Vaje iz Algebre 2

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

17. marec 2025

The good Christian should beware of mathematicians, and all those who make empty prophecies. The danger already exists that the mathematicians have made a covenant with the devil to darken the spirit and to confine man in the bonds of Hell.

st. Augustine

Kazalo

1 Kvocientne strukture

1.1 Edinke

Definicija 1.1

Podgrupa N grupe G je *podgrupa edinka*, če za vsak $a \in G$ velja

$$aNa^{-1} \subseteq N.$$

Definicija edinke omogoča, da v množico odsekov grupe po edinki vpeljemo množenje predstavnikov, ki je dobro definirana operacija, ki naredi iz množice odsekov grupo, imenovana *kvocientna grupa*.

Trditev 1.2

Če sta $H, K \leq G$ je $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ podgrupa G natanko tedaj, ko je $HK = KH$. Pogoj je gotovo izpolnjen, če je ena izmed H, K edinka.

Trditev 1.3

- Podgrupa indeksa 2 je edinka.
- Naj bo $a \in G$ reda 2. $\{1, a\}$ je edinka natanko tedaj, ko je $a \in Z(G)$.

Trditev 1.4

Naj bo N končna podgrupa grupe G. Če je N edina podgrupa reda $|N|$ je N edinka.

Trditev 1.5

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

Trditev 1.6

Center grupe G

$$Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx \ \ \forall x \in G\}$$

je edinka.

$$G/Z(G) \quad \text{ciklična} \quad \implies G \quad \text{Abelova}.$$

Izrek 1.7: Cauchy

Naj bo $p \in \mathbb{P}$, da velja $p \mid |G|$. Potem ima G element reda p.

Izrek 1.8: O izomorfizmu

- Naj bo $\varphi : G \to H$ homomorfizem. Potem je

$$G/\ker(\varphi) \cong \mathrm{im}(\varphi)$$

- Naj bo $N \lhd G$ ter $H \leq G$. Potem je

$$H/(H \cap N) \cong HN/N$$

- Naj bo $M, N \lhd G$ ter $N \subseteq M$. Potem je

$$G/M \cong (G/N)/(M/N)$$

Izrek 1.9: Korespondenčni izrek

Naj bo $N \lhd G$

- Vsaka podgrupa grupe G/N je oblike H/N za $H \leq G$.
- Vsaka podgrupa edinka G/N je oblike M/N za $M \lhd G$ ter $N \subseteq M$.

Standardna protiprimera v teoriji grup sta:

Primer 1.10

$$K \leq H \times G \;\not\Rightarrow K = H_1 \times G_1 \quad \text{za} \quad H_1 \leq H, K_1 \leq K$$

Primer 1.11

$$N \lhd G \quad \text{Abelova ter} \quad G/N \quad \text{Abelova} \quad \not\Rightarrow \quad G \quad \text{Abelova.}$$

1.2 Ideali

Definicija 1.12

(Dvostranski) ideal kolobarja K je aditivna podgrupa K I, za katero za vsak $a \in K$ velja

$$aI \subseteq I \quad \text{ter} \quad Ia \subseteq I.$$

Definicija ideala omogoča, da v množico odsekov kolobarja po idealu vpeljemo seštevanje in množenje predstavnikov, ki sta dobro definirani operaciji, ki iz množice odsekov naredita kolobar, imenovan *kvocientni kolobar*.

Trditev 1.13

Če obravnavamo le enostranske ideale velja, da sta naslednji množici zaporedoma desni ter levi ideal matričnega kolobarja nad kolobarjem K

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}.$$

Trditev 1.14

Vsota, produkt ter presek idealov I in J je ideal, za katere velja

$$IJ \subseteq I \cap J \subseteq I, J \subseteq I + J.$$

Trditev 1.15

Naj sta I ter J ideala komutativnega kolobarja K, za katera velja $I + J = K$. Pokaži, da velja

$$IJ = I \cup J$$

Oris dokaza. Pogoj je ekvivalenten obstoju elementov i ter j, za katera velja $i + j = 1$. Pokažemo le inkluzijo $I \cup J$ v IJ. Velja $a \in I \cap J \implies a \cdot 1 = ai + aj \in I \cap J, \quad ai \in IJ \quad \text{ter} \quad aj \in IJ$. □

Trditev 1.16

Naj bo D obseg. Potem je $M_n(D)$ enostaven kolobar.

Oris dokaza. Velja $E_{ij} \circ E_{kl} = \delta_{j=k} E_{il}$. Za neničelen element ideala lahko dobimo matrično enoto, z enko na mestu njegovega neničelnega elementa. Potem lahko z množenjem te matrične enote dobimo vse ostale matrične enote, kar nam da I, sledi, da je ideal enak $M_n(K)$. □

Trditev 1.17

Naj bo $I \lhd K_1 \times K_2$. Pokaži, da je $I = I_1 \times I_2$, za $I_i \lhd K_i$ za $i \in \{1, 2\}$.

Oris dokaza. Projeciramo I na obe komponenti ter dobimo kandidata za idaela I_1 ter I_2. Očitno njun produkt vsebuje I. Naj bo

$$(x, y) \in I_1 \times I_2 \implies \exists x' \in I_1 \wedge y' \in I_2 . (x, y') \in I \wedge (x', y) \in I.$$

Tako velja, da je

$$(1, y)(x, y') = (x, yy') \in I \quad \text{ter} \quad (x', y)(1, y') = (x', yy') \in I.$$

Sledi, da je

$$(x, yy') - (x', yy') = (x - x', 0) \in I \implies (x - x', 0) + (x', y) = (x, y) \in I,$$

kar smo želeli pokazati. □

Trditev 1.18

Množica nilpotentnih elementov kolobarja je ideal.

Trditev 1.19

Naj so $\{n_i\}$ paroma tuja števila, za katera velja $N = \prod_i n_i$. Preslikava $\varphi : \mathbb{Z}/nZ \to \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$ je izomorfizem kolobarjev, definiran z

$$\varphi(x \bmod N) = (x \bmod n_1, \ldots x \bmod n_k)$$

2 Direktne vsoti ter končne Abelove grupe

Trditev 2.1

Če sta $M, N \triangleleft G$ ter je $M \cap N = \{1\}$, potem elementi M in N komutirajo.

Oris dokaza. Komutator je v obeh. $\square$