0.1 Riktningsderivator och gradienter

Påminnelse 1. Låt $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ och $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ vara vektorer.

Skalärprodukten är då
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Längden av $\vec{u}$ är
$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Det gäller också att
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\theta)$$
där θ är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Det följer av förra påståeendet att för två vinkelräta vektorer är $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Sats 1 (Största värde för riktningsderivata)**.** $D_{\vec{u}} f(x,y)$ är som störst när $\vec{u}$ pekar i samma riktning som $\nabla f(x,y)$ d.v.s. när $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$.

Alltså $f(x,y)$ växer som mest när (x,y) rör sig från (x_0, y_0) i riktningen $\dfrac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x,y)|}$.

Bevis. $D_{\vec{u}} f(x,y) = \vec{u} \cdot \nabla f(x,y) = |\vec{u}| \cdot |\nabla f(x,y)| \cos(\theta)$ där θ är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\nabla f(x,y)$. Eftersom $\vec{u}$ är en enhetsvektor vet vi att $|\vec{u}| = 1$. $|\nabla f(x,y)| \cos(\theta)$ blir som störst när $\cos(\theta) = 1$, d.v.s. $\theta = 0$. Det betyder att $\vec{u}$ och $\nabla f(x,y)$ pekar i samma riktning. $\square$

Anmärkning 1. I princip allt från denna veckan generaliserar enkelt från två till tre eller fler variabler.

0.2 Tangentplan till nivåytor (14.6)

En nivåyta bestäms av $F(x,y,x) = k$ för något konstant $k \in \mathbb{R}$.

En graf $z = f(x,y)$ är ett specialfall av en nivåyta, eftersom vi kan ta $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ och $k = 0$.

Ska definiera tangentplan till allmän nivåyta. Vill definiera tangentplanet till $F(x,y,z) = k$ i (x_0, y_0, z_0) som det plan som genom (x_0, y_0, z_0) s.a. det för varje kurva $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ som uppfyller $\vec{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ och ligger i nivåytan så innehåller tangentplanet $\vec{r}'(t_0)$.

Figur 1

Anta att $\vec{r}$ är en sådan kurva. Då är $\forall t : F(x(t), y(t), z(t)) = k$. Nu deriverar vi båda sidor med avseende på t m.h.a. kedjeregeln så att vi får

$$\begin{aligned} F_x \cdot x'(t) + F_y \cdot y'(t) + F_z \cdot z'(t) &= 0 \\ \nabla F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Om vi tar $t = t_0$ får vi att $\nabla F(\vec{r}(t_0)) = \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ är vinkelrät mot $\vec{r}'(t_0)$.

Påminnelse 2. En normalvektor $\vec{n}$ till ett plan är en nollskild vektor som är vinkelrät mot alla vektorer i planet. Om planet går genom (x_0, y_0, z_0) ges hela planet av

$$\vec{n} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0.$$

Definition 1 (Tangentplan till nivåyta)**.** *Tangentplanet* till en nivåyta $F(x,y,z) = k$ genom en punkt (x_0, y_0, z_0) där $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq \vec{0}$ är $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$.

Det är definierat s.a. det uppfyller vad vi ville att det skulle uppfylla.

Obs. 1. Om $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ är nivåytan där $F = 0$ samma som grafen $z = f(x,y)$. Eftersom $\nabla F = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$ får i en punkt $(a, b, f(a,b))$ samma tangentplan $\langle -f_x(a,b), -f_y(a,b), 1 \rangle \cdot \langle x - a, y - b, z - f(a,b) \rangle$ oavsett om man ser ytan som en nivåyta eller grafen till en funktion.

Exempel 1. Bestäm tangentplanet till ytan $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$.

Ytan är nivåytan $F(x,y,z) = 1$ där $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$.

$\nabla F = \langle 2x, -2y, 2z \rangle$ och $\nabla F(1,1,1) = \langle 2, -2, 2 \rangle$. Då är tangentplanet $\nabla F(1,1,1) \cdot \langle x - 1, y - 1, z - 1 \rangle = 0$ vilket ger

$$\begin{aligned} 2(x-1) - 2(y-1) + 2(z-1) &= 0 \\ x - 1 - y + 1 + z - 1 &= 0 \\ x - y + z &= 1. \end{aligned}$$

0.3 Lokala extremvärden

Definition 2 (Lokalt maximum)**.** $f(x,y)$ har ett *lokalt maximum* i (a,b) om $f(x,y) \leq f(a,b)$ gäller för (x,y) nära (a,b). (D.v.s. det gäller för (x,y) i någon cirkelskiva kring (a,b).)

Definition 3 (Absolut/Globalt maximum)**.** $f(x,y)$ har ett *absolut/globalt maximum* i (a,b) om $f(x,y) \leq f(a,b)$ gäller för alla (x,y) i definitionsmängden till f.

Definition 4 (Lokalt minimum)**.** $f(x,y)$ har ett *lokalt minimum* i (a,b) om $f(x,y) \geq f(a,b)$ gäller för (x,y) nära (a,b). (D.v.s. det gäller för (x,y) i någon cirkelskiva kring (a,b).)

Definition 5 (Absolut/Globalt minimum)**.** $f(x,y)$ har ett *absolut/globalt minimum* i (a,b) om $f(x,y) \geq f(a,b)$ gäller för alla (x,y) i definitionsmängden till f.

Definition 6 (Extremvärde)**.** Ett *extremvärde* är ett minimum eller maximum.

Exempel 2. $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ har ett lokalt och globalt minimum, var?

Inses lätt att det sker i (0,0) då den annars är strikt positiv för $x, y, \in \mathbb{R}$.

Påminnelse 3. I en variabel, om f är deriverbar och har ett (lokalt) extremvärde i a är $f'(a) = 0$.

Sats 2 (Extremvärde i en punkt)**.** Om $f(x,y)$ har ett (lokalt) extremvärde i punkten (a,b) och $f_x(a,b)$ och $f_y(a,b)$ existerar är $f_x(a,b) = 0$ och $f_y(a,b) = 0$.

Bevis. Om vi låter $h(x) = f(x,b)$ ha ett extremvärde i $x = a$ gäller $h'(a) = 0$ och $h'(a) = f_x(a,b)$, vilket ger att $f_x(a,b) = 0$.

$f_y(a,b) = 0$ visas analogt. $\square$