dokaz. Očitno. □

1.1 Končnorazsežni vektorski prostori

Definicija 1.6

Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

- Pravimo, da so vektorji $v_1, \ldots, v_n \in V$ *linearno neodvisni*, če

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \implies \alpha_i = 0.$$

- Za neprazno podmnožico $X \subseteq V$ definiramo njeno *linearno ogrinjačo* kot

$$\mathrm{Lin} X = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i | \alpha_i \in \mathbb{F}, v_i \in X \right\}.$$

Očitno je $\mathrm{Lin}X$ najmanjši vektorski podprostor, ki vsebuje vse elemente X. Pravimo, da je X *ogrodje* za V, če je $\mathrm{Lin}X = V$

Vektorski prostor je končnorazsežen, če ima končno ogrodje.

Definicija 1.7

Naj bo V vektorski prostor in $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ množica vektorjev. Pravimo, da je $\mathcal{B}$ *baza*, če je $\mathcal{B}$ ogrodje in linearno neodvisna množica.

Netrivialen vektorski prostor je končnorazsežen natanko tedaj, ko ima končno bazo. Naštejmo nekaj lastnosti baz končnorazsežnih vektorskih prostorov.

Orodje, ki nam pomaga dokazati sledeče trditve je naslednja računovodska trditev

Lema 1.8: Steinitzova lema o zamenjavi

Naj bo V končnorazsežen prostor nad $\mathbb{F}$ in naj sta $L = \{v_1, \dots, v_n\}$ in $O = \{w_1, \dots, w_m\}$ zaporedoma linearno odvisna množica in ogrodje V. Potem

- $m \geq n$
- Obstaja $\{w_{i_1}, \dots w_{i_n}\} \subseteq O$, da je množica

$$(O \setminus \{w_{i_1}, \dots, w_{i_n}\}) \cup L$$

  ogrodje V.

Dokaz. Zapišimo v_1 kot linearno kombinacijo elementov O. Iz množice O izbrišemo enega izmed elementov z neničelnim koeficientom v tem zapisu ter dodamo v_1. Očitno množica ostaja ogrinjača. Proces induktivno ponavljamo, na vsakem koraku lahko izberemo element w_j, saj če bi vsi te elementi imeli ničelne koeficiente bi dobili linearno odvisnost elementov L. Ko se proces terminira imamo ogrinjačo, ki vsebuje vse elemente L ter ima predpisano obliko. Neenakost je očitna. □

Trditev 1.9

Naj bo V končnodimenzionalni vektorski prostor z bazo $\mathcal{B}$.

- Vsak vektor iz V lahko napišemo na enoličen način kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{B}$.
- Vsaka množica linearno neodvisnih vektorjev je manjša ali enaka vsakemu ogrodju.
- Vsaka množica linearno neodvisnih vektorjev z $|\mathcal{B}|$ elementi je baza.
- Dimenzija podprostora je manjša ali enaka dimenziji prostora z enakostjo natanko tedaj, ko sta prostora enaka.
- Vsak n-dimenzionalni vektorski prostor je izomorfen $\mathbb{F}^n$.
- Posledično sta vsaka končnorazsežna vektorska prostora z isto dimenzijo izomorfna.

Dokaz. Trditve so bodisi očitne, bodisi sledijo iz Steinitzove leme. □

Trditev 1.10

Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor in $U \leq V$. Potem obstaja $W \leq V$, da je

$$V = U \oplus W.$$

Oris dokaza. Uporabimo karakterizacijo direktne vsote z enoličnim zapisom. Bazo U dopolnimo do baze V. W definiramo kot linearno ogrinjačo dodanih vektorjev. □

1.2 Linearne preslikave

Definicija 1.11

Naj sta U in V vektorska prostora nad $\mathbb{F}$. Preslikavi $\mathcal{L} : U \to V$ pravimo *homomorfizem vektroskih prostorov* oziroma *linearna preslikava*, če velja

- $$\mathcal{L}(v + w) = \mathcal{L}(v) + \mathcal{L}(w)$$
- $$\mathcal{L}(\alpha v) = \alpha \mathcal{L}(v)$$

Množico vseh linearnih preslikav med vektorskima prostoroma U in V označimo kot $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$.

Ekvivalentno je preslikava Ł linearna natanko tedaj, ko velja

$$\mathcal{L}(\alpha v + \beta w) = \alpha \mathcal{L}(v) + \beta \mathcal{L}(w).$$

Gotovo je tudi inverz bijektivne linearne preslikave bijektivna linearna preslikava.

Množica $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ je s seštevanjem, kompozitumom in množenjem s skalarji algebra nad $\mathbb{F}$.

1.2.1 Jedro in slika

Definicija 1.12

Naj bo $Ł : V \to W$ linearna preslikava. Tedaj definiramo *jedro* Ł kot

$$\ker Ł = \{u \in V | \mathcal{L}(u) = 0\}$$

ter *sliko* Ł kot

$$\mathrm{im}Ł = \{v \in V | \exists v \in V . \mathcal{L}(v) = u\} = \{\mathcal{L}(v) | v \in V\}.$$

Trditev 1.13

- $\ker Ł$ je podprostor V in $\mathrm{im}Ł$ je podprostor W.
- Ł je injektivna natanko tedaj, ko je $\ker Ł = \{0\}$ in surjektivna natanko tedaj, ko je $\mathrm{im}Ł = W$.

Dokaz. Očitno. □

Izrek 1.14: O izomorfizmu

- Naj bo $Ł : V \to W$ linearna preslikava. Tedaj je
$$V/\ker Ł \cong \mathrm{im}Ł.$$
- Naj bosta $V_1, V_2 \leq V$. Tedaj je
$$(V_1 + V_2)/V_1 \cong V_2/(V_1 \cap V_2).$$
- Naj bodo $U \leq V \leq W$ vektorski prostori. Potem je V/U podprostor W/U in je
$$(W/U)/(V/U) \cong W/V.$$

Oris dokaza. Prvi izrek dokažemo tako, da odsek $v + \ker Ł$ slikamo v vektor v. Preverimo, da je dobro definiran, linearen in bijektiven, kar dokaže želeno.

Drugi izrek dokažemo tako, da konstruiramo preslikavo $\phi : V_2 \to (V_1 + V_2)/V_1$, podano s predpisom $\phi(v) = v + V_1$. Preverimo dobro definiranost, linearnost, surjektivnost in da je $\ker \phi = V_1 \cap V_2$, kar pokaže želeno po 1. izreku o izomorfizmu.

Da je V/U podprostor je očitno. Konstruirajmo preslikavo iz $\psi : W/U \to W/V$ podano s predpisom $\psi(w + U) = w + V$. Dobra definiranost, linearnost, surjektivnost ter izračun jedra so preprosti. □

Komentar 1.15

Ko dokazujemo $U/U_1 \cong V$ lahko konstruiramo $Ł : U \to W$, za katerega je $\ker Ł = U_1$ ter $\mathrm{im}Ł = V$. Izomorfnost sledi po 1. izreku o izomorfizmu.

