

Sumário

Lista de Figuras	4
Lista de Tabelas	10
1 Tensão em um ponto	1
1.1 Introdução	1
1.2 Estado Plano de Tensões	2
1.3 Componentes de tensão em um plano qualquer de um estado plano de tensões	3
1.4 Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima	6
2 Tensões combinadas	10
2.1 Introdução	10
2.2 Carga axial pura	11
2.3 Torção pura	13
2.4 Momento fletor puro	15
2.5 Combinação de tensões	16
2.6 Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima na combinação de tensões	18
2.7 Torção em peças de secção transversal não circular	29
2.8 Análise e dimensionamento de eixos circulares vazados sujeitos à cargas estáticas	33
3 Critério de escoamento da máxima energia de distorção	35
3.1 Considerações iniciais:	35
3.2 Critério da máxima energia de distorção	37
4 Fadiga	42
4.1 Introdução	42
4.2 Mecanismo de fratura por fadiga	44
4.3 Limite de resistência à fadiga de corpos de prova	45
4.4 Limite de resistência à fadiga de elementos de máquinas	46

4.4.1	Acabamento superficial k_a	48
4.4.2	Tamanho da peça k_b	49
4.4.3	Confiabilidade k_c	50
4.4.4	Temperatura k_d	52
4.4.5	Tipo de carga k_e	52
4.4.6	Fatores diversos k_f	52
4.5	Resistência à fadiga para vida finita	54
4.6	Observações finais sobre a fadiga dos materiais metálicos VANVLACK [1] (página 157)	57
5	Dimensionamento e análise de elementos de máquinas sujeitos à fadiga	58
5.1	Introdução	58
5.2	Formas básicas de uma carga variar com o tempo	59
5.3	Resistência à fadiga sob tensões variáveis (critério de Soderberg)	63
5.4	Falha por fadiga devido à combinação de tensões	66
5.5	Fator de concentração de tensão k_p	69
5.6	Critérios diversos de resistência à fadiga	89
5.6.1	Critério de Soderberg	89
5.6.2	Critério modificado de Goodman	90
5.6.3	Critério de Gerber (arco de parábola)	91
5.6.4	Critério ASME (arco de elipse)	92
5.6.5	Critério do escoamento ampliado	93
5.7	Diagramas para obtenção dos fatores q e k_t	98
5.8	Passos para projetar ou analisar elementos estruturais ou de máquinas sujeitos à fadiga	106
6	Elementos de união – Parafusos	108
6.1	Introdução	108
6.2	Definições e especificações	109
6.3	Área de resistência à tração	111
6.4	Tensão nos filetes da rosca	112
6.5	Pré-carregamento	115
6.5.1	Constante da mola ou constante de rigidez	118
6.5.2	Carga inicial ou Pré-carga	123
6.5.3	Torque necessário para o pré – carregamento	123
6.6	Considerações sobre fadiga	126
6.7	Carregamento excêntrico	129

7 Eixos e Árvores	142
7.1 Introdução	142
7.2 Dimensionamento de eixos e de árvores	143
8 Chavetas e Estrias	153
8.1 Introdução	153
8.2 Projeto de chavetas retangulares	156
8.3 Estrias	160
9 Projeto e lubrificação de mancais de deslizamento	163
9.1 Introdução	163
9.2 Massa Específica e Viscosidade do Lubrificante	165
9.3 Coeficiente de Atrito	166
9.4 Quantidade de calor gerada por atrito	169
9.5 Quantidade de calor dissipada	170
9.6 Número de Sommerfeld	175
9.6.1 Coeficiente de atrito em um mancal de deslizamento	176
9.6.2 Espessura mínima da película de lubrificante	177
9.6.3 Vazão de óleo	178
9.6.4 Fuga de lubrificante	179
9.6.5 Pressão máxima	180
10 Tópicos de Estatística	182
10.1 Introdução	182
10.2 Média ponderada	183
10.3 Média $\mu(t)$, ponderada por uma função $f(t)$	184
10.4 Função de densidade de probabilidade (FDP)	186
10.5 Probabilidade em termos de uma função de densidade de probabilidade	187
10.6 Média e variância de uma distribuição de probabilidade contínua . . .	188
10.7 Confiabilidade	191
11 Mancais de rolamento	195
11.1 Introdução	195
11.2 Vida e Confiabilidade de um grupo de Rolamentos	198
11.3 Relação entre a carga e a vida de um mancal de rolamento	203
11.4 Seleção de um rolamento	205
Referências Bibliográficas	211

Listas de Figuras

1.1	Representação gráfica da tensão em um ponto.	1
1.2	Estado plano de tensão	2
1.3	Novos componentes de tensão quando o sistema de referência é girado de um ângulo θ	3
1.4	Sistema de referência girado de um ângulo θ .	4
1.5	Estado plano de tensões.	5
1.6	Estado plano principal de tensões.	6
1.7	Estado plano de tensão de cisalhamento máxima.	7
1.8	Estados planos de tensão.	8
2.1	Elemento sujeito a esforços combinados.	10
2.2	Elemento sujeito a um esforço axial.	11
2.3	Tensões em um elemento sujeito a um esforço axial puro.	12
2.4	Elemento sujeito a um esforço de torção puro.	13
2.5	Tensão cisalhante em um eixo vazado sujeito a um momento de torção puro.	14
2.6	Elemento sujeito a um momento de flexão puro.	15
2.7	Elemento sujeito a esforços combinados.	16
2.8	Diagrama do corpo livre em torno de um ponto.	16
2.9	Tensão plana em um ponto na periferia de um eixo sujeito a esforços combinados.	18
2.10	Sistema força-binário atuante em uma barra curva.	19
2.11	Elemento sujeito a uma carga excêntrica.	20
2.12	Barra sujeita a um esforço combinado (caso 1).	20
2.13	Barra sujeita a um esforço combinado (caso 2).	21
2.14	Peça sujeita a um esforço compressivo excêntrico.	21
2.15	Cargas em um eixo vazado.	22
2.16	Alavanca com eixo.	23
2.17	Eixo sujeito a um esforço combinado. Figura adaptada do MERIAN [2] página 87	23

2.18 Biela submetida a combinação de cargas. Figura adaptada do UGURAL [3] página 389	24
2.19 Eixo com engrenagens.	25
2.20 Diagrama de esforços normais.	25
2.21 Diagrama de Torques.	26
2.22 Diagrama de esforços cortantes.	26
2.23 Diagrama de momentos fletores.	27
2.24 Barra sujeita a esforços combinados de flexão.	27
2.25 Esforços em uma mola helicoidal.	28
2.26 Torção de um eixo de seção transversal retangular.	29
2.27 Torção de um eixo de seção transversal elíptica.	30
2.28 Torção de um eixo de seção transversal triangular.	30
2.29 Torção de um eixo de seção transversal retangular.	31
2.30 Torção de uma viga de seção transversal retangular.	32
 3.1 Em materiais densos, variação de volume não promove escoamento.	35
3.2 A distorção de um elemento pode promover escoamento.	35
3.3 Quanto maior o volume maior o trabalho para deformar.	36
3.4 Cargas diferentes em peças diferentes de mesmo material.	37
3.5 Tensões principais em três dimensões.	38
3.6 Elipse no espaço $\sigma_a \times \sigma_b$	39
3.7 Eixo sujeito a esforços combinados de torção e flexão.	40
3.8 Árvore com uma polia no seu ponto médio.	40
3.9 Diagrama de esforços normais para um eixo com uma polia central.	41
 4.1 A tensão em um ponto próximo à trica é maior que a tensão nos demais.	42
4.2 Processo de colapso por fadiga.	44
4.3 Maquina de ensaio de fadiga por flexão alternada.	45
4.4 Corpo de prova padronizado para ensaio de fadiga.	45
4.5 Gráfico de variação da tensão induzida <i>versus</i> o número de ciclos para atingir o colapso.	46
4.6 Gráfico de variação do fator k_b em termos do diâmetro da peça.	49
4.7 Distribuição da resistência R	50
4.8 Confiabilidade com base na distribuição normal.	50
4.9 Pontos de colapso por fadiga de uma liga ferrosa.	54
 5.1 Tensão variada.	59
5.2 Tensão repetida.	59
5.3 Tensão alternada.	60
5.4 Tensão constante.	60

5.5	Eixo sujeito a um esforço axial variável.	61
5.6	Diagrama de Soderberg.	63
5.7	Estado plano de tensões composto por apenas um componente de tensão normal.	66
5.8	Chapa quadrada com um furo central.	69
5.9	Carga axial com reversão completa.	71
5.10	Momento de torção variável.	73
5.11	Eixo sob a ação de um momento de torção variável.	76
5.12	Eixo sob a ação de um momento de torção juntamente com um momento de flexão variáveis.	79
5.13	Projeto de um eixo sujeito a ação de um momento de torção juntamente com um momento de flexão variáveis.	83
5.14	Projeto de um eixo com duas engrenagens.	87
5.15	Diagrama de torques.	88
5.16	Diagrama de momento fletor.	88
5.17	Critério de Soderberg.	89
5.18	Critério modificado de Goodman.	90
5.19	Critério de Gerber (arco de parábola).	91
5.20	Critério ASME elíptico.	92
5.21	Critério do escoamento ampliado.	93
5.22	Linha de colapso dos principais critérios de resistência à fadiga.	94
5.23	Projeto de uma peça sujeita a um esforço variável.	97
5.24	Índice de sensibilidade ao entalhe para aços (NORTON [4]).	98
5.25	Fator teórico de concentração de tensão para eixos escalonados.	100
5.26	Fator teórico de concentração de tensão para eixos com gola.	101
5.27	Fator teórico de concentração de tensão para eixos com furo.	102
5.28	Fator de concentração de tensões de barras escalonadas.	103
5.29	Fator de concentração de tensões de barras com entalhe.	104
5.30	Fator de concentração de tensões de barras com entalhe.	105
6.1	Medidas principais da rosca de um parafuso.	109
6.2	Especificações de uma rosca métrica.	109
6.3	Especificações de uma rosca unificada.	110
6.4	Rosca como uma viga em balanço.	112
6.5	Comprimento da parte da porca que está sob carga.	113
6.6	Montagem com pré-carga.	115
6.7	Alongamento de uma barra primática.	118
6.8	Cilindros vazados em série para a determinação de k_m	119
6.9	Distribuição hipotética das cargas compressivas em uma montagem. .	119

6.10 Montagem como molas em série em compressão.	121
6.11 Diagrama tensão – deformação para parafusos.	123
6.12 Montagem para análise do pré – carregamento.	124
6.13 Carga excêntrica em uma montagem.	129
6.14 Sistema equivalente reduzido ao centróide.	129
6.15 Sistema mecanicamente equivalente à superposição de dois outros.	130
6.16 Direção das cargas P_i e Q_i	130
6.17 O parafuso mais distante do centro de rotação apresenta um deslocamento maior.	131
6.18 Montagem excêntrica para determinação das cargas nos parafusos.	132
6.19 Carga P dividida igualmente entre os parafusos.	133
6.20 Cargas Q_i ortogonais aos respectivos r_i	134
6.21 Cargas total F_i sobre o parafuso i	135
6.22 Compressão superficial e cisalhamento em um parafuso.	135
6.23 Áreas reais sujeitas à compressão superficial em parafusos.	136
6.24 Área projetada em chapas com espessuras diferentes.	136
6.25 Carga excêntrica em uma montagem de fixação de uma barra com um perfil U.	137
6.26 Determinando a distância do centróide a um parafuso.	138
6.27 Determinando a força total nos parafusos que unem uma barra a um perfil U.	139
6.28 Oito parafusos distribuídos uniformemente em um círculo de raio 25 mm.	140
6.29 Três parafusos de 8 mm de diâmetro em uma motagem sujeita a uma carga horizontal P	141
7.1 Esforços combinados em uma árvore.	143
7.2 Projeto de um eixo sujeito a ação de um momento de torção juntamente com um momento de flexão variáveis.	147
7.3 Árvore com uma polia no seu ponto médio.	149
7.4 Esquema de uma engrenagem para transmissão de potência.	149
7.5 Projeto de um eixo com duas engrenagens.	150
7.6 Diagrama de torques.	150
7.7 Diagrama de momento fletor.	151
8.1 Chaveta para fixação do cubo de uma roda em um eixo.	153
8.2 Chavetas redonda e quadrada.	154
8.3 Alguns tipos de cavilha.	154
8.4 Uma cavilha típica.	154

8.5 Chaveta com cabeça e chaveta Woodruff ou meia lua. (Figura adaptada do SHIGLEY [5] página 245.)	155
8.6 Esforços em uma chaveta retangular.	156
8.7 Esforços simplificados em uma chaveta retangular.	156
8.8 Posição hipotética da linha de ação das forças em uma chaveta retangular.	157
8.9 Chaveta fixando cubo de uma engrenagem a uma árvore.	159
8.10 Chavetas para um eixo com duas engrenagens.	159
8.11 Mecanismo com eixo e roda estriados.	160
8.12 Dimensões e força em uma estria.	161
9.1 Mancal de deslizamento comparado a um de rolamento.	163
9.2 Eixo em repouso sobre o mancal	164
9.3 Efeito do bombeamento do óleo.	164
9.4 Área projetada da extremidade de um eixo.	166
9.5 Carga radial em um mancal.	167
9.6 Diâmetro e comprimento de um mancal de deslizamento.	167
9.7 Gráfico de k em função da razão L/D	168
9.8 Força de atrito fluido infinitesimal em um mancal de deslizamento.	169
9.9 Eixo com duas engrenagens suportada por dois mancais de deslizamento.	173
9.10 Diagrama de esforços cortantes.	174
9.11 Árvore com uma polia no seu ponto médio.	174
9.12 Coeficiente de atrito. Figura extraída do HALL <i>et al.</i> [6] páginas 482 – 485	176
9.13 Espessura mínima da película de lubrificante. Figura extraída do HALL <i>et al.</i> [6] páginas 482 – 485	177
9.14 Vazão de óleo através de um mancal de deslizamento. Figura extraída do HALL <i>et al.</i> [6] páginas 482 – 485	178
9.15 Fuga de lubrificante pelas extremidades de um mancal de deslizamento. Figura extraída do HALL <i>et al.</i> [6] páginas 482 – 485	179
9.16 Pressão máxima na película de lubrificante. Figura extraída do HALL <i>et al.</i> [6] páginas 482 – 485	180
10.1 Uma função qualquer para o cálculo da média ponderada.	184
10.2 Alguns exemplos de funções que podem ser consideradas funções de densidade de probabilidade.	186
10.3 Área como uma probabilidade.	187
10.4 Confiabilidade.	191
10.5 A medida que o tempo passa, a confiabilidade diminui.	191
10.6 Distribuição triangular.	192

10.7 Distribuição triangular simétrica.	193
10.8 Uma FDP baseada na função $g(t) = t(10 - t)$	193
11.1 Mancal de rolamento.	195
11.2 Uma função de densidade de probabilidade (área total 100%).	198
11.3 Confiabilidade de um grupo de rolamentos.	199
11.4 Confiabilidade para vida nominal L_{10}	200
11.5 Nas distribuições simétricas, a confiabilidade para $t = \mu$ é igual a 50%.	201
11.6 Engrenagem helicoidal e engrenagem de dentes retos.	205
11.7 Engrenagens helicoidais.	206
11.8 Eixo com duas engrenagens.	209
11.9 Diagrama de esforços cortantes.	210
11.10 Árvore com uma polia no seu ponto médio.	210

Listas de Tabelas

2.1 Valores de α e de β para torção de eixos de seção transversal retangular	31
4.1 Valores de a e de b para determinação do fator que leva em conta o acabamento da peça.	48
4.2 Valores de k_c e de z_c para determinação do fator que leva em conta a confiabilidade.	51
6.1 Fator prático de concentração de tensão k_p' para parafusos.	127
7.1 Valores dos fatores de carga k_m e k_t para eixos e árvores	145
8.1 Projeto de uma chaveta: Ao cisalhamento e à compressão	158
9.1 Valores de k em termos da razão L/D	168
10.1 Tabela de frequência	183
10.2 Fornecedor 1	190
10.3 Fornecedor 2	190
10.4 Vida de uma família de rolamentos	194

Capítulo 1

Tensão em um ponto

1.1 Introdução

Um tensor \mathbf{T} é uma aplicação linear que transforma um vetor \mathbf{u} , de dimensão n em outro vetor \mathbf{v} , também de dimensão n . GURTIN [7] demonstra que a tensão \mathbf{T} em um ponto é um tensor simétrico de segunda ordem denominado tensor de Cauchy. Dada uma base ortonormal de vetores, o tensor de tensão pode ser representado matricialmente da seguinte maneira:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Os componentes σ_{ii} do tensor de tensão são denominados de tensões normais ao passo que os τ_{ij} são denominados de tensões tangenciais ou tensões cisalhantes. A Fig. 1.1 mostra uma maneira de representar graficamente os componentes de tensão. Com base nas condições de equilíbrio, é possível demonstrar que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

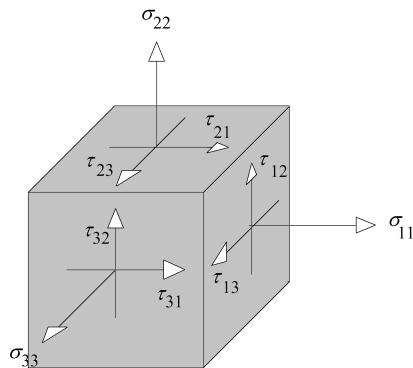


Figura 1.1: Representação gráfica da tensão em um ponto.

1.2 Estado Plano de Tensões

Quando pelo menos uma das faces do paralelepípedo da Fig. 1.1 está descarregada, diz-se que o ponto está sujeito a um estado plano de tensões. Suponha que a face de número 3 do paralelepípedo esteja descarregada, ou seja, suponha que $\sigma_{33} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$. Neste caso, restarão apenas os componentes σ_{11} , σ_{22} e τ_{12} . Assim, o paralelepípedo é colapsado em um retângulo, como mostra a Fig.1.2.

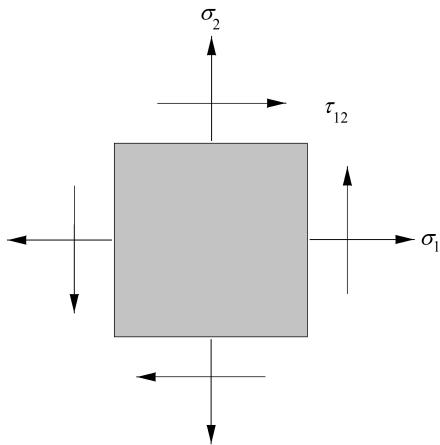


Figura 1.2: Estado plano de tensão

De acordo com BEER e JOHNSTON [8], encontramos este tipo de estado de tensões (estado plano) em chapas finas submetidas a forças que atuam em seus pontos médios; na superfície externa de elementos estruturais e de máquinas (eixos, molas, pinos, etc.); nos vasos de pressão, etc.

Exercício

- 1) Faça um esquema gráfico das tensões desenvolvidas na superfície de um eixo de diâmetro de 80 mm sujeito a um momento fletor de 2560 Nm e um momento de torção de 2000 Nm.

Resposta: $|\sigma_{11}| = 50,93$ MPa, $|\tau_{12}| = 19,90$ MPa e $\sigma_{22} = 0$.

1.3 Componentes de tensão em um plano qualquer de um estado plano de tensões

Os componentes de tensão de um estado plano se alteram quando o sistema de referência é girado de um ângulo θ em torno do eixo da face descarregada (eixo z), como mostra a Fig. 1.3.

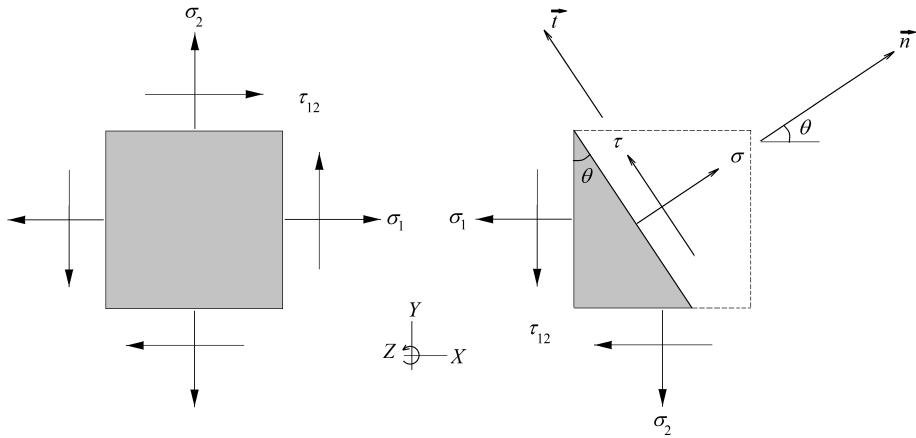


Figura 1.3: Novos componentes de tensão quando o sistema de referência é girado de um ângulo θ

Tomando-se, na Fig.1.3, o somatório de forças na direção \vec{n} e na direção \vec{t} pode-se demonstrar que:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta + \tau_{12} \sin 2\theta \quad (1.2)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta + \tau_{12} \cos 2\theta \quad (1.3)$$

Com base nas Eqs.(1.2) e (1.3) pode-se concluir que se o sistema de referência for girado de θ em torno de z, como mostrado na Fig.1.4, então os novos componentes de tensão serão:

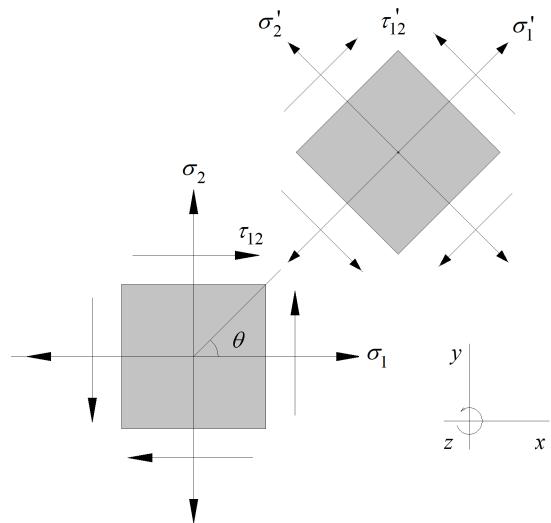


Figura 1.4: Sistema de referência girado de um ângulo θ .

$$\sigma'_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta + \tau_{12} \sin 2\theta \quad (1.4)$$

$$\sigma'_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta - \tau_{12} \sin 2\theta \quad (1.5)$$

$$\tau'_{12} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta + \tau_{12} \cos 2\theta \quad (1.6)$$

Note que $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma'_1 + \sigma'_2 = \text{constante}$. Esta propriedade é denominada de *invariante de tensão*.

Exercícios:

Determine, para os estados de tensão indicados na Fig.1.5, os novos componentes de tensão quando o sistema de referência sofre uma rotação de θ no sentido anti-horário.

Respostas:

- 1) $\sigma'_1 = 48,4$ MPa, $\sigma'_2 = 111,6$ MPa e $\tau'_{12} = -41,3$ MPa;
- 2) $\sigma'_1 = 28,23$ MPa, $\sigma'_2 = 22,70$ MPa e $\tau'_{12} = -31,00$ MPa;
- 3) $\sigma'_1 = -160$ MPa, $\sigma'_2 = -40$ MPa e $\tau'_{12} = -20$ MPa.

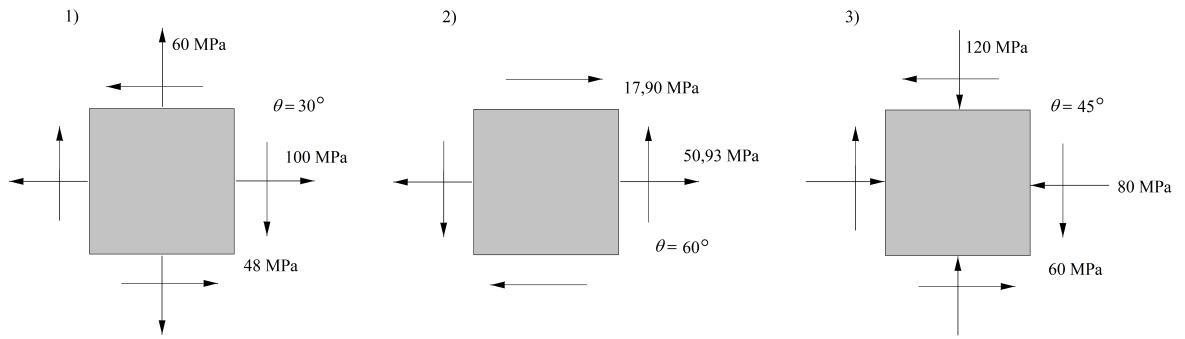


Figura 1.5: Estado plano de tensões.

- 4) Demonstre a Eqs.(1.4), (1.5) e (1.6).

1.4 Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima

O objetivo deste item é determinar qual deverá ser o ângulo θ_n de rotação do sistema de referência para o qual a tensão σ será máxima. Além disso, qual o valor dessa tensão máxima. De forma análoga, também é um dos objetivos do presente item, determinar o ângulo θ_t para o qual a tensão tangencial é máxima, bem como o seu valor máximo. Derivando as Eqs (1.2) e (1.3) em relação à θ e igualando a zero o resultado, encontra-se:

$$\tan 2\theta_n = \frac{2\tau_{12}}{\sigma_1 - \sigma_2} \quad (1.7)$$

$$\tan 2\theta_t = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\tau_{12}} \quad (1.8)$$

Note que as expressões anteriores são o simétrico do inverso uma da outra. Ou seja, os ângulos $2\theta_n$ e $2\theta_t$ diferem de 90° . Portanto, θ_n e θ_t diferem de 45° .

Exercício:

Demonstre que $|\theta_n - \theta_t| = 45^\circ$.

Substituindo a Eq. (1.7) na Eq.(1.2), encontra-se:

$$\sigma_{Max,Min} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2} \quad (1.9)$$

As valores de σ_{Max} e σ_{Min} são denominados de tensões principais. Pode-se demonstrar que a tensão tangencial associada a um estado principal de tensões é nula. Neste caso, o estado plano será composto apenas por tensões normais como mostra a Fig.1.6.

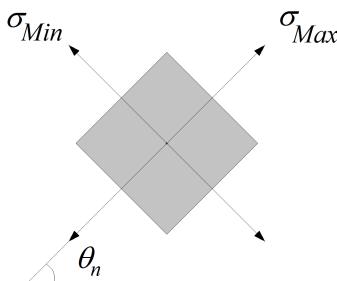


Figura 1.6: Estado plano principal de tensões.

Substituindo a Eq. (1.8) na Eq.(1.3), obtém-se:

$$\tau_{Max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2} \quad (1.10)$$

As tensões normais associadas a um estado plano de tensão de cisalhamento máxima não são nulas, como mostrado na Fig.1.7. É possível demonstrar que as tensões normais associadas a um estado plano de tensão de cisalhamento máxima são iguais à tensão normal média.

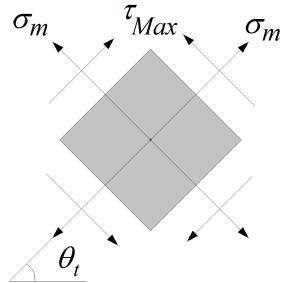


Figura 1.7: Estado plano de tensão de cisalhamento máxima.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (1.11)$$

Exercícios (página 608 BEER e JOHNSTON [8]):

Para o estado de tensões apresentados na Fig.1.8, determine:

- Os planos principais;
- As tensões principais;
- O plano de tensão de cisalhamento máxima;
- A tensão de cisalhamento máxima;
- A tensão média.

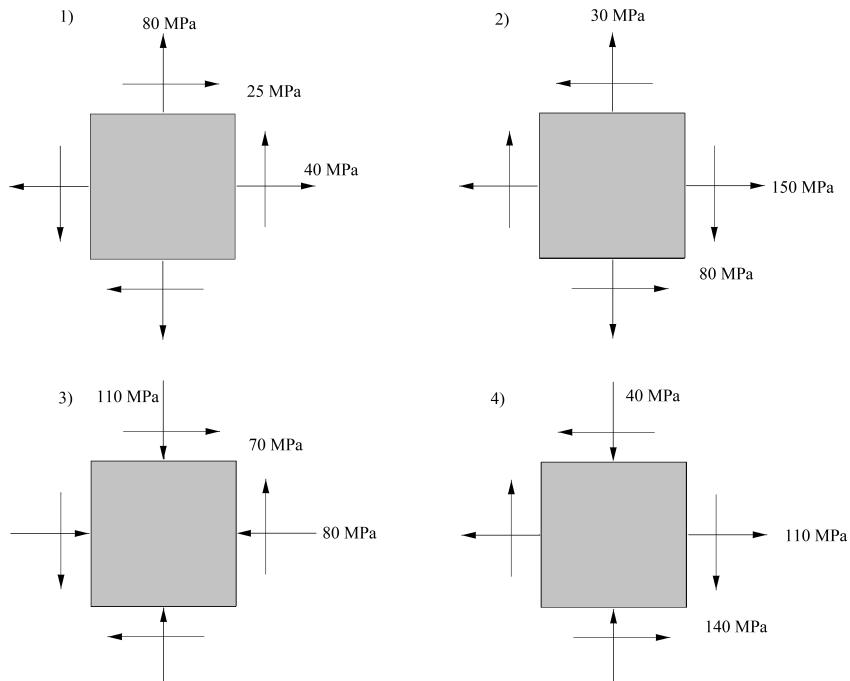


Figura 1.8: Estados planos de tensão.

Respostas:

- 1)
- $\theta_{n1} = -25,67^\circ$ e $\theta_{n2} = 64,33^\circ$;
 - $\sigma_{Min} = 27,98$ MPa e $\sigma_{Max} = 92,02$ MPa;
 - $\theta_t = 19,33^\circ$;
 - $\tau_{Max} = 32,02$ MPa; e) $\sigma_m = 60$ MPa.

2)

- $\theta_{n1} = -26,57^\circ$ e $\theta_{n2} = 63,43^\circ$;
- $\sigma_{Min} = -10$ MPa e $\sigma_{Max} = 190$ MPa;
- $\theta_t = 18,43^\circ$;
- $\tau_{Max} = 100$ MPa;
- $\sigma_m = 90$ MPa.

3)

- a) $\theta_{n1} = 38,95^\circ$ e $\theta_{n2} = 128,95^\circ$;
- b) $\sigma_{Min} = -166,59$ MPa e $\sigma_{Max} = -23,41$ MPa;
- c) $\theta_t = -6,05^\circ$;
- d) $\tau_{Max} = 71,59$ MPa;
- e) $\sigma_m = -95$ MPa.

4)

- a) $\theta_{n1} = -30,91^\circ$ e $\theta_{n2} = 59,09^\circ$;
- b) $\sigma_{Min} = -123,82$ MPa e $\sigma_{Max} = 193,82$ MPa;
- c) $\theta_t = 14,09^\circ$;
- d) $\tau_{Max} = 158,82$ MPa;
- e) $\sigma_m = 35$ MPa.

5) Mostre que a tensão tangencial associada a um estado principal é nula.

6) Mostre que as tensões normais, associadas a um estado plano de tensão de cislamento máximo, são iguais a tensão normal média.

Capítulo 2

Tensões combinadas

2.1 Introdução

A maioria dos órgãos de máquinas e de estruturas está sujeita a uma ou mais combinações de tensões de flexão, torção e de cargas axiais, como mostrado esquematicamente na Fig.2.1.

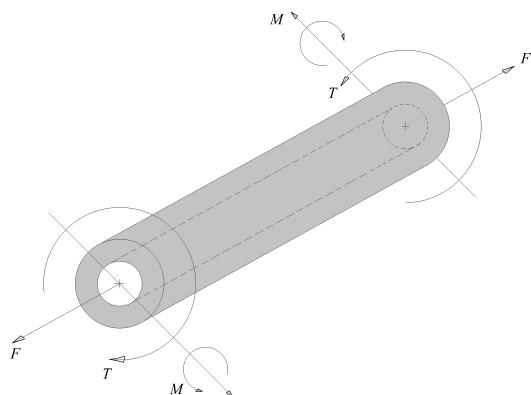


Figura 2.1: Elemento sujeito a esforços combinados.

O objetivo deste capítulo é fornecer os conhecimentos necessários para analisar e projetar elementos de máquinas sujeitos a um carregamento combinado de cargas.

2.2 Carga axial pura

Seja um eixo cilíndrico e vazado, com diâmetro externo d_0 e diâmetro interno d_i , sujeito a uma carga axial como mostra a Fig.2.2.

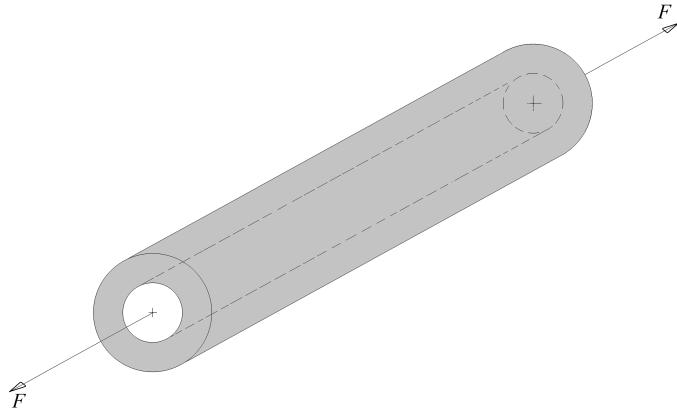


Figura 2.2: Elemento sujeito a um esforço axial.

A tensão normal induzida em qualquer ponto do eixo é dada por:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (2.1)$$

$$S = \frac{\pi}{4} (d_0^2 - d_i^2) \quad (2.2)$$

Fazendo,

$$k = \frac{d_i}{d_0} \quad (2.3)$$

Vem,

$$d_i = k \cdot d_0 \quad (2.4)$$

Então,

$$\sigma = \frac{4F}{\pi \cdot d_0^2 (1 - k^2)} \quad (2.5)$$

Exercício:

O eixo vazado da Fig.2.3 está submetido a uma carga axial F de 60 kN. Determine a tensão normal induzida no ponto **Q**. São dados: $d_0 = 60$ mm e $d_i = 50$ mm.

Resposta: $\sigma = 69,45$ MPa

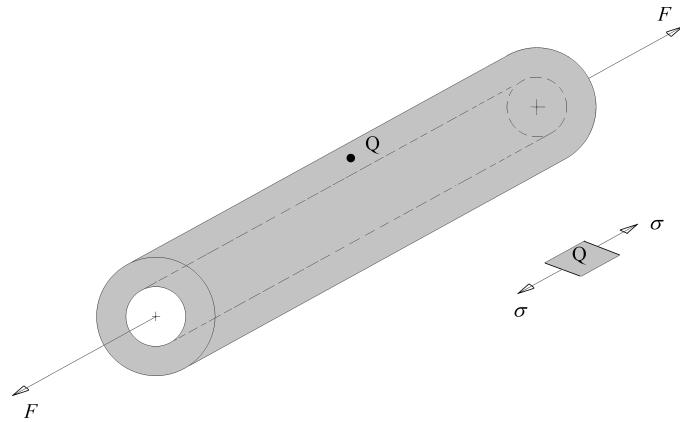


Figura 2.3: Tensões em um elemento sujeito a um esforço axial puro.

2.3 Torção pura

No caso de um eixo vazado, sujeito apenas a um momento de torção puro, como mostrado na Fig.2.4, a tensão de cisalhamento induzida será dada por:

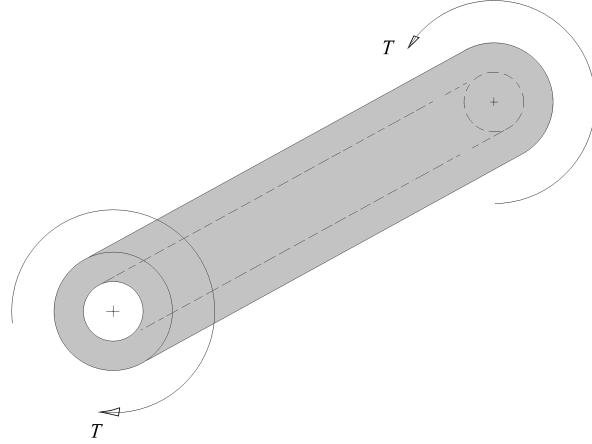


Figura 2.4: Elemento sujeito a um esforço de torção puro.

$$\tau = \frac{T \cdot c}{J} \quad (2.6)$$

$$c = \frac{d_0}{2} \quad (2.7)$$

$$J = \frac{\pi}{32} (d_0^4 - d_i^4) \quad (2.8)$$

Em face da Eq.2.4, escreve-se:

$$J = \frac{\pi}{32} \cdot d_0^4 (1 - k^4) \quad (2.9)$$

Substituindo as Eqs.2.9 e 2.7 na Eq.2.6 encontra-se:

$$\tau = \frac{16T}{\pi \cdot d_0^3 (1 - k^4)} \quad (2.10)$$

Exercício:

O eixo vazado da Fig.2.5 está submetido a um momento de torção T de 2 kNm. Determine a tensão de cisalhamento induzida no ponto **Q**. São dados: $d_0 = 60$ mm e $d_i = 50$ mm. *Resposta: $\tau = 91,08$ MPa*

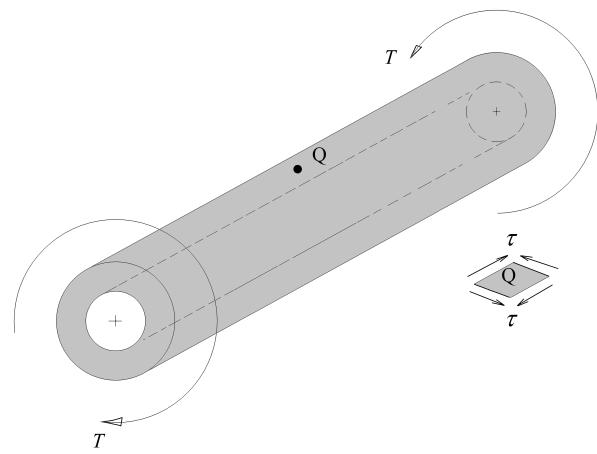


Figura 2.5: Tensão cisalhante em um eixo vazado sujeito a um momento de torção puro.

2.4 Momento fletor puro

Para eixos vazados submetidos a um momento de flexão puro, como mostrado na Fig.2.6, a tensão normal induzida será dada por:

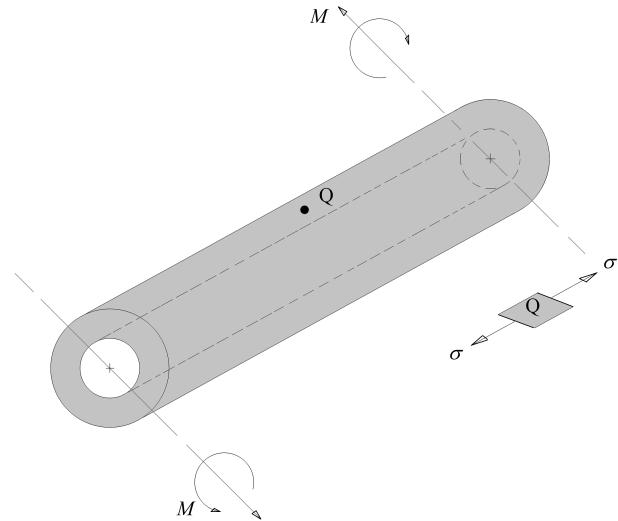


Figura 2.6: Elemento sujeito a um momento de flexão puro.

$$\sigma = \frac{M \cdot c}{I} \quad (2.11)$$

$$I = \frac{\pi}{64} (d_0^4 - d_i^4) \quad (2.12)$$

Com base na Eq.2.4, escreve-se:

$$I = \frac{\pi}{64} \cdot d_0^4 (1 - k^4) \quad (2.13)$$

A tensão normal para esse caso pode ser obtida substituindo as Eqs.2.13 e 2.7 na Eq.2.11, obtendo:

$$\sigma = \frac{32M}{\pi \cdot d_0^3 (1 - k^4)} \quad (2.14)$$

Exercício:

O eixo vazado da Fig.2.6 está submetido a um momento de flexão M de 1,5 kNm. Determine a tensão normal induzida no ponto **Q**. São dados: $d_0 = 60$ mm e $d_i = 50$ mm.

Resposta: $\sigma = 136,62$ MPa

2.5 Combinação de tensões

Seja o elemento mostrado na Fig.2.7 sujeito a um esforço combinado de carga axial, flexão e torção. Se as tensões induzidas forem tais que o material permaneça no regime elástico, o princípio da superposição poderá ser utilizado para encontrar as tensões resultantes da combinação dos carregamentos.

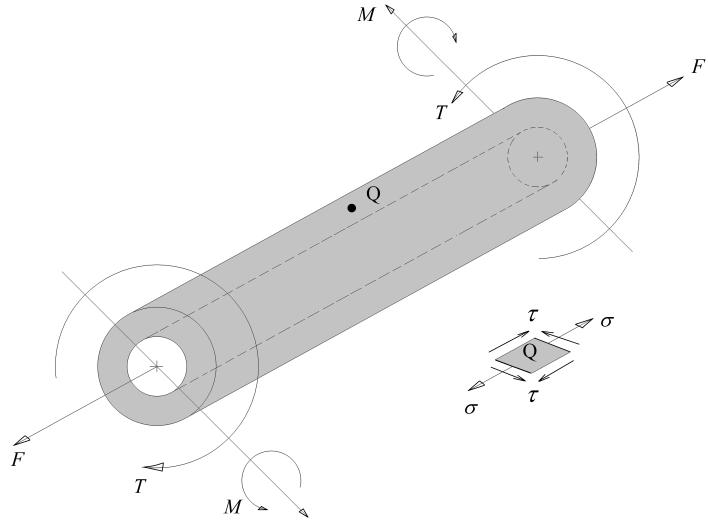


Figura 2.7: Elemento sujeito a esforços combinados.

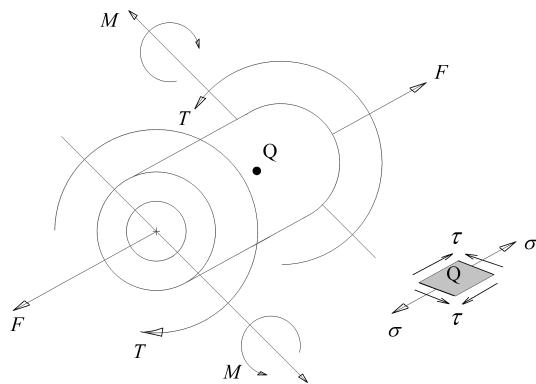


Figura 2.8: Diagrama do corpo livre em torno de um ponto.

Nesse caso, a tensão normal induzida no ponto Q , do diagrama do corpo livre da Fig.2.8, será dada por:

$$\sigma = \frac{F}{S} + \frac{M \cdot c}{I} \quad (2.15)$$

Ou seja,

$$\sigma = \frac{4F}{\pi \cdot d_0^2(1 - k^2)} + \frac{32M}{\pi \cdot d_0^3(1 - k^4)} \quad (2.16)$$

Ou ainda,

$$\sigma = \frac{4Fd_o(1 + k^2) + 32M}{\pi \cdot d_0^3(1 - k^4)} \quad (2.17)$$

A tensão de cisalhamento pode ser encontrada com o auxílio da seguinte expressão:

$$\tau = \frac{16T}{\pi \cdot d_0^3(1 - k^4)} \quad (2.18)$$

Para outros exemplos de seção transversal de elementos estruturais ou de máquinas sujeitos a carregamentos combinados, recomenda-se consultar UGURAL [3].

Exercício:

- 1) Um eixo vazado de 50 mm de diâmetro externo e 40 mm de diâmetro interno está sujeito a um esforço combinado de flexão, tração e torção. Sendo dado $M = 1,2$ kNm, $F = 50$ kN e $T = 1,0$ kNm, determine os componentes de tensão normal e cisalhante no ponto mais tensionado do eixo.

Resposta: $\sigma = 236,36$ MPa e $\tau = 69,01$ MPa.

2.6 Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima na combinação de tensões

Vimos que, na combinação de tensões em eixos vazados, havia apenas um único componente de tensão normal e um componente de tensão de cisalhamento como mostra a Fig.2.9.

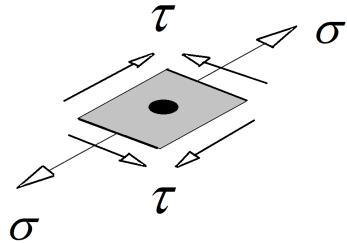


Figura 2.9: Tensão plana em um ponto na periferia de um eixo sujeito a esforços combinados.

Assim, nos pontos externos do eixo as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima serão dadas, de acordo com as Eqs.(1.9) e (1.10), respectivamente por:

$$\sigma_{Max,Min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (2.19)$$

E

$$\tau_{Max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (2.20)$$

Os planos principais e o plano de tensão de cisalhamento máxima que são dados, de acordo com as Eq.(1.7) e (1.8), respectivamente por:

$$\tan 2\theta_n = \frac{2\tau}{\sigma} \quad (2.21)$$

$$\tan 2\theta_t = -\frac{\sigma}{2\tau} \quad (2.22)$$

Exercícios:

- Um eixo vazado de 50 mm de diâmetro externo e 40 mm de diâmetro interno está sujeito a um esforço combinado de flexão, tração e torção. Sendo dado $M = 1,2$ kNm, $F = 50$ kN e $T = 1,0$ kNm, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima, bem como a inclinação dos planos que ocorrem.

Resposta: $\sigma_{Max} = 253,03$ MPa, $\sigma_{Min} = -18,67$ MPa, $\tau_{Max} = 136,85$ MPa, $\theta_n = 15,14^\circ$, $\theta_t = -29,86^\circ$.

2. O eixo esquematizado na Fig.2.7 está submetido às cargas $F = 60$ kN, $T = 2,0$ kNm, $M = 1,5$ kNm. Sendo $d_0 = 60\text{mm}$ e $d_i = 50$ mm, determine:
- Os componentes de tensão normal e tangencial no ponto mais tensionado do eixo;
 - As tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima;
 - A inclinação dos planos que as tensões do item b ocorrem.

Resposta: a) $\sigma = 206,07$ MPa, $\tau = 91,08$ MPa; b) $\sigma_{Max} = 240,56$ MPa, $\sigma_{Min} = -34,49$ MPa; $\tau_{Max} = 137,52$ MPa; c) $\theta_n = 20,74^\circ$; $\theta_t = -24,26^\circ$.

Grande parte dos problemas que envolvem combinação de tensões necessitam que se determine a resultante e o momento resultante, em relação ao centroide de alguma seção. Geralmente, um dos componentes do momento resultante tende a torcer a peça, ao passo que os demais normalmente se combinam para fletir o elemento. Caso seja válida a aplicação do princípio da superposição, as forças podem ter seus efeitos somados a dos momentos no cálculo da tensão induzida.

O exercício que se segue, mostra como se pode determinar a resultante e o momento resultante, em relação a um ponto.

3. Determine a resultante e o momento resultante, em relação ao ponto **O** do sistema força-binário mostrado na Fig.2.10. São dados: $F = 2$ kN, $Q = 3$ kN, $M = 6$ kNm, $L = 2$ m, $H = 4$ m.

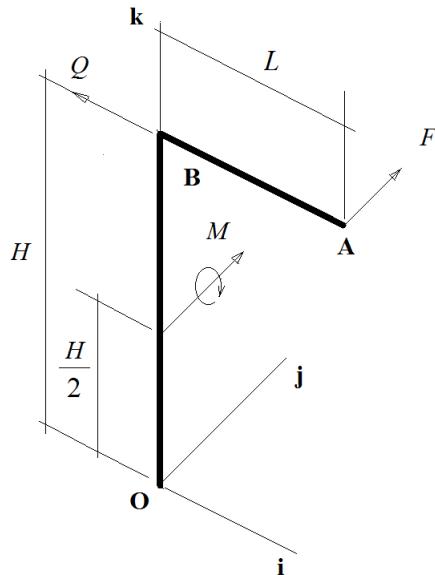


Figura 2.10: Sistema força-binário atuante em uma barra curva.

Resposta: $\mathbf{R} = (-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$ kN; $\mathbf{M}_0 = (-8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$ kNm.

4. Na Fig.2.11, a carga de 45 kN atua na extremidade da peça ao longo de um plano de simetria vertical. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no seu ponto mais tensionado.

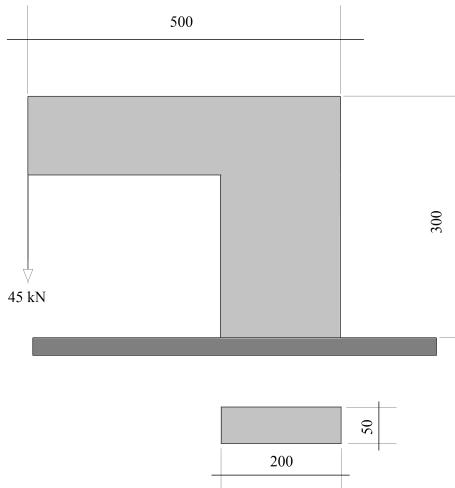


Figura 2.11: Elemento sujeito a uma carga excêntrica.

5. Um cilindro de diâmetro 80 mm foi dobrado para formar um *élice* invertido como mostra a Fig.2.12. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto mais tensionado da peça.

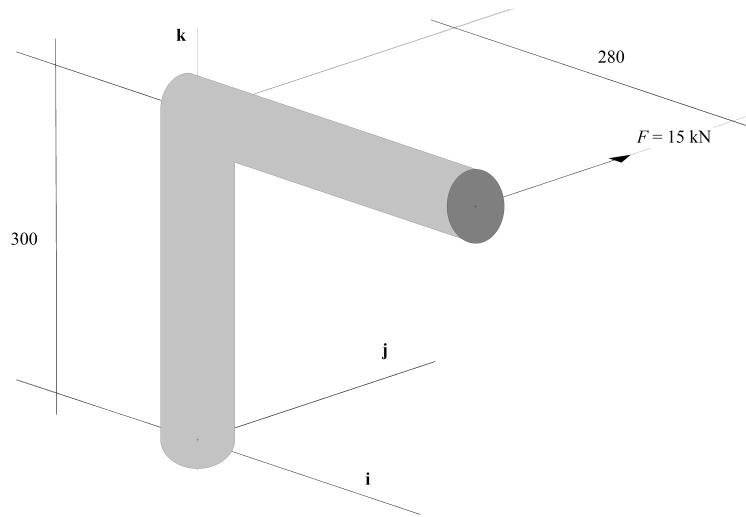


Figura 2.12: Barra sujeita a um esforço combinado (caso 1).

Resposta: $\mathbf{R} = 15\mathbf{j}$ kN; $\mathbf{M}_0 = (-4,5\mathbf{i} + 4,2\mathbf{k})$ kNm; $\tau_{max} = 61,23$ MPa.

6. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto mais tensionado do cilindro dobrado de diâmetro 80 mm, como mostrado na Fig.2.13.

