IMC 2025

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

6. avgust 2025

Kazalo

1 Prvi dan

Naloga 1.1

Naj bo $P \in \mathbb{R}[x]$ ter $\deg(P) \geq 2$. Za vsak $x \in \mathbb{R}$, definiramo $\ell_x \subset \mathbb{R}^2$ kot tangento na P v točki x. Dokaži ali ovrzi naslednji trditvi.

- Če je P lihe stopnje, je
$$\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \ell_x = \mathbb{R}^2.$$
- Če je P sode stopnje, je
$$\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \ell_x \neq \mathbb{R}^2.$$

Rešitev. V rešitvi bomo večkrat uporabili naslednje dejstvo: tangenta na P v točki $(\alpha, P(\alpha))$ ima enačbo
$$y = P'(\alpha)(x-\alpha) + P(\alpha).$$

Dokažemo, da je prva trditev resnična. Denimo nasprotno in naj bo
$$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \ell_x \neq \emptyset.$$

Ker točka (x_0, y_0) ne leži na nobeni tangenti na P sledi, da enačba
$$y_0 = P'(x)(x_0 - x) + P(x)$$
nima realnih rešitev v x. Slednje je očitno ekvivalentno temu, da polinom
$$G(x) = P'(x)(x_0 - x) + P(x) - y_0 = P(x) - xP'(x) + x_0P'(x) - y_0$$
nima realnih ničel. Vodilni člen $xP'(x)$ je na_nx^n, kjer je a_n vodilni koeficient P ter $n = \deg(P) \geq 2$, kar pomeni, da ima vodilni člen G koeficient $a_n(1-n) \neq 0$. V posebnem primeru je G lih polinom. Dosegli smo protislovje, saj imajo vsi realni polinomi lihe stopnje realno ničlo. Trditev je tako dokazana.

Dokažemo, da je tudi druga trditev resnična. Naj bo P poljuben nekonstanten polinom sode stopnje. Vemo, da je
$$(x_0, y_0) \in \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \ell_x \iff y_0 = P'(x)(x_0 - x) + P(x) \text{ ima realno rešitev v } x.$$

Slednje je ekvivalentno temu, da ima za vse $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ polinom
$$G_{x_0,y_0}(x) = P'(x)(x_0 - x) + P(x) - y_0 = P(x) - xP'(x) + x_0P'(x) - y_0$$
realno ničlo. Analogen argument kot pri prvi trditvi pokaže, da je G_{x_0,y_0} sode stopnje.

Znano je, da so polinomi sode stopnje omejeni navzgor ali pa navzdol (to lahko pokažemo tako, da vse ničle polinoma zaobjamemo v zaprtem intervalu ter opazimo, da ima polinom zunaj tega intervala povsod enak predznak, nato pa se sklicujemo na kompaktnost zaprtega intevala ter zveznost polinomov, da dobimo spodnjo ter zgornjo mejo na kompaktu).

Tako je jasno, da polinom G_{x_0,y_0} nima realnih ničel za vse (x_0, y_0); nima je na primer že za vse $y_0 \in \mathbb{R}$ ob fiksnem $x_0 = 0$, saj lahko izberemo y_0, ki je večji oziroma manjši od zgornje oziroma spodnje meje sodega polinoma $P(x) - xP'(x)$.

$\square$

Naloga 1.2

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Denimo, da velja

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0,$$

in $f(-1) = f(1) = 1$. Pokaži, da je

$$\int_{-1}^{1} \left(f''(x)\right)^2\,dx \geq 15$$

ter določi vse f, za katere velja enakost.

Rešitev. Začnimo z izračunoma, ki sledita iz osnovnega izreka analize.

$$\int_{-1}^{1} f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} f''(x)\,dx = f'(x)\Big|_{-1}^{1} = f'(1) - f'(-1)$$

Sedaj izpeljemo nekaj enakosti z uporabo integracije po delih.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(x)x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(x)x\,dx \implies \int_{-1}^{1} f'(x)x\,dx = 2$$

$$\int_{-1}^{1} f'(x)\,dx = f'(x)x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f''(x)x\,dx \implies \int_{-1}^{1} f''(x)x\,dx = f'(1) + f'(-1)$$

$$2\int_{-1}^{1} f'(x)x\,dx = f'(x)x^2\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f''(x)x^2\,dx \implies \int_{-1}^{1} f''(x)x^2\,dx = f'(1) - f'(-1) - 4$$