Trditev 1.16

Naj bo V končnorazsežen in $U \leq V$. Potem je
$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

Oris dokaza. V drugi izrek o izomorfizmu substituiramo $V_1 = W$ in $V_2 = U$, kjer je W tak, da je $V = U \oplus W$. □

Trditev 1.17

Naj bo V končnorazsežen in $V_1, V_2 \leq V$. Tedaj je
$$\dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2.$$

Oris dokaza. Drugi izrek o izomorfizmu ter zgornja trditev. □

Trditev 1.18

Ł : $U \to V$ linearna. Potem je

$$\dim \ker Ł + \dim \mathrm{im} Ł = \dim U$$

Dimenziji slike preslikave pravimo tudi rang preslikave A.

2 Matrike

Poljubna matrika je enolično določena s slikami baznih vektorjev domene. Upoštevajoč to dejstvo definiramo:

Definicija 2.1

Naj bo Ł : $U \to V$ linearna preslikava ter $\mathcal{B} = \{u_i\}^n$ in $\mathcal{C} = \{v_i\}^m$ zaporedoma bazi U in V. Razvijemo

$$Łu_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j,i} v_j.$$

Tabeli

$$L_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \dots & \alpha_{m,n} \end{bmatrix}$$

pravimo *matrika* dimenzije $m \times n$, ki pripada Ł glede na bazi $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$.

Če je dimenzija kodomene m ter dimenzija domene n, potem linearni preslikavi $\mathcal{A}$ pripada matrika dimenzije $\mathbb{F}^{m\times n}$. Če si $Łu_i \in V$ predstavljamo kot stolpce oblike

$$L^{(i)} \begin{bmatrix} \alpha_{1,i} \\ \alpha_{2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{m,i} \end{bmatrix}$$

dobimo matriko $L_{\mathcal{CB}}$ s konkaternacijo teh stolpcev. Od sedaj dalje uporabljamo notacijo $L^{(i)}$ za i-ti stolpec matrike L ter $L_{(i)}$ za i-to vrstico matrike L.

Očitno so linearne preslikave ter matrike v bijekciji (ob izbiri specifičnih baz). Natančneje je

Trditev 2.2

Naj bosta U in V končnorazsežna vektorska prostoranad poljem $\mathbb{F}$, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ pa njuni bazi. Potem je

$$\Phi_{\mathcal{CB}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V) \mapsto \mathbb{F}^{m\times n}, \Phi_{\mathcal{CB}}(\mathcal{A}) = A_{\mathcal{CB}}$$

izomorfizem.

Dokaz. Očitno. □

Za dani vektor $x \in U$ (zapisan v standardni bazi) ter matriko A (zapisano v standardni bazi) lahko izračunamo vektor Ax tako, da naredimo skalarni produkt x z vsako izmed vrstic A.

2.1 Množenje matrik

Definicija 2.3

Naj bo $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ter $B \in \mathbb{F}^{n\times p}$. Definiramo matriko $A \cdot B \in \mathbb{F}^{m\times p}$ kot matriko, katere element (i, j) je skalarni produkt i-te vrstice A in j-tega stolpca B. Natančneje je element (i, j) enak

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Kot nasvet navedem še naslednje dejstvo: pri linearni algebri vedno najprej povemo vrstice nato stolpce. Zato ima matrika dimenzije $m \times n$ m vrstic in n stolpcev, prav tako se vnos $a_{i,j}$ nanaša na tisti vnos, ki je v i-ti vrstici in j-tem stolpcu.

Lema 2.4

Obrnljive preslikave slikajo linearno neodvisne množice v linearno neodvisne množice.

Trditev 2.5

Naj bo $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ obrnljiva. Tedaj je

- $\ker(A) = \ker(P \circ A)$
- $\operatorname{im}(A) = \operatorname{im}(A \circ P)$

Trditev 2.6

Naj bo $e_j = [0, \ldots, 1, \ldots, 0]$, kjer je enka na j-tem mestu. Sledi, da so naslednje matrike obrnljive:

- $P_{pq} = [e_1, \ldots, e_{p-1}, e_q, e_{p+1}, \ldots, e_{q-1}, e_p, e_{q+1}, \ldots, e_n]$, saj je $P_{pq}^2 = I_n$
- $P_{\alpha,k} = [e_1, e_2, \ldots, \alpha e_k, \ldots, e_n]$ in $\alpha \neq 0$, saj je $P_{\alpha,k} \cdot P_{\frac{1}{\alpha},k} = I_n$
- $P = I_n + \alpha \cdot E_{p,q}$, kjer ima $E_{p,q}$ edini neničelni vnos v celici (p, q) in $p \neq q$, saj je $(I_n + \alpha E_{p,q})(I_n - \alpha E_{p,q}) = I_n$

Ker so zgornje matrike obrnljive in zaporedoma predstavljajo menjavo vrstic, množenje vrstice z neničelnim skalarjem ter prištetje večkratnika vrstice neki drugi vrstici lahko na matriki A izvajamo Gaussov posotpek, ter na koncu dobimo matriko PAQ^{-1} za obrnljivi matriki P in Q.

V specifičnem primeru se rang ohranja ob Gaussovem postopku. Natančneje se ohranja slika, če izvajamo le operacije na stolpcih, ter se ohranja jedro, če izvajamo le operacije na vrsticah.

Če imamo npr. nehomogen sitem enačb

$$Ax = b$$

za znano matriko A in stolpec b lahko tvorimo razširjeno matriko $\hat{A} = [A|b]$ ter izvajamo Gaussov postopek na A dokler ne dobimo zgornjetrikotne matrike.

Na podoben način lahko rešimo več sistemov, saj zapišemo $\hat{A} = [A|b_1 \dots b_k]$. Na ta način lahko prevedemo iskanje inverza na sledeč sistem $[A|I] = [A|e_1 e_2 \dots e_n]$, katerega z Gaussovo eliminacijo na stolpcih prevedemo na $[I|B]$, kjer je $A \cdot B = I$

Izrek 2.7: Cramer

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ ter $b \in \mathcal{O}^n$. Če je $\det(A) \neq 0$ je rešitev sistema $Ax = b$ enolična ter enaka $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, kjer je

$$x_j = \frac{\det\left[A^{(1)}, \dots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}\right]}{\det(A)}$$

Lema 2.8

Naj bo $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. A ima rank 1 natanko tedaj, ko obstajata $u \in \mathbb{F}^m, v \in \mathbb{F}^n$, da velja

$$A = u \cdot v^T$$

Dokaz. Stolpci so skalarni večkratniki nekega vektorja. Vektor je u, skalarje pa zapakiramo v v. $\square$

Obnova

Matriki A in B množimo tako, da je element (i, j) matrike $A \cdot B$ enak $A_{(i)} \cdot B^{(j)}$.

Računsko lahko **jedro** in **sliko** matrike A najdemo tako, da zaporedoma izvajamo Gaussove operacije na vrsticah/stolpcih, kar ne spremeni jedra ali slike (če npr. med iskanjem jedra opravimo operacijo na vrsticah se jedro spremeni, ne pa njegova dimenzija). Z Gaussovimi operacijami pretvorimo matriko v zgornjetrikotno, nato pa iz strukture zgornjetrikotne matrike razberemo elemente jedra ali slike.

Inverz matrike računsko poiščemo na analogen način. Napišemo razširjeno matriko sistema, nato pa opravljamo operacije na vrsticah, da levo matirko predelamo v identiteto. Na desni se tako pojavi inverz.

3 Determinanta

Definicija 3.1

Naj bo $F : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ funkcional.