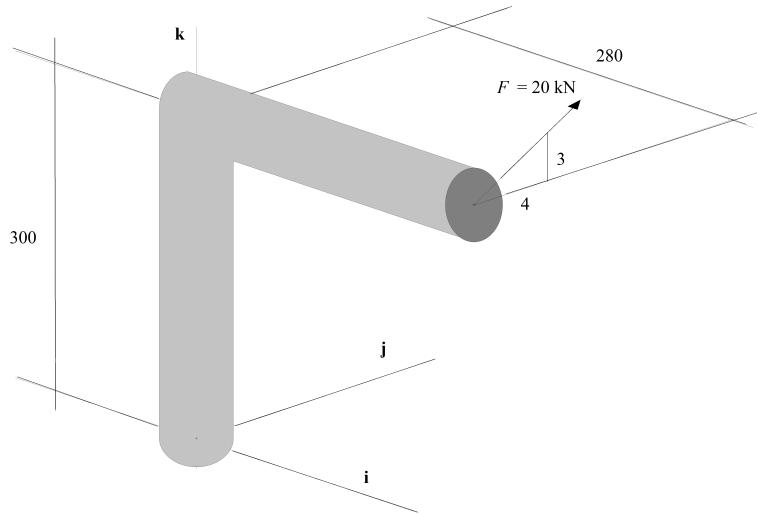


Figura 2.13: Barra sujeita a um esforço combinado (caso 2).

Resposta: $\mathbf{R} = (16\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \text{ kN}$; $\mathbf{M}_0 = (-4,8\mathbf{i} - 3,36\mathbf{j} + 4,48\mathbf{k}) \text{ kNm}$;
 $\tau_{max} = 74,32 \text{ MPa}$.

7. Determine o menor valor de b para que a peça suporte com segurança a carga indicada na Fig.2.14. Sabe-se que a tensão admissível do material é de 100 MPa.

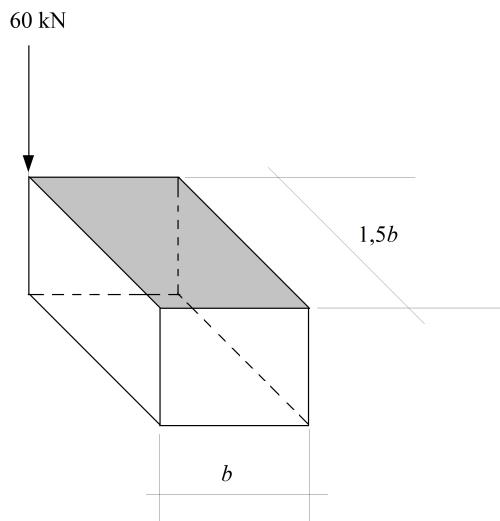


Figura 2.14: Peça sujeita a um esforço compressivo excêntrico.

8. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto mais tensionado do eixo da Fig.2.15, cujo diâmetro externo mede $d_0 = 85$ mm, e o interno, $d_i = 50$ mm. São dados: $L = 1500$ mm, $H = 800$ mm, $F = 8$ kN, $Q = 4$ kN.

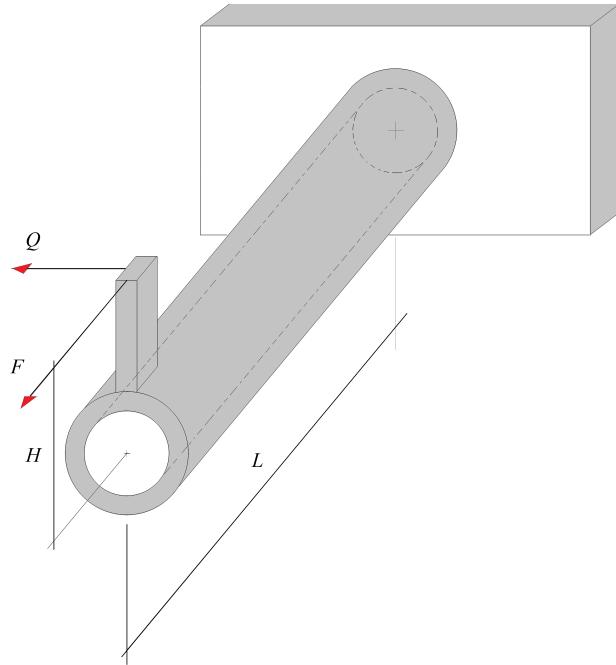


Figura 2.15: Cargas em um eixo vazado.

9. Reduzir o sistema de forças e o binário indicados na Fig.2.16 a uma força e um binário no ponto O. Em seguida, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto mais tensionado do eixo de diâmetro 40mm.

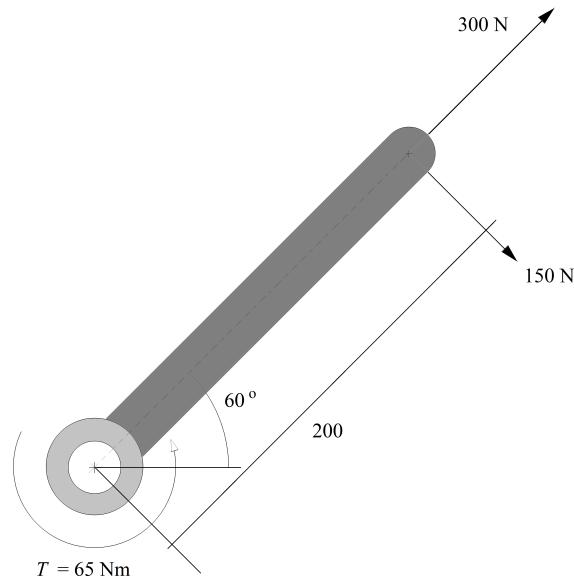


Figura 2.16: Alavanca com eixo.

10. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto mais tensionado da secção do eixo de 50 mm diâmetro junto ao mancal A da Fig.2.17.

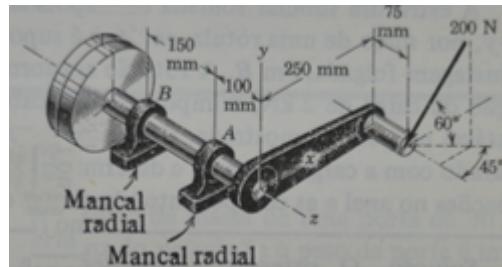


Figura 2.17: Eixo sujeito a um esforço combinado. Figura adaptada do MERIAN [2] página 87

11. A biela mostrada na Fig.2.18 está submetida a carga de 50 kN como indicado, determine a tensão normal máxima na secção transversal A-B.

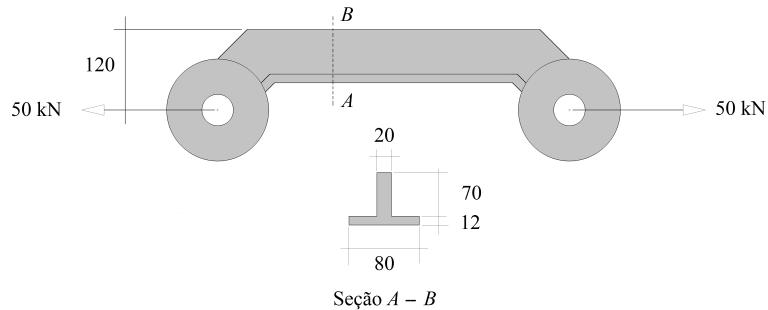


Figura 2.18: Biela submetida a combinação de cargas. Figura adaptada do UGURAL [3] página 389

12. Um eixo de diâmetro 30 mm, como mostrado na Fig.2.19 suporta duas engrenagens de diâmetros primitivos de 75 mm e 125 mm respectivamente. A potência de 10 HP é transmitida a 600 rpm.

- (a) Trace um diagrama de torques;
- (b) Trace um diagrama de esforços cortantes;
- (c) Trace um diagrama de momentos fletores;
- (d) Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto mais tensionado do eixo.

São dados: $L_i = 25 \text{ mm}$ $i = 1 \dots 5$. Ignore o ângulo de pressão nos dentes das engrenagens.

Suponha que as cargas sejam aplicadas nos centros dos trechos. Por exemplo, a carga no apoio à esquerda seja aplicada na metade de L_1 , no apoio à direita na metade de L_5 , na engrenagem 1, na metade de L_2 e na engrenagem 2, na metade de L_4 . Portanto, para efeito de cálculo, considere que o comprimento do eixo seja de 100 mm ao invés de 125 mm.

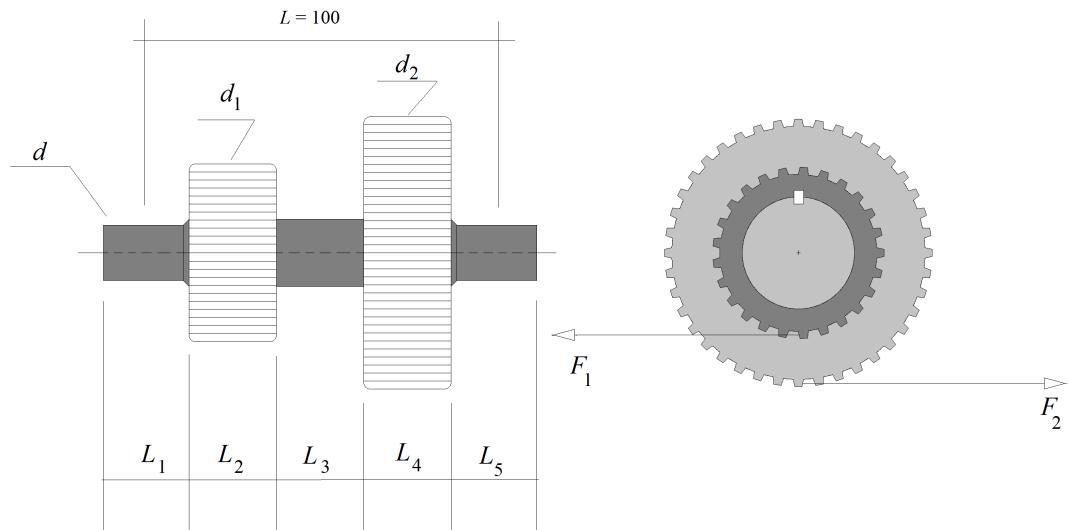


Figura 2.19: Eixo com engrenagens.

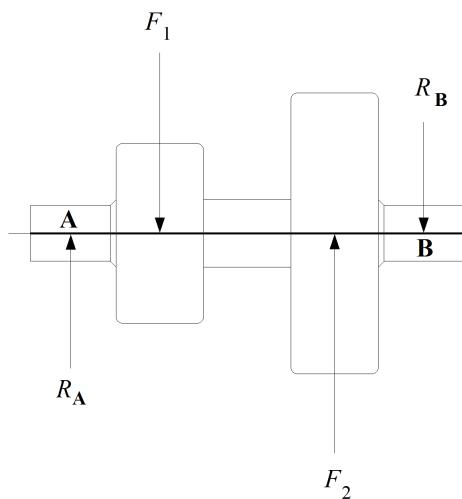


Figura 2.20: Diagrama de esforços normais.

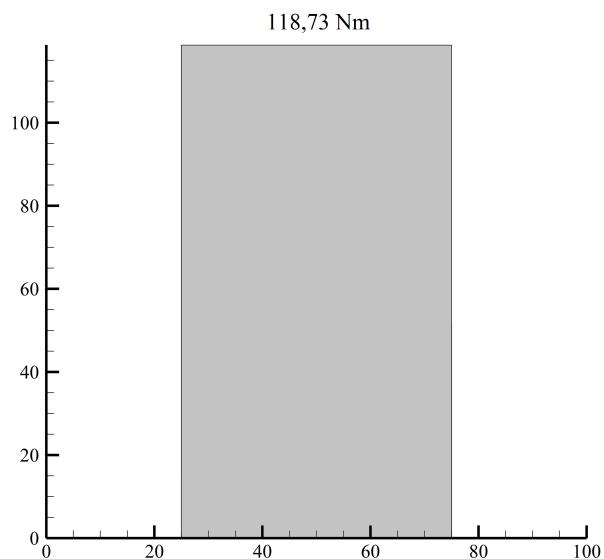


Figura 2.21: Diagrama de Torques.

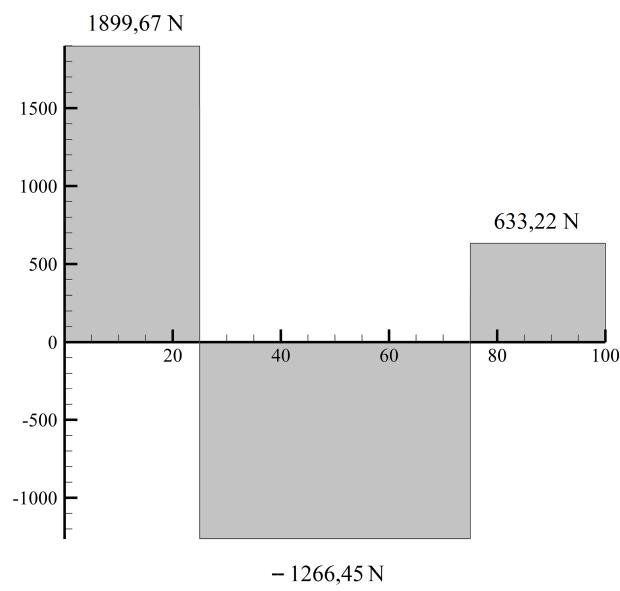


Figura 2.22: Diagrama de esforços cortantes.

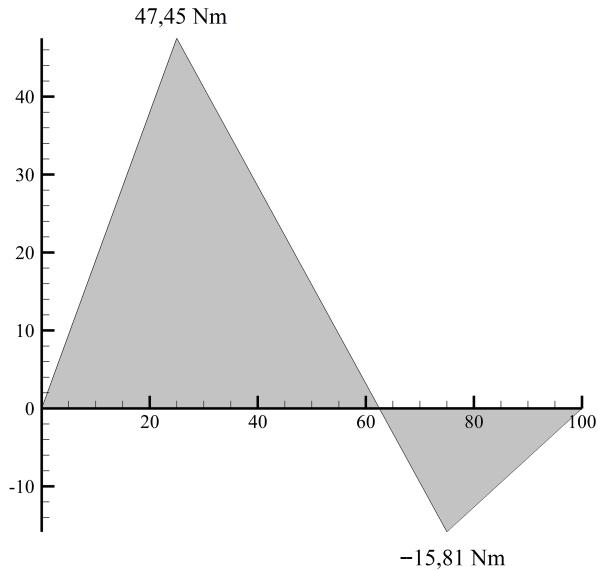


Figura 2.23: Diagrama de momentos fletores.

Os diagramas de esforços normais, de torques, de esforços cortantes e de momentos fletores estão mostrados respectivamente nas Figs.2.20, 2.21, 2.22 e 2.23.

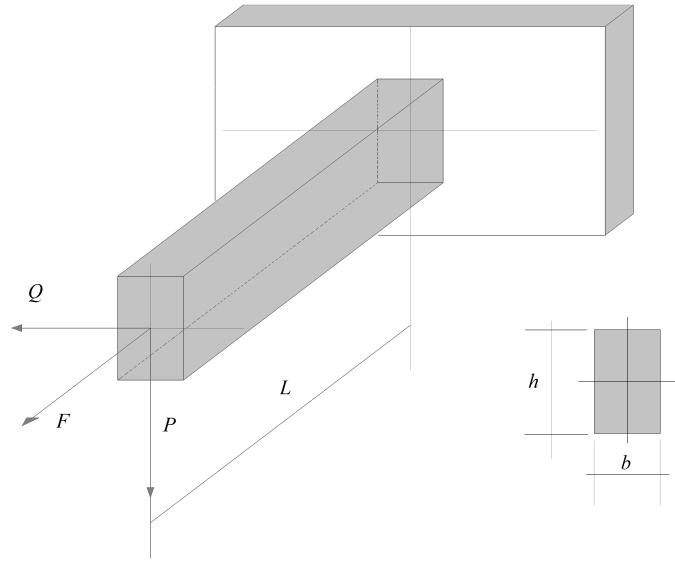


Figura 2.24: Barra sujeita a esforços combinados de flexão.

13. Determine a tensão no ponto mais tensionado da viga da Fig.2.24. São dados:
 $h = 80\text{mm}$; $b = 30\text{mm}$; $L = 1,5\text{m}$; $P = 3 \text{ kN}$; $Q = 1,0 \text{ kN}$; $F = 216 \text{ kN}$.
14. Uma mola helicoidal, como mostrado na Fig.2.25, é confeccionada de um material que apresenta uma tensão admissível ao cisalhamento de 750 MPa. Seu

diâmetro mede 10 mm ao passo que o de seu fio, 1,2 mm. Nesses termos, determine a carga máxima que essa mola pode suportar com segurança.

Nota: Na torção, o esforço cortante F se combina com o momento T para compor tensão de cisalhamento τ .

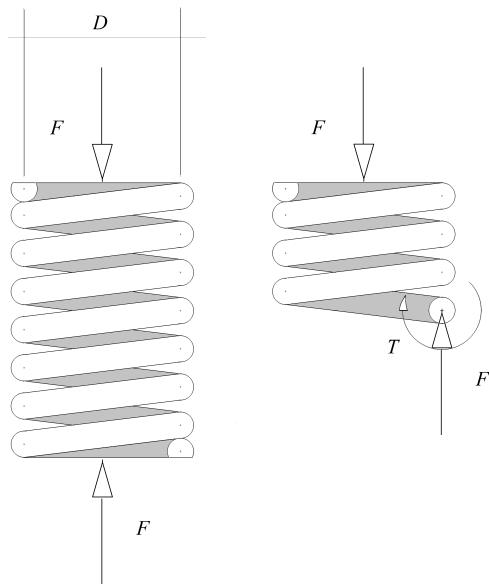


Figura 2.25: Esforços em uma mola helicoidal.

2.7 Torção em peças de seção transversal não circular

Diferentemente do que ocorre nas peças de seção transversal circular, onde as deformações permanecem planas quando são submetidas à torção, nas peças de seção transversal retangular, triangular, elíptica, etc., as deformações não são planas. Nessas últimas, as deformações apresentam componentes em todas as direções, como mostrado esquematicamente na Fig.2.26. Esse fenômeno traz algumas complicações no estabelecimento de expressões que relacionam a carga de torção aplicada e a tensão de cisalhamento correspondente. Para tal, é necessário algum conhecimento de Teoria da Elasticidade, a fim de estabelecer relações entre a tensão e a deformação e entre a tensão e as cargas externas aplicadas à peça.

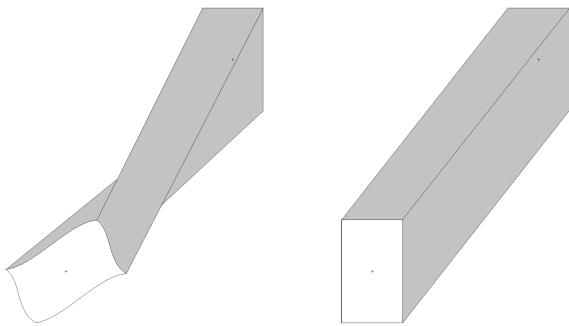


Figura 2.26: Torção de um eixo de seção transversal retangular.

UGURAL [3] fornece as seguintes expressões para a tensão e o ângulo de torção de algumas secções não circulares. Em todas elas, o ponto **A** corresponde àquele onde ocorre a tensão de cisalhamento máxima.

Elipses:

$$\tau_A = \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot a \cdot b^2} \quad (2.23)$$

$$\theta = \frac{(a^2 + b^2) \cdot T \cdot L}{\pi \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot G} \quad (2.24)$$

As dimensões a e b que aparecem nas Eq.(2.23) e (2.24) correspondem, respectivamente, à metade do eixo maior e a metade do eixo menor, como mostrado na Fig.2.27 e G representa o módulo de elasticidade transversal.

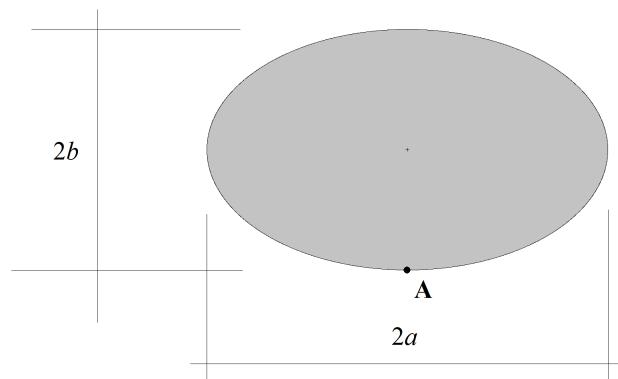


Figura 2.27: Torção de um eixo de seção transversal elíptica.

Triângulos Equiláteros:

$$\tau_A = \frac{20 \cdot T}{a^3} \quad (2.25)$$

$$\theta = \frac{46,2 \cdot T \cdot L}{a^4 \cdot G} \quad (2.26)$$

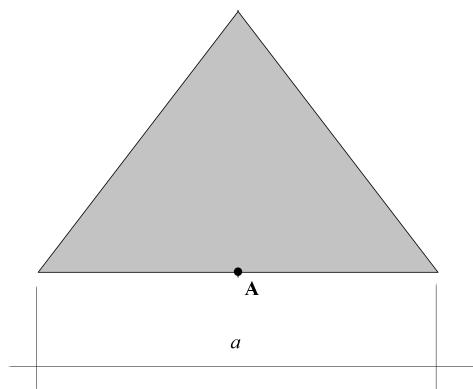


Figura 2.28: Torção de um eixo de seção transversal triangular.

Como mostrado na Fig.2.28, a representa o lado do triângulo equilátero.

Retângulos:

$$\tau_A = \frac{T}{\alpha \cdot a \cdot b^2} \quad (2.27)$$

$$\theta = \frac{T \cdot L}{\beta \cdot a \cdot b^3 \cdot G} \quad (2.28)$$

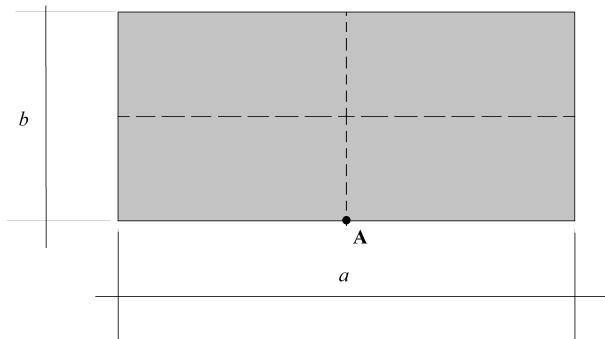


Figura 2.29: Torção de um eixo de seção transversal retangular.

Convém ressaltar que na Fig.2.29, b representa o lado menor e a , o lado maior do retângulo. As parâmetros α e β podem ser encontrados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Valores de α e de β para torção de eixos de seção transversal retangular

$\frac{a}{b}$	α	β
1,0	0,208	0,141
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,196
2,0	0,246	0,229
2,5	0,256	0,249
3,0	0,267	0,263
4,0	0,282	0,281
5,0	0,292	0,291
10,0	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

Exercício:

- 1) Determine a tensão no ponto mais tensionado da viga da figura esquematizada na Fig.2.30.

São dados: $h = 80\text{mm}$; $b = 30\text{mm}$; $L = 1,5\text{m}$; $H = 0,70 \text{ m}$ $P = 3 \text{ kN}$

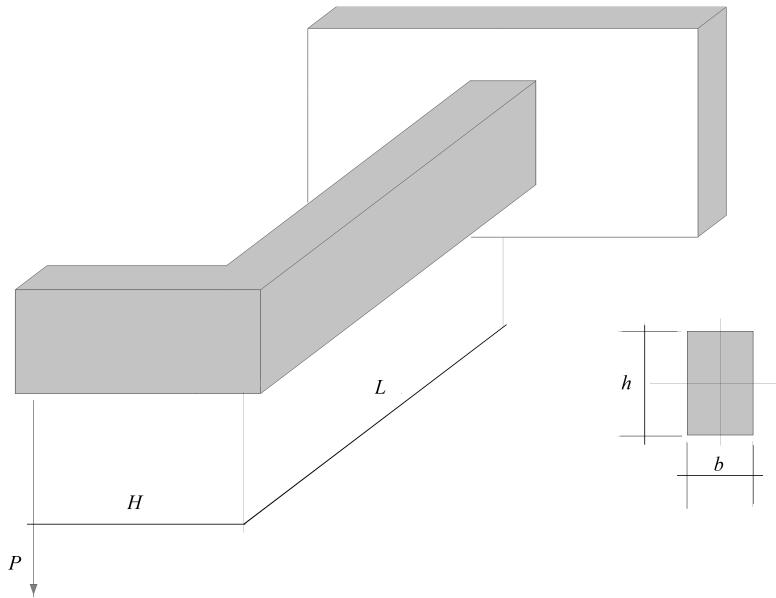


Figura 2.30: Torção de uma viga de seção transversal retangular.

2.8 Análise e dimensionamento de eixos circulares vazados sujeitos à cargas estáticas

Fórmulas diretas que relacionam as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima com as cargas estáticas aplicadas podem ser encontradas substituindo as Eqs.(2.17) e 2.18 nas Eqs.(2.19) e (2.20). Assim procedendo, encontra-se:

$$\sigma_{Max,Min} = \frac{16M + 2Fd_o(1+k^2) \pm 16 \left\{ \left[M + \frac{Fd_o(1+k^2)}{8} \right]^2 + T^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\pi \cdot d_0^3 (1-k^4)} \quad (2.29)$$

$$\tau_{Max} = \frac{16}{\pi \cdot d_0^3 (1-k^4)} \left\{ \left[M + \frac{Fd_o(1+k^2)}{8} \right]^2 + T^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.30)$$

Observações:

- a) As Eq.(2.29) e (2.30) são muito úteis na determinação das tensões principais e na tensão de cisalhamento máxima, em eixo circulares vazados, principalmente quando se dispõe de um computador.
- b) Caso M ou F induzirem tensões compressivas, deve-se colocar um sinal negativo nos seus respectivos termos.
- c) Considera-se que as tensões não variem com o tempo, portanto, peças sujeitas à fadiga não podem ser analisada à luz das expressões desenvolvidas neste capítulo.

No caso de projetos de eixos vazados sujeitos a cargas estáticas é necessário conhecer a tensão admissível ao cisalhamento, τ_{adm} , ou a tensão normal admissível, σ_{adm} , bem como a relação k entre os diâmetros interno e externo do eixo. Basando-se na Eq.(2.29), pode-se explicitar d_0^3 obtendo-se a Eq.(2.31).

$$d_0^3 = \frac{16M + 2Fd_o(1+k^2) \pm 16 \left\{ \left[M + \frac{Fd_o(1+k^2)}{8} \right]^2 + T^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\pi \cdot \sigma_{adm} (1-k^4)} \quad (2.31)$$

Baseando-se na Eq.(2.30), explicita-se d_0^3 da seguinte maneira:

$$d_0^3 = \frac{16}{\pi \cdot \tau_{adm} (1-k^4)} \left\{ \left[M + \frac{Fd_o(1+k^2)}{8} \right]^2 + T^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

Por serem equações não lineares, onde a incógnita é o diâmetro externo, para se resolver as Eqs.(2.31) e (2.32) é necessária a utilização de algum algoritmo computacional como, por exemplo, o método de Newton. Por outro lado, essas equações se

tornam extremamente fáceis de serem resolvidas quando o eixo está isento de cargas axiais. Neste caso, fazendo $F = 0$, em ambas as expressões, encontra-se respectivamente as Eq.(2.33) e (2.34):

$$d_0^3 = \frac{16}{\pi \cdot \sigma_{adm} (1 - k^4)} \left[M \pm \sqrt{M^2 + T^2} \right] \quad (2.33)$$

$$d_0^3 = \frac{16}{\pi \cdot \tau_{adm} (1 - k^4)} \sqrt{M^2 + T^2} \quad (2.34)$$

Exercício:

- 1) Um eixo vazado com $k = 0,8$ deve suportar um momento fletor de 2,8 kNm e um momento de torção de 1,5 kNm. A tensão admissível ao cisalhamento do material é de 70 MPa. Determine os diâmetros externo e interno mínimo necessário para suportar as cargas indicadas.

Resposta: $d_0 = 73,15$ mm e $d_i = 58,52$ mm.

Capítulo 3

Critério de escoamento da máxima energia de distorção

3.1 Considerações iniciais:

- Nos materiais densos, a mudança de volume não promove escoamento (deformação permanente ou plástica)

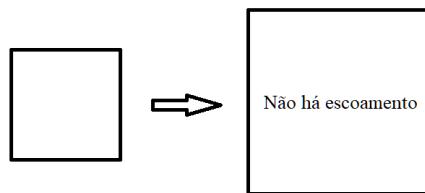


Figura 3.1: Em materiais densos, variação de volume não promove escoamento.

- Distorção pode ou não causar deformação permanente

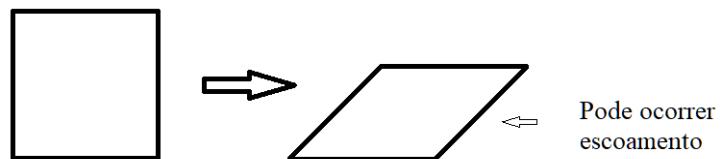


Figura 3.2: A distorção de um elemento pode promover escoamento.

- O trabalho (ou energia de deformação U) realizado sobre um elemento qualquer pode ser dividido em dois grupos:
 - (a) Um trabalho (ou energia U_v) necessário para mudar o volume do elemento e;
 - (b) Um trabalho (ou energia U_d) necessário para distorcer o elemento.
- A energia ou o trabalho U_d necessária para distorcer uma peça grande é naturalmente maior do que a necessária para distorcer uma pequena.
Isto é:

$$U_{d1} < U_{d2}$$

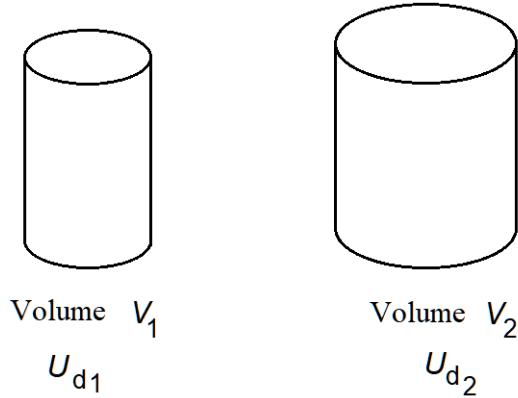


Figura 3.3: Quanto maior o volume maior o trabalho para deformar.

- Dividindo U_d pelo respectivo volume da peça, encontra-se u_d , que representa a energia de distorção por unidade de volume.

$$u_d = \frac{U_d}{V} \quad (3.1)$$

3.2 Critério da máxima energia de distorção

Também denominado de critério de von Mises, é aquele que tem apresentado a melhor correlação com os dados experimentais.

Por esse critério, a energia de distorção por unidade de volume u_d , necessária para atingir o escoamento de um material, é uma constante para esse material.

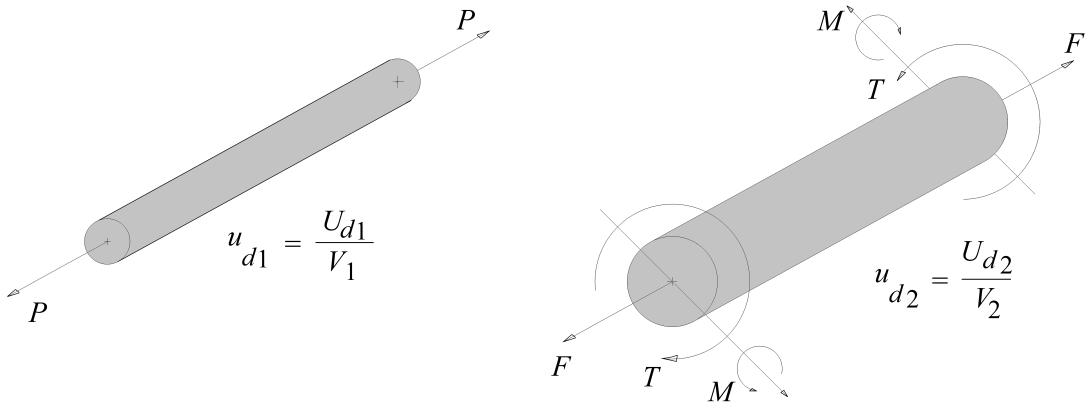


Figura 3.4: Cargas diferentes em peças diferentes de mesmo material.

Assim, não importa se o corpo está sujeito a um carregamento composto por uma única carga ou por uma combinação de cargas, a energia de distorção por unidade de volume (u_d)_e necessária para atingir o escoamento permanece constante.

Portanto, por esse critério, um componente estrutural ou de máquina não sofrerá deformação permanente enquanto o valor da sua energia de distorção por unidade de volume u_d permanecer abaixo da energia de distorção por unidade de volume necessário para provocar o escoamento (u_d)_e do material do elemento.

Isto é, não ocorrerá deformação plástica se:

$$u_d < (u_d)_e \quad (3.2)$$

Pode-se demonstrar que a energia de distorção por unidade de volume u_d é dada por:

$$u_d = \frac{1}{12G} [(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2] \quad (3.3)$$

Na Eq.(3.3), σ_a , σ_b , σ_c representam as tensões principais e G o módulo de elasticidade transversal. Em um ensaio de tração convencional, onde o corpo de prova é levado ao escoamento, $\sigma_b = \sigma_c = 0$ e $\sigma_a = \sigma_e$. Logo, a energia de distorção por unidade de

volume $(u_d)_e$, necessária para levar o corpo ao escoamento, é dada por:

$$(u_d)_e = \frac{1}{6G} \sigma_e^2 \quad (3.4)$$

Portanto, não importa qual seja o tipo e a forma do carregamento. Se (u_d) for ligeiramente superior a $(u_d)_e$ (dado pela Eq.3.4), fatalmente a peça sofrerá deformações permanentes.

Igualando-se as Eqs.(3.3) e (3.4), conclui-se que, em um caso tri axial de tensão, como mostra a Fig.3.5, o escoamento será atingido quando a relação dada pela Eq.(3.5) for verificada.

$$\frac{1}{12G} [(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2] = \frac{1}{6G} \sigma_e^2 \quad (3.5)$$

Donde se conclui que:

$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2 = 2\sigma_e^2 \quad (3.6)$$

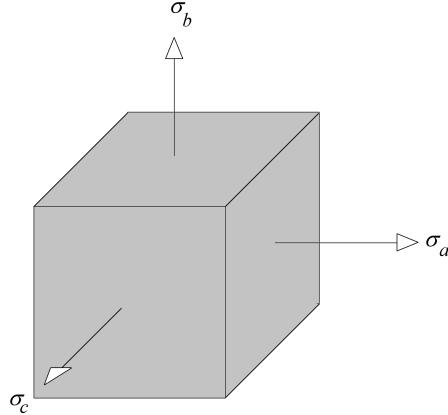


Figura 3.5: Tensões principais em três dimensões.

No caso de um estado plano de tensões $\sigma_c = 0$. Então, a Eq.(3.5) se reduz a:

$$\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 = \sigma_e^2 \quad (3.7)$$

A Eq.(3.7) representa uma elipse no plano $\sigma_a \times \sigma_b$ como mostra a Fig.3.6.

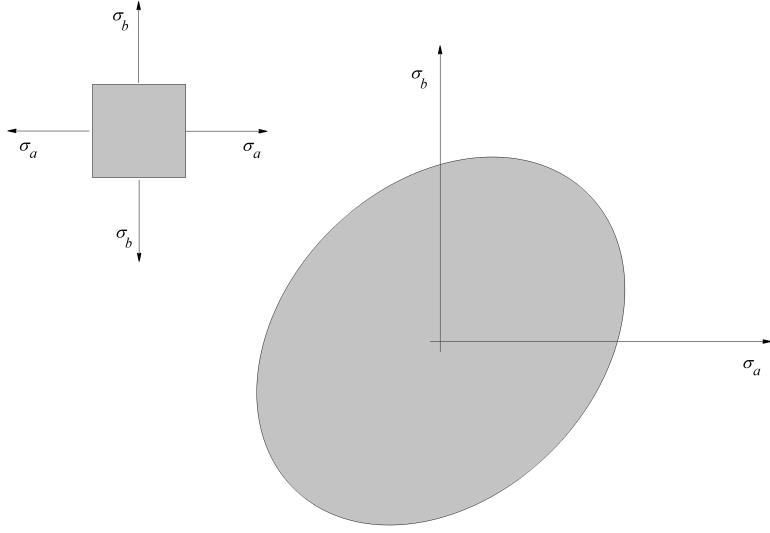


Figura 3.6: Elípse no espaço $\sigma_a \times \sigma_b$.

No caso mais comum de elementos estruturais ou de máquinas, onde o estado de tensões só possui um único componente de tensão normal σ e um componente de tensão tangencial τ , as tensões principais serão dadas respectivamente pelas Eqs.(3.8) e (3.9):

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (3.8)$$

$$\sigma_b = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (3.9)$$

Substituindo as Eqs.(3.8) e 3.9 em (3.7), encontra-se a Eq.(3.10):

$$(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \sigma_e \quad (3.10)$$

No dimensionamento de elementos estruturais e de máquinas, aplica-se um fator de segurança N sobre a tensão de escoamento σ_e , obtendo-se uma tensão admissível σ_{adm} . Neste caso, para fins de projeto, a Eq.(3.10) se torna:

$$(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \sigma_{adm} \quad (3.11)$$

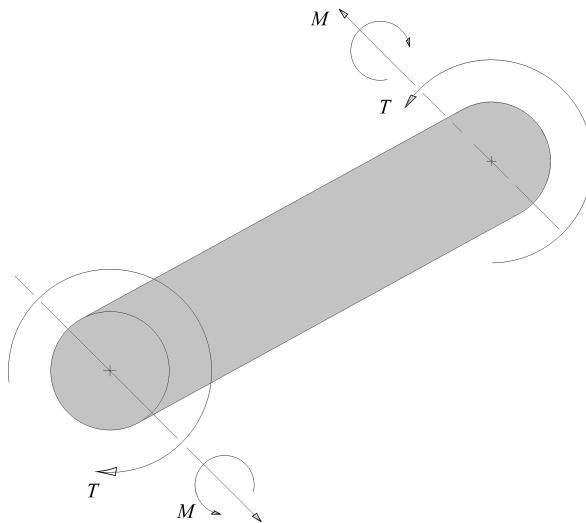


Figura 3.7: Eixo sujeito a esforços combinados de torção e flexão.

Exercícios:

- 1) Uma árvore está submetida ao carregamento mostrado na Fig.3.7. Demonstre que, com base no critério da energia de distorção máxima, o diâmetro mínimo necessário para que a peça suporte com segurança as cargas aplicadas é dado pela Eq.(3.12).

$$d^3 = \frac{32}{\pi \cdot \sigma_{adm}} \sqrt{M^2 + \frac{3}{4}T^2} \quad (3.12)$$

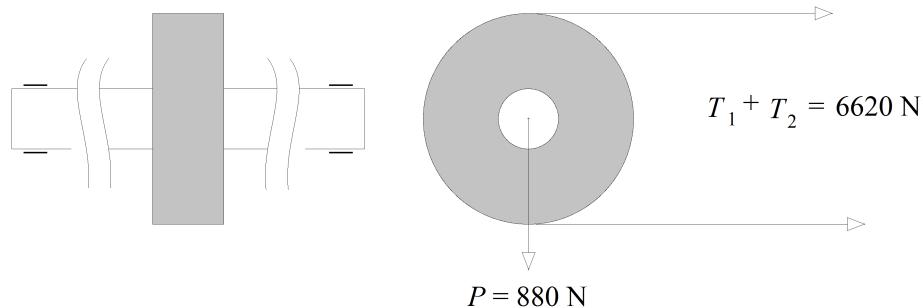


Figura 3.8: Árvore com uma polia no seu ponto médio.

- 2) Uma árvore de 1500 mm de comprimento suporta uma polia de 880 N de peso em seu ponto médio, como mostra Fig.3.8. A polia é enchavetada à árvore e recebe 20 HP a 150 rpm que são transmitidos a um acoplamento flexível imediatamente à direita do mancal direito. O acionamento por correia é horizontal e a soma das tensões é de 6620 N. Determine o diâmetro da árvore e a deflexão angular entre os

mancais supondo que $G = 8,4$ GPa e $\sigma_e = 170$ MPa. Adote $N = 2$.

Dado:

$$\theta = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \quad (3.13)$$

ou

$$\theta = \frac{32 \cdot T \cdot L}{G \cdot \pi \cdot d_0^4 \cdot (1 - k^4)} \quad (3.14)$$

Resposta: $d = 68,10$ mm.

O diagrama de esforços normais da árvore deste problema está mostrado na Fig.3.9.

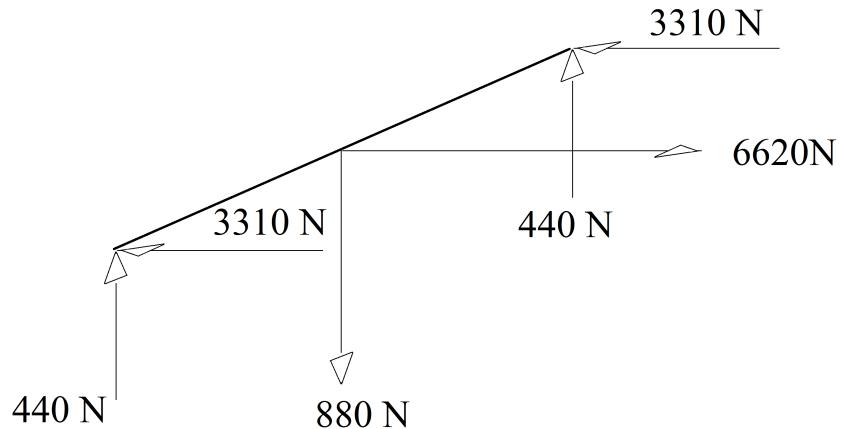


Figura 3.9: Diagrama de esforços normais para um eixo com uma polia central.

3) Demonstre que $(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \sigma_e$.

4) Mostre que, de acordo com o critério da energia de distorção máxima, o limite de escoamento ao cisalhamento é dado por: $\tau_e = 0,577\sigma_e$.

Capítulo 4

Fadiga

4.1 Introdução

A fratura por fadiga é um tipo de colapso que ocorre em elementos estruturais ou de máquinas sob a ação de *cargas variáveis* cujos valores estão *sempre abaixo do limite de escoamento* do material. Na atualidade, a falha por fadiga é explicada pelo escorregamento plástico dos cristais *próximos às regiões de maior concentração de tensão*.

Os principais concentradores de tensão são *descontinuidades* geométricas e de materiais tais como:

- a) **Variações dimensionais** (Rasgos de chavetas, furos, variações de diâmetro de eixos, etc.);
- b) **Defeitos de fundição e de soldagem** (Trincas, inclusões, porosidades, etc.);
- c) **Defeitos de acabamento** (Arranhões, riscos de usinagem, marcas de cunhagem, etc.).

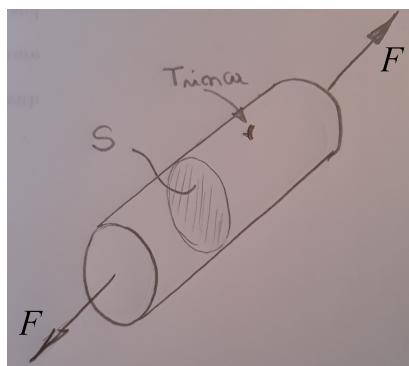


Figura 4.1: A tensão em um ponto próximo à trica é maior que a tensão nos demais.

Nos pontos próximos aos concentradores de tensão (*descontinuidades*), as tensões são maiores do que naqueles localizados em áreas mais distantes destes concentradores.

Por exemplo, a tensão nominal σ_0 em qualquer ponto da barra da Fig.4.1 é dada por F/S . Porém, a tensão σ em um ponto próximo à trinca é maior do que σ_0 .

$$\sigma > \sigma_0$$

4.2 Mecanismo de fratura por fadiga

Nas regiões de maior concentração de tensão, ou seja, nas regiões próximas às descontinuidades, as tensões induzidas podem exceder o limite de escoamento do material. Assim, há uma deformação plástica localizada redundando no encruamento do metal e provocando a diminuição de sua ductilidade. Isto dificulta qualquer deformação plástica subsequente, e com a continuidade da aplicação da carga, a região torna-se cada vez menos tenaz e inúmeras trincas são geradas, como mostrado esquematicamente na Fig.4.2.

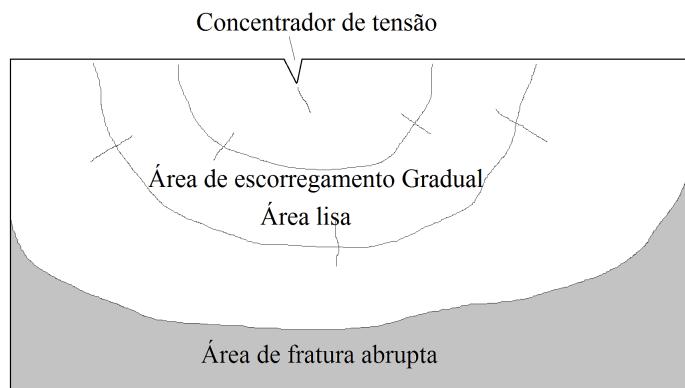


Figura 4.2: Processo de colapso por fadiga.

Há uma grande diferença entre a fratura de um material dúctil por carga estática e por fadiga. No caso das cargas estáticas, observam-se grandes deflexões do material antes do colapso. Já na fratura por fadiga, é muito difícil ver o progressivo colapso do elemento, e quando a fratura ocorre, a faz subitamente e sem aviso.

4.3 Limite de resistência à fadiga de corpos de prova

Para determinar o limite de resistência à fadiga dos materiais, submetem-se corpos de prova a cargas de flexão em máquinas especiais que os fazem girar. Ocorre com isso, o que nos meios técnicos se convencionou chamar de *flexão alternada*(Fig.4.3).

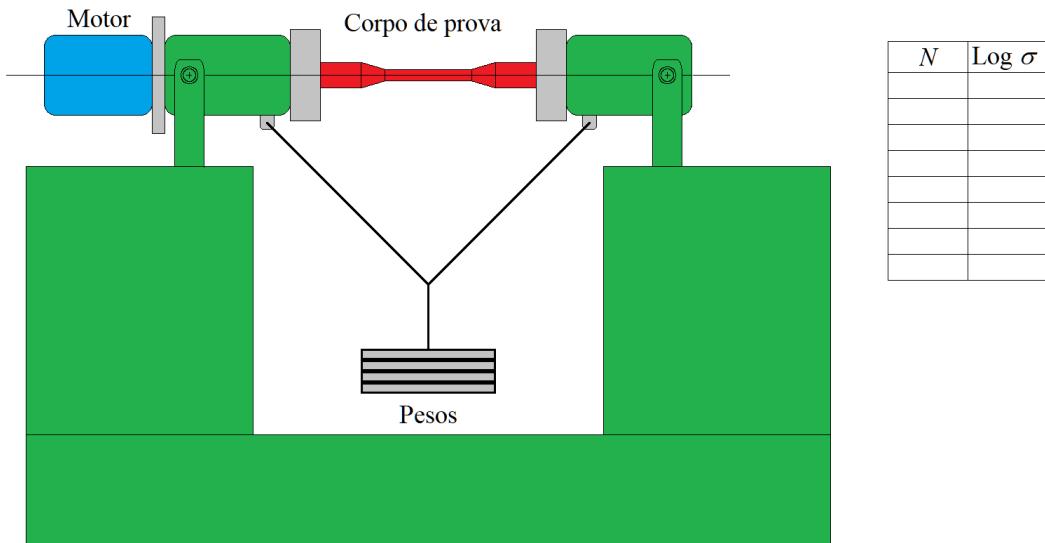


Figura 4.3: Maquina de ensaio de fadiga por flexão alternada.

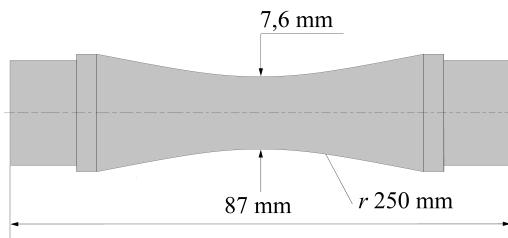


Figura 4.4: Corpo de prova padronizado para ensaio de fadiga.

Computa-se a tensão induzida e o número de ciclos necessários para romper diversos corpos de prova padrão (Fig.4.4) de mesmo material. O ensaio de flexão alternada dá como resultado, na maioria das ligas Fe–C, gráficos com o aspecto apresentado na Fig.4.5, onde $\log \sigma_r$ representa o logaritmo, na base 10, do limite de ruptura do material corpo de prova.

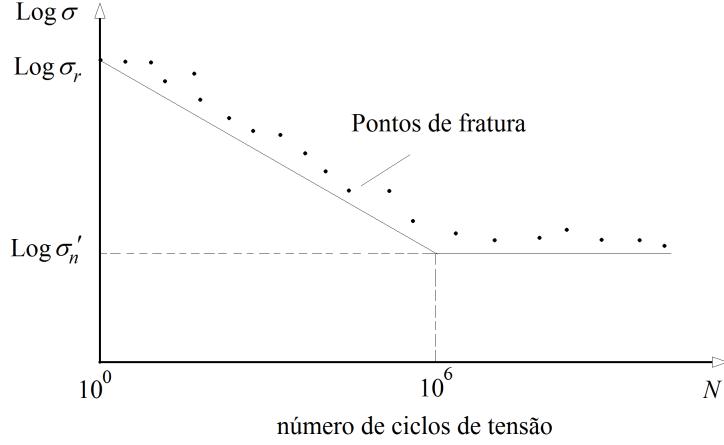


Figura 4.5: Gráfico de variação da tensão induzida *versus* o número de ciclos para atingir o colapso.

Observe que há um limite de tensão σ'_n em que o número de ciclos pode se estender indefinidamente sem que ocorra a fratura por fadiga. Essa tensão σ'_n recebe o nome de *Límite de resistência à fadiga* e possui um valor diferente para cada material. Segundo DIETER [9], em metais *não ferrosos*, tais como alumínio, magnésio e ligas de cobre, o gráfico da Fig.4.5 nunca se torna horizontal, portanto, para esses materiais, não há um limite de resistência à fadiga. Nesses casos, costuma-se arbitrar como limite de resistência à fadiga aquele referente a uma vida de 10^7 ciclos.

Experiências mostram que o limite de resistência à fadiga σ'_n de corpos de prova de materiais ferrosos pode ser tomado como:

$$\sigma'_n = \begin{cases} 0,50 \sigma_r & \text{se } \sigma_r \leq 1400 \text{ MPa} \\ 700 \text{ MPa} & \text{se } \sigma_r > 1400 \text{ MPa} \\ 0,40 \sigma_r & \text{para ferro fundido} \end{cases} \quad (4.1)$$

Na Eq.(6.45) , σ_r representa ao limite de ruptura do material.

4.4 Límite de resistência à fadiga de elementos de máquinas

O valor de σ'_n se refere ao limite de resistência á fadiga de corpos de prova padronizados e polidos sujeitos à flexão alternada. Para uma peça real, σ'_n deve ser corrigido para obter o valor do limite de resistência à fadiga σ_n do elemento estrutural ou de máquina:

$$\sigma_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n \quad (4.2)$$

Na Eq.(4.2) tem-se:

σ_n – Limite de resistência à fadiga da peça;

σ'_n – Limite de resistência à fadiga do corpo de prova sujeito á flexão alternada;

k_a – Fator que leva em consideração o acabamento superficial da peça;

k_b – Fator que leva em consideração o tamanho da peça;

k_c – Fator de confiabilidade;

k_d – Fator que leva em consideração a temperatura de operação da peça;

k_e – Fator que leva em conta o tipo de carga (Flexão, Cisalhamento, Axial);

k_f – Fator de efeito diverso;

Para o cisalhamento, recorre-se à Eq.(4.3):

$$\tau_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n \quad (4.3)$$

4.4.1 Acabamento superficial k_a

As falhas por fadiga, na maioria das vezes, se iniciam na superfície dos elementos. Por isso, quanto melhor for o acabamento superficial da peça maior será a sua resistência à fadiga. Tratamentos termoquímicos tais como cementação e nitretação aumentam a resistência à fadiga, pois induzem tensões residuais de compressão que comprovadamente aumentam a resistência à fadiga. Outros tratamentos superficiais que induzem tensões compressivas são a lamação superficial e a jato percussão com partículas finas de aço ou de ferro fundido. Por outro lado, a eletrodeposição na superfície do aço diminui, de forma brutal, o seu limite de resistência à fadiga (como é o caso da deposição de cromo). Pontos moles na superfície do aço, como a descarbonetação, também diminuem o limite de resistência à fadiga.