Uporabimo Cauchy-Shwarzevo neenaksot na prostoru $\mathcal{C}([-1,1])$. Sledi, da je

$$\left(\int_{-1}^{1} f''(x)^2\,dx\right)\left(\int_{-1}^{1} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2\,dx\right) \geq \left(\int_{-1}^{1} \alpha f''(x)x^2 + \beta f''(x)x + \gamma f''(x)\,dx\right)^2$$

$$\left(\int_{-1}^{1} f''(x)^2\,dx\right)\left(\frac{2\alpha^2}{5} + \frac{2(2\alpha\gamma + \beta^2)}{3} + 2\gamma^2\right) \geq$$
$$\left(\alpha\int_{-1}^{1} f''(x)x^2\,dx + \beta\int_{-1}^{1} f''(x)x\,dx + \gamma\int_{-1}^{1} f''(x)\,dx\right)^2$$

Z uporabo že dokazanih enakosti izpeljemo

$$\left(\int_{-1}^{1} f''(x)^2\,dx\right)\left(\frac{2\alpha^2}{5} + \frac{2(2\alpha\gamma + \beta^2)}{3} + 2\gamma^2\right) \geq \left((\alpha+\beta+\gamma)f'(1) + (-\alpha+\beta-\gamma)f'(-1) - 4\alpha\right)^2.$$

Ker nimamo informacij o $f'(1)$ ter $f'(-1)$ bi se zdelo smiselno, da izberemo koeficiente α, β in γ tako, da se koeficienta $f'(1)$ ter $f'(-1)$ na desni strani neenakosti evalvirata v 0. S seštevanjem ustreznih sistemov enačb ugotovimo $\beta = 0$ ter $\gamma = -\alpha$. Sledi

$$\int_{-1}^{1} f''(x)^2\,dx \geq \frac{16\alpha^2}{\alpha^2(\frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2)} = \frac{16}{\frac{6-20+30}{15}} = 15,$$

kar smo želeli pokazati.

Sedaj določimo funkcije, ki v zgornji neenakosti dosežejo enakost. Opazimo, da je vrednost f zunaj intervala $[-1,1]$ nepomembna za pogoje naloge, prav tako kot za njene zaključke. Tako najprej določimo vse funkcije na $[-1,1]$, ki dosežejo enakost. Naj bo $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, za katero velja $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = 0$ in $g(1) = g(-1) = 1$ ter denimo, da je $\int_{-1}^{1}(g''(x))^2\,dx = 15$.

Vemo, da je enakost v Cauchy-Schwarzevi neenakosti dosežena natanko tedaj, ko sta vektorja linearno odvisna. Sledi, da obstajata $\psi, \theta \in \mathbb{R}$, ne obe ničelni, da velja

$$\psi g''(x) + \theta(\alpha x^2 - \alpha) = 0.$$

Pravzaprav nobena izmed konstant ni ničelna, kar pomeni, da je

$$f''(x) = \lambda(\alpha x^2 - \alpha) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Z dvakratnim integriranjem, uporabo robnih pogojev ter dejstva, da je integral g na $[-1,1]$ enak 0 lahko določimo vrednosti α ter λ. Sledi, da je edina funkcija $g \in \mathcal{C}^2([-1,1])$, ki doseže enakost

$$g(x) = \frac{-5x^4 + 30x^2 - 9}{16}.$$

Zaključimo, da enakost doseže vsaka funkcija f, za katero velja

$$f(x) = \frac{-5x^4 + 30x^2 - 9}{16} \quad \forall\, x \in [-1,1].$$

$\square$

Naloga 1.3

Naj bo S množica vseh realnih simetričnih matrik dimenzije 2025×2025, ki imajo rang 1 ter elemente enake -1 ali $+1$. Izberimo $A, B \in S$ enakomerno ter neodvisno naključno. Določi verjetnost, da A in B komutirata.

Rešitev. Najprej raziščimo strukturo elementov S. Naslednja trditev je splošno znana.