- F je *n-linearen*, če za vse $j \in [n]$ ter vse ustrezne izbire vektorjev $\{v_i\}$ velja, da je naslednja preslikava linearna
$$F_j(x) = F(v_1, \ldots, x, \ldots, v_n).$$
- F je *antisimetričen*, če je za vsako izbiro vektorjev $\{v_i\}$
$$F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -F(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

Trditev 3.2

Naj bo F n-linearni antisimetrični funkcional.

- Če permutiramo argumente F dobimo isto vrednost, pomnoženo s $\operatorname{sgn}(\sigma)$.
- Če sta dva argumenta F enaka je vrednost F enaka 0.
- Vrednost F se ne spremeni, če argumentu prištejemo skalarni večkratnik drugega argumenta.
- Množenje argumenta z λ spremeni determinanto za faktor λ^n.

Oris dokaza. Število transpozicij je enako $\operatorname{sgn}(\sigma)$. □

Komentar 3.3

Če si prostor $\mathbb{F}^{n\times n}$ predstavljamo kot $(\mathbb{F}^n)^n$ in na slednji prostor uvedemo n-linearni antisimetrični funkcional na stolpcih ugotovimo, da je njegova vrednost določena do skalarja natančno. Za $A = [a_{i,j}]$ namreč velja

$$F(A) = F\left(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\right) = F\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,1}e_k, \sum_{k=1}^{n} a_{k,2}e_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}e_k\right) =$$
$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1,\sigma(1)}\cdot a_{2,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}\cdot F(e_1, \ldots, e_n) =$$
$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1,\sigma(1)}\ldots a_{n,\sigma(n)}\cdot F(I).$$

Faktor pred $F(I)$ imenujemo determinanta. Determinanta je invariantna pod transponiranjem, saj so sumandi v bijekciji $\sigma \longleftrightarrow \sigma^{-1}$.
Računsko lahko preverimo, da je determinanta n-linearni antisimetrični funkcional.
Ključna lastnost determinante je, da je determinanta ničelna natanko tedaj, ko matrika ni obrnljiva.

Iz invariantnosti determinante pod transponiranjem in definicijskih lastnosti determinante sledi, da lahko determinanto matrike izračunamo z Gaussovim postopkom. Množenje stolpcev s skalarji pomnoži determinanto, prištevanje večkratnikov stolpcev stolpcem je ne spremeni, menjanje stolpcev pa spremeni kvečjemu predznak. Analogne trditve veljajo za vrstice, preko transponiranja.

Izrek 3.4

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Oris dokaza. $G(v_1, \ldots, v_n) = F(Av_1, \ldots, Av_n)$ je n-linearen antisimetrični funkcional. Zato je določen do skalarnega večkkratnika natančno, obenem pa je $G(I) = F(A) = \det(A)$. $\square$

Podobni matriki imata tako enako determinanto, kar pomeni, da lahko smiselno definiramo determinanto endomorfizma.

Definicija 3.5

Naj bo $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ter $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$. *Minor* reda k je determinanta vsake podmatrike, ki jo dobimo tako, da v A izberemo k vrstic in k stolpcev, ter kot elemente podmatrike izberemo elemente na presečiščih.

- *Glavni minor* je minor, v katerem izberemo istoležne vrstice in stolpce.
- *Vodilni minor* je minor, v katerem izberemo prvih k vrstic in stolpcev.

Izrek 3.6

Rank neničelne matrike $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ je enak največjemu redu neničelnih minorjev.

Dokaz. Naj bo $\operatorname{rang} A = r$. A ima r linearno neodvisnih stolpcev, ki tvorijo podmatriko B z rangom r. Tudi B^T ima rang r, kar pomeni, da ima B r linearno neodvisnih vrstic. Izberemo jih. Vsi minorji višjega reda so ničelni, saj bi v nasprotnem primeru v A našli kvadratno obrnljivo podmatriko dimenzije več kot r, kar je protislovno z rangom r. $\square$

Definicija 3.7

Z A_{ij} označimo matriko, ki jo dobimo iz matrike $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, z izbrisom i-te vrstice in j-tega stolpca. Skalar

$$\widetilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

imenujmo *poddeterminanta* matrike A. Matriko poddeterminant $\widetilde{A} = [\widetilde{a_{ij}}]$ imenujemo *prirejenka* matrike A.

Izrek 3.8

Naj bo A_{ij} minor, ki ga dobimo z delecijo i-te vrstice ter j-tega stolpca.

$$\widetilde{A} = [\widetilde{a_{ij}}]_{i,j=1}^n = [(-1)^{i+j}\det(A_{ij})]_{i,j=1}^n$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\widetilde{a_{ij}} = a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + a_{2j}\widetilde{a_{2j}} + \dots + a_{nj}\widetilde{a_{nj}}$$

$$A\widetilde{A}^T = \det(A)I$$

Oris dokaza. Dokaz razvoja po j-tem stolpcu sledi tako, da zaporedoma izračunamo determinante matrik

$$[A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, e_n] \quad \text{ter} \quad [A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(j-1)}, e_j, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}]$$

ter na koncu

$$[A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(j-1)}, a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}],$$

kjer izračun druge z antisimetričnostjo prevedemo na izračun prve, ter izračun tretje preko antisimetričnosti prevedemo na izračun druge.

Konstrukcijo inverza dokažemo tako, da opazimo da je skalarni produkt vrstic in stolpcev, ki pristanejo na diagonali enak $\det(A)$ po prejšnji točki, skalarni produkt vrstic in stolpcev, ki pa ne končajo na diagonali pa ničelen, saj je enak determinanti matrike $[A^{(1)}, \dots, A^{(k-1)}, A^{(j)}, A^{(k+1)}, \dots, A^{(n)}]$. □

Trditev 3.9: Razvoj po j-tem stolpcu

$$\det A = a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + a_{2j}\widetilde{a_{2j}} + \ldots + a_{nj}\widetilde{a_{2j}}$$

Iz te lastnosti lahko dokažemo

$$A \cdot \widetilde{A}^T = \widetilde{A}^T \cdot A = \det(A) \cdot I$$

Obnova

Determinanta je do skalarnega večkratnika edini n-linearni antisimetrični funkcional. Determinanto poljubne matrike lahko izračunamo z Gaussovim postopkom.

Determinanta je multiplikativna ter invariantna pod transponiranjem (bijekcija $\sigma \longleftrightarrow \sigma^{-1}$). Njena ključna lastnost je, da je determinanta ničelna natanko tedaj, ko matrika ni obrnljiva.
Tudi če je determinanta matrike ničelna lahko določimo rang matrike z redom neničelnih minorjev. Ob računanju determinante si lahko pomagamo tudi z identiteto, znano kot ravoj po vrstici/stolpcu.

4 Raznovrstno

Nasvet

- **Matrika A je ničelna** $\iff \forall v \in V: \ Av = 0$
- **Inverzne matrike komutirajo.**
- **Diagonalne matrike komutirajo.**
- **Polinoma v isti matriki komutirata** [1]

$$A \in \mathcal{O}^{n\times n} \text{ ter } p, q \in \mathcal{O}[X] \implies p(A)\cdot q(A) = q(A)\cdot p(A)$$

Izrek 4.1: Vandermonde

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i\neq j}(x_i - x_j)$$

Oris dokaza. Determinanta je polinom v n spremenljivkah, ter, če je $x_i = x_j$, potem je determinanta ničelna. Po faktorskem izreku sledi, da je

$$\det V = c\prod_{i\neq j}(x_i - x_j).$$

□

Na preprost način lahko posplošimo zgornji postopek na računanje determinante matrike, kjer v dani vrstici nastopa element baze vektorskega prostora polinomov stopnje največ n.