Os valores de k_a podem ser obtidos com o auxílio da seguinte expressão:

$$k_a = a \cdot \sigma_r^b \quad (4.4)$$

Onde:

σ_r – Limite de ruptura em MPa;

a, b – Constantes obtidas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Valores de a e de b para determinação do fator que leva em conta o acabamento da peça.

Aço	a	b
Forjado	272	- 0,995
Laminado a quente	57,7	- 0,718
Usinado ou laminado a frio	4,51	- 0,265
Retificado	1,58	- 0,085
Espelhado	1,00	0,00

4.4.2 Tamanho da peça k_b

Quanto maior for o tamanho da peça, menor será o seu limite de resistência à fadiga. Isso ocorre provavelmente porque *quanto maior for a peça, maior será a quantidade de defeitos superficiais* que poderão nuclear trincas.

O diâmetro dos corpos de prova, onde se fazem os ensaios de fadiga, são padronizados com a medida de 7,62 mm. Assim, os valores de k_b recomendados são:

$$\begin{aligned} k_b &= \left(\frac{d}{7,62} \right)^{-0,107} && 2,79 \text{ mm} \leq d \leq 51,00 \text{ mm} \\ k_b &= 1,51 \cdot d^{-0,157} && 51,00 \text{ mm} < d \leq 254,00 \text{ mm} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Importante:

Para cargas axiais, não existe o efeito do tamanho da peça. Neste caso, adota-se $k_b = 1,00$. Nos casos de projetos onde não se sabe de antemão o valor de d ou não se tem nenhuma estimativa de seu valor, recomenda-se adotar $k_b = 0,85$.

Para secções transversais retangulares, SHIGLEY [5] recomenda adotar um diâmetro equivalente dado por:

$$d = 0,808 \cdot (b \cdot h)^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

Para outras seções transversais pode-se recorrer aos procedimentos recomendados por BUDYNAS e NISBETT [10].

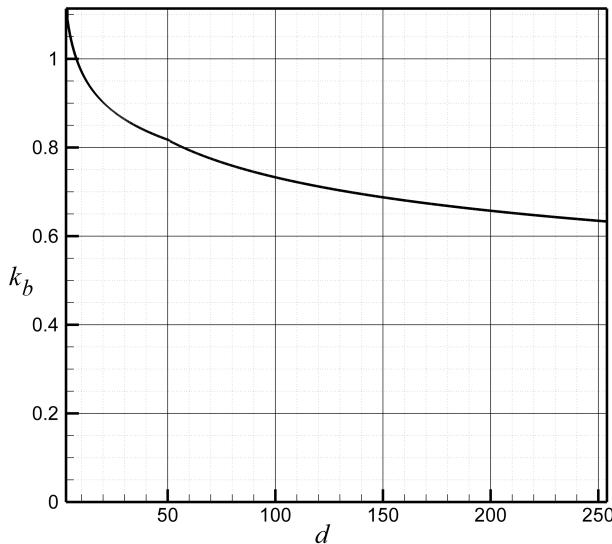


Figura 4.6: Gráfico de variação do fator k_b em termos do diâmetro da peça.

A Fig.4.6 apresenta a variação do fator k_b em função do diâmetro da peça.

4.4.3 Confiabilidade k_c

Geralmente, a resistência R da peça é modelada pela distribuição normal, cujo aspecto se assemelha ao da Fig.4.7.

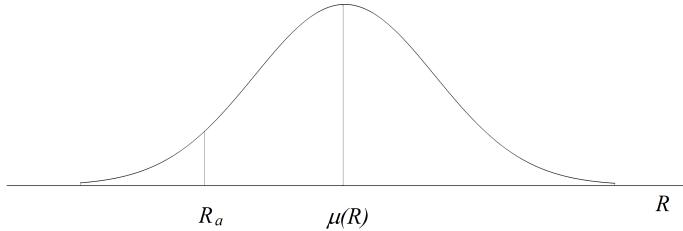


Figura 4.7: Distribuição da resistência R .

Para permanecer num regime de segurança, a carga de trabalho (admissível) R_a deve ser sempre menor do que a resistência média $\mu(R)$. Sendo que, quanto mais longe estiver da carga média, mais segura será a peça. Portanto, quanto mais nos afastamos de $\mu(R)$ para à esquerda, maior será a confiabilidade, como mostra a Fig.4.8.

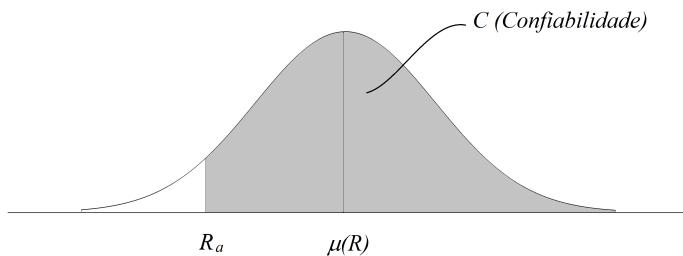


Figura 4.8: Confiabilidade com base na distribuição normal.

Por definição, o fator k_c é dado pela razão entre resistência R_a que será adotada (resistência admissível) e a resistência média da peça $\mu(R)$.

$$k_c = \frac{R_a}{\mu(R)} \quad (4.7)$$

Portanto, quanto menor for R_a menor será k_c e maior será a confiabilidade C .

Recomenda-se utilizar a seguinte expressão para introduzir um fator de confiabilidade na análise e nos projetos de peças submetidas à cargas variáveis, cuja resistência possa ser modelada pela distribuição normal :

$$k_c = 1 - 0,08z_c \quad (4.8)$$

Alguns valores de k_c podem ser encontrados na Tabela 4.2 para diversas confiabilidades.

Tabela 4.2: Valores de k_c e de z_c para determinação do fator que leva em conta a confiabilidade.

Confiabilidade	Variável Reduzida	Fator de Confiabilidade
C %	z_c	k_c
50	0,0000	1,00
90	1,2816	0,897
95	1,6449	0,868
98	2,0537	0,836
99	2,3263	0,814
99,99	3,7190	0,702
99,9999	4,7534	0,620
99,99999	5,1993	0,584

A Eq.4.8 é válida para esses casos porque, para valores de R_a abaixo da média $\mu(R)$ de uma distribuição normal de R , tem-se:

$$-z_c = \frac{R_a - \mu(R)}{\sigma(R)}$$

$$R_a = \mu(R) - \sigma(R) \cdot z_c$$

Dividindo a expressão anterior por $\mu(R)$, vem:

$$\frac{R_a}{\mu(R)} = 1 - \frac{\sigma(R)}{\mu(R)} \cdot z_c$$

Mas, por definição,

$$k_c = \frac{R_a}{\mu(R)}$$

Portanto,

$$k_c = 1 - \frac{\sigma(R)}{\mu(R)} \cdot z_c$$

Experimentos mostram que o coeficiente de variação $\frac{\sigma(R)}{\mu(R)}$ é aproximadamente igual a 0,08. Portanto,

$$k_c = 1 - 0,08z_c$$

4.4.4 Temperatura k_d

O limite de ruptura σ_r do material varia conforme a temperatura T se modifica. A experiência mostra que, *a medida que a temperatura diminui, há um aumento da resistência à fadiga dos materiais*, apesar de haver um aumento também da sensibilidade ao entalhe. Por este motivo, é que se recomenda usar um fator de correção k_d , para os casos em que a temperatura de trabalho seja superior a 71°C . Segundo SHIGLEY [5], este fator pode ser estimado através de :

$$\begin{aligned} k_d &= \frac{344,4}{273,3 + T} \quad \text{para } T > 71^\circ\text{C} \\ k_d &= 1,00 \quad \text{para } T \leq 71^\circ\text{C} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Acima dos 420°C, o patamar da curva $\sigma - N$, que corresponde ao limite de resistência á fadiga, deixa de existir. Neste caso, é comum definir o limite de resistência á fadiga como aquela tensão correspondente a 10^8 ciclos no gráfico $\sigma - N$. Outro fato importante a ressaltar é que acima da *metade da temperatura de fusão do metal*, a fratura ocorre por um mecanismo diferente denominado fluência.

4.4.5 Tipo de carga k_e

SHIGLEY [5] recomenda usar:

$$k_e = \begin{cases} 1,00 & \text{para flexão} \\ 0,85 & \text{para carga axial} \\ 0,577 & \text{para torção} \end{cases} \quad (4.10)$$

4.4.6 Fatores diversos k_f

Os valores de k_f são muito difíceis de serem avaliados, pois dependem de tensões residuais devido aos processos de fabricação ou de tratamentos termoquímicos tais como cementação, nitretação, cianetização, etc. Evidências levam a crer que a ruptura por fadiga se dá por tração, portanto qualquer tratamento que induza tensões de compressão na superfície das peças aumenta sua resistência à fadiga. A corrosão é outro fator que diminui a resistência à fadiga, pois faz surgir na superfície das peças pites que funcionam como concentradores de tensão. A corrosão sob tensão é um fenômeno de aceleração da taxa de crescimento de trincas observado quando o efeito da tensão é associado ao da corrosão.

Exercício:

1) Determine o limite de resistência à fadiga de uma barra cilíndrica de 50 mm de diâmetro laminada a quente. Sabe-se que o limite de ruptura do aço é de 400 MPa, a peça trabalhará em um ambiente cuja temperatura é de 85°C com uma confiabilidade de 99%. É dado que a barra trabalhará sob flexão.

Solução:

$$\sigma_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n$$

$$\sigma'_n = 0,50\sigma_r$$

$$\sigma'_n = 200 \text{ MPa}$$

$$k_a = a \cdot \sigma_r^b \quad a = 57,7 \quad b = -0,718$$

$$k_a = 0,78$$

$$k_b = \left(\frac{d}{7,62} \right)^{-0,107}$$

$$k_b = 0,82$$

$$k_c = 0,814$$

$$k_d = \frac{344,4}{273,3 + T}$$

$$k_d = 0,96$$

$$k_e = 1,00$$

$$k_f = 1,00$$

$$\sigma_n = 0,78 \cdot 0,82 \cdot 0,814 \cdot 0,96 \cdot 1,00 \cdot 1,00 \cdot 200$$

$$\sigma_n = 99,96 \text{ MPa}$$

4.5 Resistência à fadiga para vida finita

A resistência à fadiga para uma vida finita σ_f é feita com base em um gráfico logarítmico $\log \sigma \times \log N$ como mostra a Fig.4.9:

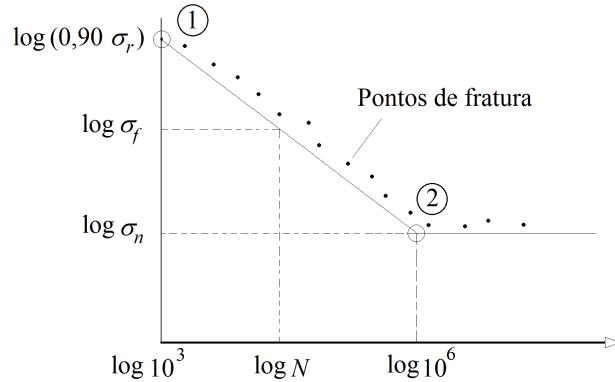


Figura 4.9: Pontos de colapso por fadiga de uma liga ferrosa.

A fim de determinar uma tensão σ_f para qualquer número de ciclos N , escreve-se a equação da reta inclinada na Fig.4.9. Essa equação é dada, matematicamente, por:

$$\log \sigma_f = m \cdot \log N + b \quad (4.11)$$

Onde:

$$m = -\frac{1}{3} \log \frac{0,90\sigma_r}{\sigma_n} \quad (4.12)$$

$$b = \log \frac{(0,90\sigma_r)^2}{\sigma_n} \quad (4.13)$$

Portanto,

$$\sigma_f = 10^b N^m \quad (4.14)$$

Ou,

$$N = \left(\frac{\sigma_f}{10^b} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (4.15)$$

Observação: Nas expressões apresentadas neste item as tensões são dadas em MPa ao invés de Pa. Assim, para uma tensão de 300×10^6 Pa (300 MPa) deve-se entrar nas fórmulas com 300.

Exercícios:

- 1) O limite de resistência à fadiga de uma barra é de 99,96 MPa. Determine a resistência à fadiga para uma vida finita de 50×10^3 ciclos, sabendo-se que o limite de ruptura do material é de 400 MPa.

Solução:

$$\sigma_f = 10^b N^m$$

$$m = -\frac{1}{3} \log \frac{0,90\sigma_r}{\sigma_n}$$

$$m = -0,1855$$

$$b = \log \frac{(0,90\sigma_r)^2}{\sigma_n}$$

$$b = 3,112779$$

$$\sigma_f = 174,24 \text{ MPa}$$

- 2) Quantos ciclos se espera que dure uma barra de aço de $\sigma_r = 400$ MPa, cujo limite de resistência à fadiga seja de 99,96 MPa e que trabalhe sob uma tensão de 250 MPa?

Solução:

$$N = \left(\frac{\sigma_f}{10^b} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$m = -\frac{1}{3} \log \frac{0,90\sigma_r}{\sigma_n}$$

$$m = -0,1855$$

$$b = \log \frac{(0,90\sigma_r)^2}{\sigma_n}$$

$$b = 3,112779$$

$$N = 7141 \text{ ciclos}$$

- 3) Resolva o exercício anterior supondo que a barra trabalhe sob uma tensão de 220 MPa.

Resposta: 14225 ciclos.

4) Quantos ciclos se espera que dure uma barra de aço de $\sigma_r = 700$ MPa, cujo limite de resistência à fadiga seja de 100 MPa e que trabalhe sob uma tensão de 200 MPa?

Solução:

$$N = \left(\frac{\sigma_f}{10^b} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$m = -\frac{1}{3} \log \frac{0,90\sigma_r}{\sigma_n}$$

$$m = -0,266$$

$$b = \log \frac{(0,90\sigma_r)^2}{\sigma_n}$$

$$b = 3,599$$

$$N = 75786 \text{ ciclos}$$

Note que (se usarmos todos os decimais de m e de b encontra-se 74 166 ciclos).

5) Mostre que:

$$\text{a)} m = -\frac{1}{3} \log \frac{0,90\sigma_r}{\sigma_n};$$

$$\text{b)} b = \log \frac{(0,90\sigma_r)^2}{\sigma_n};$$

$$\text{c)} \sigma_f = 10^b N^m;$$

$$\text{d)} N = \left(\frac{\sigma_f}{10^b} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

4.6 Observações finais sobre a fadiga dos materiais metálicos VANVLACK [1] (página 157)

A tensão que um material pode suportar ciclicamente é muito menor do que a suportável em condições estáticas.

O limite de escoamento, que é uma medida de resistência de tensões estáticas que um material apresenta sem se deformar permanentemente, pode ser usado como um guia apenas para estruturas que operam em condições de carregamento estático.

Uma observação cuidadosa indica que a ruptura por fadiga ocorre segundo as seguintes etapas:

- (1) *o tensionamento cíclico causa deformações a frio e escorregamentos localizados;*
- (2) *a gradual redução de ductilidade nas regiões encruadas resulta na formação de fissuras submicroscópicas e*
- (3) *o efeito de entalhe das fissuras concentra tensões até que ocorra a ruptura completa.*

Portanto, a ruptura por fadiga está relacionada com o fato de, ao invés de se ter um comportamento elástico ideal e reversível do material, ter-se um comportamento plástico não uniforme. Essas deformações irreversíveis se localizam ao longo dos planos de escorregamento, nos contornos dos grãos e ao redor de irregularidades de superfícies devido a defeitos geométricos ou de composição.

Capítulo 5

Dimensionamento e análise de elementos de máquinas sujeitos á fadiga

5.1 Introdução

Este capítulo visa completar os conhecimentos adquiridos no capítulo anterior, onde o conceito de colapso por fadiga foi apresentado e o respectivo limite de resistência à fadiga calculado. Agora, alguns critérios de resistência à fadiga serão apresentados, com o intuito de relacionar as cargas aplicadas com os fatores de segurança. Conhecendo o limite de resistência (σ_n), juntamente com critérios de fadiga e de escoamento (von Mises), o leitor terá as ferramentas necessárias para analisar e projetar elementos estruturais ou de máquinas submetidos a cargas que variam com o tempo.

5.2 Formas básicas de uma carga variar com o tempo

Sejam:

- σ_{Max} – Tensão Máxima;
- σ_{Min} – Tensão Mínima;
- σ_m – Tensão Média;
- σ_v – Tensão Variável (Metade da amplitude das tensões);

Onde:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{Max} + \sigma_{Min}}{2} \quad (5.1)$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{Max} - \sigma_{Min}}{2} \quad (5.2)$$

Tensão variada (σ_{Max} e σ_{Min} com o mesmo sinal) – Fig.5.1

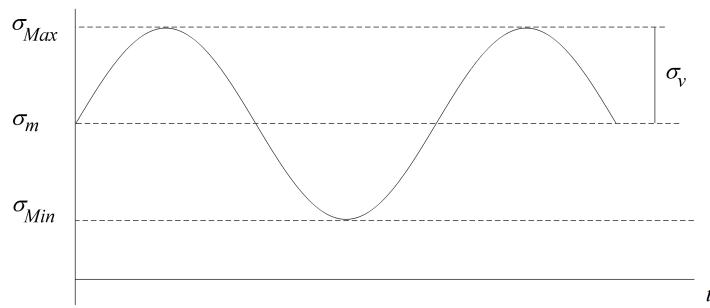


Figura 5.1: Tensão variada.

Tensão repetida ($\sigma_v = \sigma_m$) – Fig.5.2

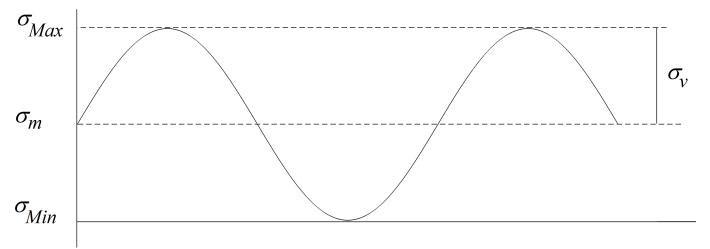


Figura 5.2: Tensão repetida.

Tensão alternada ($\sigma_m = 0$) – Fig.5.3

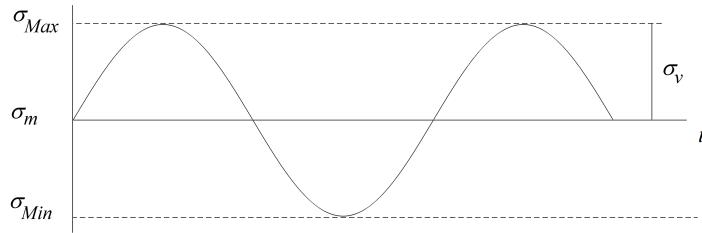


Figura 5.3: Tensão alternada.

Tensão constante ($\sigma_{Max} = \sigma_{Min} = \sigma_m$ e $\sigma_v = 0$) – Fig.5.4

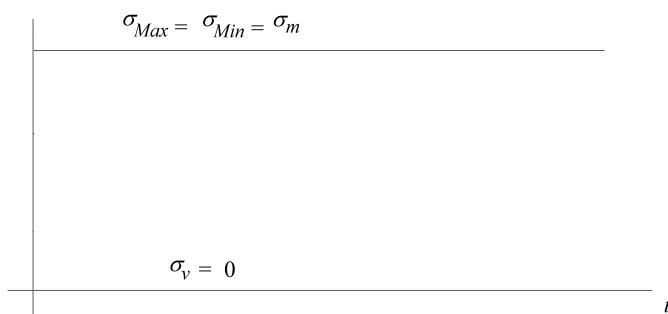


Figura 5.4: Tensão constante.

Exercício:

1. Uma eixo usinado de aço, como mostrado na Fig.5.5, tem limite de ruptura de 1000 MPa e limite de escoamento de 800 MPa. Seu diâmetro mede 80 mm e suporta uma carga axial que varia entre -1 MN e $+2$ MN. Desprezando os efeitos dos concentradores de tensão, determine:
 - a) O valor máximo da tensão normal;
 - b) O valor mínimo da tensão normal;
 - c) A tensão média;
 - d) A tensão variável.

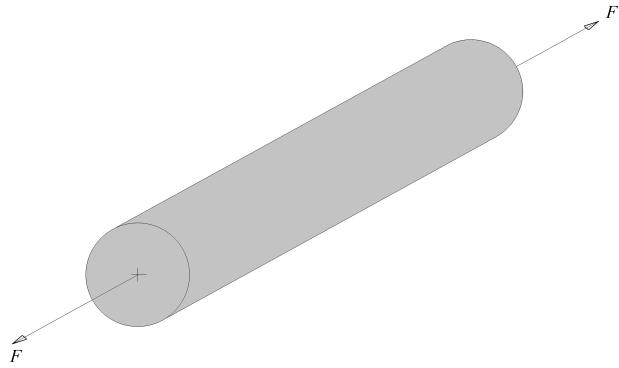


Figura 5.5: Eixo sujeito a um esforço axial variável.

Solução:

$$\sigma = \frac{4F}{\pi d^2}$$

$$\sigma_{Max} = \frac{4 \times 2 \times 10^6}{\pi(80 \times 10^{-3})^2}$$

$$\sigma_{Max} = 397,899 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Min} = \frac{4 \times (-1 \times 10^6)}{\pi(80 \times 10^{-3})^2}$$

$$\sigma_{Min} = -198,94 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{Max} + \sigma_{Min}}{2}$$

$$\sigma_m = 99,47 \text{ MPa}$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{Max} - \sigma_{Min}}{2}$$

$$\sigma_v = 298,41 \text{ MPa}$$

2. Considerando apenas a tensão máxima, qual seria o fator de segurança que a barra estaria trabalhando?

Solução:

$$N = \frac{\sigma_e}{\sigma_{Max}} = 2,01$$

Portanto, utilizando a tensão máxima e o limite de escoamento, parece que o eixo está trabalhando dentro de um regime de segurança.

5.3 Resistência à fadiga sob tensões variáveis (critério de Soderberg)

Para estudar a resistência à fadiga sob tensões variáveis, pode-se recorrer, dentre outros, ao diagrama de Soderberg, que é plotado com base em inúmeros dados experimentais. A experiência mostra que só ocorre colapso (ruptura) acima dos pontos que unem σ_n a σ_e , como mostra a Fig.5.6.

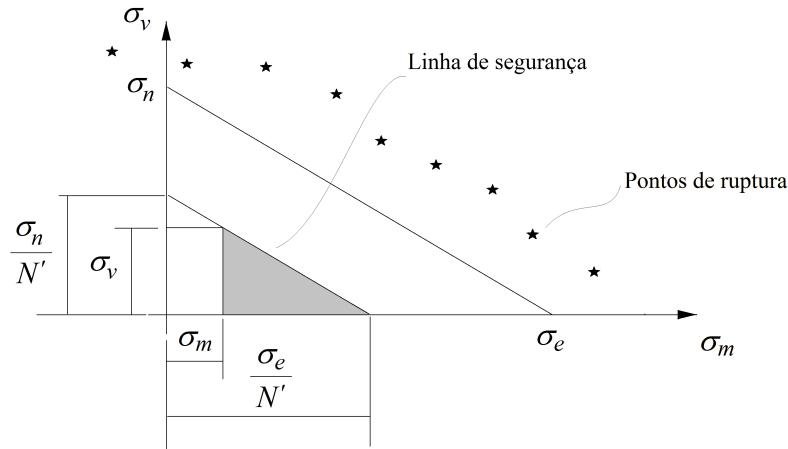


Figura 5.6: Diagrama de Soderberg.

A questão que agora surge é saber qual a relação entre σ_m e σ_v , para se trabalhar exatamente sobre a linha de segurança. Assim, por semelhança de triângulos, pode-se escrever as seguintes igualdades de razões:

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_n} = \frac{\frac{\sigma_e}{N'} - \sigma_m}{\sigma_e} \quad (5.3)$$

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_n} = \frac{1}{N'} - \frac{\sigma_m}{\sigma_e} \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{N'} = \frac{\sigma_m}{\sigma_e} + \frac{\sigma_v}{\sigma_n} \quad \text{critério de Soderberg} \quad (5.5)$$

Exercício:

- Baseando-se no exercício 1 da seção 5.1, determine com que fator de segurança N' o eixo está trabalhando.

$$\frac{1}{N'} = \frac{\sigma_m}{\sigma_e} + \frac{\sigma_v}{\sigma_n}$$

$$\sigma_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n$$

$$k_a = a \cdot \sigma_r^b \quad a = 4,51 \quad b = -0,265$$

$$k_a = 0,72$$

$k_b = 1,00$ não existe o efeito do tamanho da peça para cargas axiais.

$$k_c = k_d = 1,00, \quad k_e = 0,85 \text{ e } k_f = 1,00$$

$$\sigma'_n = 0,50\sigma_r$$

$$\sigma'_n = 500 \text{ MPa}$$

$$\sigma_n = 0,72 \cdot 1,00 \cdot 1,00 \cdot 1,00 \cdot 0,85 \cdot 1,00 \cdot 500$$

$$\sigma_n = 306 \text{ MPa}$$

$$\frac{1}{N} = \frac{99,47}{800} + \frac{298,41}{306}$$

$$N = 0,91$$

Donde se conclui que, levando em consideração os efeitos da fadiga, o eixo não está trabalhando dentro de condições de segurança.

Tensão de fadiga equivalente (para o critério de Soderberg)

Foi demonstrado que, de acordo com o critério de Soderberg, o fator de segurança N' poderia ser obtido através de:

$$\frac{1}{N'} = \frac{\sigma_m}{\sigma_e} + \frac{\sigma_v}{\sigma_n}$$

Supondo-se que σ represente uma tensão normal induzida equivalente, então o fator de segurança N' poderá ser expresso por:

$$N' = \frac{\sigma_e}{\sigma}$$

Então, é lícito escrever:

$$\frac{\sigma}{\sigma_e} = \frac{\sigma_m}{\sigma_e} + \frac{\sigma_v}{\sigma_n}$$

Neste caso, a tensão normal equivalente induzida σ poderá ser expressa por:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_v \frac{\sigma_e}{\sigma_n} \quad (5.6)$$

Para tensão de cisalhamento equivalente, tem-se:

$$\tau = \tau_m + \tau_v \frac{\tau_e}{\tau_n} \quad (5.7)$$

5.4 Falha por fadiga devido à combinação de tensões

De acordo com o critério da máxima energia de distorção, para iniciar o escoamento em um ponto, como mostrado na Fig.5.7, que está sujeito a um estado plano de tensões composto por apenas um componente de tensão normal, é necessário que:

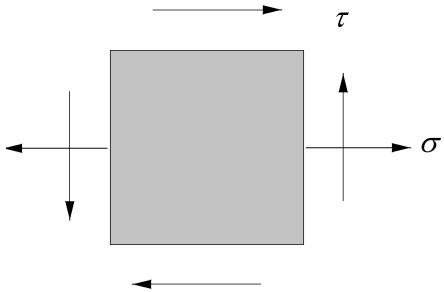


Figura 5.7: Estado plano de tensões composto por apenas um componente de tensão normal.

$$(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \sigma_e \quad (5.8)$$

Para evitar que o material sofra deformações permanentes, pode-se utilizar um fator de segurança N sobre o limite de escoamento σ_e . Assim, com base na Eq.(5.8), escreve-se:

$$(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_e}{N} \quad (5.9)$$

Em projetos e análises que utilizam o critério de Soderberg, as tensões equivalentes induzidas σ e τ , que aparecem na Eq.(5.9), são dadas, respectivamente, pelas Eqs.(5.6) e (5.7) repetidas a seguir.

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_v \frac{\sigma_e}{\sigma_n} \quad (5.10)$$

$$\tau = \tau_m + \tau_v \frac{\tau_e}{\tau_n} \quad (5.11)$$

Atenção:

Nos casos de combinação de carga axial com momento de flexão, dois valores distintos de σ_n podem ser encontrados. Um obtido considerando que a peça está sujeita a uma carga axial pura e outro supondo que a mesma esteja submetida a um esforço de flexão puro. Nessa situação, recomenda-se adotar o menor deles.

Exercício:

1) Uma barra usinada de aço com limite de ruptura de 1000 MPa e limite de escoamento de 800 MPa com 80 mm de diâmetro, suporta uma carga axial que varia entre -100 kN e + 200 kN. Simultaneamente à carga axial, age um momento de torção que varia entre -3000 Nm a + 3000 Nm. Desprezando os efeitos dos concentradores de tensão, determine com que fator de segurança a barra está trabalhando.

Solução:

$$(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_e}{N}$$

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_v \frac{\sigma_e}{\sigma_n}$$

As tensões normais médias e variáveis, neste problema, valem respectivamente, $\sigma_m = 9,95$ MPa e $\sigma_v = 29,84$ MPa. Sabe-se também que o limite de resistência à fadiga, σ_n é 306 MPa.

$$\sigma = 9,95 + 29,84 \frac{800}{306}$$

$$\sigma = 87,96 \text{ MPa}$$

$$\tau = \tau_m + \tau_v \frac{\tau_e}{\tau_n}$$

$$\tau_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n$$

$$k_a = a \cdot \sigma_r^b \quad a = 4,51 \quad b = -0,265$$

$$k_a = 0,72$$

$$k_b = 1,51 \cdot d^{-0,157}$$

$$k_b = 0,759$$

$$k_c = k_d = 1,00, \quad k_e = 0,577 \text{ e } k_f = 1,00$$

$$\sigma'_n = 0,50\sigma_r$$

$$\sigma'_n = 500 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = 0,72 \cdot 0,759 \cdot 1,00 \cdot 1,00 \cdot 0,577 \cdot 1,00 \cdot 500$$

$$\tau_n=157,66\text{ MPa}$$

$$\tau_e = 0, 577 \sigma_e$$

$$\tau_e=461,6\text{ MPa}$$

$$\tau_{Max}=\frac{16T_{Max}}{\pi\cdot d^3}$$

$$\tau_{Min}=\frac{16T_{Min}}{\pi\cdot d^3}$$

$$\tau_{Max}=29,84\text{ MPa}$$

$$\tau_{Min}=-29,84\text{ MPa}$$

$$\tau_m=0$$

$$\tau_v=29,84\text{ MPa}$$

$$\tau=0+29,84\,\frac{461,6}{157,66}$$

$$\tau=87,37\text{ MPa}$$

$$(87,96^2 + 3\times 87,37^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{800}{N}$$

$$N=4,57$$

5.5 Fator de concentração de tensão k_p

Concentrador de tensão é tudo aquilo que promove um aumento da tensão localizada em um elemento estrutural ou de máquina. Descontinuidades tais como furos, trincas, entalhes, variações dimensionais, defeitos de fundição, defeitos de soldagem, etc, promovem, **localmente**, um aumento no valor da tensão. Por isso, são chamados de concentradores de tensão.

Expressões do tipo $\frac{M \cdot c}{I}$, $\frac{T \cdot c}{J}$, $\frac{F}{A}$, etc fornecem uma estimativa da tensão média (nominal) σ_0 induzida em peças estruturais ou de máquinas. Mas não informam a magnitude da tensão em todos os pontos do elemento.

Por exemplo, em uma chapa quadrada de lado b , espessura t , com um furo central de diâmetro a , sujeita a uma carga de tração F , a tensão média (nominal) σ_0 é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{F}{t(b-a)}$$

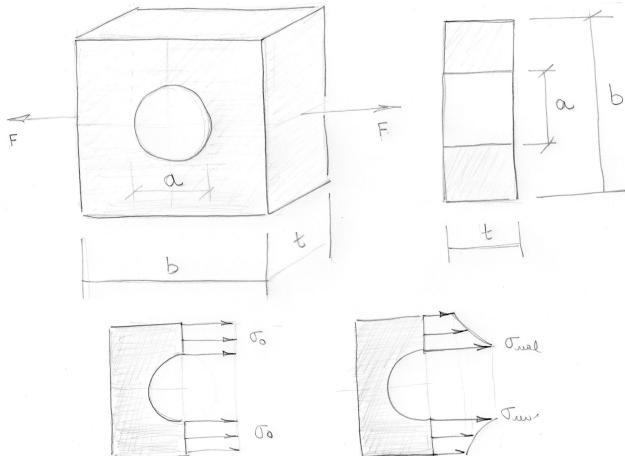


Figura 5.8: Chapa quadrada com um furo central.

Porém, pode-se demonstrar que a tensão real σ_{real} , próxima ao furo, é maior que a tensão média (nominal) σ_0 .

$$\sigma_{real} > \sigma_0$$

Portanto, existe um número real k , maior do que a unidade, denominado **fator de concentração**, tal que:

$$\sigma_{real} = k \sigma_0$$

Ou

$$k = \frac{\sigma_{real}}{\sigma_0}$$

A tensão real σ_{real} muitas vezes pode ser obtida numericamente ou analiticamente, permitindo que se obtenha uma estimativa do valor do fator de concentração de tensão k . Quando k é obtido dessa forma (numérica ou analiticamente), recebe o nome de **fator teórico de concentração de tensão** que é geralmente representado por k_t .

Portanto, a tensão real poderá ser estimada a partir da seguinte expressão:

$$\sigma_{real} = k_t \sigma_0 \quad (5.12)$$

Experimentos mostram que, para os materiais dúcteis, k_t superestima o valor a tensão. Por isso, costuma-se adotar um fator de concentração de tensão k_p , menor do que k_t , para calcular a tensão real. Neste caso, deve-se utilizar a seguinte expressão para computar o valor de σ_{real} :

$$\sigma_{real} = k_p \sigma_0 \quad (5.13)$$

Na literatura técnica k_p recebe o nome de **fator prático de concentração de tensão**. BUDYNAS e NISBETT [10] recomendam usar a seguinte expressão para estimar o valor de k_p :

$$k_p = 1 + q \cdot (k_t - 1) \quad (5.14)$$

Onde:

q – Índice de sensibilidade ao entalhe;

k_t – Fator teórico de concentração de tensão.

Os valores de q e de k_t podem ser levantados experimentalmente ou a partir da Teoria da Elasticidade. Alguns desses valores estão disponíveis na seção 5.7, a partir de gráficos ou de interpolações.

Atenção:

É importante salientar que para cada tipo de carregamento existe um fator de concentração de tensão diferente. Ou seja, há um valor de k para flexão outro para carga axial e outro para a torção. O mesmo se pode afirmar com relação ao índice de sensibilidade ao entalhe q . Onde cada tipo de carregamento exige um valor de q diferente.

Exercícios:

1. Uma barra usinada de aço, com limite de ruptura de 1000 MPa e limite de escoamento de 800 MPa, suporta uma carga axial de 180 kN, com reversão completa (Fig.5.9). Determinar o diâmetro mínimo necessário para que a barra suporte a referida carga com segurança. Adote $N = 2$, $q = 0,68$ e $k_t = 1,9$.

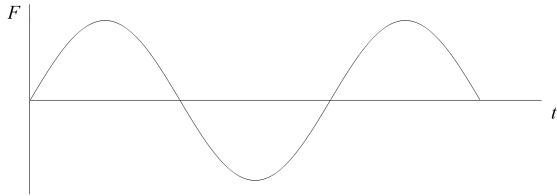


Figura 5.9: Carga axial com reversão completa.

Solução:

Os dados do problema são:

Aço usinado; $\sigma_r = 1000$ MPa;

$\sigma_e = 800$ MPa;

$F_{Max} = 180$ kN;

$F_{Min} = -180$ kN;

$q = 0,68$, $k_t = 1,9$;

$N = 2$.

Critério da energia de distorção máxima:

$$(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_e}{N}$$

Como $\tau = 0$, então a expressão anterior se reduz a:

$$\sigma = \frac{\sigma_e}{N} \quad (5.15)$$

Critério de fadiga de Soderberg:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_v \frac{\sigma_e}{\sigma_n} \quad (5.16)$$

$$\sigma_{Max} = k_p \frac{4F_{Max}}{\pi \cdot d^2}$$

$$\sigma_{Min} = k_p \frac{4F_{MIN}}{\pi \cdot d^2}$$

$$k_p = 1 + q \cdot (k_t - 1)$$

$$k_p = 1, 61$$

$$\sigma_{Max} = \frac{368985}{d^2}$$

$$\sigma_{Min} = -\frac{368985}{d^2}$$

$$\sigma_m = 0$$

$$\sigma_v = \frac{368985}{d^2}$$

$$\sigma_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n$$

$$k_a = 0, 72, \quad k_b = k_c = k_d = k_f = 1, 00 \text{ e } k_e = 0, 85$$

$$\sigma'_n = 0, 50 \sigma_r$$

$$\sigma'_n = 500 \text{ MPa}$$

$$\sigma_n = 306 \text{ MPa}$$

Substituindo na Eq.(5.16), vem:

$$\sigma = 0 + \frac{368985}{d^2} \cdot \frac{800}{306}$$

$$\sigma = \frac{964667}{d^2}$$

Substituindo na Eq.(5.15), encontra-se:

$$\frac{964667}{d^2} = \frac{800 \times 10^6}{2}$$

Donde se conclui que:

$$d = 0,04911 \text{ m}$$

$$d = 49,11 \text{ mm}$$

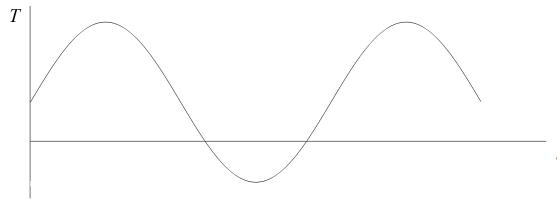


Figura 5.10: Momento de torção variável.

2. Uma barra cilíndrica de aço laminado a quente com limite de ruptura de 460 MPa e limite de escoamento de 320 MPa deverá suportar um momento de torção que varia de -110 Nm a + 450 Nm (Fig.5.10). Determinar o diâmetro mínimo da barra para suportar com segurança o referido momento. Adote $N = 1,75$, $q = 0,65$ e $k_t = 2,5$.

Solução:

Os dados do problema são:

Aço laminado a quente; $\sigma_r = 460 \text{ MPa}$;

$\sigma_e = 320 \text{ MPa}$;

$T_{Max} = 450 \text{ Nm}$;

$T_{Min} = -110 \text{ Nm}$;

$q = 0,65$, $k_t = 2,5$;

$N = 1,75$.

Critério da energia de distorção máxima:

$$(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_e}{N}$$

$$\sigma = 0$$

Como $\sigma = 0$, então a expressão anterior se reduz a:

$$\sqrt{3}\tau = \frac{\sigma_e}{N} \quad (5.17)$$

Critério de fadiga de Soderberg:

$$\tau = \tau_m + \tau_v \frac{\tau_e}{\tau_n} \quad (5.18)$$

$$\tau_{Max} = k_p \cdot \frac{16T_{Max}}{\pi \cdot d^3}$$

$$\tau_{Min} = k_p \cdot \frac{16T_{Min}}{\pi \cdot d^3}$$

$$k_p = 1 + q \cdot (k_t - 1)$$

$$k_p = 1,975$$

Assim,

$$\tau_{Max} = \frac{4526}{d^3}$$

$$\tau_{Min} = -\frac{1106}{d^3}$$

$$\tau_m = \frac{1710}{d^3}$$

$$\tau_v = \frac{2816}{d^3}$$

$$\tau_e = 0,577\sigma_e$$

$$\tau_e = 184,64 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n$$

$$k_a = 0,71, \quad k_b = 0,85 \text{ estimado } k_c = k_d = k_f = 1,00 \text{ e } k_e = 0,577$$

$$\sigma'_n = 0,50\sigma_r$$

$$\sigma'_n = 230 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = 80,09 \text{ MPa}$$

Portanto, substituindo na Eq.(5.18), vem:

$$\tau = \frac{1710}{d^3} + \frac{2816}{d^3} \cdot \frac{184,64}{80,09}$$

$$\tau = \frac{8202}{d^3}$$

Substituindo na Eq.(5.17), encontra-se:

$$\sqrt{3} \cdot \frac{8202}{d^3} = \frac{320 \times 10^6}{1,75}$$

Donde se conclui que:

$$d = 0,04267 \text{ m}$$

$$d = 42,67 \text{ mm}$$

3. O eixo da Fig.5.11 será submetido a um momento de torção que varia de – 100 Nm a 600 Nm. São dados:

- Material: Aço forjado;
- Temperatura de trabalho: 80°C;
- Limite de escoamento $\sigma_e = 280 \text{ MPa}$;
- Limite de ruptura $\sigma_r = 400 \text{ MPa}$;

Determine o fator de segurança que o eixo irá trabalhar.

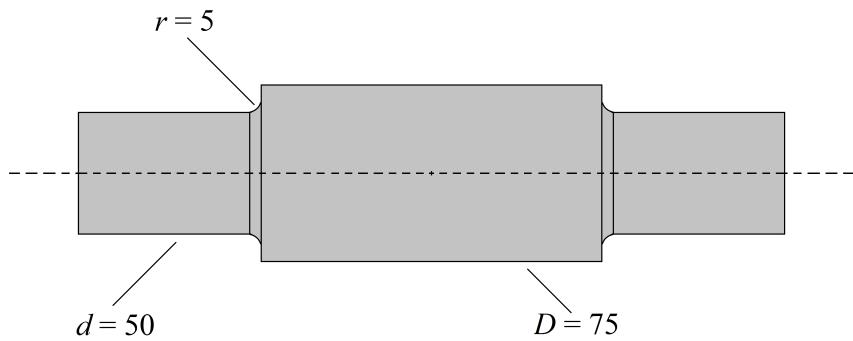


Figura 5.11: Eixo sob a ação de um momento de torção variável.

Solução:

Critério da energia de distorção máxima:

$$(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_e}{N}$$

$$\sigma = 0$$

Como $\sigma = 0$, então a expressão anterior se reduz a:

$$N = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3} \cdot \tau} \quad (5.19)$$

Critério de Soderberg:

$$\tau = \tau_m + \tau_v \frac{\tau_e}{\tau_n} \quad (5.20)$$

$$\tau_{Max} = k_p \cdot \frac{16T_{Max}}{\pi \cdot d^3}$$

$$\tau_{Min} = k_p \cdot \frac{16T_{Min}}{\pi \cdot d^3}$$

De acordo com a Fig.5.24, o índice de sensibilidade ao entalhe q é dado por:

$$q = 1,00$$

Com base na Fig.5.25, um valor aproximado para o fator teórico k_t é:

$$k_t = 1,48$$

$$k_p = 1 + q \cdot (k_t - 1)$$

$$k_p = 1,48$$

$$\tau_{Max} = 36,18 \text{ MPa}$$

$$\tau_{Min} = -6,03 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = 15,08 \text{ MPa}$$

$$\tau_v = 21,11 \text{ MPa}$$

$$\tau_e = 0,577\sigma_e$$

$$\tau_e = 161,56 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n$$

$$k_a = 0,70, \quad k_b = 0,77 \quad k_c = 1,00 \quad k_d = 0,97 \quad k_e = 0,577 \text{ e } k_f = 1,00$$

$$\sigma'_n = 0,50\sigma_r$$

$$\sigma'_n = 200 \text{ MPa}$$

Neste caso,

$$\tau_n = 59,87 \text{ MPa}$$

Com base na Eq.(5.19), encontra-se:

$$N = \frac{280}{\sqrt{3} \cdot 59,87}$$

Portanto,

$$N = 2,29$$

4. O eixo mostrado na Fig.5.12 é de aço laminado a frio e usinado, com limite de ruptura de 450 MPa, limite de escoamento de 380 MPa e limite de ruptura ao cisalhamento de 270 MPa. A potência máxima transmitida é de 20 HP a 900 rpm e mínima 8 HP a 900 rpm. Simultaneamente, age um momento de flexão que varia entre 50 Nm e 100 Nm.

Pergunta-se: Considerando-se uma confiabilidade de 99,99%, estará o eixo trabalhando em segurança? Justifique.

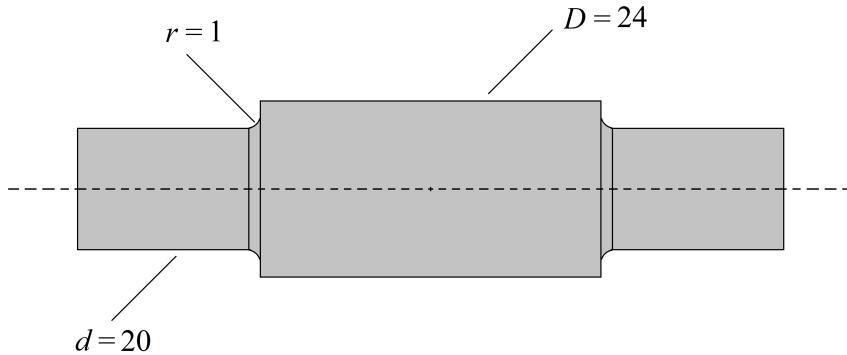


Figura 5.12: Eixo sob a ação de um momento de torção juntamente com um momento de flexão variáveis.

Solução:

Os dados do problema são:

$$\sigma_r = 450 \text{ MPa}; \sigma_e = 380 \text{ MPa}; \tau_r = 270 \text{ MPa};$$

$$P_{Max} = 20 \text{ HP} = 14920 \text{ Watts}; P_{Min} = 8 \text{ HP} = 5968 \text{ Watts};$$

$$M_{Max} = 100 \text{ Nm}; M_{Min} = 50 \text{ kN};$$

Critério da energia de distorção máxima:

Com base na Eq.(5.57) escreve-se:

$$N = \frac{\sigma_e}{(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.21)$$

Critério de Soderberg com base no momento de flexão:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_v \frac{\sigma_e}{\sigma_n} \quad (5.22)$$

$$\sigma_{Max} = k_p \cdot \frac{32M_{Max}}{\pi \cdot d^3}$$

$$\sigma_{Min} = k_p \cdot \frac{32M_{Min}}{\pi \cdot d^3}$$

De acordo com a Fig.5.24, o índice de sensibilidade ao entalhe q é dado por:

$$q = 0,66$$

Com base na Fig.5.25, um valor aproximado para o fator teórico k_t é:

$$k_t = 1, 59$$

$$k_p = 1 + q \cdot (k_t - 1)$$

$$k_p = 1, 39$$

$$\sigma_{Max} = 177,24 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Min} = 88,41 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = 132,83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_v = 44,42 \text{ MPa}$$

$$\sigma_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n$$

$$k_a = 0,89, \quad k_b = 0,884 \quad k_c = 0,702 \quad k_d = 1,00 \quad k_e = 1,00 \text{ e } k_f = 1,00$$

$$\sigma'_n = 0,50\sigma_r$$

$$\sigma'_n = 225 \text{ MPa}$$

Assim,

$$\sigma_n = 124,27 \text{ MPa}$$

Substituindo os valores numéricos na Eq.(5.22), encontra-se:

$$\sigma = 268,66 \text{ MPa}$$

Critério de Soderberg com base no momento de torção:

$$\tau = \tau_m + \tau_v \frac{\tau_e}{\tau_n} \quad (5.23)$$

$$\tau_{Max} = \frac{16T_{Max}}{\pi \cdot d^3}$$

$$\tau_{Min} = \frac{16T_{Min}}{\pi \cdot d^3}$$

$$\omega = \frac{2\pi \cdot rpm}{60}$$

$$\omega = 94,25 \text{ rad/s}$$

$$T_{Max} = \frac{P_{Max}}{\omega}$$

$$T_{Min} = \frac{P_{Min}}{\omega}$$

$$T_{Max} = 158,30 \text{ Nm}$$

$$T_{Min} = 63,32 \text{ Nm}$$

De acordo com a Fig.5.24, o índice de sensibilidade ao entalhe q é dado por:

$$q = 0,66$$

Com base na Fig.5.25, um valor aproximado para o fator teórico k_t é:

$$k_t = 1,60$$

$$k_p = 1 + q \cdot (k_t - 1)$$

$$k_p = 1,40$$

$$\tau_{Max} = 141,09 \text{ MPa}$$

$$\tau_{Min} = 56,44 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = 98,76 \text{ MPa}$$

$$\tau_v = 42,33 \text{ MPa}$$

$$\tau_e = 0,577\sigma_e$$

$$\tau_e = 219,26 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n$$

$$k_a = 0,89, \quad k_b = 0,884 \quad k_c = 0,702 \quad k_d = 1,00 \quad k_e = 0,577 \text{ e } k_f = 1,00$$

$$\sigma'_n = 0,50\sigma_r$$

$$\sigma'_n = 225 \text{ MPa}$$

Neste caso,

$$\tau_n = 71,70 \text{ MPa}$$

Assim, de acordo com a Eq.5.23, tem-se $\tau = 228,21 \text{ MPa}$.

Substituindo os valores numéricos na Eq.(5.21), vem:

$$N = \frac{380}{(268,66^2 + 3 \cdot 228,21^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$N = 0,795$$

Como o fator de segurança é menor do que a unidade, então o eixo não está trabalhando em uma condição de segurança.

5. Dimensionar uma árvore de aço laminado a quente (Fig.5.13) supondo que $\sigma_e = 460 \text{ MPa}$, $\sigma_r = 550 \text{ MPa}$, $HB = 220$. A árvore deverá transmitir uma potência constante de 120 HP, porém a rotação deverá variar entre 2000 rpm e 4000 rpm . Sabe-se que a árvore estará sujeita a um momento de flexão com reversão completa de 600 Nm. Adote $\sigma_{adm} = 40 \text{ MPa}$ quando for encontrar uma estimativa para o diâmetro da árvore e adote um fator de segurança $N = 2$ sobre o limite de escoamento quando finalmente for fazer o dimensionamento.

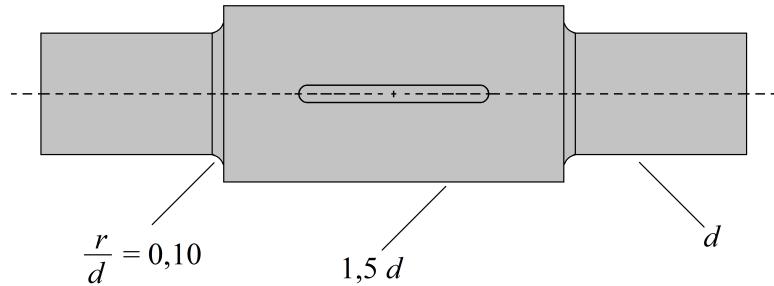


Figura 5.13: Projeto de um eixo sujeito a ação de um momento de torção juntamente com um momento de flexão variáveis.

$$\omega = \frac{2\pi \cdot rpm}{60}$$

$$\omega_{Max} = 418,9 \text{ rda/s}$$

$$\omega_{Min} = 209,4 \text{ rda/s}$$

$$T_{Max} = \frac{P}{\omega_{Min}}$$

$$T_{Max} = 427,5 \text{ Nm}$$

$$T_{Min} = \frac{P}{\omega_{Max}}$$

$$T_{Min} = 213,74 \text{ Nm}$$

Estimativa para o valor do diâmetro do eixo:

$$d^3 = \frac{32}{\pi \cdot \sigma_{adm}} \sqrt{M^2 + \frac{3}{4} T^2}$$

$$d^3 = \frac{32}{\pi \cdot 40 \times 10^6} \sqrt{600^2 + \frac{3}{4} 427,5^2}$$

$$d = 0,05641 \text{ m}$$

Adotar $d = 60 \text{ mm}$.