Trditev 1. Če ima $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rang 1, potem obstajata $u, v \in \mathbb{R}^n$ da velja

$$A = uv^T.$$

Za simetrične matrike ranga 1 lahko dokažemo naslednji močnejši izrek.

Trditev 2. Če je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična ter ima rang 1, potem obstaja $v \in \mathbb{R}^n$ da velja

$$A = \lambda vv^T, \quad \text{kjer je } \lambda \in \{-1, 1\}.$$

Dokaz. Uporabimo trditev 1 ter simetričnost, da ugotovimo

$$uv^T = vu^T \implies u_i v_j = v_i u_j \quad \forall\ 1 \le i.j \le n.$$

Če sta u_i in u_j neničelna, potem je $\frac{u_i}{v_i} = \frac{u_j}{v_j}$. To pomeni, da imajo vse neničelne koordinate u in v enako razmerje ter da ničenost ene izmed koordinat implicira ničelnost druge. Sledi $u = \alpha v$ za nek $\alpha \in \mathbb{R}$. Definiramo $w = \sqrt{|\alpha|}v$ ter zaključimo

$$A = \alpha vv^T = \pm(\sqrt{|\alpha|} \cdot v)(\sqrt{|\alpha|} \cdot v)^T = \pm ww^T,$$

kar smo želeli pokazati. □

Za $A \in S$ je seveda $w \neq 0$. Ker ima prva vrstica A elemente v $\{-1, 1\}$, ima w elemente $\{-1, 1\}$. Od zdaj naprej bomo označili množico vektorjev dolžine n z elementi iz množice $\{-1, 1\}$ z $\{-1, 1\}^n$.

Ugotovimo kdaj elementa S komutirata. Naj sta $A, B \in S$, $A = \pm vv^T$ in $B = \pm uu^T$. Sledi

$$AB = \pm vv^T uu^T = \pm v(v^T u)u^T = \pm\langle v, u\rangle vu^T$$
$$BA = \pm uu^T vv^T = \pm u(u^T v)v^T = \pm\langle u, v\rangle uv^T,$$

kjer smo uporabili dejstvo, da je produkt stolpca z vrstico skalar, ki komutira. Jasno je, da sta predznaka $\pm$ matrik AB in BA enaka, ter, da je $v^T u = u^T v$, saj sta oba zgolj skalarna produkta. A in B tako komutirata natanko tedaj, ko je $\langle u, v\rangle = 0$ ali $vu^T = uv^T$.

Opazimo, da za $u, v \in \{-1, 1\}^{2025}$ velja $\langle u, v\rangle \neq 0$, saj je $\langle u, v\rangle = 1 \pmod 2$. Denimo, da sta $u, v \in \{-1, 1\}^{2025}$ in $vu^T = uv^T$. Sledi, da je $u_1 \cdot v = v_1 \cdot u$ oziroma u in v sta skalarna večkratnika drug drugega. Ker sta oba elementa $\{-1, 1\}^{2025}$ sledi, da je $u = \pm v$. Ugotovili smo, da če $A = \pm vv^T$ in $B = \pm uu^T$ komutirata, potem je $u = \pm v$. Sledi, da je

$B = \pm A$. Ker A komutira z A in $-A$, sledi, da $A, B \in S$ komutirata nantanko tedaj, ko je $A = \pm B$.

Zadnji korak je določiti število elementov množice S. Opazimo, da vsak element $\{-1,1\}^{2025}$ določi natanko en element S. Poljuben element $\{-1,1\}^{2025}$ postavimo v prvi stolpec matrike, v ostale stolpce pa damo bodisi isti vektor, bodisi nasprotni vektor v skladu z elementi v prvi vrstici, ki je zaradi simetričnosti elementov S enaka prvemu stolpcu. Podoben premislek pokaže tudi, da sta vsaka dva elementa S z isto prvo vrstico enaka. Sledi, da je elementov S enako kot elementov $\{-1,1\}^{2025}$, slednjih je seveda 2^{2025}.