Izrek 4.2: Kvadratne matrike z ničelno sledjo

Matrika $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ima ničelno sled $\iff$ obstajata matriki $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, da velja

$$C = AB - BA.$$

[1] Več o polinomih in komutativnosti matrik si lahko preberete v A.

5 Struktura Endomorfizmov

Lema 5.1

Lastni vektorji paroma različnih lastnih vrednosti so linearno neodvisni.

Definicija 5.2

- $\Delta_A(X) = \det(A - XI)$
- $\sigma(A) = \mathrm{spec}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists v \neq 0 \in V.\ Av = \lambda v\}$
- **Algebraična večkratnost** lastne vrednosti λ je večkratnost ničle λ v $\Delta_A(X)$, **geometrična večkratnost** pa $\dim(\ker(A - \lambda I))$.

Izrek 5.3: Cayley-Hamilton

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ ter karakteristični polinom $\Delta_A(X)$. Potem je $\Delta_A(A) = 0$.

Oris dokaza.

$$(A - \lambda I)(\widetilde{A - \lambda I}^{T}) = \det(A - \lambda I)I = \Delta_A(\lambda)I,$$

upoštevamo, da so vnosi prirejenke polinomi stopnje kvečjemu $n-1$, nato interpretiramo kot enakost matrik, sledi da so istoležni vnosi enaki ter dobimo teleskopsko vsoto. □

Izrek 5.4

$$\lambda \text{ ničla } \Delta_A(X) \implies \lambda \text{ ničla } m_A(X).$$

Oris dokaza. λ je lastna vrednost, $\exists v \neq 0$, da je $Av = \lambda v$. Delimo $m_A(X)$ z $X - \lambda$ ter dobimo

$$m_A(X) = q(X)(X - \lambda) + m_A(\lambda),$$
$$0 = m_A(A) = q(A)(A - \lambda I) + m_A(\lambda)I$$
$$0 = q(A)(A - \lambda I)v + m_A(\lambda)v = m_A(\lambda)v$$

□

Izrek 5.5

Naj bo $m_{\mathcal{A}}(X)$ minimalni polinom invertibilnega endomorfizma $\mathcal{A}$. Potem je $m_{\mathcal{A}^{-1}}(X)$ večkratnik recipročnega polinoma $\mathcal{A}$. Sepravi,

$$m_{\mathcal{A}}(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \implies m_{\mathcal{A}^{-1}}(X) = \frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{k} a_{k-i}X^i = \frac{1}{a_o} m_{\mathcal{A}}\left(\frac{1}{X}\right).$$

Izrek 5.6: Diagonalizacija

Matrika $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizabilna, natanko tedaj ko:

- Ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.
- Vsaka geometrična večkratnost je enaka algebraični.
- Minimalni polinom A ima same enostavne ničle.

5.1 Korenski podprostori

Dekompozicija na direktno vsoto invariantnih korenskih podprostorov poda bločno diagonalizacijo.

Izrek 5.7

Korenski podprostor za lastno vrednost λ_j

$$W_j = \ker((\mathcal{A} - \lambda_j id_V)^{m_j})$$

je invarianten za endomorfizem $\mathcal{A}$. Če so $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ vse lastne vrednosti za $\mathcal{A}$ velja

$$V = \bigoplus_{j=1}^{r} W_j$$

Oris dokaza. Definiramo

$$p_i(X) = \frac{m_{\mathcal{A}}(X)}{(X - \lambda_i)^{m_i}}$$

ter uporabimo »Bezoutovo lemo«, da dobimo:

$$p_1(\mathcal{A})q_1(\mathcal{A}) + p_2(\mathcal{A})q_2(\mathcal{A}) + \cdots + p_r(\mathcal{A})q_r(\mathcal{A}) = id_V.$$

Obstoj razcepa vektorja $x \in V$ poda konstrukcija $x_j = p_j(\mathcal{A})q_j(\mathcal{A})x$, hitro preverimo tudi $x_j \in W_j$. Enoličnost dobimo, saj bi v nasprotnem primeru obstajali $z_i \in W_i$, da je $\sum_{i=1}^{r} z_i = 0$ □

Izrek 5.8

Minimalni ter karakteristični polinom zožitve $\mathcal{A}$ na W_j sta, kot pričakovano,

$$m_{\mathcal{A}|_{W_j}}(X) = (X - \lambda_j)^{m_j} \quad \text{ter} \quad \Delta_{\mathcal{A}|_{W_j}}(X) = (X - \lambda_j)^{n_j}$$

Oris dokaza. Po definiciji je minimalni polinom $\mathcal{A}|_{W_j}$ oblike $(X - \lambda_j)^{s}_{j}$, ker ničle minimalnega ter karakterističnega sovpadata hitro dobimo, da je karakteristični polinom zožitve predpisane oblike. Da enako velja za minimalnega velja, ker bi drugače polinom $(X - \lambda_1)^{s_1} \ldots (X - \lambda_r)^{s_r}$ bil večkratnik $m_{\mathcal{A}}(X)$, po dekompoziciji, hkrati pa (prav tako po dekompoziciji) velja $m_j \geq s_j$ □

Izrek 5.9

Matrika je diagonalizabilna $\iff$ vse ničle minimalnega polinoma so enostavne.

Oris dokaza. Diagonalizabilnost $\implies$ enostavne ničle, ker lahko preverimo, da je

$$(\mathcal{A} - \lambda_1 id_V) \ldots (\mathcal{A} - \lambda_r id_V) = 0,$$

po dekompoziciji. V obratno smer pa z zožitvami. □

5.2 Jordanova forma

Izrek 5.10

Analiziramo nilpotentni endomorfizem $\mathcal{N}$ reda r. Definiramo $V_j = \ker(N^j)$

- Za $j \geq n$ je $V_j = V$
- $x \in V_j \iff \mathcal{N}x \in V_{j-1}$.
- $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots V_n = V$
- $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots V_n = V$

Oris dokaza. 4. točka sledi, saj obstaja direktni komplement $\ker(N^{j-1})$ v V_j □

Trditev 5.11

Če so $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r\}$ linearno neodvisni elementi V_j, ter je $\mathrm{Lin}(\mathcal{B}) \cup V_{j-1} = \{0\}$ so $\mathcal{N}v_1, \dots, \mathcal{N}v_r$ linearno neodvisni elementi V_{j-1}, ter velja $\mathcal{N}(\mathcal{B}) \cup V_{j-2} = \{0\}$

Zgornja lema omogoča, da dekompoziramo V na direktno vsoto vektorskih podprostorov, v katerih se zaporedoma nahajajo le vektorji, ki jih uniči neka specifična potenca $\mathcal{N}$. Slike teh vektorjev se pomikajo dol po verigi, kar da končno urejenost Jordanove baze.

Lema 5.12: Jordanova kanonična forma

Za lastno vrednost λ_j v Jordanovi kanonični formi matrike A velja:

- Lastna vrednost se na diagonali pojavi tolikokrat, kot je njena algebraična večkratnost
- Velikost največje celice je $m_j \times m_j$, kjer je m_j večkratnost ničle λ_j v $m_{\mathcal{A}}$
- Število celic za λ_j je enako številu linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

5.3 Vaje

Izrek 5.13

- Za $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ z lastnimi vrednostmi (štete z večkratnostmi) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ velja

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{ter} \quad \det(A) = (-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

- Računanje potenc matrik (ali njihovih korenov) je dosti lažje v diagonalizirani obliki.