Limite de resistência à fadiga:

$$\sigma_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n$$

$$\sigma_n = 136,13 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n$$

$$\tau_n = 75,46 \text{ MPa}$$

Tensão normal induzida:

$$\sigma_{Max} = k_p \cdot \frac{32M_{Max}}{\pi \cdot d^3}$$

$$\sigma_{Min} = k_p \cdot \frac{32M_{Min}}{\pi \cdot d^3}$$

$$k_p = 1 + q \cdot (k_t - 1)$$

De acordo com a Fig.5.24, o índice de sensibilidade ao entalhe q é dado por:

$$q = 0,82$$

Com base na Fig.5.25, um valor aproximado para o fator teórico k_t é:

$$k_t = 1,68$$

Assim,

$$k_p = 1,56$$

$$\sigma_{Max} = \frac{29952}{\pi \cdot d^3}$$

$$\sigma_{Min} = -\frac{29952}{\pi \cdot d^3}$$

$$\sigma_m = 0$$

$$\sigma_v = \frac{29952}{\pi \cdot d^3}$$

Critério de Soderberg:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_v \frac{\sigma_e}{\sigma_n}$$

$$\sigma = \frac{101211}{\pi \cdot d^3}$$

Tensão tangencial induzida:

$$\tau_{Max} = k_p \cdot \frac{16T_{Max}}{\pi \cdot d^3}$$

$$\tau_{Min} = k_p \cdot \frac{16T_{Min}}{\pi \cdot d^3}$$

$$k_p = 1 + q \cdot (k_t - 1)$$

De acordo com a Fig.5.24, o índice de sensibilidade ao entalhe q é dado por:

$$q = 1,00$$

Com base na Fig.5.25, um valor aproximado para o fator teórico k_t é:

$$k_t = 1,42$$

Assim,

$$k_p = 1,42$$

$$\tau_{Max} = \frac{9713}{\pi \cdot d^3}$$

$$\tau_{Min} = \frac{4855}{\pi \cdot d^3}$$

$$\tau_m = \frac{7284}{\pi \cdot d^3}$$

$$\tau_v = \frac{2429}{\pi \cdot d^3}$$

Critério de Soderberg:

$$\tau = \tau_m + \tau_v \frac{\tau_e}{\tau_n}$$

$$\tau_e = 0,577\sigma_e$$

$$\tau_e = 265,42 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{15829}{\pi \cdot d^3}$$

Critério da energia de distorção máxima:

$$(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_e}{N}$$

$$\left[\left(\frac{101211}{\pi \cdot d^3} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{15829}{\pi \cdot d^3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{460 \times 10^6}{2}$$

$$d = 0,05255 \text{ m}$$

$$d = 52,55 \text{ mm}$$

6. A árvore esquematizada na Fig.5.14 deve transmitir uma potência constante de 10 HP a uma velocidade constante de 600 *rpm*, com uma confiabilidade de 99,99%. Enchavetada na árvore estão duas engrenagens de diâmetros primivos de 75 mm e 125 mm. Determine o diâmetro mínimo do eixo usinado para transmitir a potência sabendo-se que a tensão de ruptura do material é de 220 MPa e a de escoamento 130 MPa. Note que, neste problema, o torque é constante, porém, devido a rotação do eixo, o momento fletor é variável com reversão completa. Adote um raio de adoçamento de $r = 3 \text{ mm}$.

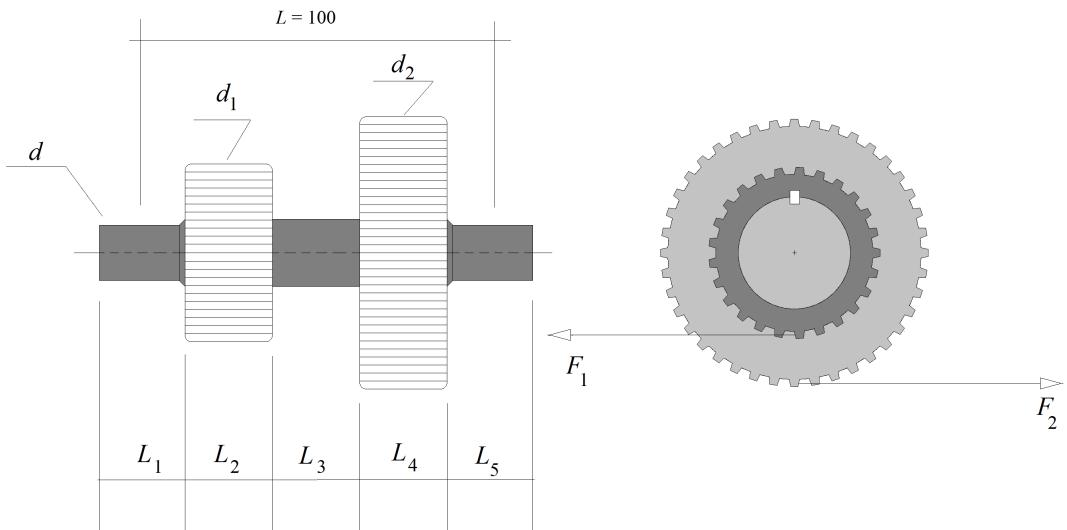


Figura 5.14: Projeto de um eixo com duas engrenagens.

São dados: $L_i = 25 \text{ mm}$ $i = 1 \dots 5$. Ignore o ângulo de pressão nos dentes das engrenagens. Suponha que as cargas sejam aplicadas nos centros dos trechos. Por exemplo, a carga no apoio à esquerda seja aplicada na metade de L_1 , no apoio à direita na metade de L_5 , na engrenagem 1, na metade de L_2 e na engrenagem 2, na metade de L_4 . Portanto, para efeito de cálculo, considere que o comprimento do eixo será de 100 mm ao invés de 125 mm.

Nota:

Como visto na seção 2.6, os diagramas de torque e de momentos fletores são dados respectivamente pelas Figs.5.15 e 5.16

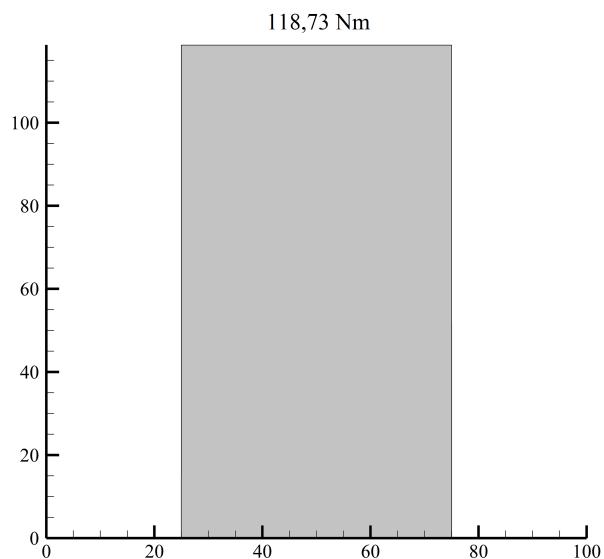


Figura 5.15: Diagrama de torques.

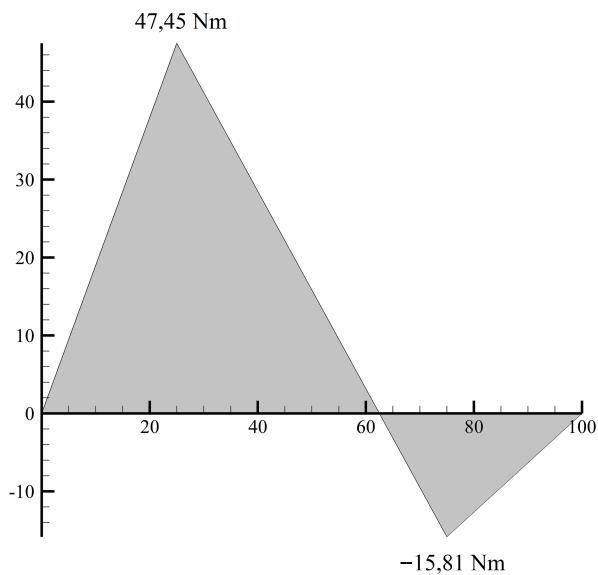


Figura 5.16: Diagrama de momento fletor.

5.6 Critérios diversos de resistência à fadiga

Nessa seção são apresentados diversos critérios de resistência à fadiga que o Engenheiro pode utilizar na análise e no projeto de elementos estruturais e de máquinas sujeitos à esforços variáveis.

5.6.1 Critério de Soderberg

A Fig.5.17 mostra a região segura contra o colapso por fadiga com base no critério de Soderberg.

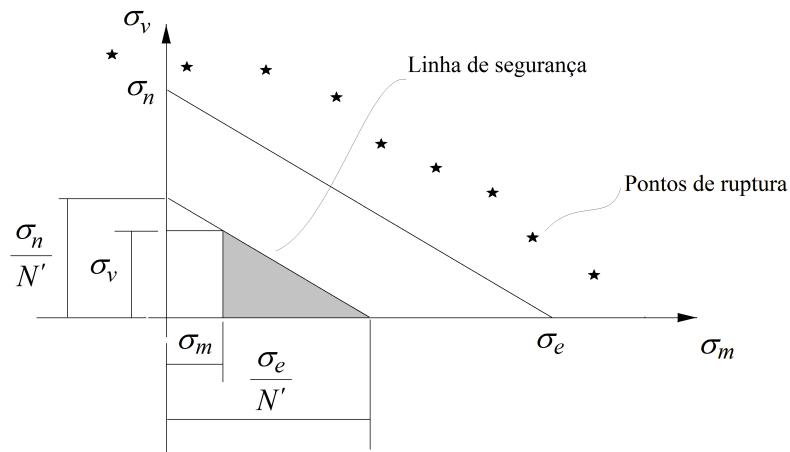


Figura 5.17: Critério de Soderberg.

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_n} + \frac{\sigma_m}{\sigma_e} = \frac{1}{N'} \quad (5.24)$$

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_v \frac{\sigma_e}{\sigma_n} \quad (5.25)$$

$$\tau = \tau_m + \tau_v \frac{\tau_e}{\tau_n} \quad (5.26)$$

$$N = \frac{\sigma_e}{(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.27)$$

5.6.2 Critério modificado de Goodman

Diferentemente do critério de Soderberg, no critério modificado de Googman, a linha de colapso liga σ_n a σ_r como mostra a Fig.5.18.

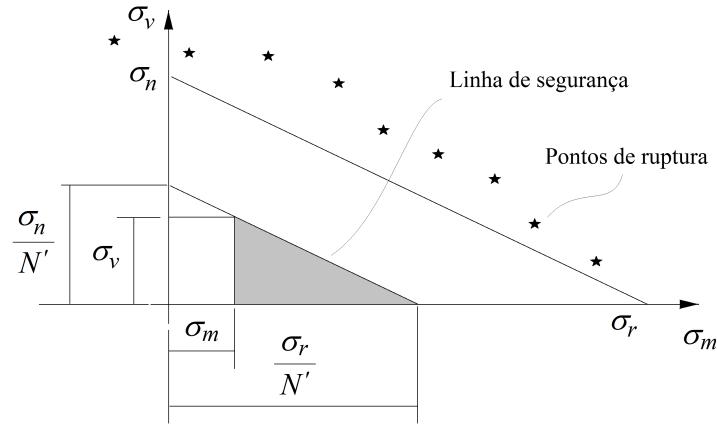


Figura 5.18: Critério modificado de Goodman.

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_n} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r} = \frac{1}{N'} \quad (5.28)$$

$$\sigma = \sigma_e \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_n} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r} \right) \quad (5.29)$$

$$\tau = \tau_e \left(\frac{\tau_v}{\tau_n} + \frac{\tau_m}{\tau_r} \right) \quad (5.30)$$

$$N = \frac{\sigma_e}{(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.31)$$

5.6.3 Critério de Gerber (arco de parábola)

Como mostra a Fig.5.19 a linha de colapso é formada por um arco de parábola que liga σ_n a σ_r .

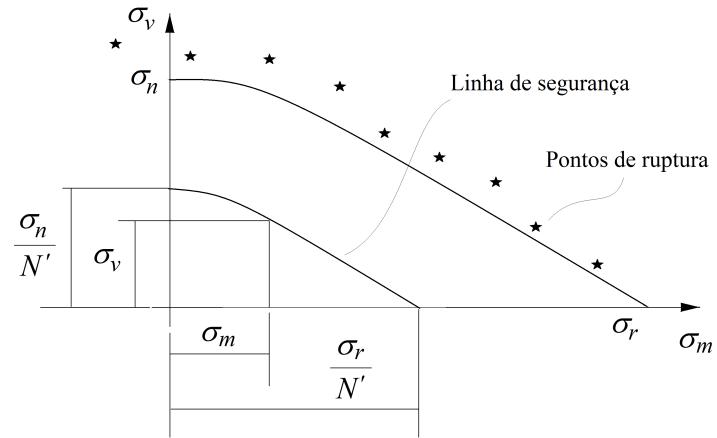


Figura 5.19: Critério de Gerber (arco de parábola).

$$\frac{N' \cdot \sigma_v}{\sigma_n} + \left(\frac{N' \cdot \sigma_m}{\sigma_r} \right)^2 = 1 \quad (5.32)$$

$$\sigma^2 - \frac{\sigma_e \cdot \sigma_v}{\sigma_n} \sigma - \left(\frac{\sigma_e \cdot \sigma_m}{\sigma_r} \right)^2 = 0 \quad (5.33)$$

$$\tau^2 - \frac{\tau_e \cdot \tau_v}{\tau_n} \tau - \left(\frac{\tau_e \cdot \tau_m}{\tau_r} \right)^2 = 0 \quad (5.34)$$

$$N = \frac{\sigma_e}{(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.35)$$

5.6.4 Critério ASME (arco de elipse)

A Fig.5.20 mostra um arco de elipse, entre σ_n a σ_e , que determina a linha de colapso pelo critério da ASME.

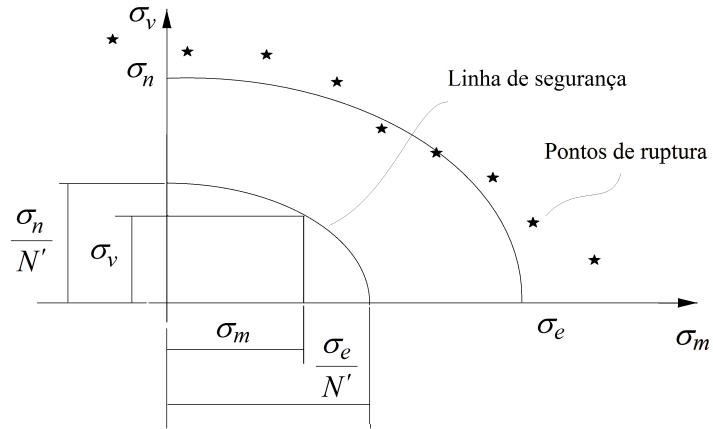


Figura 5.20: Critério ASME elíptico.

$$\left(\frac{N' \cdot \sigma_v}{\sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{N' \cdot \sigma_m}{\sigma_e}\right)^2 = 1 \quad (5.36)$$

$$\sigma = \left[\left(\frac{\sigma_e \cdot \sigma_v}{\sigma_n} \right)^2 + \sigma_m^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.37)$$

$$\tau = \left[\left(\frac{\tau_e \cdot \tau_v}{\tau_n} \right)^2 + \tau_m^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.38)$$

$$N = \frac{\sigma_e}{(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.39)$$

5.6.5 Critério do escoamento ampliado

Como mostra a Fig.5.21, no critério do escoamento ampliado, a linha de colapso é obtida traçando-se uma reta que passa pelos pontos $(\sigma_e, 0)$ e $(0, \sigma_e)$.

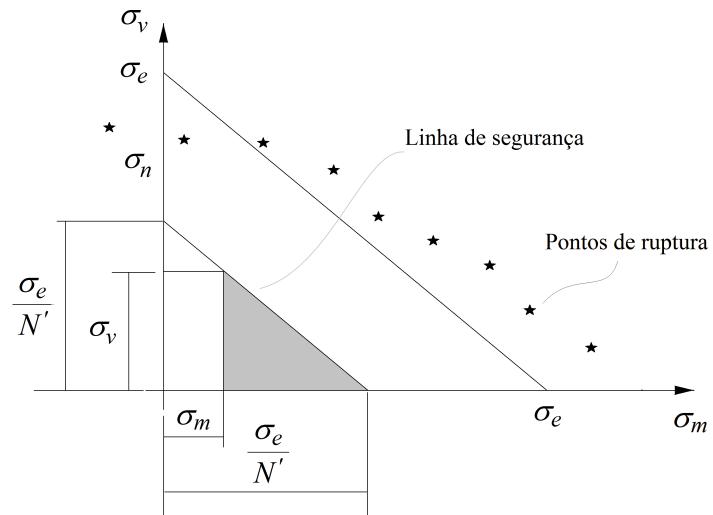


Figura 5.21: Critério do escoamento ampliado.

$$\sigma_v + \sigma_m = \frac{\sigma_e}{N'} \quad (5.40)$$

$$\sigma = \sigma_v + \sigma_m \quad (5.41)$$

$$\tau = \tau_v + \tau_m \quad (5.42)$$

$$N = \frac{\sigma_e}{(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.43)$$

Observação: BUDYNAS e NISBETT [10] dão ênfase aos critérios de Gerber e da ASME–Elíptico.

A Fig.5.22 mostra as linhas de colapso segundo os principais critérios de resistência à fadiga.

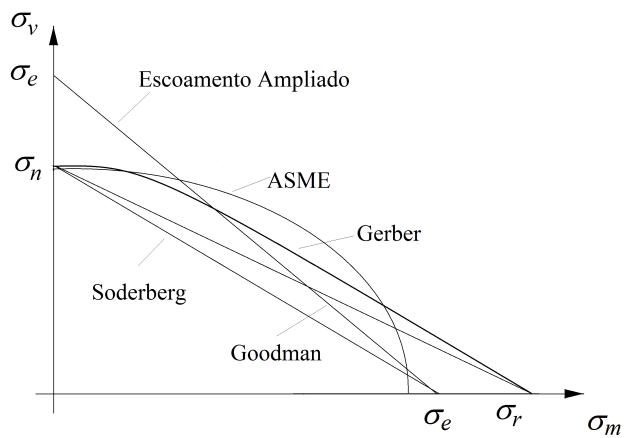


Figura 5.22: Linha de colapso dos principais critérios de resistência à fadiga.

Exercícios:

1. No exercício 4 da seção 5.5 manipulou-se com as seguintes valores de tensão:

$$\sigma_m = 150,88 \text{ MPa} \quad \sigma_v = 50,29 \text{ MPa} \quad \sigma_e = 380 \text{ MPa} \quad \sigma_r = 450 \text{ MPa}$$
$$\sigma_n = 123,71 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = 98,76 \text{ MPa} \quad \tau_v = 42,33 \text{ MPa} \quad \tau_e = 219,26 \text{ MPa} \quad \tau_r = 270 \text{ MPa}$$
$$\tau_n = 71,39 \text{ MPa}$$

Determine o fator de segurança utilizando o critério:

- a) de Gerber;
- b) da ASME;
- c) modificado de Goodman;
- d) do escoamento ampliado.

Respostas:

Critério de Gerber:

Tensão normal induzida $\sigma = 226,23 \text{ MPa}$

Tensão cisalhante induzida $\tau = 168,24 \text{ MPa}$

Fator de Segurança $N = 1,03$.

Critério da ASME:

Tensão normal induzida $\sigma = 215,93 \text{ MPa}$

Tensão cisalhante induzida $\tau = 163,27 \text{ MPa}$

Fator de Segurança $N = 1,07$.

Critério de Goodman Modificado:

Tensão normal induzida $\sigma = 281,89 \text{ MPa}$

Tensão cisalhante induzida $\tau = 210,21 \text{ MPa}$

Fator de Segurança $N = 0,83$.

Critério do Escoamento ampliado

Tensão normal induzida $\sigma = 201,17 \text{ MPa}$

Tensão cisalhante induzida $\tau = 141,09 \text{ MPa}$

Fator de Segurança $N = 1,20$.

2. Demonstre as expressões das tensões equivalentes σ e τ do critério:

- (a) Modificado de Goodman;
- (b) Gerber;
- (c) ASME;
- (d) Escoamento Ampliado.

3. Resolva os exercícios das Seções 5.4 e 5.5 pelos critérios:

- (a) Modificado de Goodman;
- (b) Gerber;
- (c) ASME;
- (d) Escoamento Ampliado.

4. Questão de Projeto

Determine o diâmetro mínimo necessário à peça para suportar, com segurança, uma carga variável F , com reversão completa (-20kN a 20kN).

Analise também o projeto à flambagem (coluna com carregamento excêntrico).

Atenção:

Para determinar o diâmetro d , pode-se recorrer a algum método computacional de obtenção de raízes de equações não lineares, tal como o de Newton Raphson.

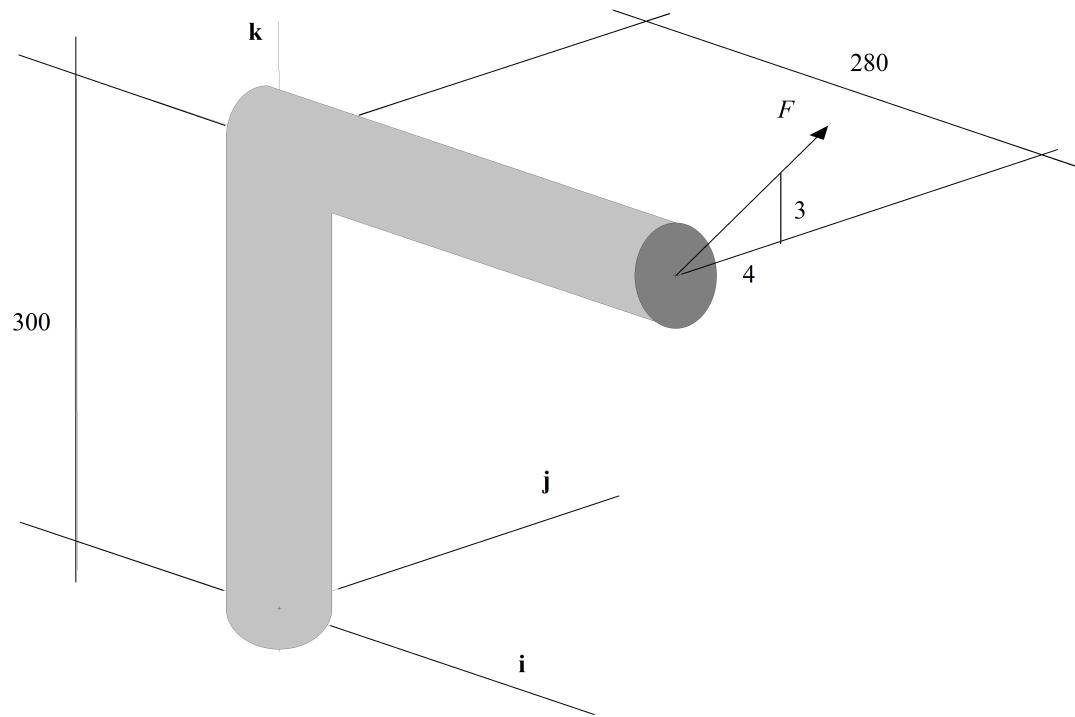


Figura 5.23: Projeto de uma peça sujeita a um esforço variável.

5.7 Diagramas para obtenção dos fatores q e k_t

A Fig.5.24 apresenta um gráfico do índice de sensibilidade ao entalhe para flexão alternada ou para carga axial alternada, em função do raio do entalhe r e o limite se ruptura σ_r .

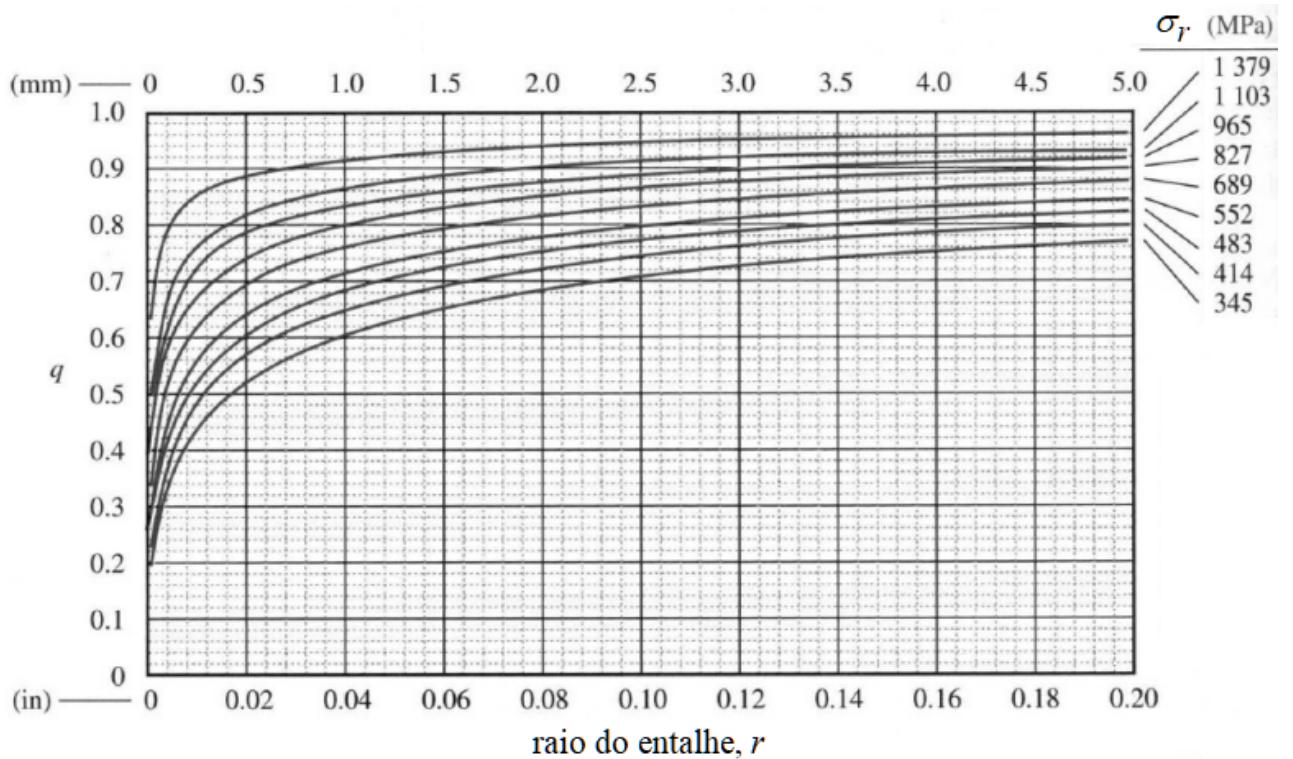


Figura 5.24: Índice de sensibilidade ao entalhe para aços (NORTON [4]).

Para os casos de torção alternada, pode-se obter os valores de q no mesmo gráfico da Fig.5.24, porém, acrescentando 138 MPa ao limite de ruptura.

O índice de sensibilidade ao entalhe, para peças de aço e de alumínio sujeitas à flexão alternada ou à carga axial alternada, pode ser calculado a partir da seguinte expressão:

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \quad (5.44)$$

Onde:

\sqrt{a} – Constante de *Neuber*, que depende somente do material;

\sqrt{r} – Raiz quadrada do raio do entalhe.

Para os aços, a constante de *Neuber* pode ser estimada em termos do limite de

ruptura σ_r do material:

$$\sqrt{a} = -0,160 + \frac{373}{\sigma_r} - \frac{32478}{{\sigma_r}^2} \quad (5.45)$$

Para alumínio recozido, pode-se utilizar a seguinte aproximação:

$$\sqrt{a} = -0,077 + \frac{210}{\sigma_r} - \frac{2147}{{\sigma_r}^2} \quad (5.46)$$

Para alumínio endurecido, recomenda-se adotar:

$$\sqrt{a} = 0,189 + \frac{269}{\sigma_r} - \frac{4188}{{\sigma_r}^2} \quad (5.47)$$

Nas expressões anteriores, \sqrt{a} é dada em $\sqrt{\text{mm}}$, ao passo que σ_r deve ser fornecida em MPa.

Para peças de **aço** sujeitas à torção alternada, pode-se utilizar as Eq.(5.45) com um limite de ruptura acrescido de 138 MPa (NORTON [4]).

Os fatores teóricos de concentração, k_t , para diversas peças estão apresentadas nas Figs.5.25, 5.26, 5.27, 5.28, 5.29, 5.30. Esses diagramas foram baixados do site [http://pt.scribd.com/doc/60913248/46/Fator-de-Concentracao-de-Tensoes-aplicado-a-tensoes-medias-e-Alternantes, dia 10 de Maio de 2014 às 12 horas e 50 min. Autor Prof. Douglas Roberto Zaiions. Elementos de Maquinas I \(Apostila 2008-01\).](http://pt.scribd.com/doc/60913248/46/Fator-de-Concentracao-de-Tensoes-aplicado-a-tensoes-medias-e-Alternantes, dia 10 de Maio de 2014 às 12 horas e 50 min. Autor Prof. Douglas Roberto Zaiions. Elementos de Maquinas I (Apostila 2008-01).)

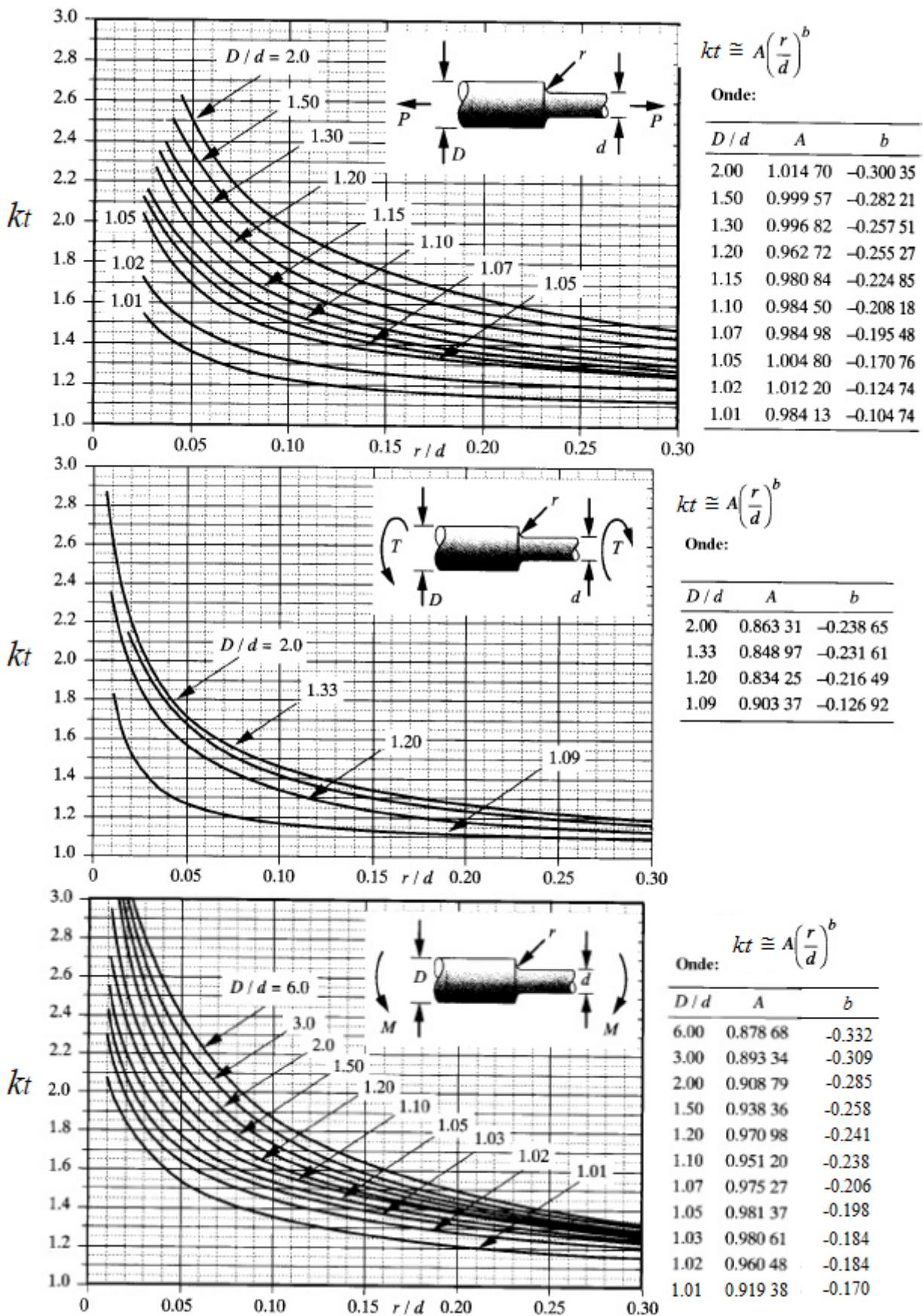
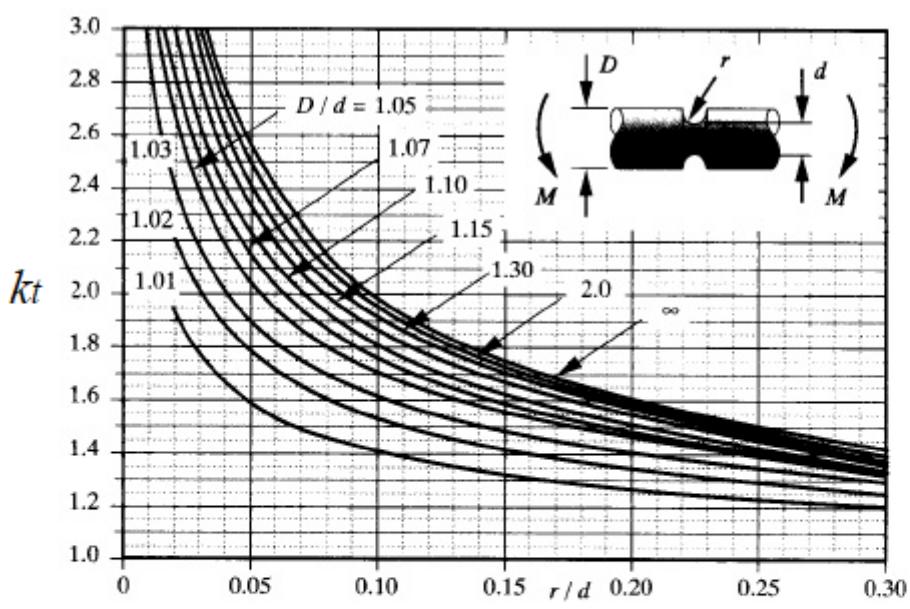


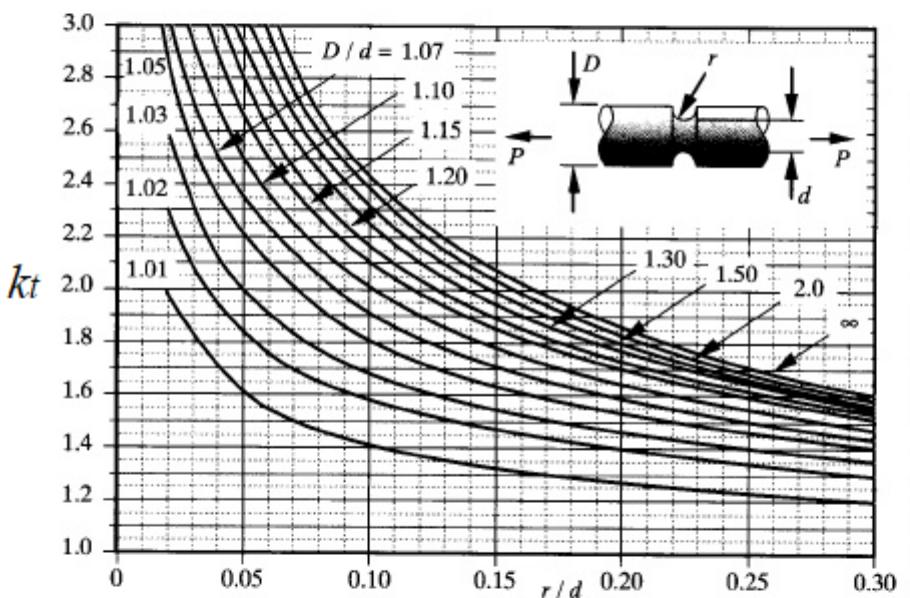
Figura 5.25: Fator teórico de concentração de tensão para eixos escalonados.



$$k_t \cong A \left(\frac{r}{d} \right)^v$$

Onde:

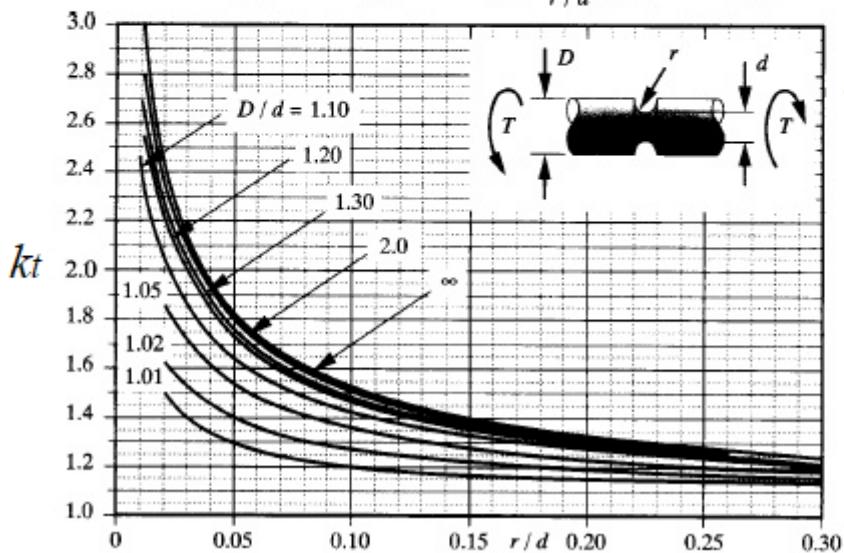
D/d	A	b
∞	0.948 01	-0.333 02
2.00	0.936 19	-0.330 66
1.50	0.938 94	-0.323 80
1.30	0.942 99	-0.315 04
1.20	0.946 81	-0.305 82
1.15	0.953 11	-0.297 39
1.12	0.955 73	-0.288 86
1.10	0.954 54	-0.282 68
1.07	0.967 74	-0.264 52
1.05	0.987 55	-0.241 34
1.03	0.990 33	-0.215 17
1.02	0.977 53	-0.197 93
1.01	0.993 93	-0.152 38



$$k_t \cong A \left(\frac{r}{d} \right)^b$$

Onde:

D/d	A	b
∞	0.993 72	-0.393 52
2.00	0.993 83	-0.382 31
1.50	0.998 08	-0.369 55
1.30	1.004 90	-0.355 45
1.20	1.010 70	-0.337 65
1.15	1.026 30	-0.316 73
1.10	1.027 20	-0.294 84
1.07	1.023 80	-0.276 18
1.05	1.027 20	-0.252 56
1.03	1.036 70	-0.216 03
1.02	1.037 90	-0.187 55
1.01	1.000 30	-0.156 09

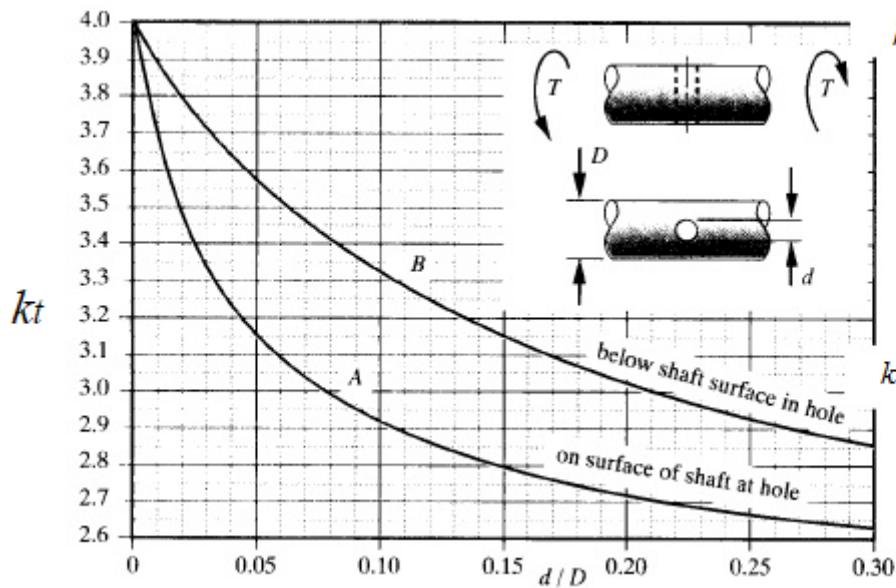


$$k_t \cong A \left(\frac{r}{d} \right)^b$$

Onde:

D/d	A	b
∞	0.881 26	-0.252 04
2.00	0.890 35	-0.240 75
1.30	0.894 60	-0.232 67
1.20	0.901 82	-0.223 34
1.10	0.923 11	-0.197 40
1.05	0.938 53	-0.169 41
1.02	0.968 77	-0.126 05
1.01	0.972 45	-0.101 62

Figura 5.26: Fator teórico de concentração de tensão para eixos com gola.

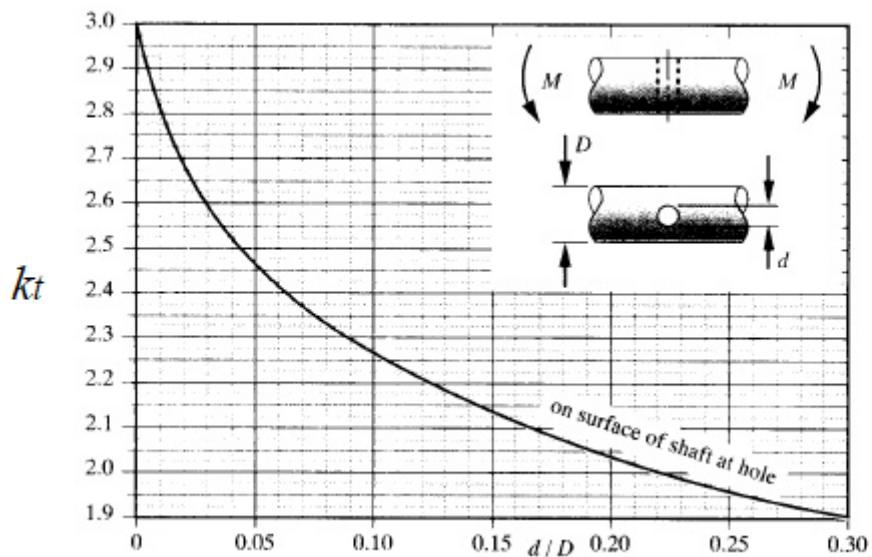


$$k_t \cong 3.9702 - 9.292 \frac{d}{D}$$

$$+ 27.159 \left(\frac{d}{D} \right)^2 + 30.231 \left(\frac{d}{D} \right)^3$$

$$- 393.19 \left(\frac{d}{D} \right)^4 + 650.39 \left(\frac{d}{D} \right)^5$$

$$+ 15.451 \left(\frac{d}{D} \right)^6$$



$$k_t \cong 3.92150 - 24.435 \frac{d}{D}$$

$$+ 234.06 \left(\frac{d}{D} \right)^2 - 1200.5 \left(\frac{d}{D} \right)^3$$

$$+ 3059.5 \left(\frac{d}{D} \right)^4 - 3042.4 \left(\frac{d}{D} \right)^5$$

$$k_t \cong 1.58990$$

$$- 0.63550 \log \left(\frac{d}{D} \right)$$

Figura 5.27: Fator teórico de concentração de tensão para eixos com furo.

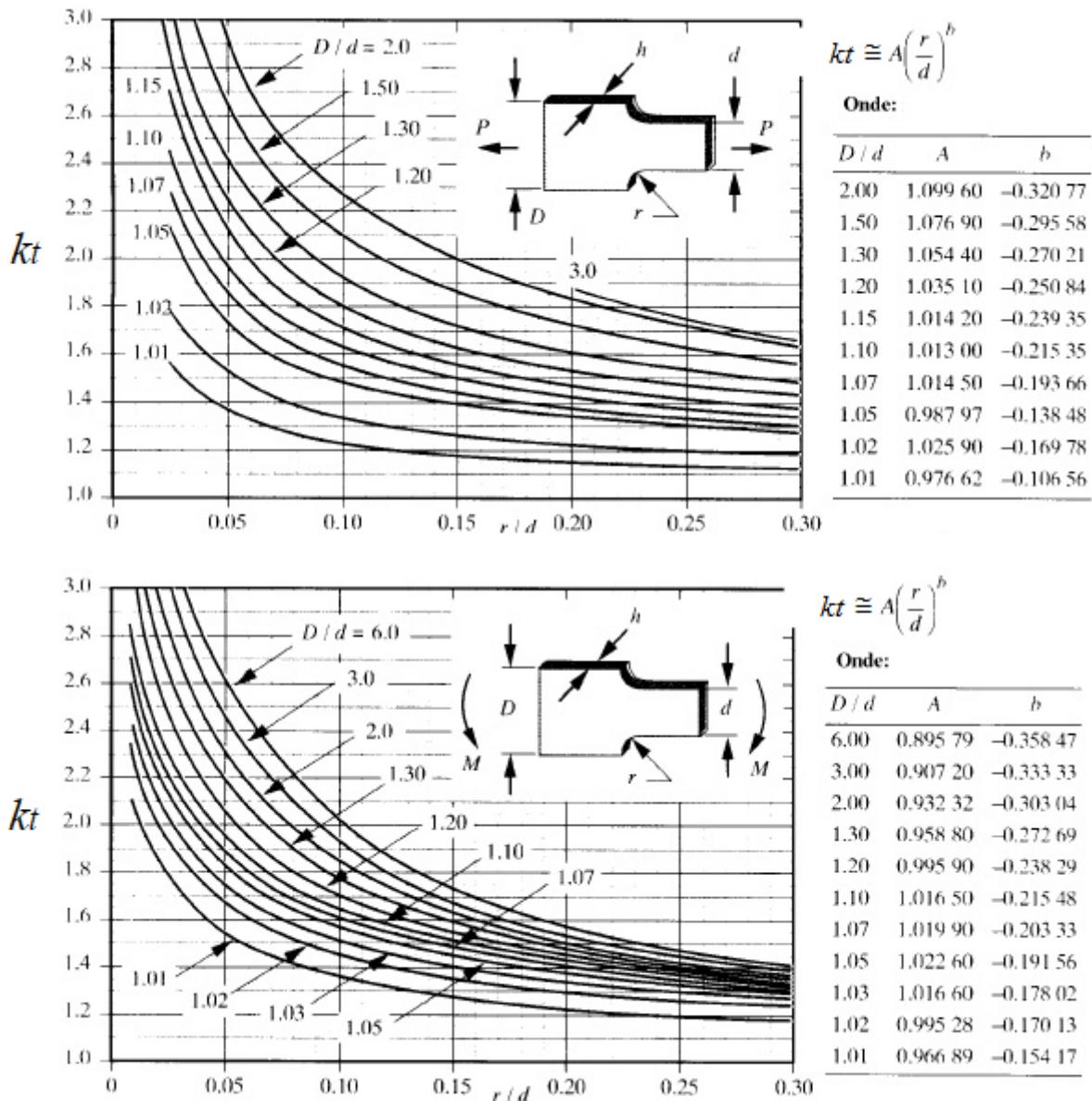


Figura 5.28: Fator de concentração de tensões de barras escalonadas.

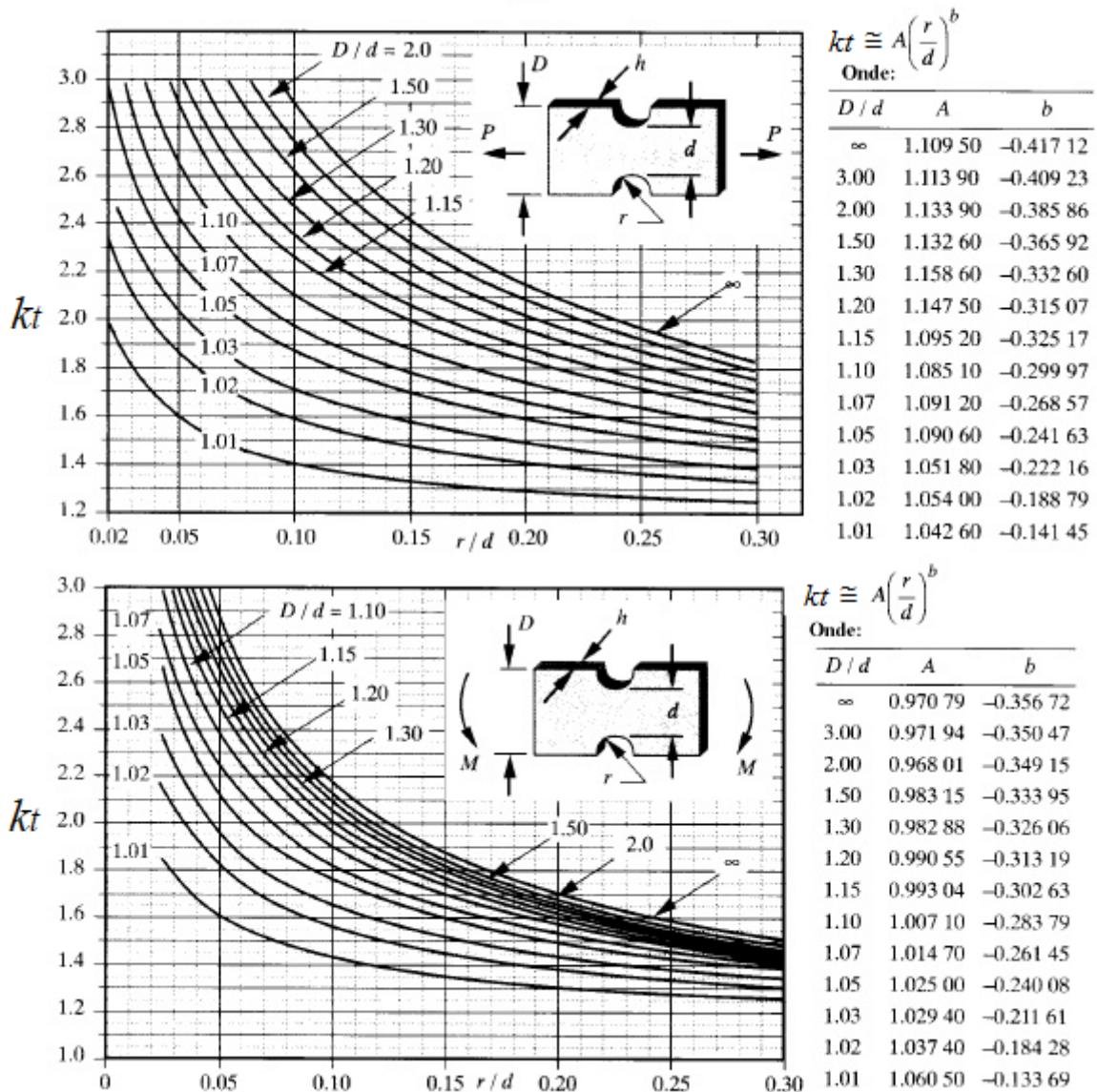


Figura 5.29: Fator de concentração de tensões de barras com entalhe.