Ker $A \in S$ komutira zgolj z A in $-A$, je verjetnost, da dva naključno, neodvisno in enakomerno izbrana elementa S komutirata enaka

$$\frac{2}{2^{2025}} = 2^{-2024}.$$

□

Zanimivo je, da lahko analogen pristop reši splošnejši problem. naj bo D množica vseh ne nujno simetričnih matrik dimenzije 2025×2025 z rangom 1, ki imajo elemente iz množice $\{-1,1\}$. Analogen argument v katerem uporabimo trditev 1 namesto trditve 2 pokaže, da elementa D komutirata natanko tedaj, ko sta enaka ali nasprotna. Pogoj s simetričnostjo elementov S je tako potreben le za izračun velikosti množice S.

Dejstvo, da je 2025 liho število je problem nekoliko olajšalo, saj je skalarni produkt elementov $\{-1,1\}^{2k+1}$ vedno neničelen. Ker lastnosti števila 2025 nismo uporabili, razen za zaključek o neničelnem skalarnem produktu elementov $\{-1,1\}^{2025}$ ter ob izračunu velikosti S, smo pravzaprav dokazali tudi, da dve simetrični matriki z rangom 1, ter elementi iz množice $\{-1,1\}$ komutirata natanko tedaj, ko sta enaki ali nasprotni, ali pa če imata vektorja, ki generirata matriki, ničelni skalarni produkt. V primeru sode dimenzije je tako potrebno prešteti še velikost ortogonalnega komplementa poljubnega vektorja $v \in \{-1,1\}^{2k}$ (vektor v očitno ni v ortogonalnem komplementu vektorja v, zato ne pride do dvojnega štetja komutirajočih matrik) znotraj množice $\{-1,1\}^{2k}$. Preprost kombinatorični argument pokaže, da je velikost ortogonalnega komplementa vsakega $v \in \{-1,1\}^{2k}$ znotraj množice $\{-1,1\}^{2k}$ enaka

$$\binom{k}{2}.$$

V primeru matrik sode dimenzije je tako verjetnost komutiranja dveh naključno, neodvisno in enakomerno izbranih matrik enaka

$$\frac{2 + \binom{k}{2}}{2^k}.$$

2 Day 2

Naloga 2.1

Naj bo $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva. Denimo, da obstajata $b > a > 0$, za katera velja $f(b) = f(a) = k$. Pokaži, da obstaja $\xi \in (a, b)$ da velja

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = k.$$

Rešitev. Izraz je podoben števcu formule za odvod kvocienta funkcij. Ta opazka motivira definicijo zvezno odvedljive funkcije $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(x) = \frac{f(x) - k}{x}.$$

Očitno je $g(a) = g(b) = 0$. Z uporabo Rollejevega izreka ugotovimo, da obstaja $\xi \in (a, b)$ za katerega velja $g'(\xi) = 0$. Sledi

$$0 = g'(\xi) = \frac{f'(\xi)\xi - f(\xi) + k}{\xi^2}.$$

Ker je $\xi \neq 0$ je ξ želena točka. $\square$

Naloga 2.2

Naj bo $\mathbb{N}$ množica naravnih števil. Določi vse neprazne podmnožice $M \subseteq \mathbb{N}$, ki zadoščajo naslednjima pogojema:

- če je $x \in M$, potem je $2x \in M$,
- če je $x, y \in M$ in $2 \mid x + y$, potem je $\frac{x+y}{2} \in M$.

Rešitev. Če združimo pogoja ugotovimo, da je M zaprt za seštevanje.

Trditev 3. Če je $x, y \in M$, potem je $x + y \in M$.

Dokaz.

$$x, y \in M \implies 2x, 2y \in M. \;\; 2 \mid (2x + 2y) \implies \frac{2x + 2y}{2} = x + y \in M.$$

□

Spomnimo se naslednjega izreka.

Izrek 2.3: Frobeniusov izrek

Naj sta $m, n \in \mathbb{N}$ ter je $g = \gcd(m, n)$ njun navečji skupni delitelj. Potem je največje število, ki je deljivo z g, ter ga ni mogoče zapisati v obliki $am + bn$, kjer sta a, b nenegativni celi števili, enako

$$g \cdot \left(\frac{mn}{g^2} - \frac{m}{g} - \frac{n}{g}\right).$$

Točna meja v zgornjem izreku ni posebej relevantna za rešitev te naloge, a nam pove, da mora M od neke točke dalje vsebovati vse večkratnike največjega skupnega delitelja elementov M.