Oris dokaza. Prva točka je očitna po analizi karakterističnega polinoma. □

6 Vektorski prostori s skalarnim produktom

6.1 Skalarni produkt ter norma

Definicija 6.1: Skalarni produkt

Naj bo V vektorski prostor ter $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Skalarni produkt je preslikava $\langle\rangle : V \to \mathbb{F}$ za katero velja:

- $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
- $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.
- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.
- $\langle x, x\rangle \geq 0$ z enakostjo natanko tedaj, ko je $x = 0$.

Izrek 6.2: Norma

- $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ je homogena, pozitivna, ter zanjo velja trikotniška neenakost.
- Če normo inducira skalarni produkt zanjo velja Pitagorov izrek ter paralelogramska enakost:

$$\langle x, y\rangle = 0 \implies ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

$$||x - y||^2 + ||x + y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$$

Izrek 6.3: Cauchy-Schwartz-Bunjakowski

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle} = ||x|| \cdot ||y||$$

Oris dokaza. $p(t) = \langle t\alpha x + y, t\alpha x + y\rangle$ je za $\alpha \in \mathbb{C}$, za katerega velja $|\alpha| = 1$ ter $\alpha\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$, nenegativen polinom druge stopnje. □

6.2 Ortogonalnost

Definicija 6.4

- Množica P je ortogonalna, če je $\forall x, y \in P$, $\langle x, y\rangle = 0$.
- Množici M, N sta pravokotni, če je $\forall x \in M, y \in N$, $\langle x, y\rangle = 0$
- Ortogonalni komplement množice M je množica

$$M^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in M \, . \, \langle x, y\rangle = 0\}$$

Izrek 6.5: Gram-Schmidt

V je vektorski prostor in $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ so linearno neodvisni. Potem obstajajo $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, ki so ortogonalni ter velja:

$$\forall k < n : \mathrm{Lin}\{x_1, \dots, x_k\} = \mathrm{Lin}\{y_1, \dots, y_k\}$$

Oris dokaza. $y_1 = x_1$ ter iščemo y_{m+1} v obliki $y_{m+1} = x_{m+1} - \alpha_1 y_1 - \cdots - \alpha_m y_m$. Ker so $\{y_i\}$ ortogonalni sledi, da je $\langle x_{m+1}, y_j\rangle = \alpha_j \cdot \langle y_j, y_j\rangle$. $\square$

Izrek 6.6: Standardne lastnosti

- Ortogonalna množica brez 0 je linearno neodvisna.
- Če je $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ ortonormirana baza prostora V je za vse $x, y \in V$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle v_i \quad \text{ter} \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle \overline{\langle y, v_i\rangle}$$

- Pravokotna vsota podprostorov je direktna
- Za vsak $W \subseteq V$ je $V = W \bigoplus W^{\perp}$

Naloga 6.7: Pravokotni projektor

Pravokotna projekcija na podprostor $W \subseteq V$ je linearna preslikava:

$$\mathrm{pr}_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i,$$

kjer je $\{w_1, \dots, w_k\}$ ortogonalna baza za W. Pokaži, da je najbižja točka vektorju v, ki je v podprostoru W, ravno $\mathrm{pr}_W(v)$.

7 Dualna preslikava

Definicija 7.1

Če je $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ baza prostora V je njena dualna baza prostora V^* linearnih funkcionalov na prostoru V oblike $\mathcal{B}_{V^*} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, kjer velja

$$\varphi_j(v_k) = \begin{cases} 1, & \text{če je } i = j \\ 0, & \text{drugače} \end{cases}$$

Kot zanimivost omenimo, da če opazujemo vektorje iz $\mathcal{B}_V$ kot stolpce v $\mathbb{F}^n$, potem rotacija stolpcev za 90° v nasprotno smer urinega kazalca predstavlja izomorfizem, ki slika $\mathcal{B}_V$ v dualno bazo, če si V^* zapišemo kot vrstice v $\mathbb{F}^n$.

Hitro opazimo, da izračun vrednosti linearnega funkcionala φ v vektorju $x \in V$ ustreza »skalarnem produktu« vrstice, ki predstavlja dekompozicijo φ glede na $\mathcal{B}_{V^*}$, ter stolpca, ki predstavlja dekompozicijo x glede na $\mathcal{B}_V$

Izrek 7.2

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ ter $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}_W$ zaporedoma bazi V in W. Definirajmo

$$\mathcal{A}^d(\psi) = \psi \circ \mathcal{A} \quad \text{kjer je } \mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*),$$

ter sta W^* ter V^* prostora linearnih funkcionalov na vektorskih prostorih W in V. Če je $A = \mathcal{A}_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$, potem linearni preslikavi $\mathcal{A}^d$ glede na dualni bazi B_V ter B_W pripada matrika A^T. Preslikavo $\mathcal{A}^d$ imenujemo dualna preslikava preslikavi $\mathcal{A}$.

Oris dokaza. Na dva načina izračunamo $\psi_j \circ \mathcal{A}(v_k)$, kjer je $\psi_j \in \mathcal{B}_{W^*}$ ter $v_k \in \mathcal{B}_V$. □

Tako dobimo znane lastnosti transponiranih matrik, kot so aditivnost, homogenost ter $(BA)^T = A^T B^T$, prav tako pa od baze odvisen izomorfizem med V in V^*.

7.1 Reprezentacija

Želimo od baze neodvisen izomorfizem med V in V^*.

Definicija 7.3

Naj bo $\varphi_z(x) : x \to \langle x, z\rangle$ preslikava med V in $\mathbb{F}$. Očitno je φ_z linearni funkcional.

Trditev 7.4

$\Phi : z \to \varphi_z$ je kot preslikava iz V v V^* poševni izomorfizem.

Oris dokaza. Poševna homogenost ter aditivnost sta trivialni. Injektivnost je očitna, saj če za linearni preslikavi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ter vse x, y velja

$$\langle x, \mathcal{B}y\rangle = \langle x, \mathcal{C}y\rangle,$$

potem je $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Obravnavajmo surjektivnost. Če je φ trivialen funkcional je izbira $z = 0$ očitna. Denimo, da je φ netrivialen linearni funkcional. Potem je kot preslikava iz V v $\mathbb{F}$ surjektivna, po dimenzijski enačbi za $W = \ker(\varphi)$ velja $\dim(W) = n - 1$, sledi da je $V = W \bigoplus W^\perp$, kjer je $W^\perp$ enodimenzionalni vektorski prostor, posledično oblike $W^\perp = \mathbb{F} \cdot u$ za nek vektor $||u|| = 1$.