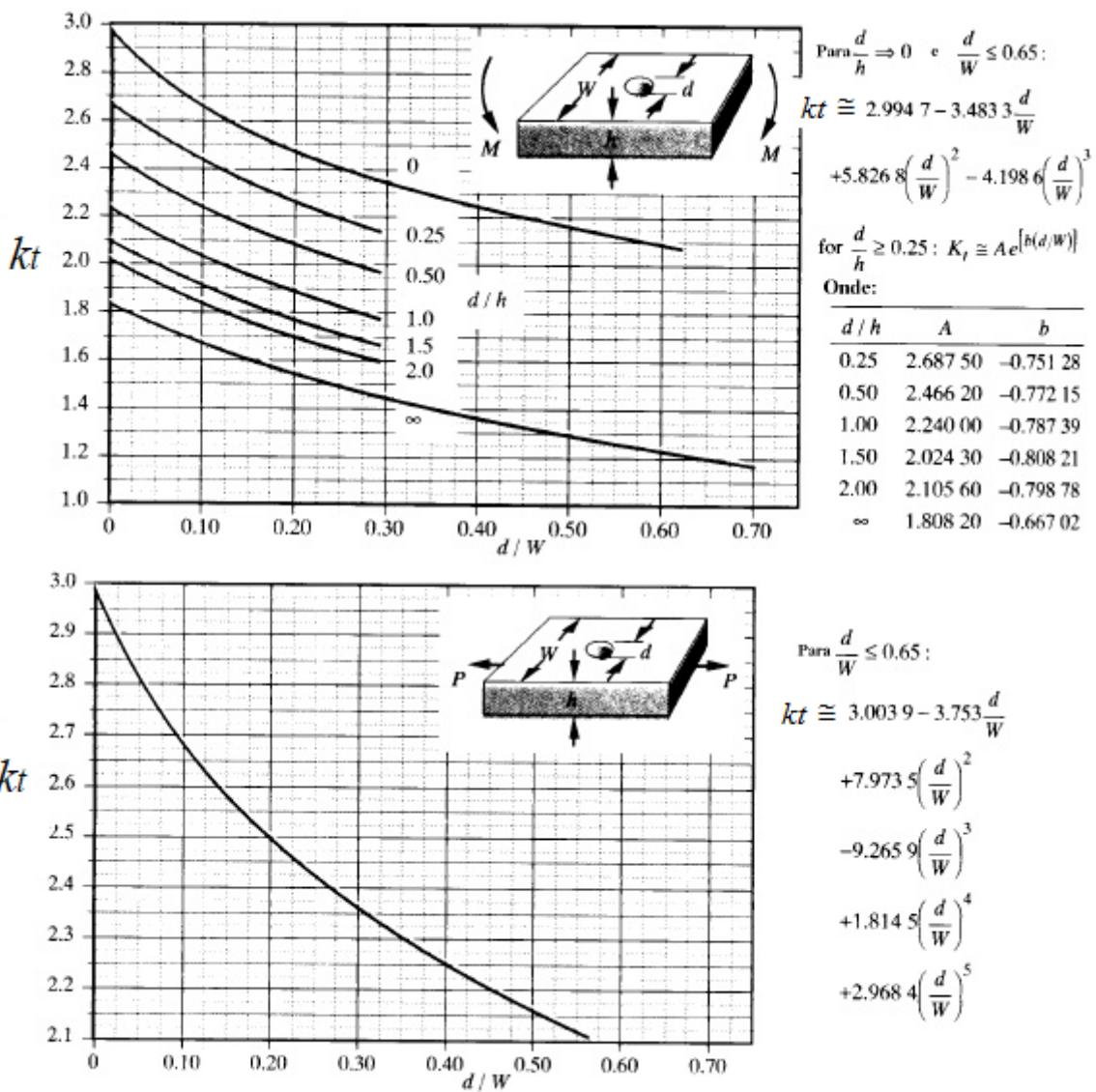


Figura 5.30: Fator de concentração de tensões de barras com entalhe.

5.8 Passos para projetar ou analisar elementos estruturais ou de máquinas sujeitos à fadiga

1. Estabelecer os parâmetros de resistência à fadiga

- (a) Encontrar o valor do índice de sensibilidade ao entalhe q (um para cada tipo de tensão $\frac{Mc}{I}$, $\frac{Tc}{J}$, $\frac{F}{A}$, etc);
- (b) Encontrar o fator teórico de concentração de tensão k_t (um para cada tipo de tensão);
- (c) Calcular o fator prático de concentração de tensão k_p (um para cada tipo de tensão).

$$k_p = 1 + q \cdot (k_t - 1) \quad (5.48)$$

(d) Calcular os limites de resistência à fadiga σ_n e τ_n

$$\sigma_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_n \quad (5.49)$$

$$\tau_n = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \tau'_n \quad (5.50)$$

2. Encontrar os parâmetros das tensões induzidas

- (a) Determinar as tensões induzidas máximas e mínimas. Por exemplo:

$$\sigma_{Max} = k_p \cdot \frac{32M_{Max}}{\pi \cdot d^3} \quad \tau_{Max} = k'_p \cdot \frac{16T_{Max}}{\pi \cdot d^3}$$

$$\sigma_{Min} = k_p \cdot \frac{32M_{Min}}{\pi \cdot d^3} \quad \tau_{Min} = k'_p \cdot \frac{16T_{Min}}{\pi \cdot d^3}$$

- (b) Encontrar as tensões médias e variável

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{Max} + \sigma_{Min}}{2} \quad (5.51)$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{Max} - \sigma_{Min}}{2} \quad (5.52)$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{Max} + \tau_{Min}}{2} \quad (5.53)$$

$$\tau_v = \frac{\tau_{Max} - \tau_{Min}}{2} \quad (5.54)$$

3. Encontrar as tensões equivalentes com base em um critério de fadiga arbitrariamente escolhido.

Por exemplo, Soderberg:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_v \frac{\sigma_e}{\sigma_n} \quad (5.55)$$

$$\tau = \tau_m + \tau_v \frac{\tau_e}{\tau_n} \quad (5.56)$$

Convém reiterar que no caso de combinação de carga axial e de flexão, dois valores de σ_n podem ser obtidos. Nessa situação, adote o menor deles.

4. Aplicar um critério de escoamento para dimensionar (no caso de projeto) ou encontrar o fator de segurança (no caso de análise).

Por exemplo, no caso do critério da energia de distorção máxima de von Mises:

$$(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_e}{N} \quad (5.57)$$

Capítulo 6

Elementos de união – Parafusos

6.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo estudar os esforços e as tensões desenvolvidas nos elementos de união, em particular nos parafusos de fixação. Dentre outros assuntos, as tensões nos filetes das roscas, o pré-carregamento, a fadiga e o carregamento excêntrico serão discutidos. Este último assunto válido inclusive para o caso de uniões rebitadas.

6.2 Definições e especificações

As medidas principais de um parafuso estão apresentadas na Fig.6.1.

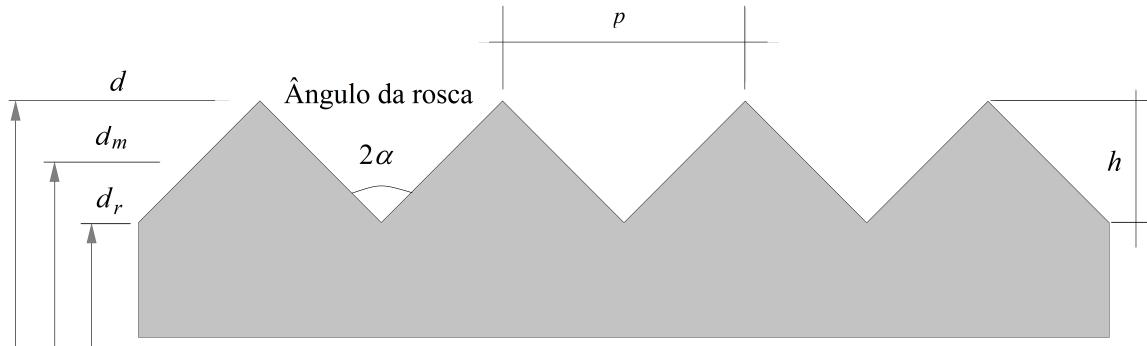


Figura 6.1: Medidas principais da rosca de um parafuso.

p : **passo** – Distância entre dois pontos correspondentes de filetes adjacentes, medida paralelamente ao eixo;

d : **diâmetro maior ou diâmetro nominal** – É o maior diâmetro da parte rosada;

dr : **diâmetro menor ou diâmetro da raiz** – É o menor diâmetro da parte rosada.;

dm : **diâmetro médio** – É a média dos diâmetros maior e menor;

h : **altura do filete** – Metade da diferença entre o diâmetros maior e menor;

Como apresentado na Fig.6.2, especifica-se uma rosca métrica, apresentando o seu diâmetro nominal e o passo em milímetros.

M 16 x 2

diâmetro nominal $d = 16 \text{ mm}$
passo $p = 2 \text{ mm}$

Figura 6.2: Especificações de uma rosca métrica.

Especifica-se uma rosca unificada estabelecendo-se o diâmetro nominal, o número de filetes por polegadas e a série, como mostrado na Fig.6.3.

$$\frac{3''}{4} - 10 \text{ UNC}$$

série grossa

número de fios por polegada = 10

diâmetro nominal $d = \frac{3''}{4}$

$$\frac{3''}{4} - 16 \text{ UNF}$$

série fina

número de fios por polegada = 16

diâmetro nominal $d = \frac{3''}{4}$

Figura 6.3: Especificações de uma rosca unificada.

Observação:

Roscas finas apresentam um maior número de fios do que uma rosca grossa. Promovem uma melhor fixação em comparação com as grossas e evitando com isso o afrouxamento da montagem, principalmente em máquinas que sofrem consideráveis efeitos de vibração.

6.3 Área de resistência à tração

De acordo com SHIGLEY [5], a experiência tem mostrado que **a resistência à tração dos parafusos é igual à resistência à tração de um cilindro de mesmo material, cuja medida do diâmetro é igual a média entre o diâmetro efetivo e o diâmetro menor**. Shigley também afirma que o diâmetro efetivo d_{ef} pode ser obtido com o auxílio da seguinte expressão:

$$d_{ef} = d - 0,649519 \cdot p \quad (6.1)$$

Fazendo:

$$d_0 = \frac{d_{ef} + d_r}{2} \quad (6.2)$$

Pode-se considerar que a área de resistência à tração de um parafuso é dada por:

$$A_t = \frac{\pi}{4} d_0^2 \quad (6.3)$$

6.4 Tensão nos filetes da rosca

Textualmente, de acordo com HALL *et al.* [6], as tensões nos filetes são calculadas considerando-se os mesmos como pequenas vigas em balanço engastadas no cilindro base, como mostra a Fig.6.4.

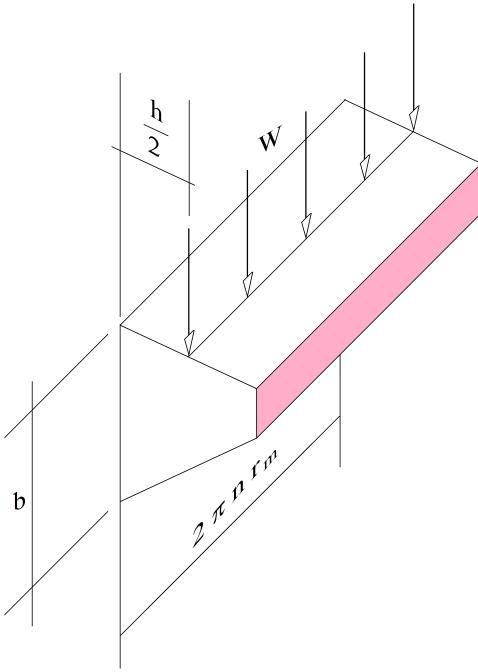


Figura 6.4: Rosca como uma viga em balanço.

Para determinar as principais tensões nos filetes a seguinte notação será adotada:

- n – número de voltas do filete sujeito a carga;
- r_m – raio médio;
- b – largura do filete na raiz;
- h – altura do filete;
- W – carga axial no parafuso;
- H – comprimento da parte da porca que está sob carga;

O número de voltas n do filete sujeito à carga poderá ser encontrado com o auxílio da seguinte expressão:

$$n = \frac{H}{p} \quad (6.4)$$

O comprimento da parte da porca que está sob carga H e o passo p estão mostrados na Fig.6.5. Quanto à altura h do filete, tem-se:

$$h = \frac{d - d_r}{2} \quad (6.5)$$

O raio médio é dado por:

$$r_m = \frac{d + d_r}{4} \quad (6.6)$$

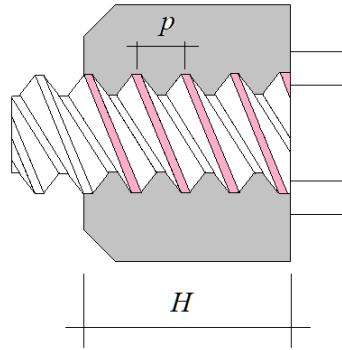


Figura 6.5: Comprimento da parte da porca que está sob carga.

Assim, as principais tensões no filete são:

a) **Tensão de cisalhamento na raiz do parafuso:**

$$\tau_r = \frac{W}{2\pi \cdot n \cdot r_m \cdot b} \quad (6.7)$$

b) **Tensão de compressão entre os filetes da porca e do parafuso:**

$$\sigma_c = \frac{W}{2\pi \cdot n \cdot r_m \cdot h} \quad (6.8)$$

c) **Tensão de cisalhamento no cilindro da base de um parafuso de potência:**

$$\tau_T = \frac{16T}{\pi \cdot d_r^3} \quad (6.9)$$

d) **Tensão normal no cilindro de base:**

$$\sigma_N = \frac{4W}{\pi \cdot d_r^2} \quad (6.10)$$

Exercício:

1. Um parafuso de potência deve erguer uma carga de 574 kN. Para isso, é necessário um momento de torção de 450 Nm. Sabendo-se que o diâmetro menor mede 41,5 mm, o maior, 50 mm, o passo, 8 mm, a largura do filete na raiz, 4 mm e o comprimento da porca, 48 mm, determine:
 - (a) Tensão de cisalhamento na raiz do parafuso;
 - (b) Tensão de compressão entre os filetes da porca e do parafuso;
 - (c) Tensão de cisalhamento no cilindro da base do parafuso;
 - (d) Tensão normal no cilindro de base.

Solução:

$$n = \frac{H}{p} = 6$$

$$h = \frac{d - d_r}{2} = 4,25 \text{ mm}$$

$$r_m = \frac{d + d_r}{4} = 22,875 \text{ mm}$$

$$\tau_r = \frac{W}{2\pi \cdot n \cdot r_m \cdot b} = 166,50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{W}{2\pi \cdot n \cdot r_m \cdot h} = 156,61 \text{ MPa}$$

$$\tau_T = \frac{16T}{\pi \cdot d_r^3} = 32,07 \text{ MPa}$$

$$\sigma_N = \frac{4W}{\pi \cdot d_r^2} = 424,35 \text{ MPa}$$

6.5 Pré-carregamento

Segundo SHIGLEY [5] o efeito do pré-carregamento é dar às partes em compressão *melhor resistência à carga de tração externa e aumentar a força de atrito entre as peças para resistirem melhor à carga de cisalhamento.* Verifica-se também que o pré-carregamento *aumenta a resistência à fadiga da união.*

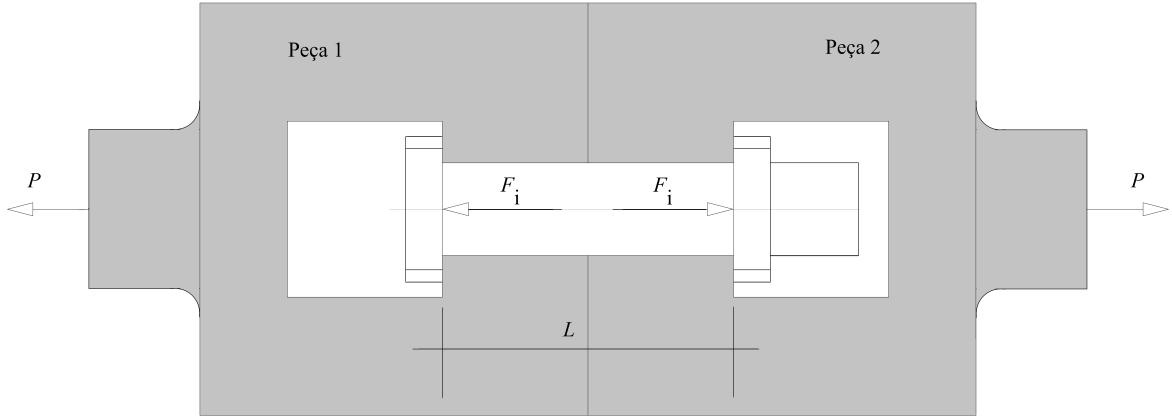


Figura 6.6: Montagem com pré-carga.

Aplicando-se uma carga inicial F_i , na montagem mostrada na Fig.6.6, o parafuso fica tracionado e as peças comprimidas. Em seguida, quando se aplica ao conjunto a carga trativa P , o parafuso fica ainda mais carregado e as peças sofrem um alívio de carga.

Sejam as seguintes forças:

- P – carga externa aplicada à união;
- F_i – força inicial ou pré-carga;
- P_p – porção da carga P suportada pelo parafuso;
- P_m – porção da carga P suportada pela montagem;
- F_p – carga total sobre o parafuso;
- F_m – carga total sobre a montagem;

O objetivo agora é determinar a carga total sobre o parafuso F_p e a carga total sobre a montagem F_m .

$$F_p = F_i + P_p \quad (\text{aqui } F_i \text{ traciona o parafuso}) \quad (6.11)$$

$$F_m = -F_i + P_m \quad (\text{aqui } F_i \text{ comprime a montagem}) \quad (6.12)$$

Deve ficar claro que a carga externa P é dada por:

$$P = P_p + P_m \quad (6.13)$$

E que o alongamento sofrido pelo parafuso ao se aplicar a carga externa P é dado por:

$$\Delta L_p = \frac{P_p \cdot L}{E_p \cdot S_p} \quad (6.14)$$

Onde:

- L – comprimento do parafuso que está sujeito a carga (espessura das peças que estão unidas);
- E_p – módulo de elasticidade do parafuso;
- S_p – área da secção transversal do parafuso;

Observação:

No cálculo da área da secção transversal S_p , o correto seria utilizar o diâmetro da raiz d_r (ou mesmo d_0 do da secção 6.3). Porém, por uma questão de segurança, adota-se o diâmetro nominal, pois assim a carga F_p calculada sobre o parafuso fica superestimada e seremos obrigados a selecionar um parafuso mais robusto.

Da Eq.6.14, vem

$$P_p = \frac{E_p \cdot S_p}{L} \Delta L_p \quad (6.15)$$

A chamada **constante de rigidez do parafuso** k_p é definida matematicamente por:

$$k_p = \frac{E_p \cdot S_p}{L} \quad (6.16)$$

Portanto,

$$P_p = k_p \cdot \Delta L_p \quad (6.17)$$

Donde se conclui que:

$$\Delta L_p = \frac{P_p}{k_p} \quad (6.18)$$

Com um raciocínio análogo, pode-se demonstrar que, ao se aplicar a carga externa P , a montagem se distende de:

$$\Delta L_m = \frac{P_m}{k_m} \quad (6.19)$$

Supondo que não ocorra um afrouxamento da junta, então,

$$\Delta L_p = \Delta L_m \quad (6.20)$$

$$\frac{P_p}{k_p} = \frac{P_m}{k_m} \quad (6.21)$$

Onde k_m é denominada **constante de rigidez da montagem**. Neste caso,

$$P_m = \frac{k_m}{k_p} \cdot P_p \quad (6.22)$$

Substituindo a Eq.(6.22) na Eq.(6.13), vem:

$$P = P_p + \frac{k_m}{k_p} \cdot P_p \quad (6.23)$$

Donde se conclui que:

$$P_p = \frac{k_p}{k_p + k_m} \cdot P \quad (6.24)$$

Com base na Eq.(6.22), escreve-se:

$$P_m = \frac{k_m}{k_p + k_m} \cdot P \quad (6.25)$$

Da Eq.(6.11), vem:

$$F_p = \frac{k_p}{k_p + k_m} \cdot P + F_i \quad (6.26)$$

Da Eq.(6.12), vem:

$$F_m = \frac{k_m}{k_p + k_m} \cdot P - F_i \quad (6.27)$$

Observação:

As Eqs.(6.26) e (6.27) são válidas até o ponto que ainda exista alguma compressão nas peças da união. Se a carga externa P for demasiadamente grande, para suprimir todo o efeito de compressão na montagem, então a montagem se afrouxa e a carga será inteiramente suportada pelo parafuso.

6.5.1 Constante da mola ou constante de rigidez

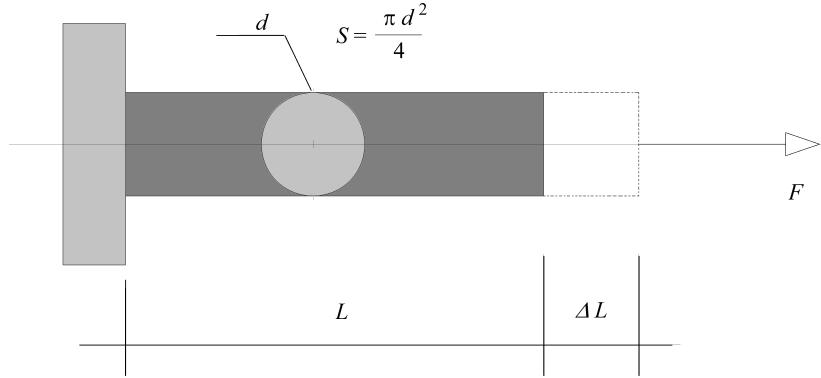


Figura 6.7: Alongamento de uma barra primática.

Sabe-se que uma barra prismática, como mostrada na Fig.6.7, de comprimento L , módulo de elasticidade E e área de secção transversal S , quando solicitada por uma força axial P , se distende (ou se encurta) de:

$$\Delta L = \frac{P \cdot L}{E \cdot S} \quad (6.28)$$

$$P = \frac{E \cdot S}{L} \Delta L \quad (6.29)$$

A Eq.(6.29) pode ser escrita na forma:

$$F = k \cdot x \quad (6.30)$$

Onde a constante k é dada por:

$$k = \frac{E \cdot S}{L} \quad (6.31)$$

No caso de parafusos,

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad (6.32)$$

Onde d representa o diâmetro nominal (maior diâmetro) do parafuso. Assim,

$$k_p = \frac{\pi d^2 \cdot E}{4L} \quad (6.33)$$

Deve ficar claro que, na Eq.(6.33), L não se refere ao comprimento total do parafuso e sim à espessura total das peças que estão unidas.

Quanto à montagem, na maioria das vezes, é muito difícil encontrar sua constante de rigidez k_m . SHIGLEY [5] recomenda usar a seguinte aproximação:

$$k_m = \frac{2\pi \cdot d^2 \cdot E}{L} \quad (6.34)$$

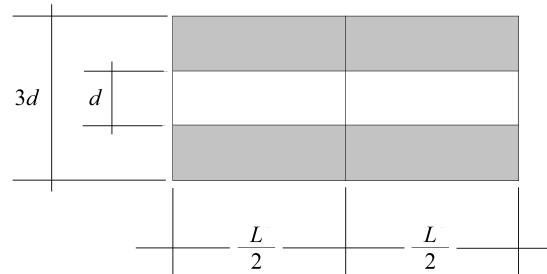


Figura 6.8: Cilindros vazados em série para a determinação de k_m .

A Eq.(6.34) é obtida determinando-se uma constante k de uma montagem composta por dois cilindros em série de diâmetro interno d e diâmetro externo $3d$, como apresentado na Fig.6.8.

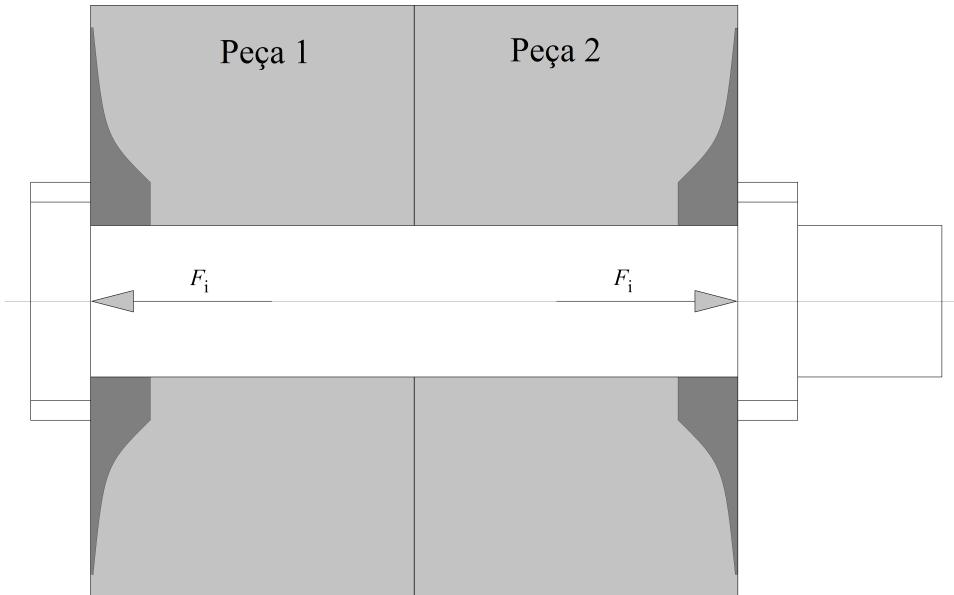


Figura 6.9: Distribuição hipotética das cargas compressivas em uma montagem.

A Fig.6.9 mostra uma distribuição hipotética das cargas compressivas na montagem devido à ação da força inicial de aperto F_i .

As Eqs.(6.33) e (6.34) mostram que, para um mesmo material, pode-se adotar:

$$k_m = 8k_p \quad (6.35)$$

$$F_p = \frac{1}{9}P + F_i \quad (6.36)$$

Da Eq.(6.12), vem:

$$F_m = \frac{8}{9}P - F_i \quad (6.37)$$

Montagem como molas em série

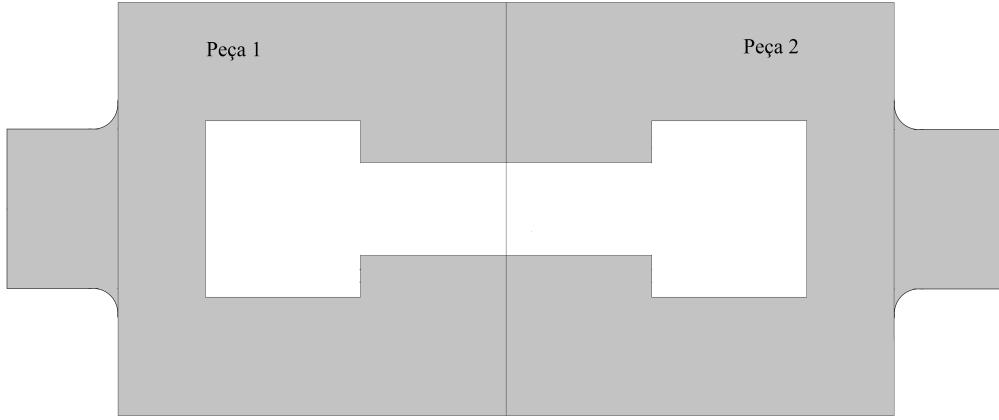


Figura 6.10: Montagem como molas em série em compressão.

Analizando isoladamente a montagem (ou seja retirando-se o parafuso), as peças mostradas na Fig.6.10 se comportam como molas em série em compressão. Portanto, a constante de rigidez resultante da montagem pode ser obtida através de:

$$\frac{1}{k_m} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (6.38)$$

No caso de mais de duas peças na montagem, tem-se:

$$\frac{1}{k_m} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \dots \quad (6.39)$$

Onde os k_i representam as rigidezes das peças e não do parafuso. Note que quando na união existe uma junta macia, sua rigidez será tão pequena, em comparação com a das outras peças, que o seu inverso será tão grande que suplantará o inverso das rigidezes das demais peças.

Sendo k_j a rigidez da junta macia, então:

$$\frac{1}{k_m} = \frac{1}{k_j} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (6.40)$$

Os termos $\frac{1}{k_1}$ e $\frac{1}{k_2}$ são desprezíveis na presença de $\frac{1}{k_j}$. Assim,

$$\frac{1}{k_m} = \frac{1}{k_j} \quad (6.41)$$

Ou seja,

$$k_m = k_j \quad (6.42)$$

Exercícios:

1. Demonstre que a rigidez k_m de uma associação de molas em série pode ser obtida a partir da Eq.(6.38).
2. Demonstre a Eq.(6.34).

6.5.2 Carga inicial ou Pré-carga

SHIGLEY [5] recomenda usar parafusos confeccionados de material de alta qualidade e que apresentem um diagrama tensão × deformação no qual a curva evolua suavemente até a ruptura, sem que o escoamento apareça claramente como mostra Fig.6.11(a).

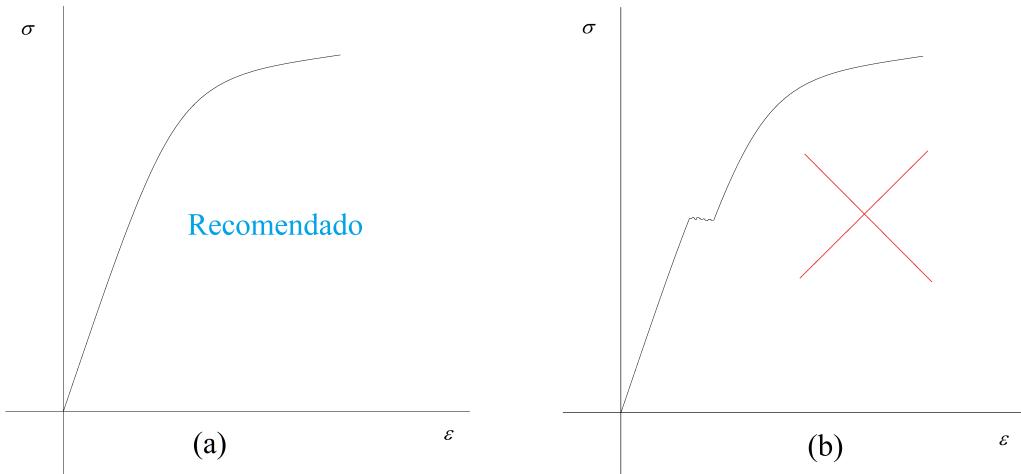


Figura 6.11: Diagrama tensão – deformação para parafusos.

Em parafusos **estaticamente** carregados, BUDYNAS e NISBETT [10] diz que pode-se adotar os seguintes valores para a carga inicial de aperto:

$$F_i = \begin{cases} 0,90 R_p \cdot A_t & \text{para uma fixação permanente} \\ 0,75 R_p \cdot A_t & \text{para uma fixação não permanente} \end{cases} \quad (6.43)$$

Onde:

- F_i – carga inicial ou pré-carga;
- R_p – resistência de prova (tem dimensão de tensão);
- A_t – área resistência à tração dada pela Eq.(6.3).

Geralmente os fabricantes fornecem o valor da resistência de prova (R_p) dos parafusos. Não ausência de tal informação, BUDYNAS e NISBETT [10] diz que é seguro adotar:

$$R_p = 0,855 \cdot \sigma_e \quad (6.44)$$

6.5.3 Torque necessário para o pré – carregamento

Deve-se estimar o valor do torque T necessário para o estabelecimento do pré-carregamento da montagem, ou calcular o número fracionário de voltas da porca,

necessário para promover o pré-carregamento.

Com auxílio da expressão do torque necessário para se erguer uma carga, pode-se demonstrar que:

$$T = \begin{cases} 0,20 d \cdot F_i & (\text{sem lubrificação}) \\ 0,15 d \cdot F_i & (\text{com lubrificação}) \end{cases} \quad (6.45)$$

Onde:

T – Torque necessário para se estabelecer a pré-carga;

d – diâmetro nominal;

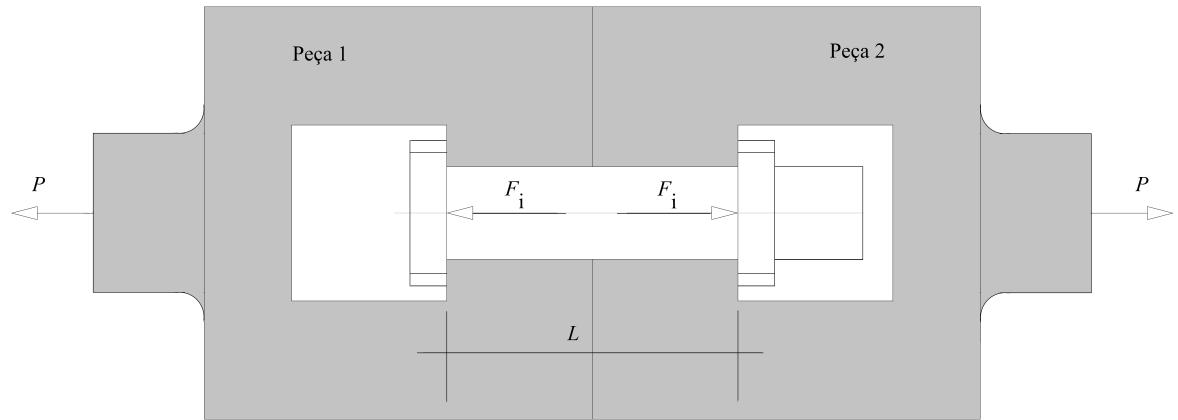


Figura 6.12: Montagem para análise do pré – carregamento.

Exercícios:

1. Considerando $k_m = 8k_p$ na Fig.6.12 e sendo a pré-carga $F_i = 5000$ N e a carga externa $P = 5400$ N, determinar força de tração total no parafuso e a força de compressão total na montagem.

Resposta: $F_p = 5600$ N e $F_m = -200$ N .

2. Um parafuso que apresenta um área de resistência à tração de 483 mm^2 e uma resistência de prova de 380 MPa será utilizado em um conjunto que deverá suportar uma carga de 180 kN . Sabendo-se que $k_m = 8k_p$ e que o diâmetro nominal mede 25 mm , determine:
 - a) A força inicial de aperto (fixação permanente);
 - b) O torque de montagem (sem lubrificação);
 - c) A carga total suportada pelo parafuso;
 - d) A carga total suportada pela montagem.

Solução:

Os dados do problema são:

$$A_t = 483 \times 10^{-6} \text{ m}^2;$$

$$R_p = 380 \text{ MPa};$$

$$P = 180 \text{ kN};$$

$$k_m = 8k_p.$$

a) $F_i = 0,90R_p \cdot A_t$ Resposta: $F_i = 165186 \text{ N}$

b) $T = 0,20 d \cdot F_i$ Resposta: $T = 826 \text{ Nm}$

c) $F_p = \frac{k_p}{k_p + k_m} \cdot P + F_i$ Resposta: $F_p = 185186 \text{ N}$

d) $F_m = \frac{k_m}{k_p + k_m} \cdot P - F_i$ Resposta: $F_p = -5186 \text{ N}$

6.6 Considerações sobre fadiga

Segundo SHIGLEY [5], a maioria dos carregamentos de fadiga encontrados na análise de juntas parafusadas é do tipo em que a carga externa aplicada flutua entre zero e uma força máxima P_{max} . Assim, com base na Eq.(6.26), escreve-se:

$$F_{p\ max} = \frac{k_p}{k_p + k_m} \cdot P_{max} + F_i \quad (6.46)$$

$$F_{p\ min} = F_i$$

Como

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{Max} - \sigma_{Min}}{2}$$

Então,

$$\sigma_v = \frac{F_{p\ max} - F_i}{2A_t} \quad (6.47)$$

Onde A_t , dada pela Eq.(6.3), representa a área de resistência à tração do parafuso.

Substituindo a Eq.(6.46) na Eq.(6.47) obtém-se:

$$\sigma_v = \frac{k_p}{k_p + k_m} \cdot \frac{P_{max}}{2A_t} \quad (6.48)$$

Note que:

$$\frac{k_p}{k_p + k_m} = \frac{1}{1 + \frac{k_m}{k_p}} \quad (6.49)$$

Portanto, para diminuir a magnitude da tensão variável σ_v é necessário que a razão $\frac{k_m}{k_p}$ seja a maior possível. Isso é conseguido fazendo k_m muito grande ou k_p muito pequeno. Outra maneira de reduzir o componente variável é promover o aumento o número de parafusos, tomado-se o cuidado para que este procedimento garanta a diminuição da carga total suportada por cada um deles.

Quanto à tensão média, tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{\sigma_{Max} + \sigma_{Min}}{2} \\ \sigma_m &= \frac{F_{p\ max} + F_i}{2A_t} \end{aligned} \quad (6.50)$$

Substituindo a Eq.(6.46) na Eq.(6.50), encontra-se:

$$\sigma_m = \frac{\frac{k_p}{k_p + k_m} \cdot P_{max} + F_i + F_i}{2A_t}$$

$$\sigma_m = \frac{k_p}{k_p + k_m} \frac{P_{max}}{2A_t} + \frac{F_i}{A_t} \quad (6.51)$$

Ou ainda:

$$\sigma_m = \sigma_v + \frac{F_i}{A_t} \quad (6.52)$$

Segundo SHIGLEY [5], caso não se disponha de nenhuma informação adicional, deve-se considerar que o acabamento do parafuso seja idêntico a de uma peça usinada ao se determinar o limite de resistência à fadiga σ_n .

SHIGLEY [5] também recomenda utilizar a Tabela 6.1 para encontrar os valores dos fatores práticos de concentração de tensão $k_{p'}$ descritos na Seção 5.5. Também afirma que é seguro, nesta tabela, considerar que os filetes das roscas sejam laminados, para estimar os valores de $k_{p'}$.

Tabela 6.1: Fator prático de concentração de tensão $k_{p'}$ para parafusos.

Classe SAE	Classe Métrica	Roscas Laminadas	Roscas Usinadas	Filete
0 a 2	3,6 a 5,8	2,2	2,8	2,1
4 a 8	6,6 a 10,9	3,0	3,8	2,3

Fonte: SHIGLEY [5]

Neste caso, a Eq.6.48 deve ser corrigida da seguinte forma:

$$\sigma_v = \frac{k_p}{k_p + k_m} \cdot \frac{k_{p'} P_{max}}{2A_t} \quad (6.53)$$

Quanto a Eq.6.52, esta permanece inalterada, ou seja:

$$\sigma_m = \sigma_v + \frac{F_i}{A_t} \quad (6.54)$$

Observação:

No projeto de juntas aparafusadas sujeitas à fadiga, não se deve adotar um fator de segurança maior do que 1,3. Uso de fatores de segurança muito elevados impossibilita o dimensionamento baseado nos critérios de fadiga apresentados no Capítulo 5.

Exercícios:

1. Um parafuso apresenta uma área de resistência à tração de 483 mm^2 . Supondo-se que a montagem será submetida a um carregamento que varia entre 0 e 180 kN, determine a tensão média e a tensão variável no parafuso. Adote $k_{p'} = 2,2$ (*vide exercício equivalente anterior*).

Resposta: $\sigma_v = 45,55 \text{ MPa}$, $\sigma_m = 387,55 \text{ MPa}$.

2. Com os dados do exercício anterior, supondo que $\sigma_e = 450 \text{ MPa}$ e $\sigma_n = 200 \text{ MPa}$, mostre que fator de segurança que o parafuso está trabalhando é aproximadamente $N = 0,92$ (Soderberg).

Apresente sugestões para contornar esse problema.

3. Um parafuso usinado de aço, com diâmetro nominal 48 mm, diâmetro da raiz de 45,84 mm, passo de 2 mm, limite de escoamento 400 MPa, limite de ruptura 700 MPa, será utilizado numa montagem de fixação permanente que trabalhará sob uma temperatura de 80°C e uma carga externa P que varia entre 0 e 300 kN. O comprimento do parafuso sob tensão mede 100 mm. Sendo $k_{p'} = 2,2$, determine qual o fator de segurança estará trabalhando o parafuso. Adote o critério da ASME, bem como $k_m = 8k_p$.

4. Questão de projeto:

Adotando o critério de resistência à fadiga da ASME, determine o diâmetro de um parafuso de aço usinado, com limite de escoamento de 800 MPa, limite de ruptura de 1200 MPa, para suportar 100000 ciclos sob a ação de uma carga externa que varia de zero a 9000 N. O parafuso será usado numa montagem com fixação permanente semelhante ao da Fig.6.12. É dado que o comprimento do parafuso que está sob carga mede 100 mm. .

6.7 Carregamento excêntrico

A montagem excêntrica esquematizada na Fig.6.13 possui quatro parafusos. Na extremidade livre, atua uma carga P , cuja linha de ação dista L do centroide \mathbf{G} dos parafusos.

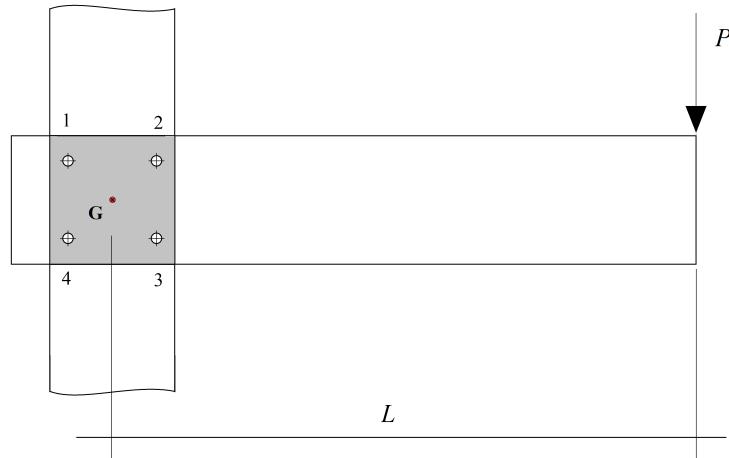


Figura 6.13: Carga excêntrica em uma montagem.

Um sistema mecanicamente equivalente ao da Fig.6.13 pode ser obtido aplicando-se a carga P no centroide do conjunto de parafusos, juntamente com um momento $M_G = L \cdot P$, como mostrado na Fig.6.14.

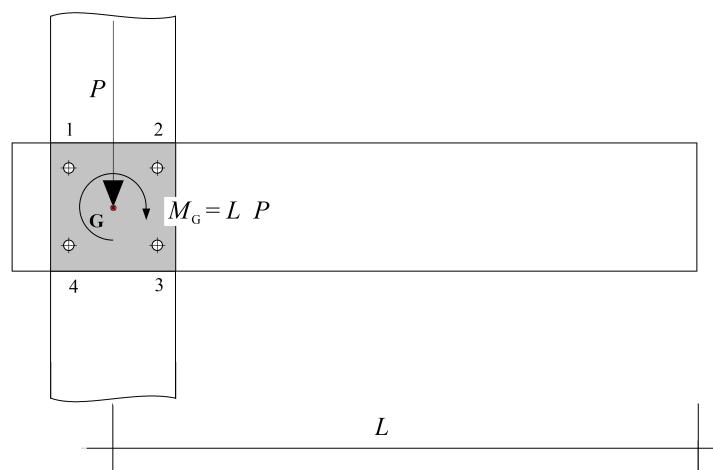


Figura 6.14: Sistema equivalente reduzido ao centróide.

Supondo que o carregamento seja elástico, outro sistema equivalente pode ser obtido pela superposição de dois outros carregamentos: o primeiro composto apenas por uma carga P , aplicada no centroide e o segundo formado por um momento

M_G , como mostra a Fig.6.15.

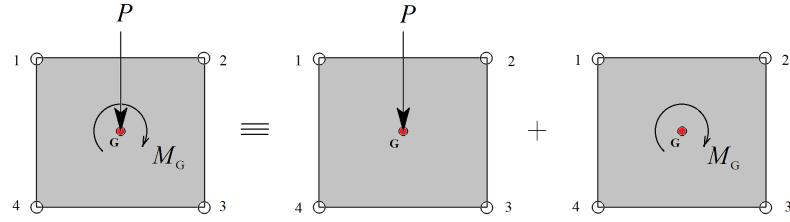


Figura 6.15: Sistema mecanicamente equivalente à superposição de dois outros.

Com base na Fig.6.16, a carga total sobre um parafuso i pode ser pensada como uma composição de duas cargas distintas: P_i e Q_i . O procedimento de obtenção de P_i , em cada um dos parafusos, consiste em considerar que a **carga externa P seja dividida igualmente entre cada um deles**, como mostra a Fig.6.16. Quanto às cargas Q_i , elas são escolhidas de forma que sejam direcionadas perpendicularmente aos respectivos segmentos de reta G_i .

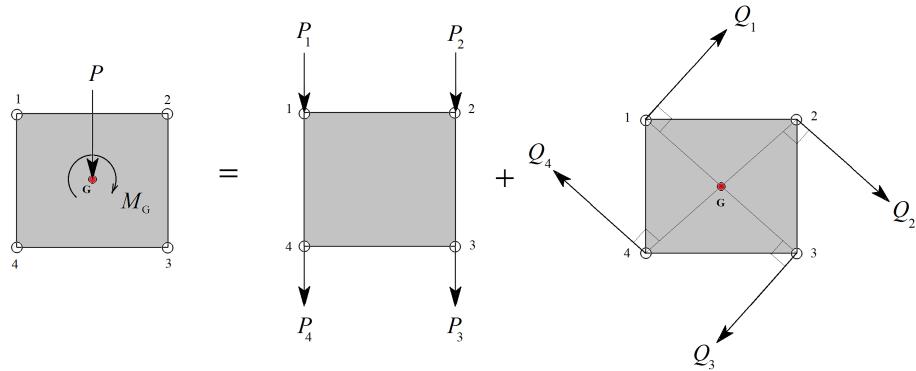


Figura 6.16: Direção das cargas P_i e Q_i .

As cargas Q_i podem ser encontradas supondo que o **parafuso mais distante do centróide suporte a maior carga**. De acordo com HIGDON *et al.* [11], a explicação para esse princípio é a seguinte: Ao se aplicar uma carga do tipo mostrada na Fig.6.13, a *placa* sofre uma pequena rotação elástica em torno, por exemplo, do centróide do grupo de parafusos. Por hipótese, toda linha reta da *placa* continua reta após a aplicação da carga. Assim, as deformações serão maiores nos parafusos mais distantes do centróide. Portanto, estarão sujeitos a tensões cisalhantes maiores, ou seja, suportam os maiores esforços (Fig.6.17).

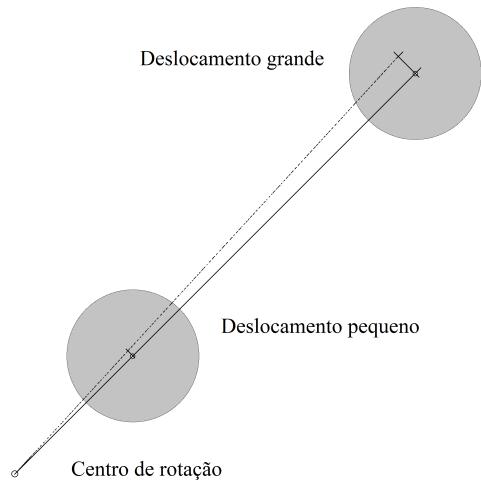


Figura 6.17: O parafuso mais distante do centro de rotação apresenta um deslocamento maior.

Procedimento para determinação das cargas nos parafusos em montagens excêntricas:

Seja a montagem esquematizada na figura onde se deseja encontrar as cargas em cada um dos parafusos.

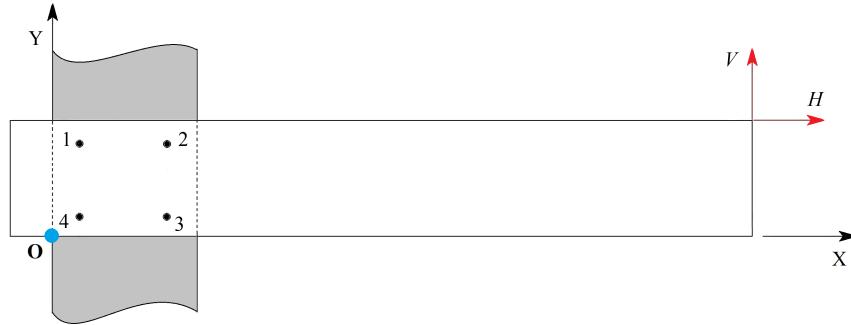


Figura 6.18: Montagem excêntrica para determinação das cargas nos parafusos.

- 1) Arbitrar um sistema de referência XYZ e indicar a origem **O** do sistema. Numere os parafusos de tal forma que o de número 1 NÃO fique na origem.
- 2) Fornecer a posição (x_i, y_i) de cada um dos parafusos em relação ao sistema de referência arbitrado.

$$x_1 = \quad y_1 =$$

$$x_n = \quad y_n =$$

- 3) Encontrar a posição $\mathbf{G}(\bar{x}, \bar{y})$ do centroide do grupo de parafusos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + \dots + x_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (6.55)$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + \dots + y_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (6.56)$$

Onde A_i representa a área da seção transversal do furo onde o parafuso i está inserido.

Caso os n parafusos sejam idênticos, então a posição do centroide será dado por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (6.57)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad (6.58)$$

4) Fornecer a posição do ponto **A** (x_A, y_A) de aplicação da carga.

$$x_A = \quad y_A =$$

5) Encontre o vetor **GA**

$$\mathbf{GA} = \mathbf{A} - \mathbf{G} \quad (6.59)$$

6) Determinar as distâncias r_i entre o centroide **G** e o parafuso i .

$$r_i = \sqrt{(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2} \quad (6.60)$$

7) Determinar o momento resultante \mathbf{M}_G e o seu módulo

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{GA} \times V + \mathbf{GA} \times H \quad (6.61)$$

$$M_G = |\mathbf{M}_G| \quad (6.62)$$

8) Dividir igualmente as cargas externas V e H entre os parafusos.

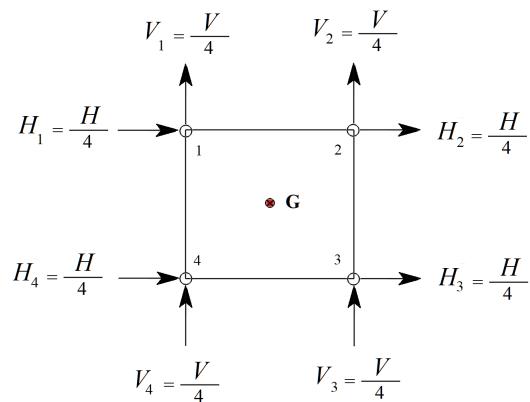


Figura 6.19: Carga P dividida igualmente entre os parafusos.

9) Igualar M_G ao momento das forças Q_i em relação a \mathbf{G}

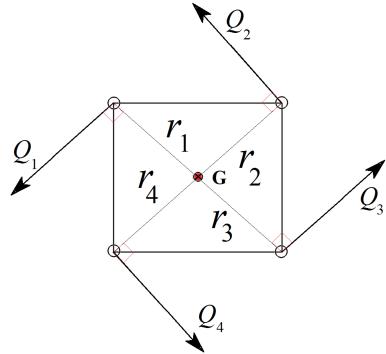


Figura 6.20: Cargas Q_i ortogonais aos respectivos r_i .