Opazimo, da mora M vsebovati liho število, saj $2 \mid x \in M \implies \frac{x+2x}{2} = \frac{3}{2}x \in M$, kar omogoča, da poljubnemu sodemu elementu M odstranimo faktor 2. Po končno mnogo korakih dobimo liho število.

Opremljeni z zgornjimi opazkami postavimo domnevo, da so vse množice M oblike

$$\{d \cdot n \mid n \geq c\}$$

za nek lih $d \in \mathbb{N}$ in poljuben $c \in \mathbb{N}$. Očitno množice te oblike izpolnijo pogoje.

Naj bo M poljubna množica, ki izpolnjuje pogoje naloge, ter naj bo $c \cdot d$ poljuben element M, kjer je $d = \gcd(M)$. Ker M vsebuje liho število je $2 \neq d$. Pokažimo, da je $(c+1) \cdot d \in M$, kar dokaže našo domnevo.

Po izreku 2, obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $2^k \cdot d \in M$. Pokažemo, da je $\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, k\}$

$$(2^i + c) \cdot d \in M,$$

kar implicira želeno v primeru $i = 0$. Ker je M zaprt za seštevanje je, je trditev resnična za $i = k$. Denimo, da je trditev neresnična in naj bo j največje celo število v množici $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ za katero $(2^j + c) \cdot d \notin M$. Velja

$$(2^{j+1} + c) \cdot d \in M \ \text{ ter } \ 2 \mid 2^{j+1} + 2c \implies \frac{2^{j+1} + 2c}{2} \cdot d = (2^j + c) \cdot d \in M,$$

kar je protislovno. Sledi, da je trditev resnična, kar pomeni, da je $(c + 1) \cdot d \in M$, kar smo želeli pokazati. $\square$

Naloga 2.4

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ ter označimo z A^R rotacijo matrike A v nasprotni smeri urinega kazalca za 90°. Na primer,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da če je $A = A^R$, potem za vsako lastno vrednost λ matrike A velja $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ ali $\mathrm{Im}(\lambda) = 0$.

Rešitev. V tej rešitvi označimo z $A^{(i)}$ in $A_{(i)}$ zaporedoma i-ti stolpec in i-to vrstico matrike A.

Opazimo, da je preslikava ${}^R : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}$ ki preslika matriko v njeno rotacijo v nasprotni smeri urinega kazalca za 90° linearna. Morda bi si želeli določiti matriko te preslikave, a ta pristop ne bi bil pretirano praktičen, saj ne moramo na primer množiti ali seštevati matrike preslikave ^{R} ter matrike A, sta namreč različnih dimenzij. Lahko pa poizkusimo izraziti preslikavo ^{R} s kakšno znano linearno preslikavo med prostoroma $\mathbb{F}^{n\times n}$ in $\mathbb{F}^{n\times n}$.

Trditev 4. Naj bo $J \in M_n(\mathbb{R})$ matrika z enicami na glavni anti-diagonali ter ničlami drugod. Za $A \in M_n(\mathbb{R})$ velja

$$A^R = JA^T$$

Dokaz. Iz definicije rotacije je jasno $A^R_{(i)} = A^{(n+1-i)}$, iz definicije transponiranja pa $\left(A^T\right)^{(i)} = A_{(i)}$. Matrika JA^T v i-ti vrstici vsebuje elemente

$$(\langle e_{n+1-i}, A_{(j)}\rangle)_{j=1}^n = (a_{j,n+1-i})_{j=1}^n = A^{(n+1-i)},$$

kar dokaže željeno, saj imata A^R in JA^T enake istoležne vrstice. $\square$

Ob predpostavki $A = A^R$ želimo pokazati, da so lastne vrednosti A bodisi realne, bodisi imaginarne. Po izreku o preslikavi spektra je slednje ekvivalentno realnosti lastnih vrednosti matrike A^2. Spomnimo se naslednjega izreka:

Izrek 2.5

Realna simetrična matrika ima same realne lastne vrednosti.

Zadosti je tako pokazati, da je A^2 realna in simetrična. A^2 je seveda realna, saj je A realna. Opazimo

$$A^2 = AA^R = AJA^T \quad \text{ter} \quad (AJA^T)^T = (A^T)^T J^T A^T = AJA^T,$$

kar pomeni, da je A^2 simetrična. Željeno je tako dokazano. $\square$