Naj bo $v \in V$ poljuben, sledi da je $v = x + \lambda u$ za $x \in W, y \in W^T$. Sledi $\langle v, u\rangle = \lambda$. Posledično je $\varphi(v) = \varphi(\lambda u) = \langle v, u\rangle\varphi(u) = \langle v, u\overline{\varphi(u)}\rangle$ □

Posledica je:

Izrek 7.5: Rieszov reprezentacijski izrek

Če je V končnorazsežen vektorski prostor s skalarnim produktom, potem za vsak $\varphi \in V^*$ obstaja enolično določen $z \in V$, da je

$$\varphi(x) = \langle x, z\rangle$$

8 Hermitsko adjungirana preslikava

8.1 Osnove

Definicija 8.1

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(U, V)$ ter Φ_U in Φ_V izomorfizma med U in U^* ter V in V^*, kot ju karakterizira Rieszov izrek. Potem je $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V, U)$ $\mathcal{A}^* = \Phi_U^{-1} \circ \mathcal{A}^d \circ \Phi_V$ Hermitsko adjungirana preslikava preslikavi $\mathcal{A}$.

Izrek 8.2: Lastnosti Hermitsko adjungirane preslikave

- $\mathcal{A}^*$ je linearna
- $\mathcal{A}^*$ je enolična preslikava, da za $\forall x \in U, y \in V$ velja

$$\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^* y \rangle$$

- $\langle \mathcal{A}^* x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}y \rangle$, posledično $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
- Standardne lastnosti, ki bi jih pričakovali od kompozicije transponiranja ter konjugiranja:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*, \ \ (\alpha \mathcal{A})^* = \overline{\alpha} \mathcal{A}^*, \ \ (\mathcal{A}\mathcal{C})^* = \mathcal{C}^* \mathcal{A}^*$$

Oris dokaza. Prva točka je trivialna. Pri drugi točki enoličnost sledi po znani lemi o ujemanju preslikav, obstoj pa preverimo računsko tako, da prevedemo $\langle x, \mathcal{A}^* y \rangle$ v $\langle \mathcal{A}x, y \rangle$ po definiciji $\mathcal{A}^*$. Tretja točka sledi po uporabi druge točke ter poševne simetričnosti skalarnega produkta, zadnja pa računsko po definiciji Hermitsko adjungirane preslikave. □

Trditev 8.3: Matrika Hermitsko adjungirane preslikave

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(U, V)$ ter $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V$ ortonormirani bazi. Naj bo $A = [a_{ij}]$ matrika $\mathcal{A}$ glede na te bazi ter $\mathcal{A}^*$ Hermitsko adjungirana preslikava preslikavi $\mathcal{A}$. Sledi:

- $a_{ij} = \langle Au_j, v_i \rangle$
- $\mathcal{A}^*$ glede na bazi $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}_U$ pripada matrika $A^H = [b_{ij}]$, kjer je $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Oris dokaza.

$$Au_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \implies \langle Au_j, v_i \rangle = a_{ij} \langle v_i, v_i \rangle = a_{ij}$$
$$b_{ij} = \langle \mathcal{A}^* v_j, u_i \rangle = \langle v_j, \mathcal{A}u_i \rangle = \overline{\langle \mathcal{A}u_i, v_j \rangle} = \overline{a_{ji}}$$

□

Lema 8.4: O pravokotnih vsotah

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(U, V)$, potem je $U = \ker(\mathcal{A}) \bigoplus \operatorname{im}(\mathcal{A}^*)$ ter $\operatorname{im}(\mathcal{A}^*) = (\ker(\mathcal{A}))^{\perp}$

Oris dokaza. Dokazati je treba le drugo izjavo, kar dosežemo z obema inkluzijama. Inkluzija $\text{im}(\mathcal{A}^*) \subseteq (\ker(\mathcal{A}))^T$ sledi hitro po karakteristični lastnosti $\mathcal{A}^*$. Za dokaz obratne inkluzije pa predpostavimo $u \in (\text{im}(\mathcal{A}^*))^T$ ter po analognem postopku dobimo $u \in \ker(\mathcal{A})$. Ker ortogonalni komplement obrne vsebovanost sledi tudi druga inkluzija. □

Izrek 8.5: Spekter adjungirane preslikave je konjugiran

Naj bo $\sigma(\mathcal{A})$ spekter preslikave $\mathcal{A}$. Potem je $\sigma(\mathcal{A}^*) = \overline{\sigma\mathcal{A}}$.

Oris dokaza. Če je jedro preslikave $\mathcal{A}-\lambda\cdot\text{id}_V$ netrivialno je slika preslikave $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\text{id}_V)^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\cdot\text{id}_V$ nepolna, sledi da je jedro te preslikave prav tako netrivialno. □

Lema 8.6: O invariantnih podprostorih

Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem V ter $U \subseteq V$. Tedaj je U invarianten za $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je $U^\perp$ invarianten za $\mathcal{A}^*$.

Oris dokaza. Ker sta $\cdot^*$ in $\cdot^\perp$ involuciji je zadosti pokazati le eno implikacijo. Naj bo U invarianten za $\mathcal{A}$. Potem je za vsak $x \in U^\perp$ in vse $y \in U$ $\langle \mathcal{A}y, x\rangle = 0$, sledi $\langle y, \mathcal{A}^*x\rangle = 0$. Ker ta enakost velja za vse $y \in U$ je $\mathcal{A}^*x \in U^\perp$. □

Izrek 8.7: Schur

Za unitaren prostor V ter $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ obstaja ortonormirana baza, v kateri je matrika $\mathcal{A}$ zgornjetrikotna.

Oris dokaza. Gram-Schmidtov postopek na Jordanovi bazi. □

Naloga 8.8: Gramova matrika

Naj bo $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ baza vektorskega prostora V s skalarnim produktom. Definirajmo **Gramovo matriko**:

$$G = [\langle v_i, v_j\rangle]_{i,j=1}^n.$$

Pokaži, da je G obrnljiva matrika, ter da za $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ velja:

$$\mathcal{A}^*_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \overline{G^{-1}} \circ \mathcal{A}^H_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \circ \overline{G}$$

8.2 Normalni endomorfizmi

Iz poglavja o strukturi endomorfizma vemo kdaj se endomorfizem da diagonalizirati, sedaj pa nas zanima še diagonalizacija v ortonormirani bazi.

Če se da matriko A diagonalizirati v ortonormirani bazi sledi, da je tudi matrika A^H diagonalna v ortonormirani bazi, posledično velja

$$AA^H = A^H A.$$

Definicija 8.9: Normalnost

Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je *normalen*, če velja $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je *normalna*, če je $AA^H = A^H A$

Vsak endomorfizem, ki ga lahko diagonaliziramo v ortonormirani bazi je posledično normalen. Velja tudi, da normalnim endomorfizmom v ortonormiranih bazah pripadajo normalne matrike.

Trditev 8.10

Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(U)$ je normalen natanko tedaj, ko $\forall x, y \in U$ velja:

$$\langle \mathcal{A}^* x, \mathcal{A}^* y\rangle = \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y\rangle.$$

Zgornja trditev poda naslednje posledice:

- $||\mathcal{A}^* x|| = ||\mathcal{A}x||$ za vse $x \in U$.
- $\ker(\mathcal{A}^*) = \ker(\mathcal{A})$.
- $\mathcal{A} - \alpha \mathrm{id}_U$ je normalen za vsak $\alpha \in \mathbb{F}$
- Dvojnost lastnih vektorjev: $\mathcal{A}x = \alpha x \iff \mathcal{A}^* x = \bar{\alpha} x$.
- $\sigma(\mathcal{A}^*) = \overline{\sigma(\mathcal{A})}$, saj je $\ker(\mathcal{A} - \alpha \mathrm{id}_U) = \ker((\mathcal{A} - \alpha \mathrm{id}_U)^*) = \ker(\mathcal{A}^* - \bar{\alpha} \mathrm{id}_U)$
- Lastna vektorja pripadajoča različnim lastnim vrednostim sta pravokotna.