Como mostra a Fig.6.20, cada uma das forças Q_i é ortogonal ao respectivo segmento de reta r_i que une o centroide ao parafuso i . Portanto,

$$r_1 \cdot Q_1 + r_2 \cdot Q_2 + \dots + r_n \cdot Q_n = M_G \quad (6.63)$$

10) Escrever as igualdades das razões $\frac{Q}{r}$

$$\frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2} = \dots = \frac{Q_n}{r_n} \quad (6.64)$$

$$Q_i = \frac{r_i}{r_1} Q_1 \quad (6.65)$$

11) Resolver a equação formada pelas expressões 6.63 e 6.65 e encontrar todos os Q_{is} .

$$Q_1 = \frac{r_1 M_G}{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} \quad (6.66)$$

12) Encontrar as forças F_{is} em cada um dos parafusos.

Por exemplo, para o parafuso de número 3, as forças atuantes estão mostradas na Fig.6.21.

(Neste exemplo, o parafuso 3 é o mais tensionado dentre os quatro)

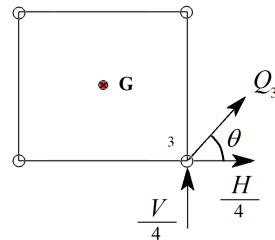


Figura 6.21: Cargas total F_i sobre o parafuso i .

$$\mathbf{F}_3 = \left[Q_3 \cos \theta + \frac{H}{4} \right] \mathbf{i} + \left[Q_3 \sin \theta + \frac{V}{4} \right] \mathbf{j}$$

$$F_i = |\mathbf{F}_i|$$

13) Analisar a tensão de cisalhamento.

A tensão de cisalhamento τ_i é dada simplesmente pela razão da força F_i e a área da seção transversal do parafuso i , baseada no seu diâmetro nominal d .

$$\tau_i = \frac{4F_i}{\pi d^2}$$

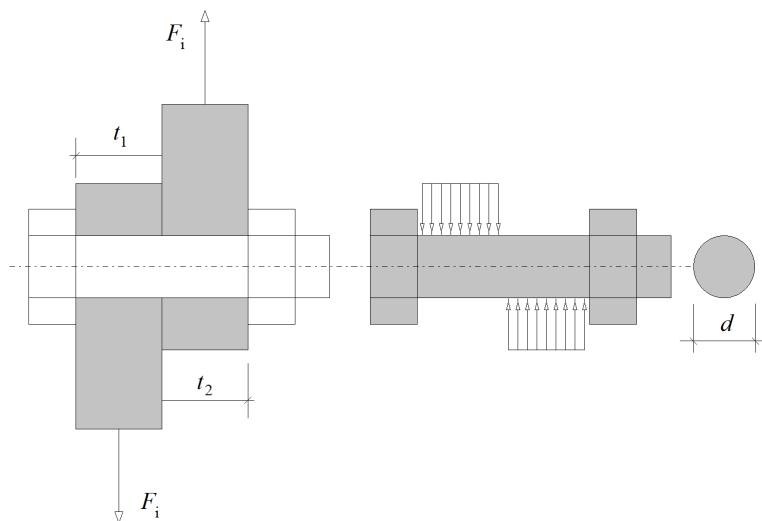


Figura 6.22: Compressão superficial e cisalhamento em um parafuso.

14) Analisar a tensão de compressão superficial.

Quanto à tensão de compressão superficial σ_{ci} , ela não é calculada com base na área real de compressão (Fig.6.23) mas sim sobre a área projetada (Fig.6.24).

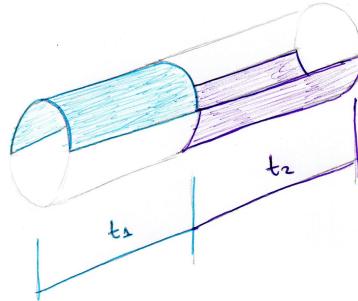


Figura 6.23: Áreas reais sujeitas à compressão superficial em parafusos.

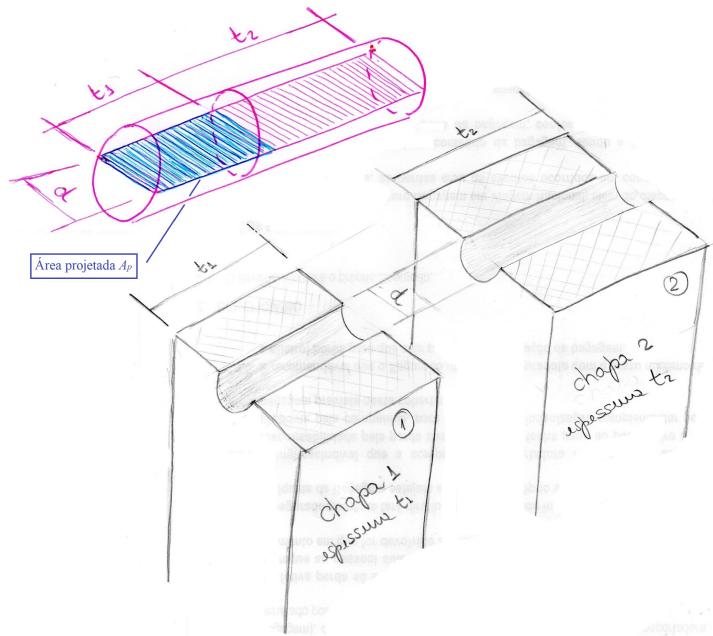


Figura 6.24: Área projetada em chapas com espessuras diferentes.

$$\sigma_{ci} = \frac{F_i}{A_p} \quad (6.67)$$

Onde,

$$A_p = t \cdot d \quad (6.68)$$

Na expressão anterior t representa a espessura da chapa mais fina.

Exercícios:

1. (Exercício do SHIGLEY [5] página 242).

A Fig.6.25 mostra uma barra retangular, de 15 x 200 mm, em balanço, presa por quatro parafusos a um perfil U de 250 mm. Com base na carga externa de 16 kN, determine:

- (a) A carga resultante em cada parafuso;
- (b) A tensão de cisalhamento máxima nos parafusos;
- (c) A máxima tensão de compressão nos filetes;
- (d) A tensão de flexão crítica na barra.

Dado: parafusos M16 x 2.

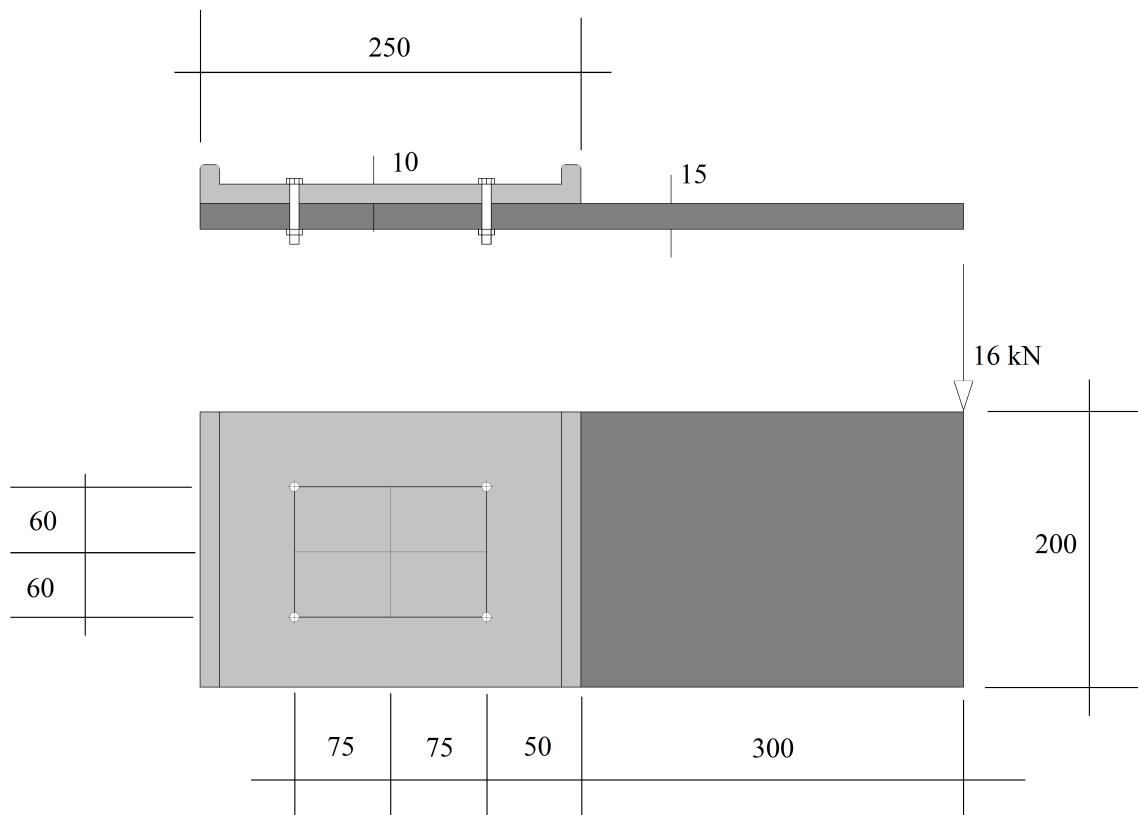


Figura 6.25: Carga excêntrica em uma montagem de fixação de uma barra com um perfil U.

Solução:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{16}{4} = 4 \text{ kN}$$

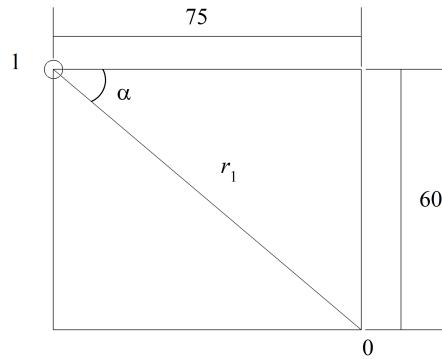


Figura 6.26: Determinando a distância do centróide a um parafuso.

A distância do centróide a cada um dos parafusos é igual à distância r_1 como mostra a Fig.6.26.

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \sqrt{75^2 + 60^2} = 96,047 \text{ mm}$$

$$M_0 = (75 + 50 + 300) \cdot 16 \times 10^{-3} = 6,8 \text{ kNm}$$

$$\frac{Q_1}{r} = \frac{Q_2}{r} = \frac{Q_3}{r} = \frac{Q_4}{r}$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q$$

$$M_0 = 6,8 \text{ kNm}$$

$$M_0 = r_1 \cdot Q_1 + r_2 \cdot Q_2 + r_3 \cdot Q_3 + r_4 \cdot Q_4 = r \cdot Q$$

$$M_0 = r \cdot Q + r \cdot Q + r \cdot Q + r \cdot Q = 6,8 \text{ kNm}$$

$$Q = 17,7 \text{ kN}$$

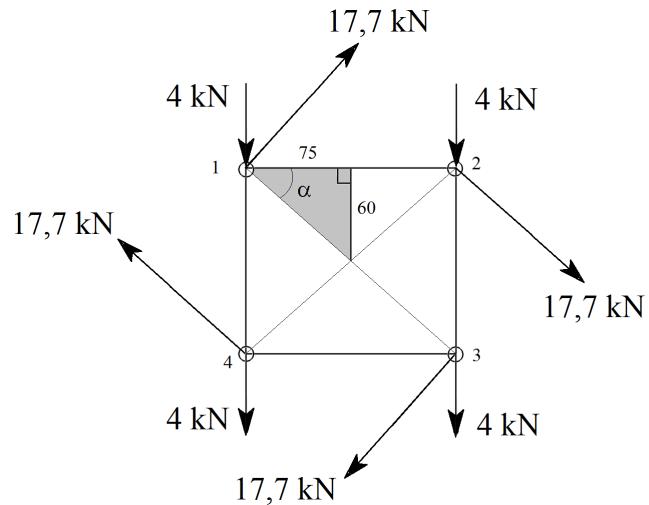


Figura 6.27: Determinando a força total nos parafusos que unem uma barra a um perfil U.

$$\alpha = \arctan \frac{60}{75}$$

$$\alpha = 38,66^\circ$$

A força total em cada um dos parafusos pode ser encontrada com base na Fig.6.27 utilizando, por exemplo, a lei dos cossenos.

Assim procedendo, encontra-se:

$$F_1 = 14,79 \text{ kN};$$

$$F_2 = 21,00 \text{ kN};$$

$$F_3 = 21,00 \text{ kN};$$

$$F_4 = 14,79 \text{ kN};$$

A tensão de cisalhamento máxima ocorre nos parafusos de número 2 e 3 e pode ser encontrada dividindo-se a força máxima pela área referente ao diâmetro nominal. Logo,

$$\tau = 104,45 \text{ MPa};$$

A tensão máxima de compressão é calculada dividindo-se a força máxima pela área projetada. Área essa igual ao produto do diâmetro nominal pela menor espessura sob carga. Neste caso,

$$\sigma_c = 131,25 \text{ MPa}.$$

2. Resolver o exercício anterior supondo que a carga de 16kN seja aplicada na

direção horizontal.

Resposta: $\sigma_c = 45,99$ MPa, $\tau = 36,60$ MPa.

3. Resolver o exercício anterior supondo que atue na montagem uma carga vertical de 16 kN, dirigida para cima, juntamente com outra de 16 kN aplicada, no mesmo ponto, porém dirigida para à direita.

Resposta: $\sigma_c = 119,80$ MPa, $\tau = 95,33$ MPa.

4. Encontre o valor do diâmetro mínimo para que os parafusos da Fig.6.28 suportem com segurança a carga vertical P de 15 kN. É dado que a espessura perpendicular ao plano da figura seja suficientemente grande para desprezar a compressão superficial. Considere que a tensão admissível ao cisalhamento seja de 100 MPa e que os parafusos possuam o mesmo diâmetro.

Resposta: $d = 12,55$ mm.

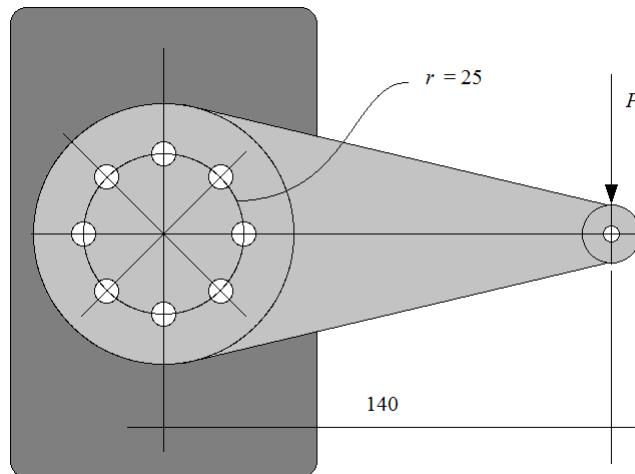


Figura 6.28: Oito parafusos distribuídos uniformemente em um círculo de raio 25 mm.

5. Baseado na Fig.6.29, determine a tensão de cisalhamento no parafuso mais tensionado devido a ação de uma carga horizontal P de módulo 12 kN.

Resposta: $\tau = 198,94$ MPa.

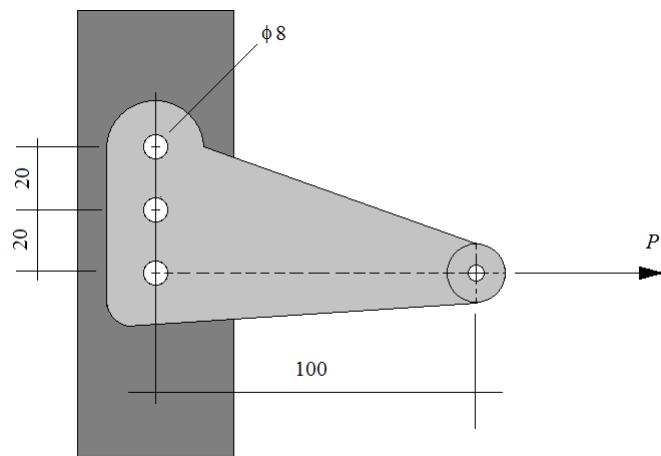


Figura 6.29: Três parafusos de 8 mm de diâmetro em uma motagem sujeita a uma carga horizontal P .

Capítulo 7

Eixos e Árvores

7.1 Introdução

As **árvores** são elementos de máquinas que geralmente apresentam secção transversal circular. Podem ser rotativas ou estacionárias e sempre estarão sujeitas a esforços de torção combinadas ou não com cargas axiais ou de flexão. A função das árvores é dar sustentação a diversos elementos de transmissão de potência tais como engrenagens, polias rodas, volantes, etc.

Por outro lado, os **eixos** são elementos de máquinas semelhantes às árvores, porém nunca estão sujeitos a esforços de torção.

7.2 Dimensionamento de eixos e de árvores

Eixos e árvores são órgãos de máquinas sujeitos essencialmente a cargas variáveis que irremediavelmente os levam a sofrer os efeitos nocivos da fadiga. Por esse motivo, o dimensionamento desses elementos pode ser feito como se fossem peças quaisquer sujeitas a esforços combinados repetidos. Porém, o que se faz na maioria dos casos é um estudo que leve em conta as especificidades dos eixos e das árvores nas suas funções nas máquinas onde serão instaladas.

Um procedimento que tem se mostrado eficaz no projeto dos eixos e das árvores é aquele que utiliza o critério da energia de distorção máxima. Por esse critério, uma peça estará em segurança se for dimensionada com base na Eq.(7.1):

$$(\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \sigma_{adm} \quad (7.1)$$

Para eixos e árvores, a tensão normal induzida é dada pela combinação de carga axial com flexão, como mostra a Fig.7.1. Assim,

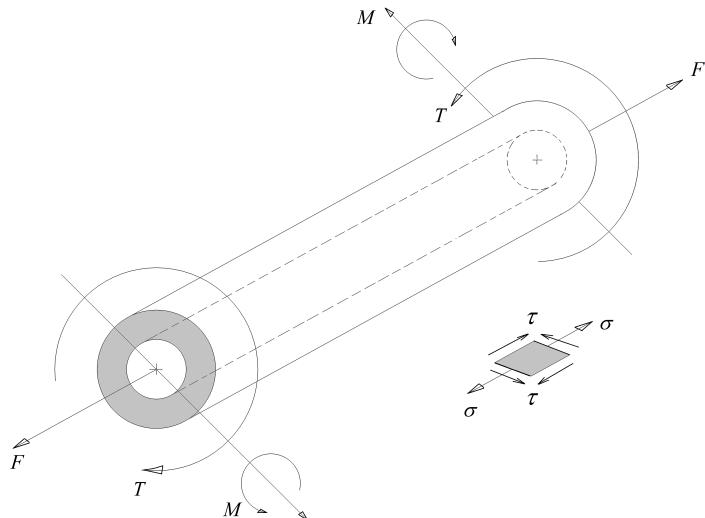


Figura 7.1: Esforços combinados em uma árvore.

$$\sigma = \frac{F}{S} + \frac{M \cdot c}{I} \quad (7.2)$$

$$c = \frac{d_0}{2} \quad (7.3)$$

$$I = \frac{\pi}{64} (d_0^4 - d_i^4) \quad (7.4)$$

$$S = \frac{\pi}{4} (d_0^2 - d_i^2) \quad (7.5)$$

Fazendo:

$$k = \frac{d_i}{d_0} \quad (7.6)$$

vem:

$$d_i = k \cdot d_0 \quad (7.7)$$

Portanto,

$$I = \frac{\pi}{64} \cdot d_0^4 (1 - k^4) \quad (7.8)$$

$$S = \frac{\pi}{4} \cdot d_0^2 (1 - k^2) \quad (7.9)$$

Finalmente, a tensão normal induzida poderá ser expressa por:

$$\sigma = \frac{32M}{\pi \cdot d_0^3 (1 - k^4)} + \frac{4F}{\pi \cdot d_0^2 (1 - k^2)} \quad (7.10)$$

Ou ainda:

$$\sigma = \frac{32M}{\pi \cdot d_0^3 \cdot (1 - k^4)} \left[M + \frac{1}{8} \cdot F \cdot d_0 \cdot (1 + k^2) \right] \quad (7.11)$$

A tensão de cisalhamento induzida é dada por:

$$\tau = \frac{T \cdot c}{J} \quad (7.12)$$

$$J = \frac{\pi}{32} \cdot d_0^4 (1 - k^4) \quad (7.13)$$

Donde se conclui que:

$$\tau = \frac{16T}{\pi \cdot d_0^3 (1 - k^4)} \quad (7.14)$$

Substituindo as Eqs.(7.14) e (7.11) na Eq.(7.1), encontra-se:

$$d_0^3 = \frac{32}{\pi \cdot \sigma_{adm} \cdot (1 - k^4)} \left\{ \left[M + \frac{1}{8} \cdot F \cdot d_0 \cdot (1 + k^2) \right]^2 + \frac{3}{4} \cdot T^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7.15)$$

De acordo com ALBUQUERQUE [12], para evitar as fraturas por fadiga, por flambagem ou por sobrecarga, costuma-se introduzir os coeficientes k_m , k_t e α na Eq.(7.15) para prevenir tais problemas.

$$d_0^3 = \frac{32}{\pi \cdot \sigma_{adm} \cdot (1 - k^4)} \left\{ \left[k_m \cdot M + \frac{1}{8} \cdot \alpha \cdot F \cdot d_0 \cdot (1 + k^2) \right]^2 + \frac{3}{4} (k_t \cdot T)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7.16)$$

Caso não haja atuação de forças axiais, então o dimensionamento pode ser feito com o auxílio da Eq.(7.17).

$$d_0^3 = \frac{32}{\pi \cdot \sigma_{adm} \cdot (1 - k^4)} \left[(k_m \cdot M)^2 + \frac{3}{4} (k_t \cdot T)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.17)$$

Os valores recomendados de k_m e de k_t podem ser obtidos a partir da Tabela 7.1:

Tabela 7.1: Valores dos fatores de carga k_m e k_t para eixos e árvores

Tipo e carga	k_m	k_t
Gradualmente Aplicada	1,50	1,00
Subitamente Aplicada com choques moderados	1,50 – 2,00	1,00 – 1,50
Subitamente Aplicada com choques fortes	2,00 – 3,00	1,50 – 3,00

Quanto ao fator que leva em consideração o fenômeno de flambagem, HALL *et al.* [6] recomendam usar:

$$\alpha = \frac{1}{1 - 0,0044 \left(\frac{L}{\rho} \right)} \quad \text{para } \frac{L}{\rho} < 115 \quad (7.18)$$

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\pi^2 \cdot n \cdot E} \left(\frac{L}{\rho} \right)^2 \quad \text{para } \frac{L}{\rho} > 115 \quad (7.19)$$

Onde:

$n = 1,00$ para extremidades articuladas;

$n = 2,25$ para extremidades fixas;

$n = 1,60$ para extremidades com movimentos parcialmente restritos como em mancais.

O termo ρ se refere ao raio de giração da secção transversal e E representa o módulo de rigidez do material do eixo.

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{S}} \quad (7.20)$$

Para secções transversais circulares vazadas, tem-se:

$$\rho = \frac{1}{4} \cdot d_0 \cdot \sqrt{1 + k^2} \quad (7.21)$$

Quanto às tensões admissíveis, HALL *et al.* [6] recomendam adotar:

$$\sigma_{adm} = \begin{cases} 0,225 \cdot \sigma_e & \text{com rasgo de chaveta} \\ 0,135 \cdot \sigma_r & \end{cases} \quad (7.22)$$

$$\sigma_{adm} = \begin{cases} 0,30 \cdot \sigma_e & \text{sem rasgo de chaveta} \\ 0,18 \cdot \sigma_r & \end{cases} \quad (7.23)$$

Para se fazer uma estimativa inicial para o diâmetro externo do eixo pode-se recorrer à Eq.(7.24):

$$d_0^3 = \frac{32}{\pi \cdot \sigma_{adm} \cdot (1 - k^4)} \left[M^2 + \frac{3}{4} \cdot T^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.24)$$

ATENÇÃO:

Na Eq.(7.24), recomenda-se adotar:

$$\sigma_{adm} = \begin{cases} 40 \text{ MPa} - \text{com rasgo de chaveta} \\ 55 \text{ MPa} - \text{sem rasgo de chaveta} \end{cases}$$

Quanto à deflexão angular, tem-se:

$$\theta = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \quad \text{rad} \quad (7.25)$$

Onde G é o módulo de rigidez transversal.

Portanto,

$$\theta = \frac{32 \cdot T \cdot L}{G \cdot \pi \cdot d_0^4 (1 - k^4)} \quad \text{rad} \quad (7.26)$$

Ou,

$$\theta = \frac{583,61 \cdot T \cdot L}{G \cdot d_0^4 (1 - k^4)} \quad \text{graus} \quad (7.27)$$

Segundo HALL *et al.* [6], a deflexão angular máxima permitida por comprimento não deve ser maior do que $2,6^\circ/\text{m}$. No máximo se tolera $3,3^\circ/\text{m}$.

$$\frac{\theta}{L} = \frac{583,61 \cdot T}{G \cdot d_0^4 (1 - k^4)} \quad (\theta \text{ em graus}) \quad (7.28)$$

$$d_0^4 = \frac{583,61 \cdot T}{G \cdot (1 - k^4) \cdot \frac{\theta}{L}} \quad (\theta \text{ em graus}) \quad (7.29)$$

Exercícios:

- Dimensionar uma árvore de aço laminado a quente (Fig.7.2) supondo que $\sigma_e = 460 \text{ MPa}$, $\sigma_r = 550 \text{ MPa}$, $HB = 220$. A árvore deverá transmitir uma

potência constante de 120 HP, porém a rotação deverá variar entre 2000 *rpm* e 4000 *rpm*. Sabe-se que a árvore estará sujeita a um momento de flexão com reversão completa de 600 Nm. Suponha que os choques sejam moderados e adote $G = 80$ GPa.

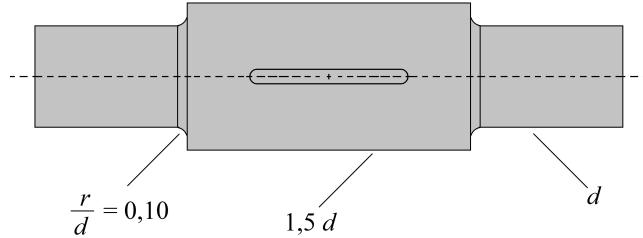


Figura 7.2: Projeto de um eixo sujeito a ação de um momento de torção juntamente com um momento de flexão variáveis.

Solução:

Com base na Eq.7.22, tem-se:

$$\sigma_{adm} = 74,25 \text{ MPa}$$

$$F = 0$$

$$k_m = 2,0 \text{ e } k_t = 1,5$$

$$\omega_{Max} = 418,9 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{Min} = 209,4 \text{ rad/s}$$

$$T_{Max} = \frac{P}{\omega_{Min}}$$

$$T_{Max} = 427,5 \text{ Nm}$$

$$T_{Min} = \frac{P}{\omega_{Max}}$$

$$T_{Min} = 213,74 \text{ Nm}$$

Adotar $T = 427,5 \text{ Nm}$.

$$d^3 = \frac{32}{\pi \cdot 74,25 \times 10^6 \cdot (1 - k^4)} \left[(2,0 \cdot 600)^2 + \frac{3}{4}(1,5 \cdot 427,5)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d = 0,05661 \text{ m}$$

Ou

$$d = 56,61 \text{ mm}$$

e

$$\frac{\theta}{L} = \frac{583,61427,5}{80 \times 10^9}$$

$$\frac{\theta}{L} = 0,30^\circ/\text{m}$$

2. Dimensionar uma árvore de aço de 0,900 m de comprimento para transmitir 50 HP a 3600 rpm. Suponha que a árvore possua um rasgo de chaveta e que as cargas sejam gradualmente aplicadas e despreze os efeitos de flexão. São dados $G = 80 \text{ GPa}$, $\sigma_e = 185,2 \text{ MPa}$ e $\sigma_r = 296,3 \text{ MPa}$

Resposta: $d = 27,94 \text{ mm}$.

3. Uma árvore de 1500 mm de comprimento suporta uma polia de 880 N de peso em seu ponto médio, como mostra Fig.7.3. A polia é enchavetada à árvore e recebe 20 HP a 150 rpm que são transmitidos a um acoplamento flexível imediatamente à direita do mancal direito. O acionamento por correia é horizontal e a soma das tensões é de 6620 N. Determine o diâmetro da árvore e a deflexão angular entre os mancais supondo que $G = 84 \text{ GPa}$, $\sigma_e = 170 \text{ MPa}$ e $\sigma_r = 250 \text{ MPa}$. É dado que a carga é graduablemente aplicada.

Resposta: Aproximadamente 105 mm.

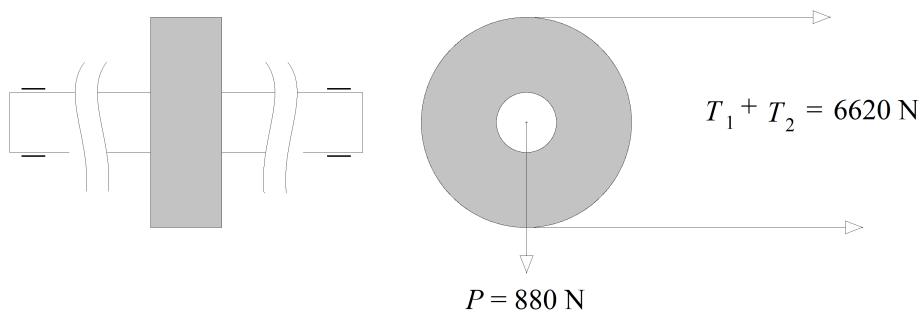


Figura 7.3: Árvore com uma polia no seu ponto médio.

4. A engrenagem da Fig.7.4 possui diâmetro primitivo de 100 mm e transmite 10 HP a 300 rpm a outra maior localizada a sua direita. Desprezando os efeitos de flexão, determine o diâmetro mínimo necessário à arvore para a transmissão de potência. Sabe-se que as cargas são gradualmente aplicadas. Adote $\sigma_e = 400 \text{ MPa}$ e $\sigma_r = 590 \text{ MPa}$.

Resposta: Aproximadamente 30 mm.

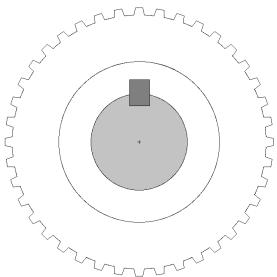


Figura 7.4: Esquema de uma engrenagem para transmissão de potência.

5. Determine o diâmetro mínimo para um eixo usinado (Fig.7.5) para suportar duas engrenagens de diâmetros primitivos de 75 mm e 125 mm respectivamente. Uma potência constante de 10 HP é transmitida a uma velocidade constante de 600 rpm. A tensão de admissível do material é de 47 MPa. São dados: $L_i = 25 \text{ mm}$ $i = 1 \dots 5$. Ignore o ângulo de pressão nos dentes das engrenagens. Suponha que as cargas sejam aplicadas **gradualmente** nos centros dos trechos. Por exemplo, a carga no apoio à esquerda seja aplicada na metade de L_1 , no apoio à direita na metade de L_5 , na engrenagem 1, na metade de L_2 e na engrenagem 2, na metade de L_4 . Portanto, para efeito de cálculo, considere que o comprimento do eixo será de 100 mm ao invés de 125 mm.

Nota:

Como visto na seção 2.6, os diagramas de torque e de momentos fletores são dados respectivamente pelas Figs.7.6 e 7.7.

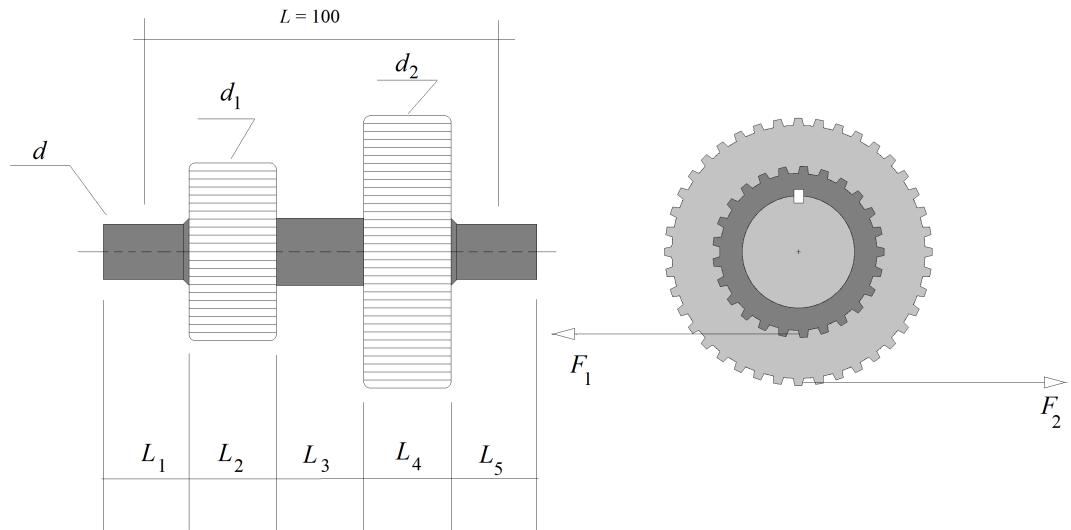


Figura 7.5: Projeto de um eixo com duas engrenagens.

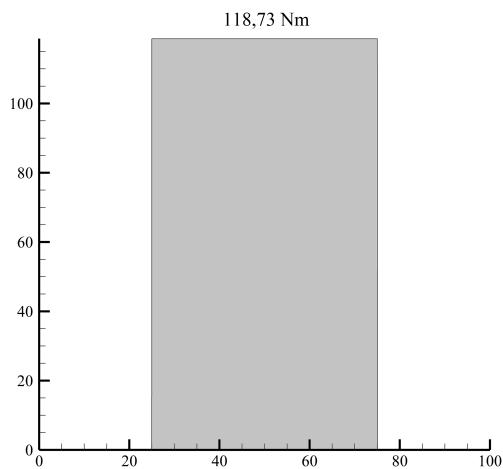


Figura 7.6: Diagrama de torques.

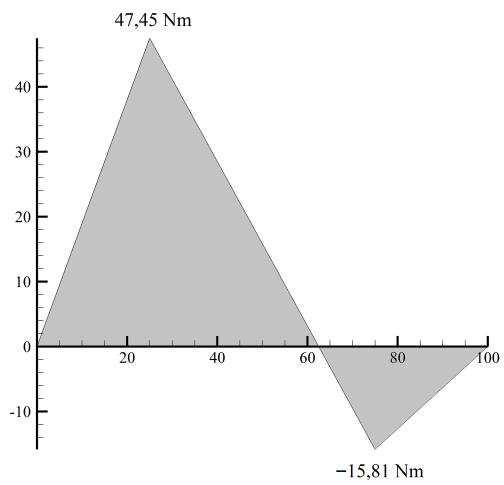


Figura 7.7: Diagrama de momento fletor.

Questão de Projeto

6. Dados:

Material	Aço Laminado;
Limite de escoamento	460 MPa;
Limite de ruptura	550 MPa;
Dureza Brinell	220;
Potência	120 HP;
rpm	2000;
Momento máximo	600 Nm;
Momento mínimo	- 600 Nm;
Força axial	74 kN;
Rasgo de chaveta	Sim;
Comprimento	1200 mm;
Tipo de choque	Moderado;
Razão entre os diâmetros	0,60.

Determine o diâmetro externo, o diâmetro interno e a deflexão angular da árvore, para suportar as cargas dadas, nas condições impostas.

Atenção:

Use algum método computacional, como o de Newton Raphson, para projetar a peça.

Resposta:

Diâmetro Externo = 74,3594 mm;

Diâmetro Interno = 44,6156 mm;

Deflexão angular = 0,12°/m.

Capítulo 8

Chavetas e Estrias

8.1 Introdução

Com base no que afirmam HALL *et al.* [6] e SHIGLEY [5], pode-se dizer que as **chavetas**, as **cavilhas**, as **estrias** e os **anéis de retenção** são usados para evitar certos movimentos entre as árvore e elementos tais como engrenagens ou polias. Embora as engrenagens, polias, etc., possam ser presas à árvore por meio de ajustes prensados, é sempre aconselhável projetar uma chaveta para transmitir toda a potência.

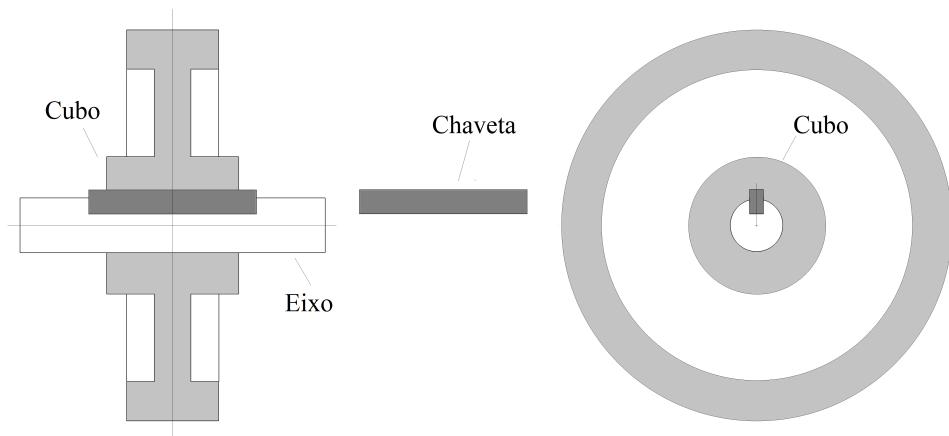


Figura 8.1: Chaveta para fixação do cubo de uma roda em um eixo.

A Fig.8.1 mostra uma montagem composta de uma chaveta utilizada para fixação do cubo de uma roda em um eixo. As chavetas podem ser retangular ou redondas como mostrado na Fig.8.2.

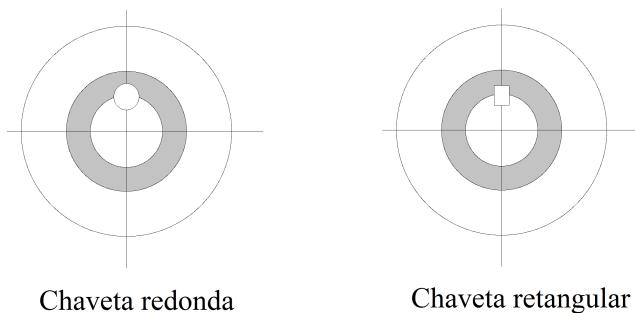


Figura 8.2: Chavetas redonda e quadrada.

As chavetas não são projetadas para evitar movimentos axiais. Para evitar movimentos na direção axial, pode-se usar as chamadas **cavilhas** como mostrado na Figs.8.3 e 8.4.

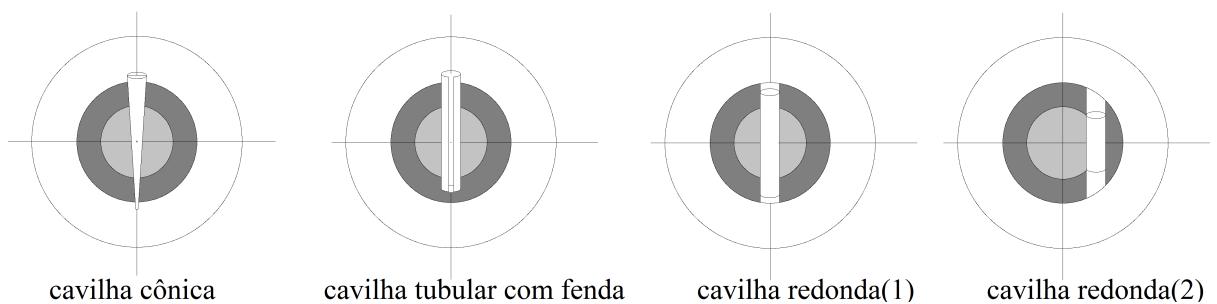


Figura 8.3: Alguns tipos de cavilha.

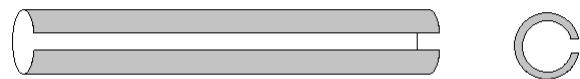


Figura 8.4: Uma cavilha típica.

Existem também outros tipos de dispositivos, tais como as **Chavetas com Cabeça** e as **Woodruff** (meia lua). Esses dispositivos estão mostrados na Fig.8.5, bem como algumas de suas dimensões.

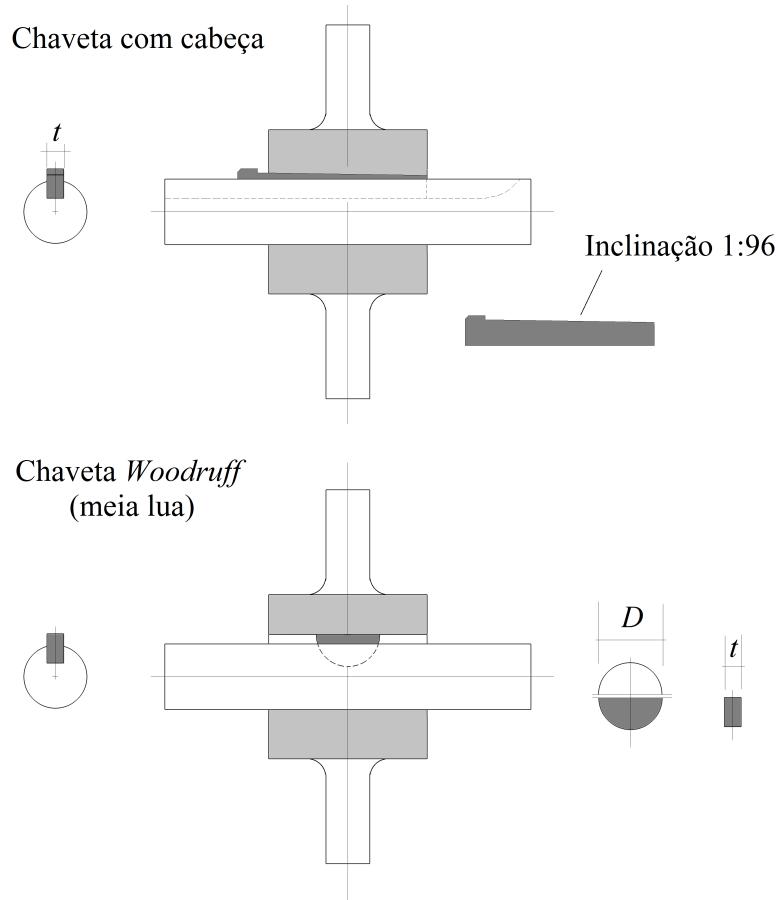


Figura 8.5: Chaveta com cabeça e chaveta Woodruff ou meia lua. (Figura adaptada do SHIGLEY [5] página 245.)

Observação: No dimensionamento das chavetas **Woodruff** considera-se somente os esforços cisalhantes. No caso das **Chavetas com Cabeça**, o dimensionamento deve ser feito levando em conta tanto os efeitos cisalhantes quanto os compressivos.

8.2 Projeto de chavetas retangulares

Segundo HALL *et al.* [6], *O projeto de chavetas retangulares pode ser baseado no cisalhamento e na compressão...* A Fig.8.6 mostra esquematicamente as forças que agem numa chaveta retangular.

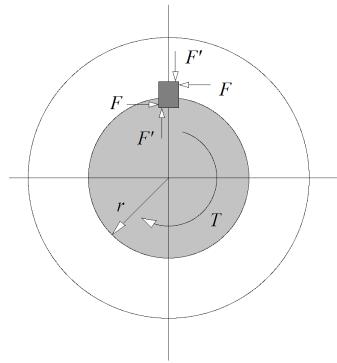


Figura 8.6: Esforços em uma chaveta retangular.

Não se sabe exatamente a localização das linhas de ação das forças F e de F' que atuam na chaveta da Fig.8.6. Por isso, que nos projetos desses elementos, supõe-se que essas forças sejam tangentes ao eixo como mostra a Fig.8.7.

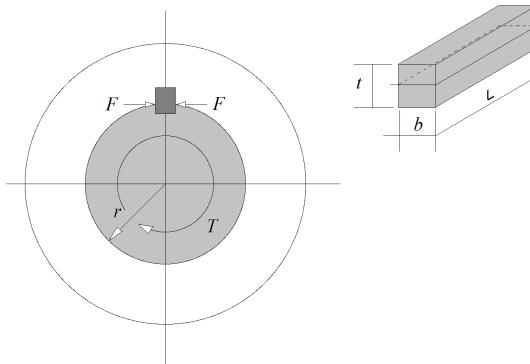


Figura 8.7: Esforços simplificados em uma chaveta retangular.

Tensão de cisalhamento induzida

$$\tau = \frac{F}{S_1} \quad (8.1)$$

$$S_1 = b \cdot L \quad (8.2)$$

$$\tau = \frac{F}{b \cdot L} \quad (8.3)$$

Note que o momento de torção no eixo pode ser expresso por:

$$T = r \cdot F \quad (8.4)$$

Logo

$$F = \frac{T}{r} \quad (8.5)$$

Neste caso,

$$\tau = \frac{T}{b \cdot L \cdot r} \quad (8.6)$$

Assim, levando em conta a resistência ao cisalhamento, o torque que a chaveta é capaz de transmitir será dado por:

$$T = \tau_{adm} \cdot b \cdot L \cdot r \quad (8.7)$$

Tensão de compressão induzida

Apesar da hipótese de se ter a força F tangente ao eixo, o cálculo da tensão de compressão é feito aplicando-se tal força numa das *metades* da chaveta, como mostra a Fig.8.8

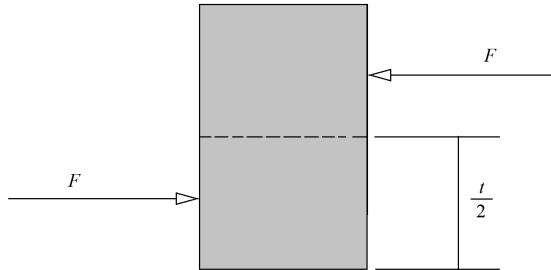


Figura 8.8: Posição hipotética da linha de ação das forças em uma chaveta retangular.

$$\sigma_c = \frac{F}{S_2} \quad (8.8)$$

$$S_2 = \frac{t}{2} \cdot L \quad (8.9)$$

$$\sigma_c = \frac{2F}{t \cdot L} \quad (8.10)$$

Como $F = \frac{T}{r}$, então:

$$\sigma_c = \frac{2T}{t \cdot L \cdot r} \quad (8.11)$$

Portanto, levando em consideração a resistência à compressão, o torque que a chaveta pode transmitir é dado por:

$$T = \sigma_{adm} \cdot \frac{1}{2} \cdot t \cdot L \cdot r \quad (8.12)$$

Exercícios:

- Deve-se fixar uma engrenagem a uma árvore de 36 mm de diâmetro, por meio de uma chaveta quadrada. O cubo da engrenagem tem comprimento de 64 mm. A árvore e a chaveta são do mesmo material, tendo uma tensão permissível ao cisalhamento de 55 MPa. Sendo de 390 Nm o momento de torção transmitido, quais as dimensões necessárias à chaveta?

Solução:

A solução para este problema está na Tabela, 8.1. E a resposta é $b = t = 7,10$ mm.

Tabela 8.1: Projeto de uma chaveta: Ao cisalhamento e à compressão

Quanto ao cisalhamento	Quanto à compressão
$T = \tau_{adm} \cdot b \cdot L \cdot r$	$\tau_{adm} = 0,577 \cdot \sigma_{adm}$
$b = \frac{T}{\tau_{adm} \cdot L \cdot r}$	$\sigma_{adm} = 95,32 \text{ MPa}$
$b = 0,006155 \text{ m}$	$t = \frac{2T}{\sigma_{adm} \cdot L \cdot r}$
$b = t = 6,16 \text{ mm}$	$t = 0,007103$
	$b = t = 7,10 \text{ mm}$

- Uma chaveta tipo lingüeta de 12.7 mm de altura e 9.5 mm de largura deve transmitir um momento de 680 Nm. O aço da chaveta tem uma tensão admissível à tração e à compressão de 110 MPa e uma tensão admissível ao cisalhamento de 55 MPa. Determine o comprimento necessário à chaveta sabendo-se que a árvore tem 38 mm de diâmetro.

Resposta: $L = 68,50$ mm.

- À luz do critério de Misses, mostre que a capacidade de transmitir momento de uma chaveta quadrada baseando-se na tensão de cisalhamento é 1,154 vezes

a capacidade de transmitir momento baseada na tensão de compressão.

4. A engrenagem esquematizada na Fig.8.9 apresenta diâmetro primitivo de 100 mm e está montada em uma árvore de diâmetro 30 mm. Ela transmite 10 HP a 300 rpm a uma outra engrenagem maior localizada a sua direita. Determine a altura mínima da chaveta, sabendo-se que o comprimento do cubo mede 50 mm e $t = 2b$. Adote $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$ e $N = 2$.

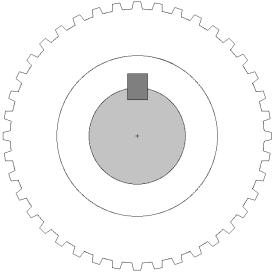


Figura 8.9: Chaveta fixando cubo de uma engrenagem a uma árvore.

5. Determine as dimensões de uma chaveta para um eixo, mostrado na Fig.8.10 de 30 mm que suporta duas engrenagens de diâmetros pimitivos de 75 mm e 125 mm respectivamente. A potência de 10 HP é transmitida a 600 rpm e tensão admissível ao cisalhamento do material da chaveta é de 25 MPa. São dados: $L_i = 25 \text{ mm}$ $i = 1 \dots 5$ e $t = 1,5b$.

Resposta $12,667 \times 18,99 \text{ mm}$

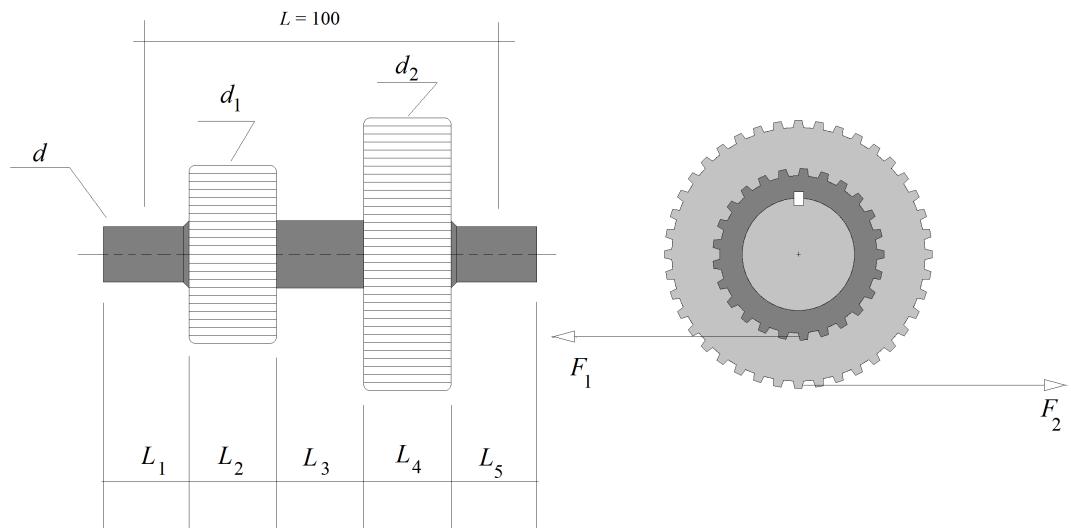
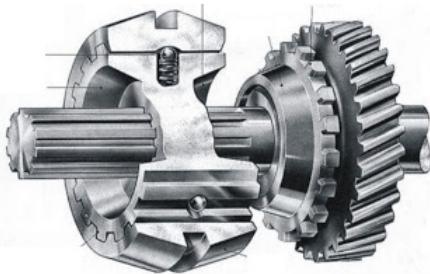


Figura 8.10: Chavetas para um eixo com duas engrenagens.

