

Analiza 2b

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

6. marec 2025

Kazalo

1	Fourierova vrsta	3
	Literatura	5

1 Fourierova vrsta

Izrek 1.1

Če je $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ nezvezna v končno mnogo točkah, kjer obstajata levi in desni odvod, ter je med točkami nezveznosti odvedljiva, potem definiramo:

$$FV(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kjer je

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \end{aligned}$$

$FV(f)(x)$ konvergira $\forall x \in [-\pi, \pi]$ proti

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

V krajših definicijskega območja prav tako velja:

$$FV(f)(\pm\pi) = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$$

Trditev 1.2

- Če je f liha funkcija je $a_n = 0$ za vse n .
- Če je f soda funkcija je $b_n = 0$ za vse n .

Trditev 1.3: Defaktorizacijske formule

-
-
-

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

Trditev 1.4

Naslednji integrali so standardni pri računanju Fourierovih vrst:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \int x \cos(nx) \, dx = \frac{x \sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} + C \\ \bullet \quad & \int x \sin(nx) \, dx = \frac{-x \cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} + C \end{aligned}$$

Dokaz. Lahko per partes, lahko pa tudi upoštevajoč $\cos(nx) + i \cdot \sin(nx) = e^{inx}$. □

Komentar 1.5

Če imamo zadosti lepo funkcijo (zvezno, razen v končno mnogo točkah, kjer obstajata leva in desna limita, ter odvedljivo med točkami nezveznosti) $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ jo lahko razširimo na $[-\pi, \pi]$ bodisi kot sodo, bodisi kot liho funkcijo. Tako dobimo za f bodisi *kosinusno*, bodisi *sinusno Fourierovo vrsto*.

Trditev 1.6

Naslednji integrali so standardni pri računanju Fourierovih vrst:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \int x^2 \cos(nx) \, dx = \frac{x^2}{n} \sin(nx) + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin(nx) + C \\ \bullet \quad & \int x^2 \sin(nx) \, dx = \frac{-x^2}{n} \cos(nx) + \frac{2x}{n^2} \sin(nx) + \frac{2}{n^3} \cos(nx) + C \end{aligned}$$

Literatura

- [1] asist. prof. dr. Gregor Cigler. *Vaje iz Analize 2b*. 2025.