Oris dokaza. Po osnovni lastnosti Hermitsko adjungirane preslikave je

$$\langle \mathcal{A}^* x, \mathcal{A}^* y\rangle = \langle x, \mathcal{A}\mathcal{A}^* y\rangle.$$

Zadnjo točko dokažemo tako, da glede na λ_2 ter dvojnost lastnih vektorjev izračunamo $\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle$ za lastna vektorja x_1, x_2, ki pripadata lastnim vrednostim λ_1, λ_2. □

Izrek 8.11: Normalnost je diagonalizabilnost

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(U)$ normalen endomorfizem nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sledi:

- Če je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, potem se da $\mathcal{A}$ diagonalizirati v ortonormirani bazi nad $\mathbb{C}$.
- Če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ in ima karakteristični polinom $\Delta_{\mathcal{A}}(X)$ zgolj realne ničle, potem se da $\mathcal{A}$ diagonalizirati v ortonormirani bazi nad $\mathbb{R}$.

Oris dokaza. Izvajamo indukcijo na dimenziji prostora. Denimo, da je dimenzija prostora U enaka $n+1$ ter da vse ničle $\Delta_{\mathcal{A}}$ ležijo v $\mathbb{F}$. Najdemo normirani lastni vektor v_1 z lastno vrednostjo λ_1 za $\mathcal{A}$ ter opazujemo njegov ortogonalni komplement $v_1^\perp$. Ker je prostor $\mathbb{F}\cdot v_1$ invarianten za $\mathcal{A}$ je $v_1^\perp$ invarianten za $\mathcal{A}^*$. Ker je $\mathcal{A}^* v_1 = \overline{\lambda_1} v_1$ je $\mathbb{F}\cdot v_1$ invarianten tudi za $\mathcal{A}^*$, posledično je $v_1^\perp$ invarianten za $\mathcal{A}$.

Ker indukcijska predpostavka velja za endomorfizem $\mathcal{A}|_{v_1^\perp}$ prostora $v_1^\perp$ dobimo želeno. □

Izrek 8.12

$\mathcal{A}$ je normalen endomorfizem, če obstaja ortonormirana baza iz lastnih vektorjev.

8.3 Sebi adjungirani endomorfizmi

Definicija 8.13

- $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je *sebi adjungiran*, če velja $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$
- Matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je *hermitska*, če je $A^H = A$.
- Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *simetrična*, če je $A^T = A$.

Sebi adjungiranim endomorfizmom glede na ortonormirano bazo pripadajo hermitske matrike.

Trditev 8.14: Lastnosti sebi adjungiranih endomorfizmov

- $\mathcal{A}$ je sebi adjungiran $\iff \langle \mathcal{A}x, y\rangle = \langle x, \mathcal{A}y\rangle$
- Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(U)$ sebi adjungiran. Če je $\forall x \in U\ \langle \mathcal{A}x, x\rangle = 0$, potem je $\mathcal{A} = 0$.

Oris dokaza. Lotimo se druge točke: $\langle \mathcal{A}(x+y), x+y\rangle = \langle \mathcal{A}x, y\rangle + \langle y, \mathcal{A}x\rangle$. Če je $y = \mathcal{A}x$ dobimo ničelnost. □

Izrek 8.15

Vse ničle karakterističnega polinoma sebi adjungiranega endomorfizma so realne.

Oris dokaza. Zaradi dvojnosti lastnih vektorjev velja, da je $\mathcal{A}v = \alpha v \iff \mathcal{A}^* v = \bar{\alpha} v$. □

Naj bo V unitaren vektorski prostor. Za vsak $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ obstajata enolično določena sebi adjungirana endomorfizma $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V)$, da je $\mathcal{A} = \mathcal{B} + i\mathcal{C}$. Nastavimo namreč

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*\right) \quad \text{ter} \quad \mathcal{C} = \frac{-i}{2}\left(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*\right)$$

Izrek 8.16: Karakterizacija sebi adjungiranih endomorfizmov

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je sebi adjungiran $\iff$ $\mathcal{A}$ lahko diagonaliziramo v ortonormirani bazi ter je pripadajoča matrika realna.

8.3.1 Definitnost

Definicija 8.17

Naj bo $\mathcal{A}$ sebi adjungiran endomorfizem prostora V. Pravimo, da je *pozitivno semidefiniten*, če za vse $x \in V$ velja

$$\langle \mathcal{A}x, x \rangle \geq 0.$$

Če velja stroga neenakost je $\mathcal{A}$ *pozitivno definiten*, analogno definiramo *negativno semidefinitnost* ter *negativno definitnost*.

Pozitivno definitnim sebi adjungiranim endomorfizmom glede na ortonormirane baze pripadajo pozitivno definitne matrike, saj je po definiciji $\mathcal{A}x = Ax$.

Izrek 8.18

Sebi adjungiran endomorfizem $\mathcal{A}$ je pozitivno (semi)definiten natanko tedaj, ko so vse njegove lastne vrednosti pozitivne (nenegativne).

Oris dokaza. Iz leve v desno je očitno. Iz desne v levo uporabimo dejstvo, da lahko $\mathcal{A}$ diagonaliziramo v ortonormirani bazi nad $\mathbb{R}$. □

Analogna trditev velja za negativno (semi)definitne endomorfizme, dokaz je prav tako analogen.

Naslednji izrek je trivialna posledica pozitivnosti/nenegativnosti lastnih vrednosti $\mathcal{A}$.

Trditev 8.19

Sebi adjungiran endomorfizem $\mathcal{A}$ s karakterističnim polinomom

$$\Delta_{\mathcal{A}}(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

je:

- Pozitivno definiten $\iff$ za vse $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $(-1)^k a_k > 0$.
- Pozitivno semidefiniten $\iff$ obstaja $m \in \mathbb{N}$, da je za $k < m$, $a_k = 0$ ter za $k \geq m$, $(-1)^k a_k > 0$
- Negativno definiten $\iff$ za vse $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $(-1)^n a_k > 0$.
- Negativno semidefiniten $\iff$ obstaja $m \in \mathbb{N}$, da je za $k < m$, $a_k = 0$ ter za $k \geq m$, $(-1)^n a_k > 0$.

Oris dokaza. Vietove formule. □

Trditev 8.20

A je pozitivno (semi)definitna matrika. Potem je matrika, ki jo dobimo z izbrisom nekaj istoležnih vrstic in stolpcev tudi pozitivno (semi)definitna

Oris dokaza. Vektorje iz prostora $\mathbb{F}^{n-|I|}$ razširimo v vektorje prostora $\mathbb{F}^n$, kjer so neobstoječe komponente ničelne. $\square$

Lema 8.21

Determinanta matrike je enaka produktu lastnih vrednosti.

Ker je A pozitivno definitna $\iff$ $-A$ negativno definitna je naslednji izrek uporabem tudi v tem primeru.

Izrek 8.22: Sylvestrov kriterij

Matrika A je pozitivno definitna $\iff$ A je Hermitska in vsi njeni vodilni minorji so strogo pozitivni.

Opomnik: vodilni minorji so poddeterminante, ki jih dobimo z izbrisom prvih nekaj istoležnih vrstic ter stolpcev.