8.3 Estrias

As **Estrias** são geralmente usadas quando se deseja que ocorra um movimento axial relativo entre a árvore e o elemento a ela conectado, como mostra a Fig.8.11.



4.bp.blogspot.com/_LcEqC8yus8k/Sh9yUi6My4I/AAAAAAAAYA/5ZWoOxqCi8/s320/elemento.jpg

Figura 8.11: Mecanismo com eixo e roda estriados.

Em comparação com chavetas comuns, as estrias apresentam uma elevada capacidade de transmissão de momento, pois é como se fossem várias chavetas trabalhando em conjunto para transmitir o movimento.

Observação:

Em geral, não há a necessidade de se verificar a capacidade de uma estria em suportar esforços cisalhantes, uma vez que as pressões admissíveis são normalmente baixas. Neste caso, a capacidade de transmissão de momento T , de uma estria, com n ranhuras e raio médio r_m , é baseada apenas na força de compressão F em suas faces. Assim, o momento que a estria é capaz de transmitir é dado por:

$$T = r_m \cdot F \cdot n \quad (8.13)$$

Onde a força de compressão F , em termos da pressão admissível p_{adm} , é dada por:

$$F = p_{adm} \cdot S \quad (8.14)$$

A área S , da superfície em compressão, é dada pelo produto da espessura t e o comprimento L da estria, como mostra a Fig.8.12.

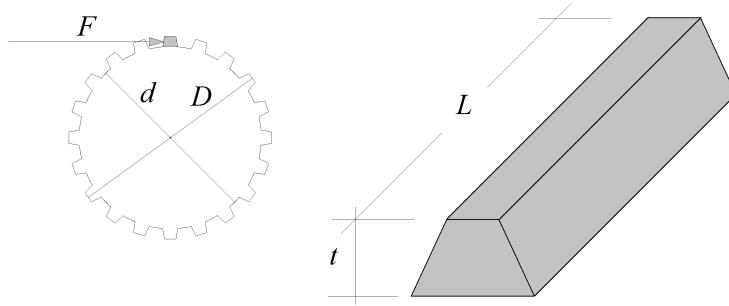


Figura 8.12: Dimensões e força em uma estria.

$$S = t \cdot L \quad (8.15)$$

Portanto,

$$F = p_{adm} \cdot t \cdot L \quad (8.16)$$

e

$$T = r_m \cdot p_{adm} \cdot t \cdot L \cdot n \quad (8.17)$$

O raio médio r_m é dado pela média entre os raios maior R e menor r da estria:

$$r_m = \frac{R + r}{2} \quad (8.18)$$

Ou ainda:

$$r_m = \frac{D + d}{4} \quad (8.19)$$

Como mostra a Fig.8.12, D e d representam os diâmetros maior e menor da estria.

Exercícios:

- Uma ligação estriada tem 10 ranhuras cortadas numa árvore de 57 mm de diâmetro (maior). A altura de cada estria é de 5,4 mm e seu comprimento é de 44,5 mm. Qual a potência transmitida a 2500 rpm se a pressão normal nas estrias é de 4,8 MPa?

Solução:

$$P = T \cdot \omega$$

$$\omega = 261,80 \text{ rad/s}$$

$$T = r_m \cdot p_{adm} \cdot t \cdot L \cdot n$$

$$d = D - 2 \times t$$

$$d = 46,2 \text{ mm}$$

$$r_m = 25,8 \text{ mm}$$

$$T = 297,59 \text{ Nm}$$

$$P = 77908 \text{ Watts}$$

ou

$$P = 104,43HP$$

2. Uma ligação estriada tem 8 ranhuras cortadas numa árvore de 57 mm de diâmetro (maior) e 46,2 mm de diâmetro menor. Para um comprimento de 44,5 mm, qual a potência transmitida a 2500 rpm, se a pressão normal nas estrias é de 4,8 MPa?

Resposta: $P = 62326$ Watts ou $P = 83,55$ HP.

Questão de projeto:

3. Projetar uma ligação estriada, para uma árvore que deve transmitir 120 HP a 2000 rpm. (Vide projeto da árvore do capítulo anterior).

Capítulo 9

Projeto e lubrificação de mancais de deslizamento

9.1 Introdução

Mancais são elementos de máquinas cuja função é dar suporte a árvore e a eixos rotativos ou oscilatórios. A Fig.9.1 apresenta dois tipos básicos de mancais: Os de **deslizamento** e os de **rolamento**.

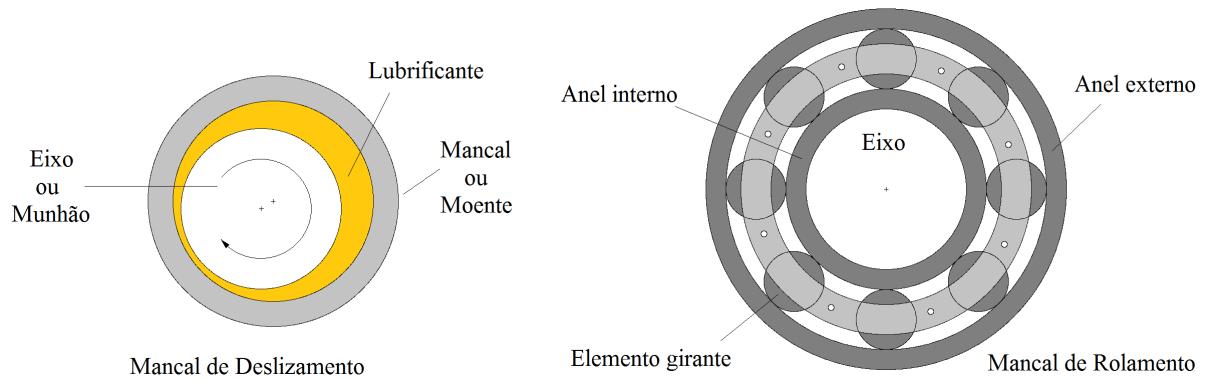


Figura 9.1: Mancal de deslizamento comparado a um de rolamento.

A característica principal do mancal de deslizamento é que, em repouso, o eixo (munhão) e a parte interna do mancal (moente) se tocam. Portanto, na partida da máquina, há atrito direto entre o munhão e o moente. Por isso, tanto o munhão quanto o moente sofrem os efeitos do atrito mútuo.

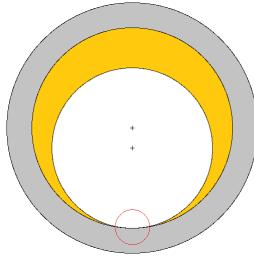


Figura 9.2: Eixo em repouso sobre o mancal

Isso, como será visto no próximo capítulo, jamais ocorre em um mancal de rolemento. Ou seja, nos rolamentos, os eixos nunca são submetidos aos efeitos nocivos do atrito, uma vez que são envoltos por um anel interno que sofre todo o desgaste.

Nos mancais de deslizamento, a medida que o eixo acelera, há um efeito de bombeamento do óleo lubrificante que faz o eixo *flutuar*.

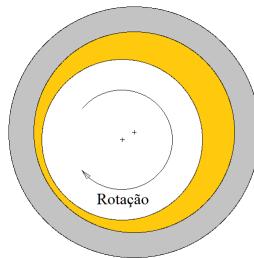


Figura 9.3: Efeito do bombeamento do óleo.

Assim, depois da partida da máquina, não há mais o contato direto entre o eixo e o mancal. Por esse motivo, não é recomendável que uma máquina que possua mancais de deslizamento tenha partidas e paradas frequentes, para evitar o desgaste, tanto do eixo quanto do mancal.

Vale ressaltar que, se bem projetados, os mancais de deslizamento podem ter vida infinita. O mesmo não se pode dizer a respeito dos rolamentos que, pelo tipo de carga a que estão sujeitos, apresentam sempre vida finita.

9.2 Massa Específica e Viscosidade do Lubrificante

Segundo HALL *et al.* [6], a massa específica dos óleos lubrificantes é, em média, 900 kg/m³. Afirma ainda que a massa específica ρ de um óleo lubrificante pode ser encontrada empiricamente, em função de sua temperatura T_0 em °C, através da seguinte expressão:

$$\rho = \rho_{60^\circ} - 0,365 \cdot (T_0 - 60^\circ) \text{ kg/m}^3 \quad (9.1)$$

Onde:

ρ_{60° – Massa específica do óleo a 60°C.

Quanto à viscosidade dinâmica, BUDYNAS e NISBETT [10] recomendam utilizar:

$$\mu = \rho \cdot \left(0,22 \cdot t - \frac{180}{t} \right) \times 10^{-6} \text{ Pa.s} \quad (9.2)$$

Onde t representa a viscosidade em *Saybolt* em segundos.

BUDYNAS e NISBETT [10] adotam a seguinte expressão para determinar a viscosidade cinemática do óleo lubrificante:

$$\nu = \left(0,22 \cdot t - \frac{180}{t} \right) \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (9.3)$$

9.3 Coeficiente de Atrito

Com base em HALL *et al.* [6], o coeficiente de atrito para mancais pequenos é dado aproximadamente por:

$$f = 0,334 \cdot \frac{\mu \cdot rpm}{p} \cdot \frac{D}{C} + k \quad (9.4)$$

Onde:

μ – Viscosidade dinâmica em Pa.s;

D – Diâmetro do eixo;

C – Folga diametral (diferença entre os diâmetros);

k – Parâmetro tabelado que depende da razão $\frac{L}{D}$ (Tabela 9.1);

p – Pressão sobre o mancal com base na área projetada.

A Fig.9.4 mostra em destaque a área projetada, que pode ser calculada pelo produto $L \cdot D$, onde L representa o comprimento do mancal.

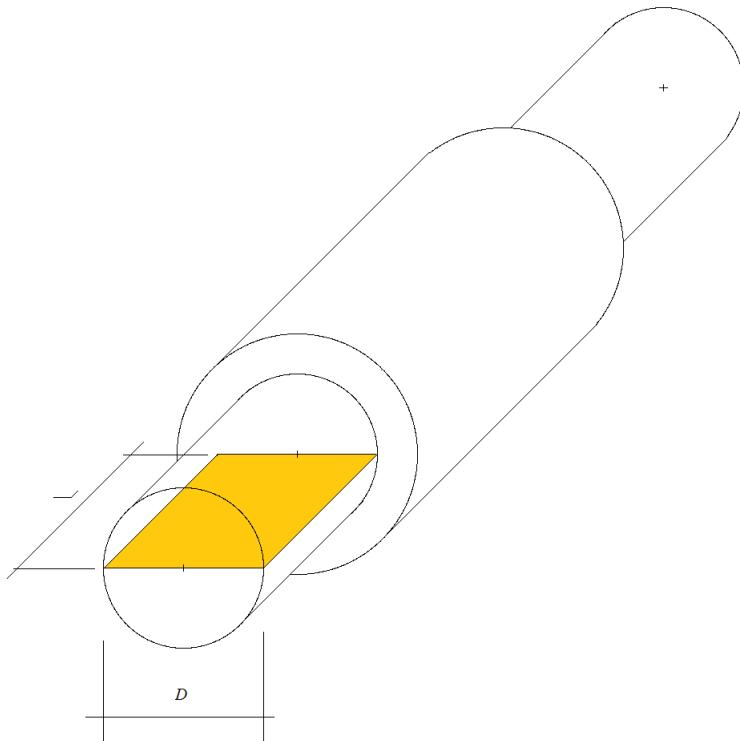


Figura 9.4: Área projetada da extremidade de um eixo.

A pressão exercida sobre o mancal pode ser encontrada com o auxílio da seguinte expressão:

$$p = \frac{W}{L \cdot D} \quad (9.5)$$

Onde:

W – Carga radial sobre mancal (Fig.9.5).

L – Comprimento do mancal(Fig.9.6);

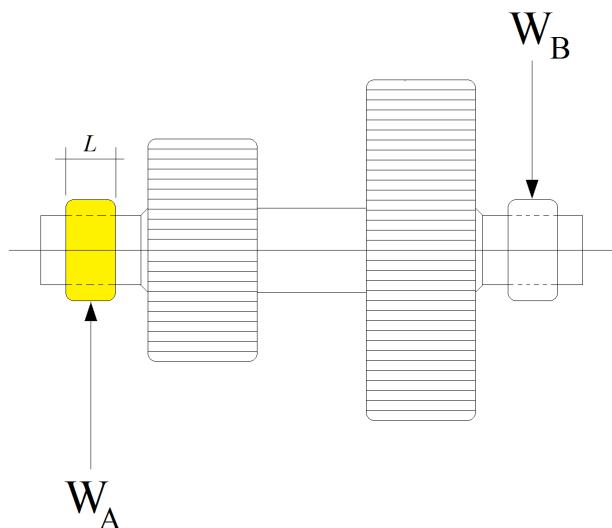


Figura 9.5: Carga radial em um mancal.

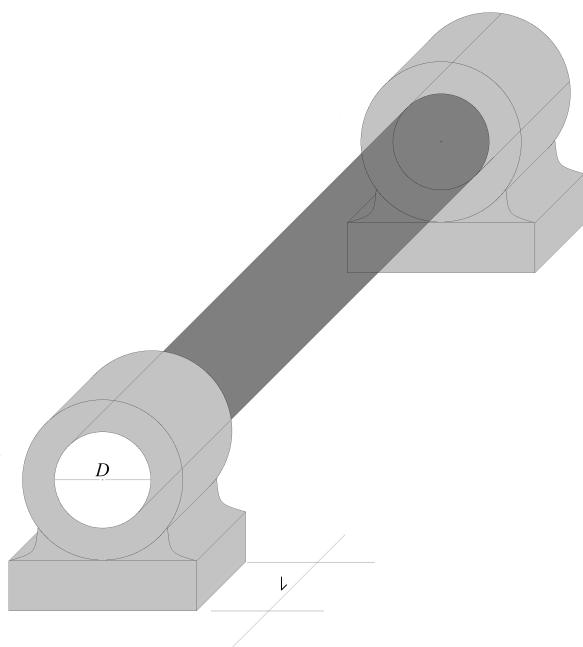


Figura 9.6: Diâmetro e comprimento de um mancal de deslizamento.

Valores admissíveis para a pressão p dependem do tipo de material utilizado no mancal e podem ser obtidos de SHIGLEY [5].

As folgas recomendadas depende, de acordo com SHIGLEY [5], do tipo de material do mancal e do diâmetro do eixo. Sendo que o valor mínimo da razão $\frac{D}{C}$ é da ordem de 800 e o máximo, 1200.

Os valores de k podem ser obtidos a partir da Tabela 9.1 ou da Fig.9.7.

Tabela 9.1: Valores de k em termos da razão L/D

L/D	k
0,12500	$15,0000 \times 10^{-3}$
0,21875	$12,5000 \times 10^{-3}$
0,41875	$7,50000 \times 10^{-3}$
0,50000	$5,00000 \times 10^{-3}$
0,71875	$2,50000 \times 10^{-3}$
1,00000	$1,56250 \times 10^{-3}$
1,50000	$2,03125 \times 10^{-3}$
2,00000	$2,65625 \times 10^{-3}$
2,50000	$3,12500 \times 10^{-3}$
3,00000	$3,90625 \times 10^{-3}$

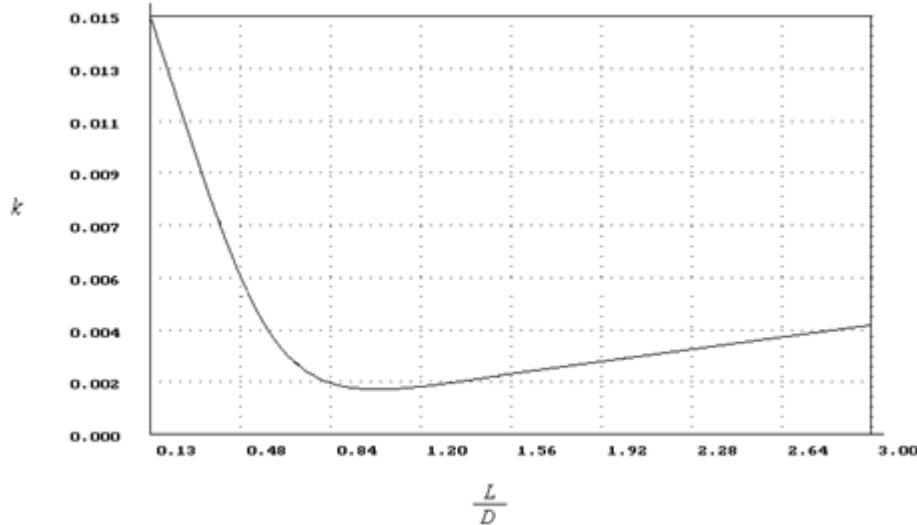


Figura 9.7: Gráfico de k em função da razão L/D .

9.4 Quantidade de calor gerada por atrito

O calor gerado por atrito (ou potência gerada por atrito) é definido matematicamente por:

$$Q_g = T_f \cdot \omega \quad (9.6)$$

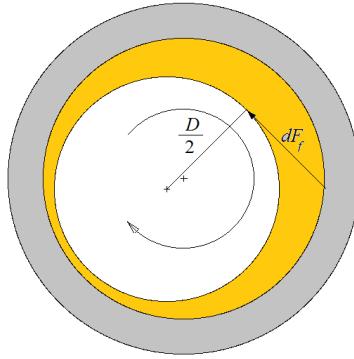


Figura 9.8: Força de atrito fluido infinitesimal em um mancal de deslizamento.

Onde T_f representa o momento de atrito e ω , a velocidade angular do eixo.

De acordo com a Fig.9.8, o momento de atrito fluido infinitesimal em um ponto do eixo apoiado em um mancal de deslizamento é dado por:

$$dT_f = \frac{D}{2} \cdot dF_f \quad (9.7)$$

Onde F_f representa a força de atrito fluido.

$$F_f = f \cdot W \quad (9.8)$$

Neste caso,

$$T_f = f \cdot W \cdot \frac{D}{2} \quad (9.9)$$

Sendo:

$$\omega = \frac{2\pi}{60} rpm \quad (9.10)$$

Então:

$$Q_g = \frac{f \cdot W \cdot \pi \cdot D \cdot rpm}{60} \quad \text{Watts} \quad (9.11)$$

9.5 Quantidade de calor dissipada

Segundo HALL *et al.* [6], a quantidade de calor dissipada por um mancal pleno pode ser determinada pela equação de Lashe:

$$Q_d = \frac{113,015}{K} (\Delta T + 18,3)^2 L \cdot D \quad \text{Watts} \quad (9.12)$$

Onde ΔT representa a diferença entre a temperatura do mancal e a temperatura do meio em °C.

$$\Delta T = T - T_A \quad \text{°C} \quad (9.13)$$

Onde:

T – Temperatura de operação do mancal;

T_A – Temperatura do ambiente.

$$K = \begin{cases} 31 & \text{para mancais pesados com ventilação satisfatória;} \\ 55 & \text{para mancais leves em ambiente sem ventilação.} \end{cases}$$

Da Eq.(9.12) pode-se concluir que:

$$\Delta T = \left(\frac{K \cdot Q_d}{113,015 \cdot L \cdot D} \right)^{\frac{1}{2}} - 18,3 \quad \text{°C} \quad (9.14)$$

Importante:

HALL *et al.* [6] representam a temperatura de operação do óleo lubrificante por T_0 . Esta temperatura pode ser obtida a partir da seguinte expressão:

$$T_0 = T_A + 2\Delta T \quad \text{°C} \quad (9.15)$$

Exercícios:

1. Exercício do SHIGLEY [5] página 416:

Os dados de um mancal radial completo são:

$$\mu = 0,0276 \text{ Pa.s};$$

$$rpm = 1800;$$

$$W = 2224 \text{ N};$$

$$D = 38 \text{ mm};$$

$$C = 0,076 \text{ mm};$$

$$L = 38,1 \text{ mm.}$$

Determine:

- O coeficiente de atrito;
- A quantidade de calor gerada;

- (c) A temperatura provável da superfície do mancal para um ambiente sem ventilação a 21°C;
- (d) A temperatura de operação do óleo lubrificante.

Resposta: a) $f = 6,96 \times 10^{-3}$; b) $Q_g = 55,5\text{W}$; c) $T = 139,2^\circ\text{C}$; d) $T_0 = 257,49^\circ\text{C}$.

2. Um mancal pleno tendo diâmetro e comprimento iguais a 76,2 mm suporta uma carga radial de 12 kN girando a 1800 rpm. Admitindo $D/C = 1000$ e que a viscosidade do óleo é de 10^{-2} Pa.s .

Determine:

- (a) O coeficiente de atrito;
- (b) A quantidade de calor gerada;
- (c) A temperatura provável da superfície do mancal admitindo que o calor desenvolvido é dissipado para um ambiente sem ventilação a 21°C;
- (d) A temperatura de operação do óleo lubrificante.

Resposta: a) $f = 4,47 \times 10^{-3}$; b) $Q_g = 385,36\text{W}$; c) $T = 182,42^\circ\text{C}$; d) $T_0 = 343,84^\circ\text{C}$.

Nos próximos exercícios são dados: D , L , C , W , rpm , T , T_A , k e K . São pedidas a viscosidade μ e a temperatura de operação do óleo T_0 . Portanto, para resolver esses problemas, pode-se utilizar o seguinte algoritmo:

(a) Calcule ΔT

$$\Delta T = T - T_A$$

(b) Encontre Q_d

$$Q_d = \frac{113,015}{K} (\Delta T + 18,3)^2 L \cdot D$$

(c) Calcule f a partir da Eq.9.11 fazendo $Q_g = Q_d$

$$f = \frac{60 \cdot Q_d}{W \cdot \pi \cdot D \cdot rpm}$$

(d) Determine p

$$p = \frac{W}{L \cdot D}$$

(e) Encontre μ a partir da Eq.9.4

$$\mu = \frac{(f - k)}{0,334 \cdot rpm \cdot \left(\frac{D}{C}\right)} \cdot p$$

(f) Determine T_0

$$T_0 = T_A + 2\Delta T$$

(g) Determine o número de Sommerfeld

$$S = \frac{\mu \cdot N'}{p} \cdot \left(\frac{D}{C}\right)^2$$

Onde N' representa o número de rotações por segundo do eixo.

(h) Estime o valor da massa específica do lubrificante

$$\rho = \rho_{60^\circ} - 0,365 \cdot (T_0 - 60^\circ) \text{ kg/m}^3$$

Onde ρ_{60° representa a massa específica do óleo lubrificante a 60°C . Se nada for dito em contrário, adote $\rho_{60^\circ} = 900 \text{ kg/m}^3$

3. Um mancal de 50,8 mm de diâmetro e 76,2 mm de comprimento suporta uma carga de 7317 N a 750 rpm. A folga diametral é de 0,06934 mm. Qual deve ser a viscosidade do óleo para que a temperatura do mancal seja, no máximo, de $76,67^\circ\text{C}$ quando o ambiente for de $21,11^\circ\text{C}$. Admitir ambiente sem ventilação.

Resposta: $\mu = 9,6967 \times 10^{-3}$ Pa.s na temperatura de T_0 de 132,23°C.

4. Um mancal pleno de 102 mm de diâmetro e 152 mm de comprimento, suporta uma carga radial de 5340 N. O munhão gira a 500 rpm. A temperatura ambiente é de 32 °C e a superfície do mancal não pode ultrapassar 63°C. Escolher um óleo adequado para este mancal, admitindo $D/C = 1000$ e que a ventilação é satisfatória.

Resposta: Usar um óleo de viscosidade $\mu = 0,01568$ Pa.s na temperatura de 94°C.

5. Um mancal pleno de 30 mm de diâmetro e 21,56 mm de comprimento deverá ser usado para suportar o eixo da Fig.9.9. A potência de 10 HP é transmitida a 600 rpm. Os diâmetros primitivos das engrenagens medem respectivamente 75 mm e 125 mm. A temperatura ambiente é de 27°C e a superfície do mancal não pode ultrapassar 60°C. Escolher um óleo adequado para este mancal, admitindo uma folga diametral de 0,03 mm e que a ventilação seja satisfatória. Ignore o ângulo de pressão nos dentes das engrenagens. O diagrama de esforços cortantes está apresentado na Fig.9.10.

Resposta: Usar um óleo de viscosidade $\mu = 0,01415768$ Pa.s na temperatura de operação $T_0 = 93,00^\circ\text{C}$.

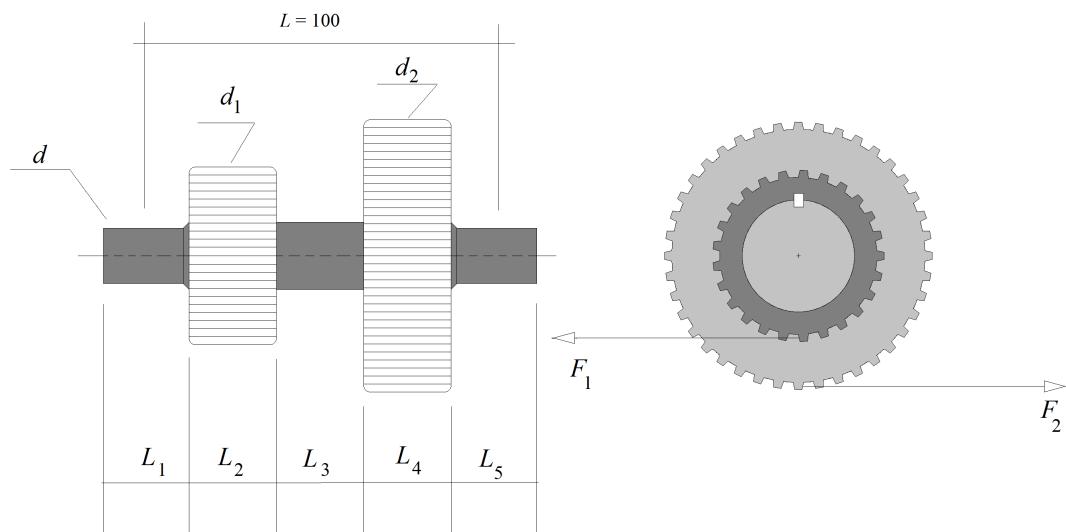


Figura 9.9: Eixo com duas engrenagens suportada por dois mancais de deslizamento.

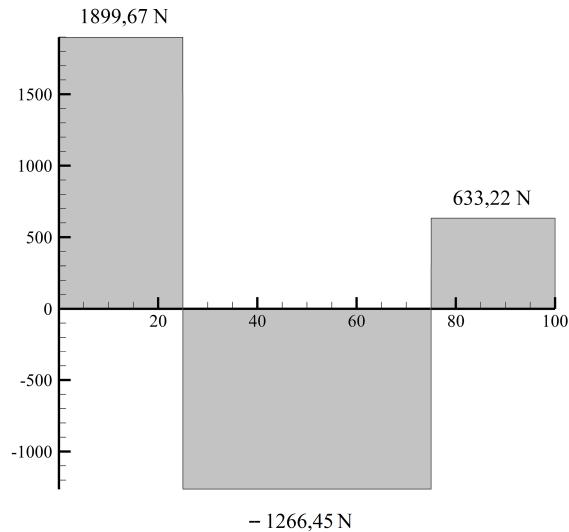


Figura 9.10: Diagrama de esforços cortantes.

6. Uma árvore, de 1500 mm de comprimento e 110 mm de diâmetro, suporta uma polia de 880 N de peso em seu ponto médio, como mostra Fig.9.11. A polia é enchavetada à árvore e recebe 20 HP a 150 rpm que são transmitidos a um acoplamento flexível imediatamente à direita do mancal direito de comprimento 110 mm. O acionamento por correia é horizontal e a soma das tensões é de 6620 N. A temperatura ambiente é de 35 °C e a superfície do mancal não pode ultrapassar 65°C. Escolher um óleo adequado para este mancal, admitindo $D/C = 1000$ e que a ventilação é satisfatória.

Resposta: Usar um óleo de viscosidade $\mu = 0,18788704 \text{ Pa.s}$ na temperatura de operação $T_0 = 95^\circ\text{C}$.

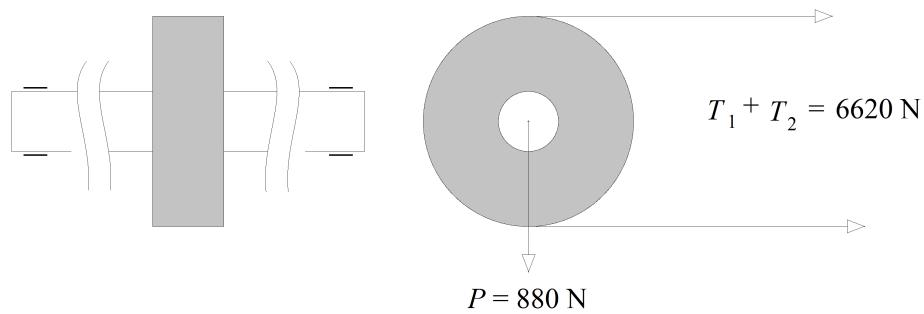


Figura 9.11: Árvore com uma polia no seu ponto médio.

9.6 Número de Sommerfeld

O **número de Sommerfeld** ou o **número característico do mancal** é um parâmetro adimensional muito utilizado nos projetos de mancais de deslizamento. Este parâmetro é dado matematicamente pela seguinte expressão:

$$S = \frac{\mu \cdot N'}{p} \cdot \left(\frac{D}{C} \right)^2 \quad (9.16)$$

Onde: N' representa o número de rotações por segundo do eixo.

Com o número de Sommerfeld pode-se obter empiricamente as seguintes quantidades:

- (a) O coeficiente de atrito f ;
- (b) A espessura mínima da película de óleo h_o ;
- (c) A vazão de óleo Q através do mancal devido à ação de bombeamento do munhão
- (d) A fuga de lubrificante Q_s pelas extremidades do mancal;
- (e) A pressão máxima do óleo do mancal;
- (f) A elevação de temperatura ΔT do óleo.

Exercício:

Determinar o número de Sommerfeld para cada um dos mancais dos exercícios anteriores.

9.6.1 Coeficiente de atrito em um mancal de deslizamento

Segundo HALL *et al.* [6] o coeficiente de atrito pode ser determinado de acordo com o gráfico mostrado na Fig.9.12:

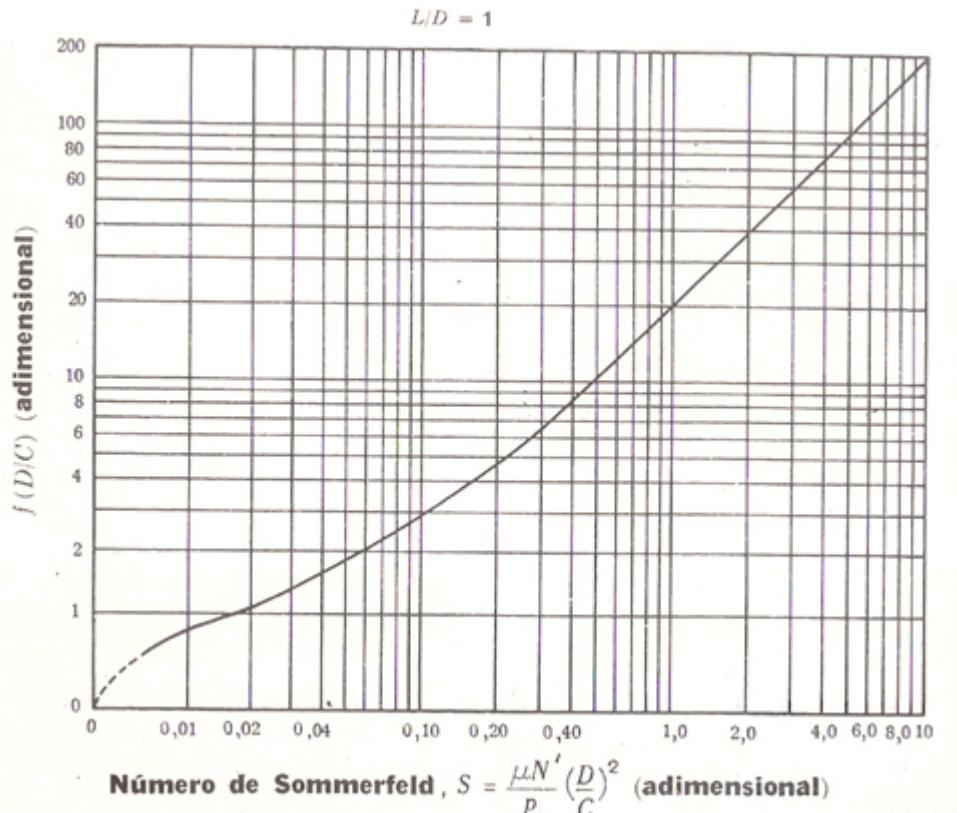


Figura 9.12: Coeficiente de atrito. Figura extraída do HALL *et al.* [6] páginas 482 – 485

9.6.2 Espessura mínima da película de lubrificante

Segundo HALL *et al.* [6], A espessura mínima de película depende do tamanho do mancal e do seu acabamento superficial; quanto mais áspera a superfície, maior será a espessura da película necessária ao bom funcionamento. Como indicação prática, podemos tomar a espessura mínima da película como sendo igual a $0,00025D$. De qualquer maneira, é recomendável utilizar o gráfico da Fig.9.13 para se estimar a espessura mínima da película de lubrificante.

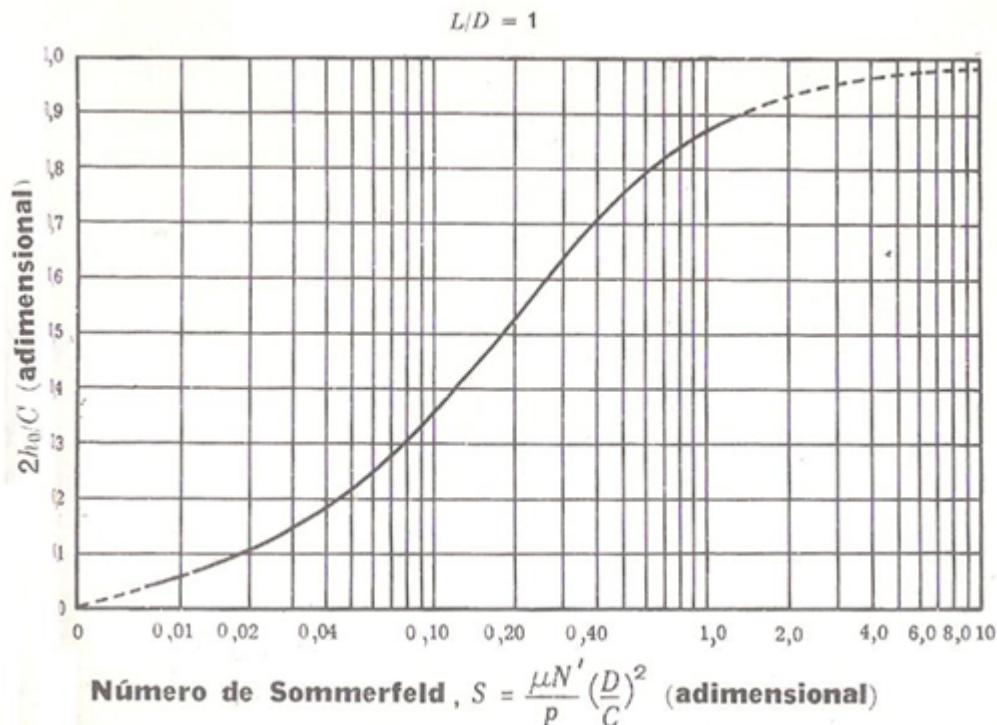


Figura 9.13: Espessura mínima da película de lubrificante. Figura extraída do HALL *et al.* [6] páginas 482 – 485

9.6.3 Vazão de óleo

De acordo com HALL *et al.* [6], a vazão Q de óleo através de um mancal, devido à ação do bombeamento do munhão pode ser obtida com o auxílio do gráfico da Fig.9.14:

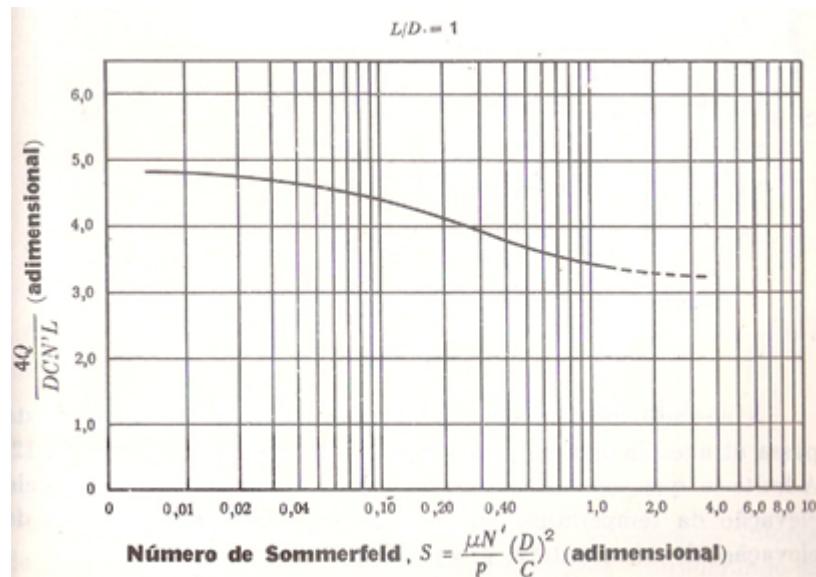


Figura 9.14: Vazão de óleo através de um mancal de deslizamento. Figura extraída do HALL *et al.* [6] páginas 482 – 485

9.6.4 Fuga de lubrificante

A fuga de lubrificante pelas extremidades do mancal é representada por Q_s e é igual a quantidade de lubrificante que deve ser fornecida a um mancal que funciona sob a ação da pressão atmosférica. Para se determinar Q_s , antes necessitamos conhecer Q (vazão de óleo através do mancal) . Conhecendo-se Q , a fuga de lubrificante Q_s poderá ser encontrada através do gráfico da Fig.9.15:

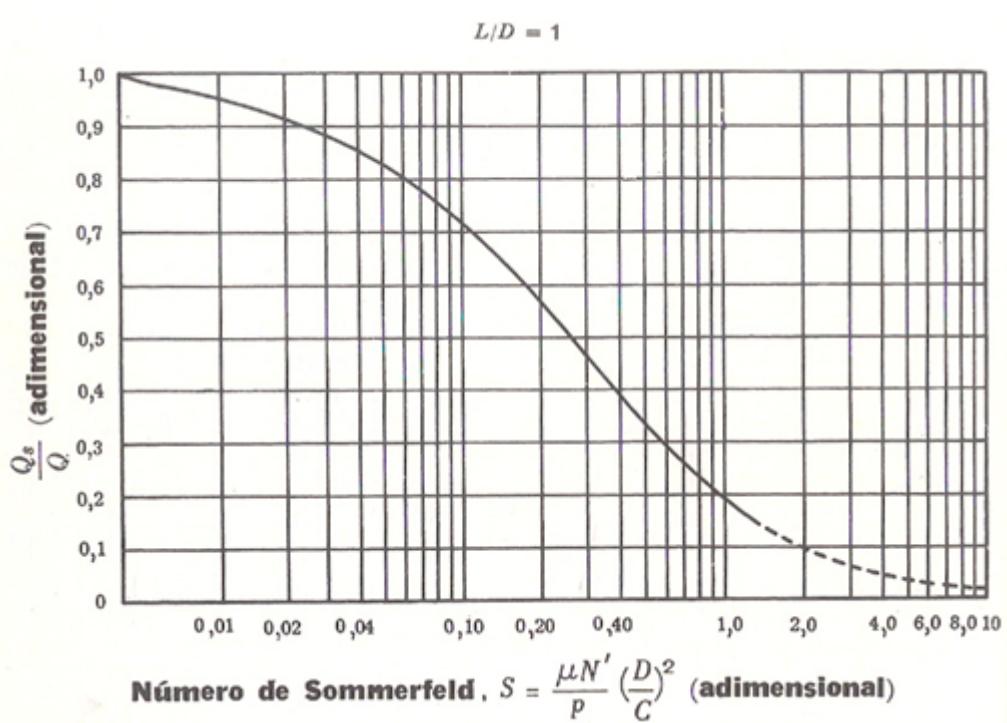


Figura 9.15: Fuga de lubrificante pelas extremidades de um mancal de deslizamento.
Figura extraída do HALL *et al.* [6] páginas 482 – 485

9.6.5 Pressão máxima

Para a determinação da pressão máxima, SHIGLEY [5] recomenda usar o diagrama mostrado na Fig.9.16:

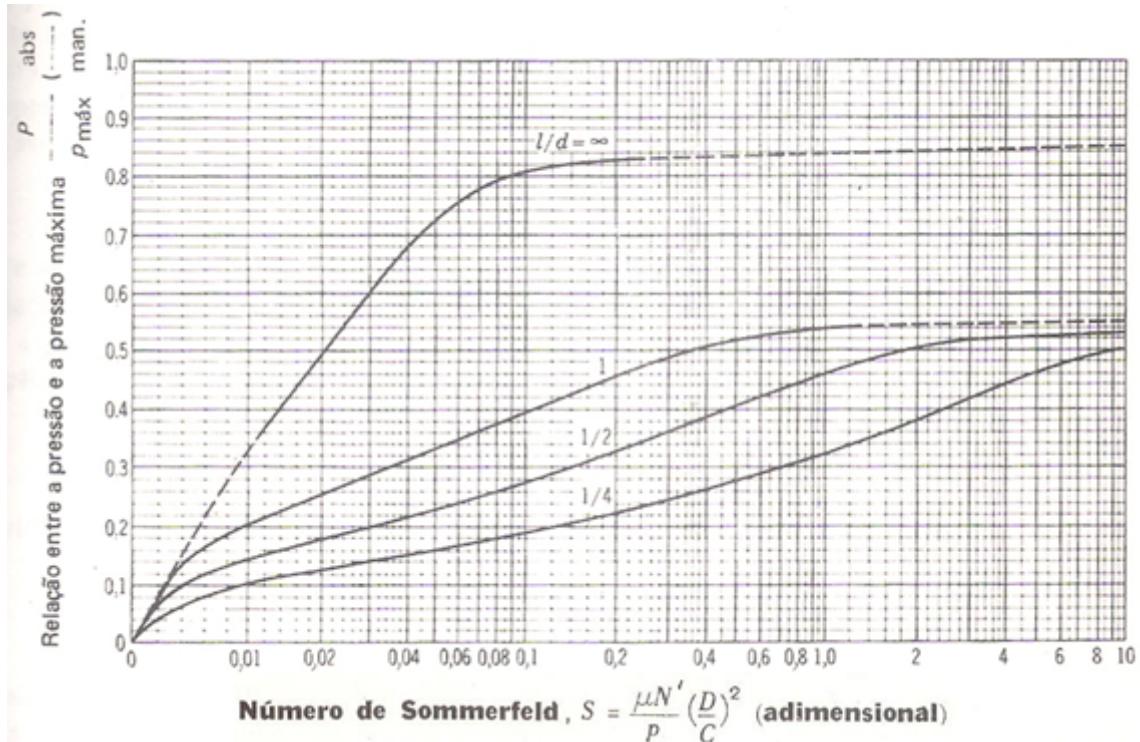


Figura 9.16: Pressão máxima na película de lubrificante. Figura extraída do HALL et al. [6] páginas 482 – 485

Exercício:

1) Exercício do SHIGLEY [5] página 416:

Os dados de um mancal radial completo são:

$$\mu = 0,0276 \text{ Pa.s};$$

$$rpm = 1800;$$

$$W = 2224 \text{ N};$$

$$D = 38 \text{ mm};$$

$$C = 0,076 \text{ mm};$$

$$L = 38,1 \text{ mm}.$$

Determine:

- O número de Sommerfeld;
- A espessura mínima de óleo;
- A vazão de óleo Q através do mancal devido à ação de bombeamento do munhão;

- d) A fuga de lubrificante Q_s pelas extremidades do mancal;
- e) A razão entre a pressão e a pressão máxima;
- f) O coeficiente de atrito.

Resposta: a) $S = 0,135$; b) $h_o = 0,016$ mm; c) $Q = 3,55 \times 10^{-6}$ m³/s; d) $Q_s = 2,34 \times 10^{-6}$ m³/s; d) $p/p_{max} = 0,42$; f) $f = 0,007$.

Capítulo 10

Tópicos de Estatística

10.1 Introdução

A Estatística fornece um ferramental poderoso na análise dos resultados experimentais obtidos pelos cientistas e pelos engenheiros em suas pesquisas em laboratório. Em particular, ela é fundamental na seleção rigorosa de rolamentos e na estimativa das vidas média e nominal de um grupo de máquinas que trabalham sob certas condições controladas. Por esse motivo, este capítulo visa dar uma breve noção de algumas estatísticas para dar suporte ao próximo capítulo, bem como mostrar sua importância em diversos problemas práticos que um engenheiro pode ter que lidar.

10.2 Média ponderada

Média ponderada é um elemento representativo de uma população ou de uma amostra, calculada levando em consideração as importâncias (pesos) que cada um de seus elementos possui.

Por exemplo, na tabela adiante, cada valor de x apresenta um peso dado pela sua frequência $f(x)$.

Tabela 10.1: tabela de frequência

x	$f(x)$
2	5
5	10
8	17
10	12
12	6

A média ponderada $\mu(x)$ dos valores de x é definida matematicamente por:

$$\mu(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n f(x_i)} \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \quad (10.1)$$

Onde $f(x_i)$ representa o peso do elemento x_i .

Para o caso dos dados da tabela anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \frac{1}{5 + 10 + 17 + 12 + 6} (2 \cdot 5 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 17 + 10 \cdot 12 + 12 \cdot 6) \\ \mu(x) &= 7,76\end{aligned}$$

Uma média, qualquer que seja ela, pode ser pensada como um elemento representativo de uma população ou de uma amostra.

Deve ser observado que um elemento representativo de uma população ou de uma amostra pode não pertencer a essa população ou a essa amostra.

No caso do exemplo anterior, encontrou-se uma média $\mu = 7,76$, que não faz parte dos dados tabelados a qual representa. Ou seja nenhum valor de x é igual a 7,76.

10.3 Média $\mu(t)$, ponderada por uma função $f(t)$

A média $\mu(t)$ dos valores de t , ponderados por $f(t)$, entre os pontos A e B , é definida matematicamente por:

$$\mu(t) = \frac{1}{\int_A^B f(t) dt} \int_A^B t f(t) dt \quad (10.2)$$

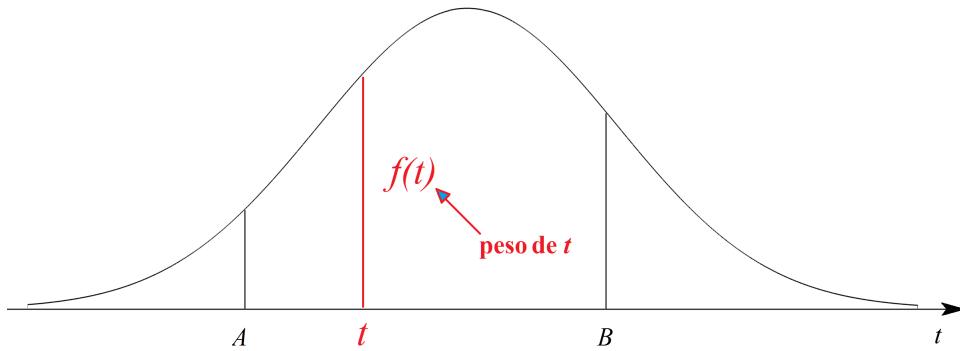


Figura 10.1: Uma função qualquer para o cálculo da média ponderada.

Exercícios:

Encontre a média dos valores de t nos intervalos fornecidos, ponderada pelas respectivas funções $f(t)$

$$1. \ f(t) = t^2 \quad 0 \leq t \leq 2 \quad \text{Resposta: } \mu(t) = 1.5$$

$$2. \ f(t) = \frac{3}{4}(2t - t^2) \quad 0 \leq t \leq 2 \quad \text{Resposta: } \mu(t) = 1$$

A média, como definida pela Eq.10.2, pode ser pensada como um operador para o cálculo da média de qualquer *coisa* no intervalo $A \leq t \leq B$, ponderada por $f(t)$.

Isto é:

$$\mu[\] = \frac{1}{\int_A^B f(t) dt} \int_A^B [\] f(t) dt \quad (10.3)$$

Por exemplo, poderíamos calcular a média dos cossenos de todos os valores de t no intervalo $A \leq t \leq B$, ponderada por $f(t)$.

$$\mu[\cos(t)] = \frac{1}{\int_A^B f(t) dt} \int_A^B [\cos(t)] f(t) dt$$

Exemplo:

Encontre o valor médio de $\cos(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 2$ ponderado pela função

$$f(t)=t^2.$$

$$\mu[\cos(t)] = \frac{1}{\int_0^2 t^2 \, dt} \quad \int_0^2 \cos(t) \; t^2 \, dt = 0,0577528152985477$$

10.4 Função de densidade de probabilidade (FDP)

Diz-se que uma função $f(t)$ é uma **função de densidade de probabilidade** (FDP) em um intervalo $A \leq t \leq B$ se:

$$f(t) \Rightarrow \begin{cases} f(t) \geq 0 & \forall A \leq t \leq B \\ \int_A^B f(t) dt = 1 \end{cases} \quad (10.4)$$

A Fig.10.2 mostra alguns exemplos de funções que podem ser consideradas funções de densidade de probabilidade, nos respectivos intervalos.

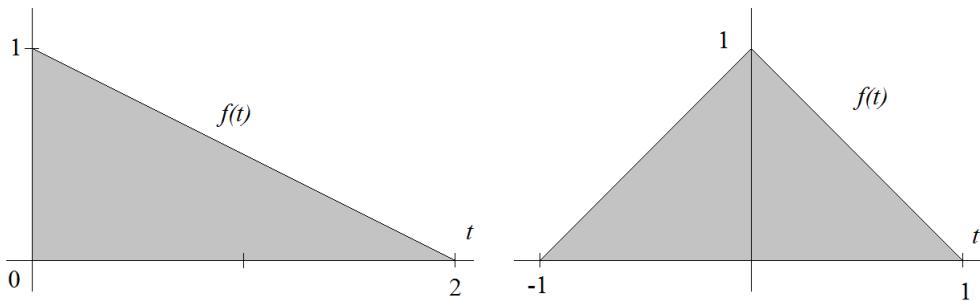


Figura 10.2: Alguns exemplos de funções que podem ser consideradas funções de densidade de probabilidade.

