0.1 Inledning

Punkter i planet $\mathbb{R}^2$ beskrivs med två koordinater, oftast (x,y). Punkter i rummet $\mathbb{R}^2$ beskrivs med tre koordinater, oftast (x,y,z).

I envariabelanalys studerar man funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, då är det naturligt att också studera vektorvärda funktioner $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. $f = \langle f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)\rangle$ har n komponenter och m variabler. Detta är dock för allmänt, i kursen ska vi studera viktiga specialfall:

$n = 2{,}3, m = 1 : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ så att $f(t) = \langle f_1(t), f_2(t)\rangle$. En variabel t bestämmer två komponenter $f_1(t)$ och $f_2(t)$.

$n = 1, n = 2{,}3 : f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) \in \mathbb{R}$ så att två variabler x,y bestämmer en komponent/tal $f(x,y)$.

$n = m = 2{,}3 : f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dessa kallas vektorfält.

0.2 Kurvor i rummet eller planet (13.1)

Def. 1 (Kurvor i rummet och deras parametrisering)**.** En *kurva* C i planet är alla punkter vars position ges av $\vec{r}(t) = \langle x(t),y(t)\rangle$ där $x(t), y(t)$ är kontinuerliga funktioner på något intervall. $\vec{r}(t)$ kallas en *parametrisering* av C.

Motsvarande definition av kurvor i rummet.

Ex. 1. En rät linje genom en punkt (x_0,y_0) med riktningsvektor $\vec{v} = \langle v_1,v_2\rangle$ är en kurva som kan parametriseras av $\vec{r}(t) = \langle x_0 + tv_1, y_0 + tv_2\rangle$.

Om $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ är definierad för t nära t_0 ges *gränsvärdet* av $\vec{r}(t)$ när t går mot t_0 av $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to t_0} x(t), \lim_{t\to t_0} y(t) \right\rangle$ om gränsvärdena i högerledet existerar.

0.3 Derivator av vektorvärda funktioner och tangentlinjer (13.2)

Def. 2 (Derivatan av vektorvärda funktioner)**.** *Derivatan* av $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$ om gränsvärdet existerar.

Om $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ gäller att om $x(t)$ och $y(t)$ är deriverbara så är $\vec{r}'(t) = \left\langle \lim_{h\to 0} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h\to 0} \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} \right\rangle = \langle x'(t), y'(t)\rangle$

Ex. 2. Låt $\vec{r}(t) = \left\langle 2t, \sqrt{t}\right\rangle$. Beräkna $\vec{r}'(t)$.

$$\vec{r}(t) = \left\langle \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t), \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{t})\right\rangle = \left\langle 2, \tfrac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}\right\rangle = \left\langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right\rangle$$

Def. 3 (Tangentvektor och tangentlinje till linjer)**.** $\vec{r}'(t)$ kallas för *tangentvektor* till $\vec{r}(t)$ och linjen genom $P = \vec{r}(t_0)$ med riktningsvektor $\vec{r}'(t)$ kallas för *tangentlinjen* till $\vec{r}$ i P. Tangentlinjen ges av $L(t) = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}'(t_0)$.

Ex. 3. Bestäm tangentlinjen till $\vec{r}(t) = \left\langle 2t, \sqrt{t} \right\rangle$ i punkten $P = \vec{r}(4) = \left\langle 2 \cdot 4, \sqrt{4} \right\rangle = \langle 8, 2 \rangle$. Tangentvektor $\vec{r}'(t) = \left\langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right\rangle \implies \vec{r}'(4) = \left\langle 2, \frac{1}{4} \right\rangle$. Tangentlinjen $L(t) = \langle 8, 2 \rangle + t \cdot \left\langle 2, \frac{1}{4} \right\rangle = \left\langle 8 + 2t, 2 + \dfrac{t}{4} \right\rangle$