Oris dokaza. Iz leve v desno sledi po izreku zgoraj. Iz desne v levo dokažemo z indukcijo na velikosti matrike. Matrika $A' \in \mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$, ki jo dobimo z izbrisom n-te vrstice in stoplca, je pozitivno definitna. Denimo, da A ni pozitivno definitna, ker je hermitska ima samo realne lastne vrednosti, ker je $\det(A) > 0$ obstajata vsaj dve negativni lastni vrednosti, α in β. Ker je A hermitska jo lahko diagonaliziramo v ortonormirani bazi, med baznimi vektorji sta lahko normirana ter pravokotna lastna vektorja u in v za α in β. Potem obstaja izbira skalarjev λ, ψ, da je zadnja komponenta neničelnega vektorja $x = \lambda u + \psi v$ ničelna. Potem lahko vložimo $x \in \mathbb{F}^n$ v $x' \in \mathbb{F}^{n-1}$. Sledi:

$$\langle A'x', x' \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle A(\lambda u + \psi v), \lambda u + \psi v \rangle = \lambda^2 \alpha + \psi^2 \beta < 0,$$

kar je v protislovju z pozitivno definitnostjo. $\square$

Če v izreku zgoraj zamenjamo pozitivno definitnost s pozitivno semidefinitnostjo ter pozitivnost **vodilnih** minorjev z nenegativnostjo le-teh, trditev postane napačna.

Brez dokazov navedemo naslednja izreka.

Izrek 8.23

Matrika je pozitivno semidefinitna $\iff$ je hermitska in ima vse glavne minorje nenegativne

Opomnik: glavni minorji so determinante tistih matrik, ki jih dobimo z izbrisom istoležnih vrstic in stolpcev.

Izrek 8.24

Matrika je negativno definitna $\iff$ je hermitska in ima vse vodilne minorje lihega reda negativne, vse vodilne minorje sodega reda pa pozitivne.

8.4 Unitarni endomorfizmi

Definicija 8.25

- $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je *unitaren*, če velja $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{id}_V$.
- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je *unitarna*, če velja $AA^H = A^H A = I_n$.
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *ortogonalna*, če velja $AA^T = A^T A = I_n$

Očitno sledi, da unitarnim endomorfizomom glede na ortonormirano bazo pripadajo unitarne matrike.

Trditev 8.26: Karakterizacija unitarnih endomorfizmov

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je unitaren, natanko tedaj ko velja ena izmed naslednjih lastnosti:

- Za vse $x, y \in V$ velja $\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y\rangle = \langle x, y\rangle$. Intuitivno to pomeni, da $\mathcal{A}$ ohranja dolžine in kote; je avtomorfizem V kot vektorskega prostora s skalarnim produktom.
- Za vse $x \in V$ je $||\mathcal{A}x|| = ||x||$.

Trditev 8.27

Endomorfizem $\mathcal{A}$ je unitaren natanko tedaj, ko velja ena izmed naslednjih trditev.

- $\mathcal{A}$ vsako ortonormirano množico preslika v ortonormirano množico
- $\mathcal{A}$ vsako ortonormirano bazo preslika v ortonormirano bazo.
- $\mathcal{A}$ vsaj eno ortonormirano bazo preslika v ortonormirano bazo.

Sledi, da je matrika unitarna oz. ortogonalna natanko tedaj, ko njeni stolpci/vrstice tvorijo ortonormirano bazo.

Hitro preverimo tudi naslednje dejstvo:

Trditev 8.28

Množica unitarnih endomorfizmov prostora V je grupa za komponiranje

Izrek 8.29

Spekter unitarnega endomorfizma je vsebovan v enotski krožnici.

Oris dokaza. Naj bo λ lastna vrednost za lastni vektor v. Velja:

$$||v||^2 = ||\mathcal{A}v||^2 = ||\lambda v||^2 = |\lambda|^2 \, ||v||^2.$$

□

Izrek 8.30

Naj bo V unitaren prostor in $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Potem je $\mathcal{A}$ unitaren natanko tedaj, ko se ga da diagonalizirati v ortonormirani bazi in so na diagonali števila iz enotske krožnice.

Oris dokaza. Iz leve proti desni sledi, ker so vsi unitarni endomorfizmi normalni in iz prejšnje trditve. Iz desne proti levi pa, ker glede na ortonormirano bazo matriki A kot pripada A^H, očitno pa je $AA^H = I_n$ □

Definicija 8.31

Naj sta $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ matriki.

- B je *unitarno podobna* A, če obstaja unitarna matrika $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, da je $B = U^H A U = U^{-1} A U$.
- Realna matrika $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *ortogonalno podobna* realni matriki A, ko obstaja ortogonalna matrika Q, da je $B = Q^T A Q = Q^{-1} A Q$

Očitno sta ortogonalna ter unitarna podobnost ekvivalenčni relaciji. Dokažemo tudi, da sta matriki unitarno/ortogonalno podobni natanko tedaj, ko pripadata istemu endomorfizmu.

Če združimo že dokazane izreke dobimo:

Izrek 8.32

- Vsaka matrika $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je unitarno podobna zgornjetrikotniki matriki.
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je normalna natanko tedaj, ko je unitarno podobna diagonalni.
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je hermitska natanko tedaj, ko je unitarno podobna realni diagonalni.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je simetrična natanko tedaj, ko je ortogonalno podobna realni diagonalni matriki.
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je unitarna natanko tedaj, ko je unitarno podobna diagonalni matriki z lastnimi vrednosti iz enotske krožnice.

A Zakaj matrike komutirajo?

Spoznali smo tri pogoje, pri katerih matrike komutirajo

- Obrnljiva matrika in njen inverz komutirata
- Diagonalni matriki komutirata
- Polinoma v isti matriki komutirata

Ena izmed posledic Cayley-Hamiltonovega izreka je, da lahko inverz obrnljive matrike zapišemo kot polinom v njej. Prav tako lahko z argumentom o Lagrangeevi interpolaciji za vsaki diagonalni matriki konstruiramo tretjo diagonalno matriko, da sta originalni matriki polinoma v tretji matriki.

Tako se naravno pojavi vprašanje: ali dve matriki $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ komutirata natanko tedaj, ko obstaja $C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ in $p, q \in \mathbb{F}[X]$, da je $A = p(C)$ ter $B = q(C)$?

Odgovor je ne. V primeru končnega polja se lahko zgodi, da argument z Lagrangeevo interpolacijo propade, a mi se bomo osredotočili na primer polja $\mathbb{C}$. Opazujmo matriki

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Računsko lahko preverimo, da je

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

obenem pa je $A^2 = B^2 = 0$.

Sledi, da ima algebra $\mathbb{C}[A, B]$ dimenzijo 4 (generatorji so $\{I, A, B, AB\}$).

Naj bo $X \in \mathbb{C}[A, B]$ poljuben. Ker ima X vse elemente na diagonali enake, je gotovo $(X - \lambda I)^3 = 0$ za λ na diagonali X. Očitno sledi, da je $\dim \mathbb{C}[X] \leq 3$. Sledi

$$\mathbb{C}[X] \not\supseteq \mathbb{C}[A, B],$$

kar smo želeli pokazati.

Literatura

[1] prof. dr. Klemen Šivic. *Zapiski predavanj iz Algebre 1*. 2017.