Exercícios:

Trace o gráfico e verifique se as funções indicadas a seguir podem ser consideradas funções de densidade de probabilidade nos intervalos indicados:

1. $f(t) = \frac{1}{2} \sin(t) \quad 0 \leq t \leq \pi.$
2. $f(t) = \frac{3}{4} (2t - t^2) \quad 0 \leq t \leq 2 \quad .$
3. $f(t) = \frac{3}{20} \exp\left(-\frac{3t}{20}\right) \quad 0 \leq t < \infty.$
4. $f(t) = \begin{cases} 0,5 & \forall t \in [0 \quad 2] \\ 0 & \forall t \notin [0 \quad 2] \end{cases}$

10.5 Probabilidade em termos de uma função de densidade de probabilidade

Sendo $f(t)$ uma função de densidade de probabilidade em um intervalo $[A B]$, então a área abaixo da curva no referido intervalo é unitária. Assim, qualquer outro intervalo menor $[a b] \subset [A B]$ tem área menor ou igual a 1 e maior ou igual a 0. Portanto, a área sob a curva no intervalo menor $[a b]$ pode ser interpretada como uma **probabilidade**. Neste caso, é lícito escrever:

$$p(a \leq t_0 \leq b) = p([a b]) = \int_a^b f(t) dt \quad (10.5)$$

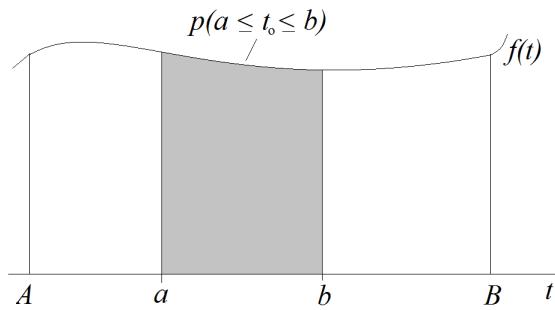


Figura 10.3: Área como uma probabilidade.

Em Estatística, se diz que $f(t)$ configura o que se convencionou chamar de uma **distribuição de probabilidade contínua**.

Exercícios:

Nos exercícios que se seguem, determine a probabilidade de que t_0 esteja compreendido no intervalo indicado:

1. $p(0,5 \leq t_0 \leq 1)$ para cada uma das distribuições de probabilidade contínua mostradas na Fig.10.2. *Resposta:* 31,25% e 12,50%.

2. $p(0,5 \leq t_0 \leq 1)$ para $f(t) = \frac{1}{2} \sin(t)$. *Resposta:* 16,86%.

3. $p(0,5 \leq t_0 \leq 1)$ para $f(t) = \frac{3}{4}(2t - t^2)$. *Resposta:* 34,37% .

4. $p(0 \leq t_0 \leq 1)$ para $f(t) = \frac{3}{20} \exp\left(-\frac{3t}{20}\right)$. *Resposta:* 13,93%.

5. $p(0,25 \leq t_0 \leq 0,75)$ para $f(t) = \begin{cases} 0,5 & \forall t \in [0, 2] \\ 0 & \forall t \notin [0, 2] \end{cases}$ *Resposta:* 25%.

10.6 Média e variância de uma distribuição de probabilidade contínua

Vimos, na Seção 10.3, que a média $\mu(t)$, dos valores de t , ponderados por $f(t)$, entre os ponto A e B , é definida matematicamente pela Eq.10.2, repetida adiante.

$$\mu(t) = \frac{1}{\int_A^B f(t) dt} \int_A^B t f(t) dt$$

Se $f(t)$ for uma função de densidade de probabilidade, então o denominador da expressão anterior é unitário. Neste caso, a **média** $\mu(t)$ da distribuição, no intervalo $A \leq t \leq B$, será dada por:

$$\mu(t) = \int_A^B t f(t) dt \quad (10.6)$$

Como já mencionado, a média $\mu(t)$ pode ser usada como um representante dos valores possíveis de t no intervalo $A \leq t \leq B$.

A **variância** $\sigma^2(t)$ de uma distribuição de probabilidade contínua $f(t)$ é definida como a **média**, no intervalo $A \leq t \leq B$, de todos os $[t - \mu(t)]^2$, **ponderada** por $f(t)$. Ou seja:

$$\sigma^2(t) = \mu[t - \mu(t)]^2 \quad (10.7)$$

Mas a Eq.10.3, estabelece que:

$$\mu[\quad] = \frac{1}{\int_A^B f(t) dt} \int_A^B [\quad] f(t) dt$$

então

$$\mu[t - \mu(t)] = \frac{1}{\int_A^B f(t) dt} \int_A^B [t - \mu(t)] f(t) dt$$

Lembrando que, para uma função de densidade de probabilidade, a integral da fração anterior é unitária, então,

$$\sigma^2(t) = \int_A^B [t - \mu(t)]^2 f(t) dt \quad (10.8)$$

Elevando ao quadrado o termo $[t - \mu(t)]$ da expressão anterior e integrando, pode-se mostrar que a **variância** $\sigma^2(t)$ pode ser opcionalmente calculada, por uma maneira mais simples, da seguinte forma:

$$\sigma^2(t) = \int_A^B t^2 f(t) dt - \mu^2(t) \quad (10.9)$$

Tendo em mente a Eq.10.3 e analisando a expressão anterior pode-se concluir que:

$$\sigma^2(t) = \mu(t^2) - \mu^2(t) \quad (10.10)$$

Variância é uma **medida da dispersão em torno da média** de um conjunto de valores numéricos. Quanto maior for a variância, maior será a *distância* entre os elementos e sua média.

Exercícios:

Nos exercícios que se seguem, determine a média e a variância das funções de densidade de probabilidade indicadas:

$$1. f(t) = \frac{1}{2} \sin(t) \quad 0 \leq t \leq \pi. \text{ Resposta: } \mu(t) = \frac{\pi}{2} \quad \sigma^2 = 0,46740110027234.$$

$$2. f(t) = \frac{3}{4} (2t - t^2) \quad 0 \leq t \leq 2. \text{ Resposta: } \mu(t) = 1 \quad \sigma^2 = 0,20.$$

$$3. f(t) = \frac{3}{20} \exp\left(-\frac{3t}{20}\right) \quad 0 \leq t < \infty. \text{ Resposta: } \mu(t) = \frac{20}{3} \quad \sigma^2 = \frac{400}{9}.$$

$$4. f(t) = \begin{cases} 0,5 & \forall t \in [0 \quad 2] \\ 0 & \forall t \notin [0 \quad 2] \end{cases} \quad \text{Resposta: } \mu(t) = 1 \quad \sigma^2 = \frac{1}{3}.$$

5. Partindo da Eq.(10.8), mostre que a variância de uma distribuição de probabilidade contínua pode, opcionalmente, ser calculada a partir da Eq.(10.9).

Outra medida de dispersão em torno da média é o **desvio padrão**. Representado por $\sigma(t)$, o desvio padrão é dado, por definição, pela raiz quadrada da variância. Portanto,

$$\sigma(t) = \sqrt{\sigma^2(t)} \quad (10.11)$$

Para comparar as dispersões de conjuntos que possuem média diferentes, pode-se lançar mão do **coeficiente de variação**. O coeficiente de variação CV é definido pela razão entre o desvio padrão e a média, ou seja:

$$CV = \frac{\sigma(t)}{\mu(t)} \quad (10.12)$$

Exercícios:

- 1) Determine o coeficiente de variação de todas as funções dos exercícios anteriores e indique qual delas tem dados mais dispersos.
- 2) Você é o responsável por adquirir um lote de barras de aço para montar uma estrutura. Para isso, você dispõe de dois fornecedores para aquisição desse material. Testes para verificar a resistência à tração desse aços foram feitos e os resultados apresentados nas seguintes tabelas:

Tabela 10.2: Fornecedor 1

t (MPa)	$f(t)$
580	2
590	8
600	16
610	7
620	1

Tabela 10.3: Fornecedor 2

t (MPa)	$f(t)$
560	8
600	12
620	15
630	6

- a) Compare as respectivas médias;
- b) Compare as respectivas amplitudes, variâncias, desvios padrões e coeficientes de variação;
- c) Qual desses grupos de aços é o mais disperso?
- d) Qual deles é o mais resistente?
- e) Qual deles você usaria na sua obra? Justifique a sua resposta.

Resposta:

- a) $\mu_1(t) \simeq 599$ MPa $\mu_2(t) \simeq 604$ MPa;
- b) $A_1 = 40$ MPa $CV_1 = 0,0148$ $A_2 = 70$ MPa $CV_2 = 0,0397$;
- c) O mais disperso é o de número 2 por apresentar um maior CV ;
- d) O mais resistente é o de número 2 por apresentar a maior média;
- e) Tema para discussão.

10.7 Confiabilidade

A **confiabilidade** $R(L)$ de um sistema, para uma vida L , modelada por uma distribuição de probabilidade contínua $f(t)$, é definida matematicamente por:

$$R(L) = \int_L^B f(t) dt \quad A \leq L \leq B. \quad (10.13)$$

Note que $R(L) = p(L \leq t_0 \leq B)$.

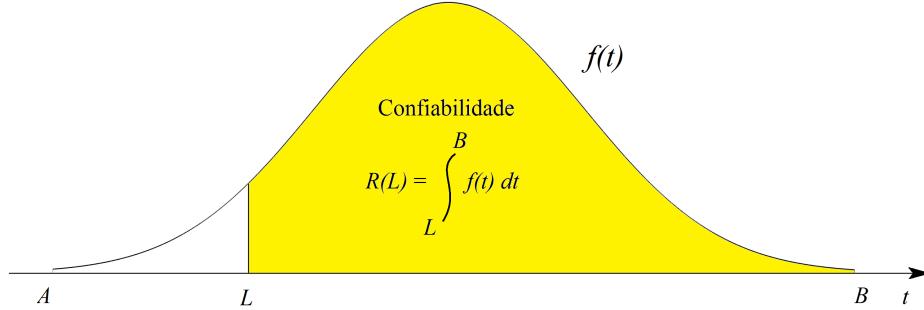


Figura 10.4: Confiabilidade.

A **confiabilidade** $R(L)$ de um sistema nada mais é do que a **probabilidade** que esse sistema funcione, dentro dos padrões estabelecidos em projeto, até a *data* L . Deve-se notar que quanto maior for o valor L , menor será a confiabilidade $R(L)$, como mostra a Fig.10.5.

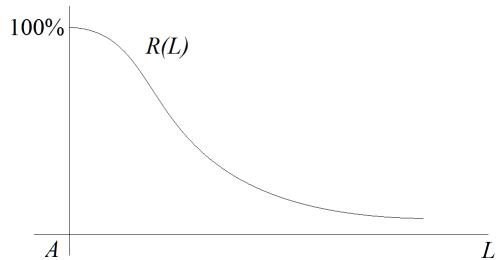


Figura 10.5: A medida que o tempo passa, a confiabilidade diminui.

Em suma, podemos dizer que confiabilidade é a probabilidade de que um sistema funcione dentro dos padrões preestabelecidos até uma data especificada.

Portanto, para estabelecer uma confiabilidade é necessário que duas coisas estejam bem claras: **uma data** e **uma probabilidade**.

Exercícios:

- Encontre uma expressão para a confiabilidade de um grupo de peças cuja a vida possa ser modelada pela distribuição $f(t) = \frac{1}{2} \sin(t)$. Em seguida determine a confiabilidade para $L = \frac{\pi}{6}$ e trace o gráfico de $R(L)$.

Resposta: $R(L) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(L)$; $R = 93,30\%$.

- Encontre uma expressão para a confiabilidade de uma família de peças, cuja vida possa ser modelada pela seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f(t) = \frac{3}{4}(2t - t^2) \quad 0 \leq t \leq 2 \quad t \text{ em ano.}$$
Em seguida, trace o gráfico de $R(L)$.

- Suponha que a vida de um grupo de órgãos de máquina possa ser modelada matematicamente através da função de densidade de probabilidade esquematizada na Fig.10.6. Determine a vida média, a variância e a confiabilidade para uma vida nominal de 1 ano.

Resposta: $\mu(t) = \frac{20}{3}$ e $R = 90,25\%$.

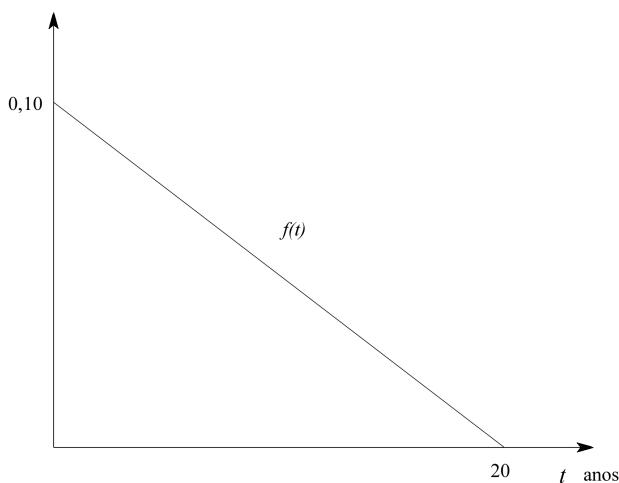


Figura 10.6: Distribuição triangular.

- A vida de um determinado grupo de peças (em anos) pode ser modelada através da seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f(t) = \frac{3}{20} \exp\left(-\frac{3t}{20}\right) \quad 0 \leq t < \infty.$$

Determine a vida média, a variância e a confiabilidade desse grupo, para uma vida nominal de 1 ano?

Resposta: $\mu(t) = \frac{20}{3}$ e $R = 86,07\%$.

5. Suponha que a vida de um grupo de rolamentos possa ser modelada matematicamente através da função de densidade de probabilidade simétrica esquematizada na Fig.10.7. Determine a vida média, a variância e a confiabilidade para uma vida nominal de 1 ano.

Resposta: $\mu(t) = 2$ e $R = 87,5\%$.

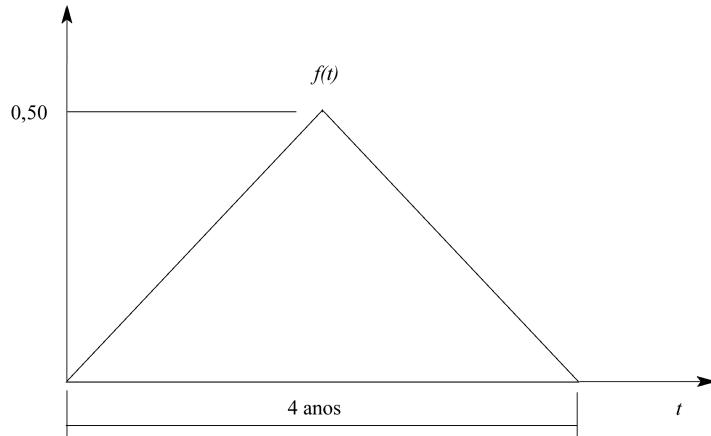


Figura 10.7: Distribuição triangular simétrica.

6. Partindo da função $g(t) = t(10 - t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 10$ anos:

- Crie uma função de densidade de probabilidade $f(t)$ a partir de $g(t)$;
- Trace o gráfico de $f(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 10$;
- Determine a variância da distribuição;
- Encontre a expressão para confiabilidade $R(L)$;
- Calcule a confiabilidade para uma vida L de 1 ano;
- Trace o gráfico de $R(L)$;

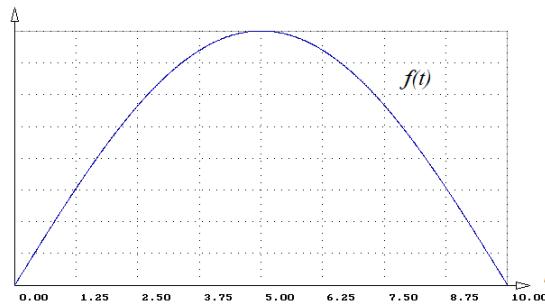


Figura 10.8: Uma FDP baseada na função $g(t) = t(10 - t)$.

Resposta: a) $f(t) = \frac{3}{500}t(10 - t)$

7. Idem para função $g(t) = \sin(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 10$ anos e compare os resultados com os obtidos no exercício anterior.

$$\text{Resposta: a)} f(t) = \frac{\pi}{20} \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right)$$

8. Um experimento com 100 rolamentos de determinada família, sob as mesmas condições de trabalho, foi feito para analisar a vida desses elementos. O resultado está mostrado na Tabela 10.4.

Tabela 10.4: Vida de uma família de rolamentos

$t \times 1000$ h	n
10	10
20	15
30	50
40	15
50	10

- (a) Calcule a vida média dos tempos tabelados;
- (b) Calcule a variância dos tempos tabelados $\sigma^2(t) = \mu(t^2) - \mu^2(t)$;
- (c) Calcule o desvio padrão $\sigma(t) = \sqrt{\sigma^2(t)}$;
- (d) Determine o coeficiente de variação $CV = \frac{\sigma(t)}{\mu(t)}$;
- (e) Monte uma tabela com as frequências relativas $f_r(t)$;
- (f) Acrescente uma coluna com as frequências relativas acumuladas $F_{ra}(t)$;
- (g) Faça um gráfico $t \times f_r(t)$;
- (h) Faça um gráfico $t \times F_{ra}(t)$;
- (i) Determine a vida nominal L_{10} ;
- (j) Crie uma função de densidade de probabilidade (FDP) quadrática para estimar a vida desses rolamentos;
- (k) Crie uma função de densidade de probabilidade (FDP) senoidal para estimar a vida desses rolamentos;
- (l) Com base nas FDPs criadas, determine a vida média;
- (m) Com base nas FDPs criadas, determine a variância;
- (n) Com base na FDPs criadas, determine o valor da vida nominal L_{10} ;
- (o) Apresente a expressão para a confiabilidade $R(L)$ de ambas as FDPs;
- (p) Determine a confiabilidade 5000 horas ($t = 0,5$), para ambas FDPs.

Capítulo 11

Mancais de rolamento

11.1 Introdução

Como já visto no capítulo 9, mancais são elementos de máquinas cuja função é dar suporte a árvores ou a eixos rotativos. Diferentemente dos mancais de deslizamento, onde há o contato direto na partida entre o eixo e o mancal, nos rolamentos o eixo nunca sofre o efeito do atrito. Como mostra a Fig.11.1, o eixo é envolvido por uma peça denominada anel interno que vai sofrer todo o desgaste.

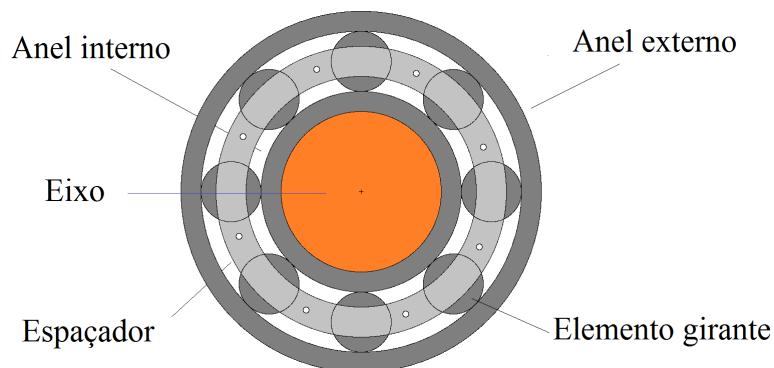


Figura 11.1: Mancal de rolamento.

Comparando os tipos principais de mancais

Segundo FAIRES [13], nos mancais de rolamento:

1. O atrito na partida não é superior ao de operação como ocorre nos mancais de deslizamento;
2. O coeficiente de atrito varia pouco com a carga e a rotação, somente nos casos extremos é que isso não ocorre;

3. O coeficiente de atrito nos rolamentos não é necessariamente inferior ao dos mancais de deslizamento, exceto na partida onde ocorre o contato metal com metal nesses últimos;
4. Diferentemente dos mancais de deslizamento, os de rolamentos são indicados em máquinas que sofrem partidas e paradas frequentes;
5. Podem partir sobre carga, o que não ocorre com os de deslizamento;
6. Alguns deles são capazes de suportar esforços radiais e axiais;
7. Requerem pouca lubrificação e pequena manutenção;
8. São mais ruidosos em comparação com os mancais de deslizamento;
9. Apresentam vida limitada devido ao tipo de carga que as pistas estão sujeitas. Mancais de deslizamentos bem projetados podem ter uma vida praticamente ilimitada;
10. Ocupam menos espaço axial e mais espaço radial se comparados aos mancais de deslizamento;
11. São altamente padronizados (o projetista não projeta, mas os seleciona de um catálogo). Os de deslizamento, frequentemente são projetados.

Falha nos rolamentos

As tensões nas esferas nos rolos e nas pistas dos rolamentos são muito intensas e, na grande maioria das vezes, ultrapassam o limite de resistência à fadiga do material. Por isso, é que sempre se espera que os rolamentos tenham vida limitada.

Parafraseando FAIRES [13], a falha por fadiga nesses elementos de máquinas se apresenta sob a forma de um descascamento de pequenos pedaços de material, geralmente da superfície das pista, por serem elas os componentes sujeitos a mais repetições de carga. Porém, pode ocorrer também o descascamento das esferas, dos rolos e das agulhas.

FAIRES [13] também afirma que não só as tensões de trabalho são as responsáveis por limitar a vida de um rolamento. Fatores tais como água, ácidos e corrosão também reduzem drasticamente a vida de um rolamento.

Segundo SHIGLEY [5] *se um mancal está limpo e devidamente lubrificado, é montado e selado contra a entrada de poeira ou sujeira, é mantido nesta condição e*

operado a temperaturas razoáveis, então a fadiga do material será a única causa de falha...

Sob condições ideais, a falha por fadiga consistirá no descascamento das superfícies que recebem a carga... o critério de falha é a primeira evidência de fadiga..

11.2 Vida e Confiabilidade de um grupo de Rolamentos

... Define-se **vida** de um certo rolamento como o **número total de revoluções ou número de horas de operação** do rolamento, a uma determinada velocidade constante, necessária para se desenvolver o critério de falha.

É impossível estabelecer, a priori, a vida de um certo rolamento. Ou seja, não se tem conhecimento de quanto tempo um dado rolamento trabalhará dentro dos padrões estabelecidos em projeto. Somente após a falha é que a vida do rolamento poderá ser estabelecida.

... A **vida nominal** de um grupo de rolamentos... é definida como o **número de revoluções, ou de horas** a uma determinada velocidade constante que 90% de um grupo de rolamentos completarão ou excederão para ocorrer a falha...

A vida nominal de um grupo de rolamentos é representada por L_{10} e a **vida média** por μ . A experiência tem mostrado que a vida média μ dos rolamentos é de aproximadamente **cinco vezes** a vida nominal L_{10} , como mostra a Fig.11.2.

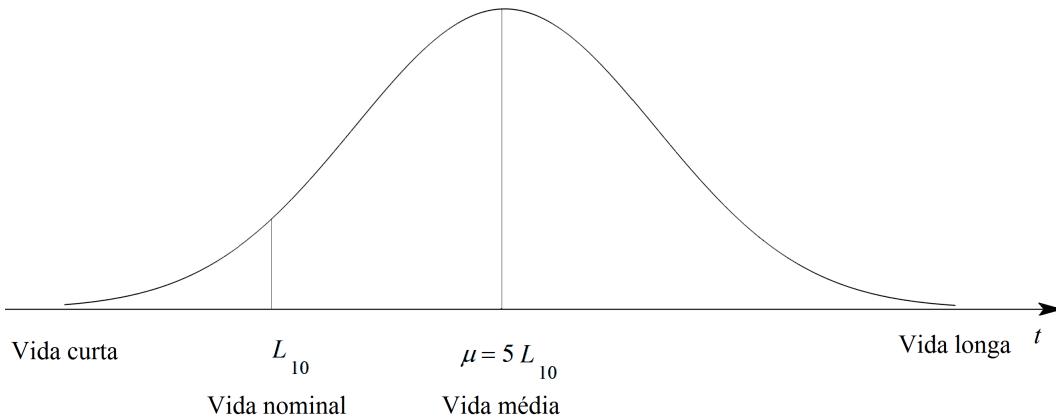


Figura 11.2: Uma função de densidade de probabilidade (área total 100%).

A **confiabilidade** de um grupo de rolamentos pode ser definida como a **probabilidade** de que eles exerçam suas funções adequadamente nas condições de operação para os quais foram projetados, **em um período de tempo**, ou de um número de revoluções previamente estabelecidos.

Como visto na Seção 10.7, dada uma função de densidade de probabilidade $f(t)$, a confiabilidade $R(L)$ pode ser definida da seguinte forma:

$$R(L) = p(L \leq t \leq B) = \int_L^B f(t)dt \quad (11.1)$$

Onde B é o maior valor que pode ser assumido pela variável t da distribuição de probabilidade escolhida $f(t)$.

Note que, de acordo com a Fig.11.3, a medida que L cresce menor será a confiabilidade $R(L)$ do grupo de rolamentos.

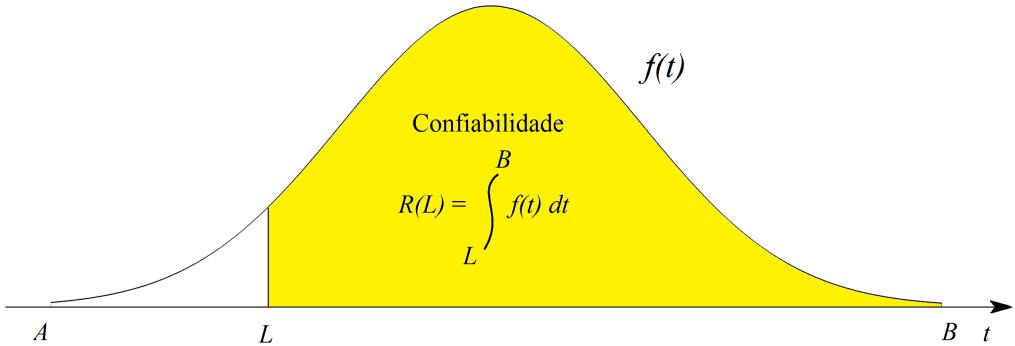


Figura 11.3: Confiabilidade de um grupo de rolamentos.

A experiência mostra que, das distribuições de probabilidade conhecidas na atualidade, a de **Weibull** (*se pronuncia Vaibol*) é a mais adequada na modelagem da vida de rolamentos.

A função de densidade de probabilidade dessa distribuição é dada por:

$$f(t) = \frac{b}{\theta} \cdot \left(\frac{t - t_0}{\theta} \right)^{b-1} \exp \left[- \left(\frac{t - t_0}{\theta} \right)^b \right] \quad t_0 \leq t < \infty \quad (11.2)$$

Onde:

t – tempo;

t_0 – Parâmetro de localização ($t_0 = 0$ no presente caso);

θ – Parâmetro de escala;

b – Parâmetro de forma ou expoente de Weibull;

Portanto, no caso do estudo da vida de rolamentos, a função de densidade de probabilidade da distribuição de Weibull se reduz a:

$$f(t) = \frac{b}{\theta} \cdot \left(\frac{t}{\theta} \right)^{b-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\theta} \right)^b \right] \quad 0 \leq t < \infty \quad (11.3)$$

Integrando a Eq.(11.3), entre os limites L e ∞ , encontra-se a confiabilidade $R(L)$,

para uma vida genérica L :

$$R(L) = \exp \left[-\left(\frac{L}{\theta} \right)^b \right] \quad 0 \leq L < \infty \quad (11.4)$$

No caso de rolamentos, o parâmetro θ é arbitrariamente escrito como o produto de uma constante m , a ser determinada, e a vida nominal L_{10} :

$$\theta = m \cdot L_{10} \quad (11.5)$$

Neste caso, a confiabilidade $R(L)$ poderá ser expressa por:

$$R(L) = \exp \left[-\left(\frac{L}{m \cdot L_{10}} \right)^b \right] \quad 0 \leq L < \infty \quad (11.6)$$

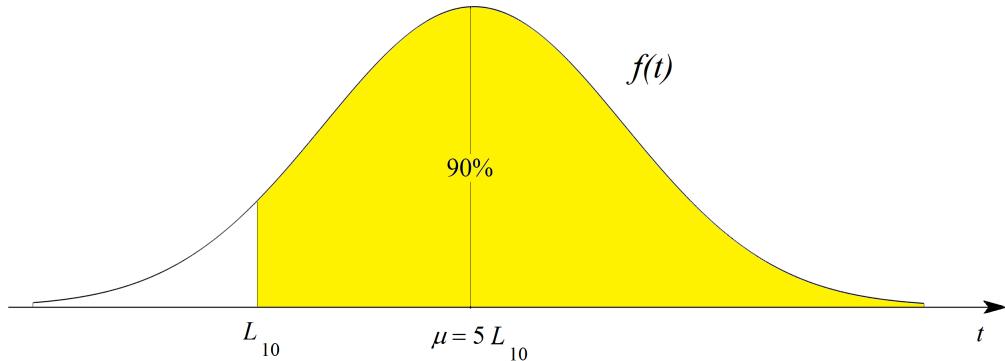


Figura 11.4: Confiabilidade para vida nominal L_{10} .

Para determinar as constantes m e b é necessário conhecer dois valores de $R(L)$ com os seus respectivos L .

a) **Primeiro ponto conhecido da curva:**

Por definição, se $R = 0,90$ então $L = L_{10}$, como pode ser visto na Fig.11.4.

Substituindo na Eq.(11.6), vem:

$$0,90 = \exp \left[-\left(\frac{L_{10}}{m \cdot L_{10}} \right)^b \right]$$

Donde se pode concluir que:

$$m^b = 9,49122 \quad (11.7)$$

b) Segundo ponto conhecido da curva:

Como mostra a Fig.11.5, nas distribuições de probabilidades contínuas e simétricas em relação à média, a confiabilidade para $t = \mu$ é igual a 50%.

Além disso, como já mencionado nesta seção, a vida média μ dos rolamentos é cinco vezes a vida nominal L_{10} .

Portanto, supondo que a distribuição de Weibul seja simétrica em relação à média, então, $R = 0,50$ para $L = 5 \cdot L_{10}$.

Assim, substituindo essa condição na Eq.(11.6), vem:

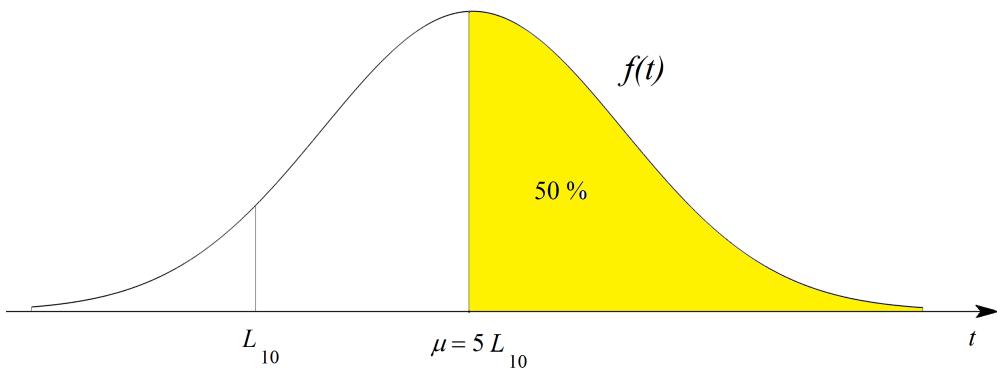


Figura 11.5: Nas distribuições simétricas, a confiabilidade para $t = \mu$ é igual a 50%.

$$0,50 = \exp \left[- \left(\frac{5 \cdot L_{10}}{m \cdot L_{10}} \right)^b \right]$$

Logo,

$$\left(\frac{5}{m} \right)^b = 0,69314718 \quad (11.8)$$

Substituindo a Eq.(11.7) na E.q(11.8), encontra-se:

$$b \cong 1,17$$

$$m \cong 6,84.$$

Portanto a confiabilidade dos rolamentos, em função de uma vida L , pode ser obtida com base na seguinte expressão:

$$R(L) = \exp \left[- \left(\frac{L}{6,84 \cdot L_{10}} \right)^{1,17} \right] \quad 0 \leq L < \infty \quad (11.9)$$

Da Eq.(11.9), encontra-se a seguinte expressão que relaciona a vida nominal L_{10} , de um grupo de rolamentos, em função de uma confiabilidade R , para uma vida

genérica L :

$$L_{10} = \frac{L}{6,84 \left[\ln \frac{1}{R} \right]^{0,854}} \quad 0 \leq L < \infty \quad (11.10)$$

$$L = 6,84 L_{10} \left[\ln \frac{1}{R} \right]^{0,854} \quad 0 \leq L < \infty \quad (11.11)$$

Exercícios:

1. (página 375 do SHIGLEY [5]):

Certa aplicação requer um rolamento que dure 1800 h com confiabilidade de 99% (ou seja, em 1800 h esperamos que a cada grupo de 100 rolamentos apenas 1 falhe). Qual deverá ser a vida nominal do rolamento selecionado para esta aplicação?

Resposta: $L_{10} = 13\ 377$ horas.

2. Idem para uma confiabilidade de 99,9%.

Resposta: $L_{10} = 95\ 947$ horas.

3. Um grupo de rolamentos possui vida nominal de 20000 horas. Determine a confiabilidade de um rolamento desse grupo, sabendo-se que ele será aplicado em uma máquina que se espera que dure 15000 h.

Resposta: $R = 92,75\%$.

4. Com base no exercício anterior, determine a confiabilidade de $L = 10000$ h.

Resposta: $R = 95,42\%$.

5. Idem para $L = 30000$.

Resposta: $R = 84,42\%$

6. Idem para $L = 7500$ horas.

Resposta: $R = 96,71\%$.

7. Depois de quanto tempo deverá ser substituído um rolamento de uma máquina, para que sua confiabilidade seja de 99%, para uma vida nominal de 3000 h?

Resposta: $L = 403$ horas.

11.3 Relação entre a carga e a vida de um mancal de rolamento

Sejam dois rolamentos idênticos sujeitos à cargas diferentes F_1 e F_2 . Experimentos mostram que a razão entre as vidas L_1 e L_2 desses rolamentos é dada por:

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^a \quad (11.12)$$

Onde:

$a = 3$ para mancais de esferas;

$a = \frac{10}{3}$ para os demais mancais.

Baseado na Eq.11.12, pode-se concluir que:

$$L_2 = L_1 \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^a \quad (11.13)$$

Exercícios:

1. Reduzindo o valor da carga dinâmica equivalente em 10% e mantendo constante os demais parâmetros, qual o percentual de aumento esperado para vida de um rolamento de esferas?

Resposta: 37,17%.

O exercício anterior mostra que mesmo uma leve redução da carga aplicada a um rolamento, nota-se um substancial aumento na sua vida.

2. Aumentando o valor da carga dinâmica equivalente em 10% e mantendo constante os demais parâmetros, qual o percentual de redução esperada para a vida de um rolamento de esferas?

Resposta: 24,87%.

Quanto à velocidade, FAIRES [13] assevera que se a *velocidade de um rolamento é dobrada, o número de repetições das tensões no fim de um certo tempo também dobra e a vida esperada do rolamento é reduzida a metade*. Isto é, há uma relação linear entre a vida do rolamento e a rotação. Em termos matemáticos, essa relação poderá se expressar por:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{rpm_2}{rpm_1} \quad (11.14)$$

A expressão anterior leva a concluir que:

$$L_2 = L_1 \frac{rpm_1}{rpm_2} \quad (11.15)$$

Na falta de uma expressão mais adequada, pode-se utilizar a E.11.16 para estimar a vida de um rolamento na ocorrência de variações simultâneas de carga e velocidade de rotação:

$$L_2 = L_1 \left(\frac{rpm_1}{rpm_2} \right) \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^a \quad (11.16)$$

3. Qual seria o percentual de variação esperada na vida de um rolamento de esferas se houvesse um aumento de 10% na carga aplicada e uma redução de 10% na rotação?

Resposta: redução de 16,52%.

4. Com base no exercício anterior, determine de quanto deveria ser a redução da velocidade para que a vida esperada do rolamento permanecesse constante quando a carga fosse aumentada de 10%?

11.4 Seleção de um rolamento

Na seleção de um rolamento, é necessário conhecer, dentre outras quantidades, a chamada **carga dinâmica equivalente**. Representada por F , a carga dinâmica equivalente pode ser obtida o com o auxílio da Eq.11.17, que é recomendada pelos fabricantes:

$$F = X \cdot F_r + Y \cdot F_a \quad (11.17)$$

Onde:

X e Y – Constantes fornecidas pelos fabricantes;

F_r – Carga Radial;

F_a – Carga Axial.

Nos rolamentos de esferas costuma-se adotar $X = 1$ e $Y = 0$.

Engrenagens helicoidais, como mostrado nas Figs.11.6 (a) e 11.7, geram sempre esforços radiais e axiais, ao passo que as cilíndricas de dentes retos, apresentadas na Fig.11.6 (b), exercem somente esforços radiais.

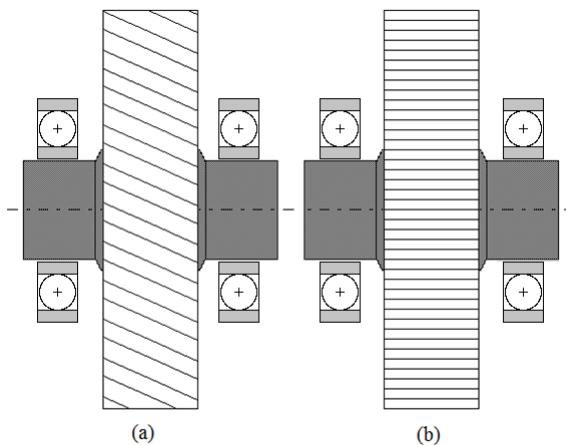


Figura 11.6: Engrenagem helicoidal e engrenagem de dentes retos.

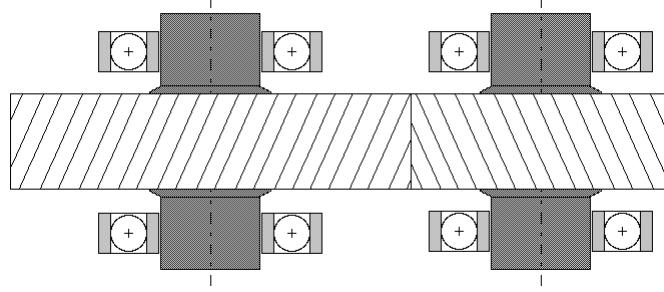


Figura 11.7: Engrenagens helicoidais.

Outra grandeza necessária à seleção de um rolamento é denominada **capacidade de carga dinâmica**. Representada por C , a capacidade de carga dinâmica é a carga que um grupo de rolamentos pode suportar para uma vida nominal de um milhão de revoluções (10^6 revoluções). Isto é, aplicando-se uma carga C , a vida nominal L_{10}^C de um grupo de rolamentos é 10^6 revoluções.

Ou seja, para uma carga C , são esperados que 10% dos rolamentos falhem depois de 10^6 revoluções.

Vida $L_{10}^C = 10^6$ revoluções está ligada à carga C .

Uma pergunta?:

E se os rolamentos estiverem sujeitos a uma carga F diferente de C ?

Depois de quantas revoluções se espera que 10% falhem?

Em outras palavras:

Quanto vale L_{10}^F para uma carga F ?

Para responder essa pergunta recorre-se à Eq.11.12 que estabelece que

$$L_2 = L_1 \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^a$$

Portanto,

$$L_{10}^F = L_{10}^C \left(\frac{C}{F} \right)^a$$

$$L_{10}^F = 10^6 \left(\frac{C}{F} \right)^a \quad L_{10}^F \text{ dada em } \text{número de revoluções}$$

Geralmente, a vida L_{10}^F é representada simplesmente por L_{10} . Com essa troca de variáveis a expressão anterior se torna:

$$L_{10} = 10^6 \left(\frac{C}{F} \right)^a \quad L_{10} \text{ dada em } \text{número de revoluções} \quad (11.18)$$

Ou ainda,

$$C = F \cdot \left(\frac{L_{10}}{10^6} \right)^{\frac{1}{a}} \quad L_{10} \text{ dada em } \text{número de revoluções} \quad (11.19)$$

Sendo conhecida a *rpm* do eixo e caso a vida L_{10} seja dada em horas, será necessário encontrar o equivalente de L_{10} em número de revoluções. Assim,

$$L_{10}(\text{em revoluções}) = L_{10}(\text{em horas}) \times \frac{\text{revoluções}}{\text{hora}} \quad (11.20)$$

$$\frac{\text{revoluções}}{\text{hora}} = 60 \times \frac{\text{revoluções}}{\text{minuto}}$$

$$L_{10}(\text{em revoluções}) = L_{10}(\text{em horas}) \times 60 \times \frac{\text{revoluções}}{\text{minuto}} \quad (11.21)$$

$$L_{10}(\text{em revoluções}) = L_{10}(\text{em horas}) \times 60 \cdot rpm \quad (11.22)$$

Substituindo a expressão anterior na Eq.11.18, encontra-se:

$$L_{10}(\text{em horas}) \times 60 \cdot rpm = 10^6 \left(\frac{C}{F} \right)^a \quad (11.23)$$

Portanto,

$$L_{10}(\text{em horas}) = \frac{10^6}{60 \cdot rpm} \left(\frac{C}{F} \right)^a \quad (11.24)$$

Ou, simplesmente

$$L_{10} = \frac{10^6}{60 \cdot rpm} \left(\frac{C}{F} \right)^a \quad L_{10} \text{ dada em horas} \quad (11.25)$$

A Eq.(11.25) pode ser usada para determinar a vida nominal L_{10} de um grupo de rolamentos, conhecendo-se a capacidade de carga dinâmica C (do catálogo) e a carga dinâmica equivalente F .

De forma análoga, dada uma carga dinâmica equivalente F e estabelecendo uma vida nominal L_{10} , pode-se determinar a capacidade de carga dinâmica requerida C e procurar num catálogo o tipo de rolamento que tenha um valor de C maior ou igual ao obtido pela expressão:

$$C = F \cdot \left(\frac{60 \cdot rpm \cdot L_{10}}{10^6} \right)^{\frac{1}{a}} \quad L_{10} \text{ dada em horas} \quad (11.26)$$

Exercícios:

- Qual seria a capacidade de carga dinâmica requerida a um grupo de rolamentos de esferas para uma vida nominal L_{10} de 15000 horas, se a carga dinâmica equivalente F for de 8 kN para uma rotação de 1800 rpm?

Resposta: $C = 93,96 \text{ kN}$.

2. De acordo com um catálogo, a capacidade de carga dinâmica de um tipo de rolamento de esferas vale 190 kN. A carga dinâmica equivalente calculada foi de 10 kN. Para uma rotação de 2000 rpm, qual será a vida nominal esperada para esses rolamentos nesta aplicação?

Resposta: $L_{10} = 57158$ horas.

3. Com os dados do exercício anterior, determine a vida nominal esperada, em horas, para uma carga dinâmica equivalente F exatamente igual à C .

Resposta: $L_{10} = 8,33$ horas.

Na seleção de um rolamento, necessita-se também conhecer a **Capacidade de carga estática requerida** C_0 . De acordo com o catálogo SKF [14] (página 27), a capacidade de carga estática é definida como sendo a carga que produz uma deformação permanente total do corpo rolante e da pista do rolamento, no ponto de contato mais carregado, igual a 0,0001 do diâmetro do corpo rolante. Os valores de C_0 podem ser obtidos com o auxílio da seguinte expressão:

$$C_0 = S_0 \cdot F_0 \quad (11.27)$$

Onde:

$$F_0 = X_0 \cdot F_r + Y_0 \cdot F_a \quad (11.28)$$

Onde o termo F_0 é denominado **Carga estática equivalente**. As constantes S_0 , X_0 e Y_0 são fornecidas pelos fabricantes de rolamentos.

Geralmente se adota $X_0 = 0,6$ e $Y_0 = 0,5$.

Quanto ao fator S_0 , SKF [14] recomenda usar os seguintes valores mínimos:

$S_0 = 0,5$ para serviços suaves sem vibração;

$S_0 = 1,0$ para serviços de vibração normal;

$S_0 = 1,5$ a $2,0$ para serviços com intensas cargas de choque.

Exercícios:

1. Certa aplicação requer um rolamento de esferas que dure 2000 horas, com confiabilidade de 99,9% , girando a 1500 rpm, em um serviço de vibração normal. Sabe-se que a carga radial e a carga axial aplicadas no mancal são respectivamente iguais a 12 kN e 8 kN. Determine a capacidade de carga

dinâmica e a capacidade de carga estática equivalente para o rolamento a ser utilizado.

Resposta: $C = 255 \text{ kN}$ e $C_0 = 11,2 \text{ kN}$.

2. Determine as capacidades de carga dinâmica e estática para um rolamento de esferas, para um serviço de vibração normal, que será posto na extremidade esquerda do eixo da Fig.11.8. A confiabilidade deverá ser de 99,99% para uma vida requerida de 1500 horas. Sabe-se que o eixo de 30 mm suporta duas engrenagens de diâmetros primitivos de 75 mm e 125 mm respectivamente. A potência de 10 HP é transmitida a 600 rpm.

São dados: $L_i = 25 \text{ mm}$ $i = 1 \dots 5$. Ignore o ângulo de pressão nos dentes das engrenagens. O diagrama de esforços cortantes estão apresentados na Fig.11.9.

Resposta: $C = 52,05 \text{ kN}$ e $C_0 = 1,14 \text{ kN}$.

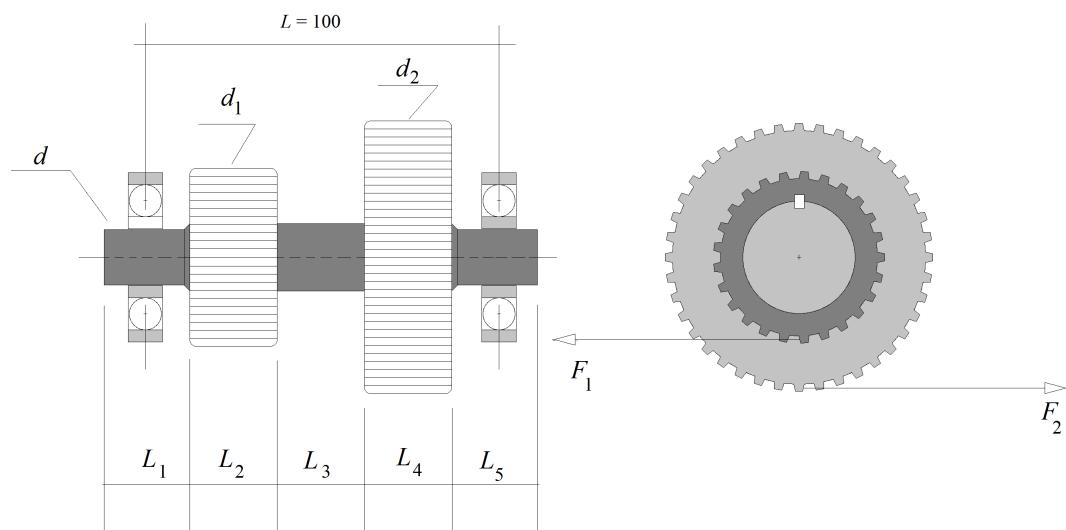


Figura 11.8: Eixo com duas engrenagens.

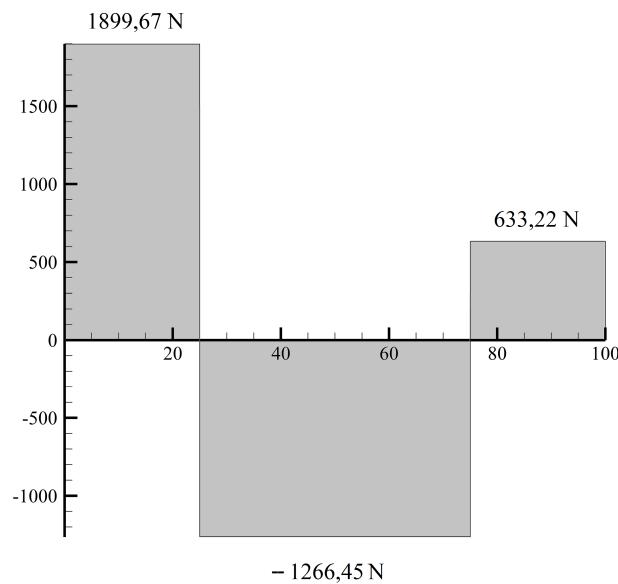


Figura 11.9: Diagrama de esforços cortantes.

3. Uma árvore, de 1500 mm de comprimento e 110 mm de diâmetro, suporta uma polia de 880 N de peso em seu ponto médio, como mostra Fig.11.10. A polia é enchavetada à árvore e recebe 20 HP a 150 rpm que são transmitidos a um acoplamento flexível imediatamente à direita do mancal direito. O acionamento por correia é horizontal e a soma das tensões é de 6620 N. Determine as capacidades de carga dinâmica e estática para os rolamento de esferas, para um serviço de vibração normal. A confiabilidade deverá ser de 99,9% para uma vida requerida de 2200 horas.

Resposta: $C = 34$ kN e $C_0 = 2,0$ kN.

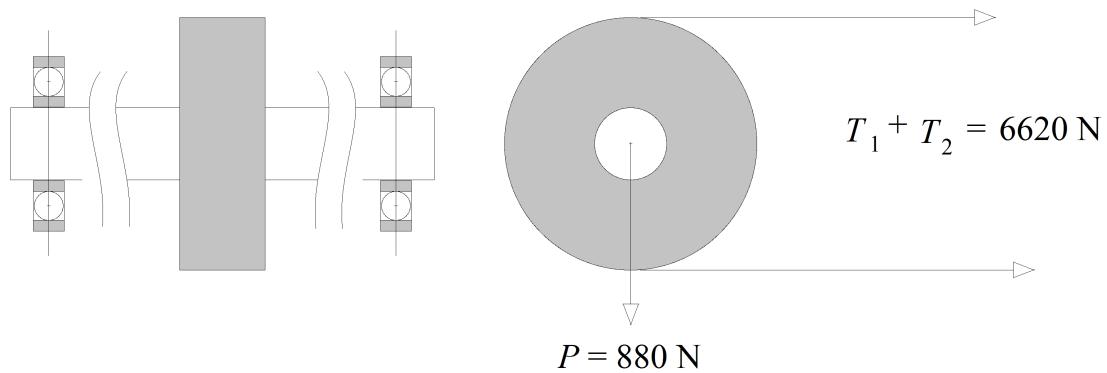


Figura 11.10: Árvore com uma polia no seu ponto médio.

Referências Bibliográficas

- [1] VANVLACK, L. H. *Princípios de Ciências dos Materiais.* Eddgard Blucher Ltda, 1977.
- [2] MERIAN, J. L. *Estática.* Livros Técnicos e Científicos S.A, 1985.
- [3] UGURAL, A. C. *Mecânica dos Materiais.* LTC, 2009.
- [4] NORTON, R. L. *Projeto de Máquinas.*
- [5] SHIGLEY, J. E. *Elementos de Máquinas.* Livros Técnicos e Científicos S.A, 1981.
- [6] HALL, S. H., HOLLOWENKO, A. R., LAUGHLIN, H. G. *Elementos Orgânicos de Máquinas.* MacGraw - Hill, 1981.
- [7] GURTIN, E. G. *An introduction to Continuum Mechanics.* Academic Press, 1981.
- [8] BEER, F. P., JOHNSTON, E. R. *Resistência dos Materiais.* Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1992.
- [9] DIETER, G. E. *Metalurgia Mecânica.* Guanabara Koogan S.A, 1981.
- [10] BUDYNAS, R. G., NISBETT, J. K. *Shigley's Mechanical Engineering Design.* MacGraw - Hill, 2008.
- [11] HIGDON, A., OHLSEN, E. H., STILES, W. B., et al. *Mecânica dos Materiais.* Guanabara Koogan S.A, 1981.
- [12] ALBUQUERQUE, O. A. P. P. *Elementos de Máquinas.* Guanabara dois, 1980.
- [13] FAIRES, V. M. *Elementos orgânicos de Máquinas.* Livros Técnicos e Científicos S.A, 1977.
- [14] SKF. *Cataálogo geral.* SKF, 1982.