Föreläsningsanteckningar
Matematisk analys i flera variabler
LMA017

Hugo Simonsson

20 september 2019

Innehåll

List of Theorems

1 Föreläsning 19-09-03

1.1 Inledning

Punkter i planet $\mathbb{R}^2$ beskrivs med två koordinater, oftast (x,y). Punkter i rummet $\mathbb{R}^2$ beskrivs med tre koordinater, oftast (x,y,z).

I envariabelanalys studerar man funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, då är det naturligt att också studera vektorvärda funktioner $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. $f = \langle f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)\rangle$ har n komponenter och m variabler. Detta är dock för allmänt, i kursen ska vi studera viktiga specialfall:

$n = 2{,}3, m = 1 : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ så att $f(t) = \langle f_1(t), f_2(t)\rangle$. En variabel t bestämmer två komponenter $f_1(t)$ och $f_2(t)$.

$n = 1, n = 2{,}3 : f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) \in \mathbb{R}$ så att två variabler x,y bestämmer en komponent/tal $f(x,y)$.

$n = m = 2{,}3 : f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dessa kallas vektorfält.

1.2 Kurvor i rummet eller planet (13.1)

Definition 1 (Kurvor i rummet och deras parametrisering)**.** En *kurva C* i planet är alla punkter vars position ges av $\vec{r}(t) = \langle x(t),y(t)\rangle$ där $x(t), y(t)$ är kontinuerliga funktioner på något intervall. $\vec{r}(t)$ kallas en *parametrisering* av C.

Motsvarande definition av kurvor i rummet.

Exempel 1. En rät linje genom en punkt (x_0,y_0) med riktningsvektor $\vec{v} = \langle v_1,v_2\rangle$ är en kurva som kan parametriseras av $\vec{r}(t) = \langle x_0 + tv_1, y_0 + tv_2\rangle$.

Om $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ är definierad för t nära t_0 ges *gränsvärdet* av $\vec{r}(t)$ när t går mot t_0 av $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to t_0} x(t), \lim_{t\to t_0} y(t) \right\rangle$ om gränsvärdena i högerledet existerar.

1.3 Derivator av vektorvärda funktioner och tangentlinjer (13.2)

Definition 2 (Derivatan av vektorvärda funktioner)**.** *Derivatan* av $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$ om gränsvärdet existerar.

Om $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ gäller att om $x(t)$ och $y(t)$ är deriverbara så är $\vec{r}'(t) = \left\langle \lim_{h\to 0} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h\to 0} \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} \right\rangle = \langle x'(t), y'(t)\rangle$

Exempel 2. Låt $\vec{r}(t) = \langle 2t, \sqrt{t}\rangle$. Beräkna $\vec{r}'(t)$.

$$\vec{r}(t) = \left\langle \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t), \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{t})\right\rangle = \left\langle 2, \tfrac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} \right\rangle = \left\langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right\rangle$$

Definition 3 (Tangentvektor och tangentlinje till linjer)**.** $\vec{r}'(t)$ kallas för *tangentvektor* till $\vec{r}(t)$ och linjen genom $P = \vec{r}(t_0)$ med riktningsvektor $\vec{r}'(t)$ kallas för *tangentlinjen* till $\vec{r}$ i P. Tangentlinjen ges av $L(t) = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}'(t_0)$.
Exempel 3. Bestäm tangentlinjen till $\vec{r}(t) = \langle 2t, \sqrt{t} \rangle$ i punkten $P = \vec{r}(4) = \langle 2 \cdot 4, \sqrt{4} \rangle = \langle 8, 2 \rangle$. Tangentvektor $\vec{r}'(t) = \left\langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right\rangle \implies \vec{r}'(4) = \langle 2, \frac{1}{4} \rangle$. Tangentlinjen $L(t) = \langle 8, 2 \rangle + t \cdot \langle 2, \frac{1}{4} \rangle = \left\langle 8 + 2t, 2 + \dfrac{t}{4} \right\rangle$

2 Föreläsning 19-09-05

2.1 Funktioner av flera variabler (14.1)

Definition 4 (Funktioner av två variabler, definitionsmängd och värdemängd)**.** En (reellvärd) *funktion av två variabler* är en regel som för varje $(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ ger ett reellt tal $f(x,y)$. D kallas för *definitionsmängd* (domain) till f och $\{f(x,y) | (x,y) \in D\}$ kallas *värdemängden* (range) till f. Skriver $f : D \to \mathbb{R}$.
Exempel 4. Mest grundläggande: koordinatfunktionerna x och y.
Exempel 5. Om $f(x,y), g(x,y)$ är funktioner kan vi skapa nya funktioner:

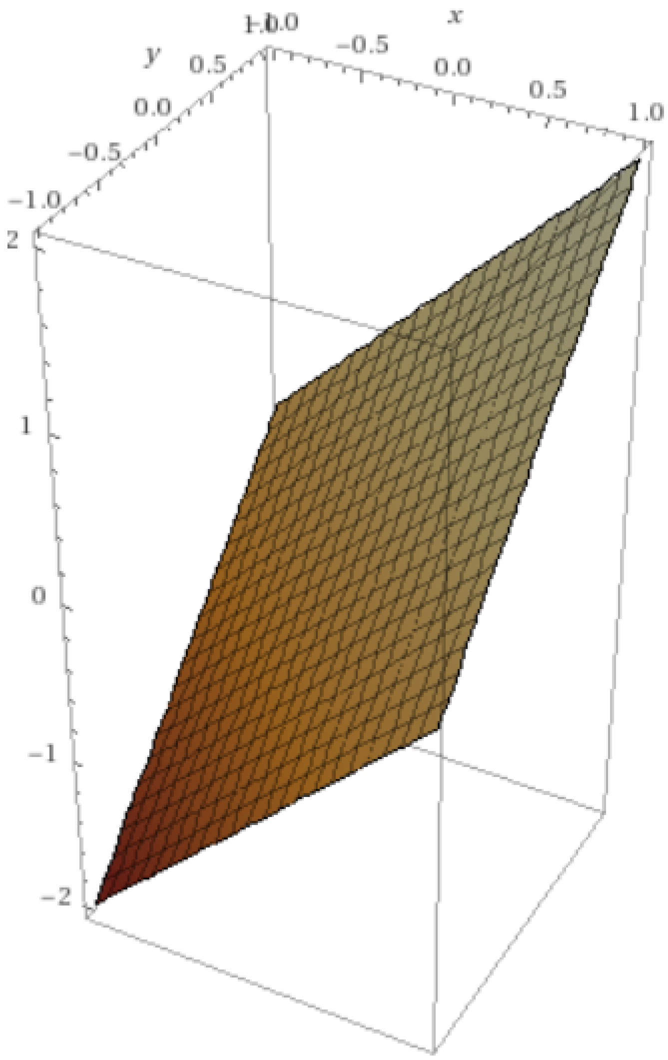
$$f(x,y) + g(x,y)$$
$$f(x,y) \cdot g(x,y)$$
$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \text{(Endast definierad där } g(x,y) \neq 0)$$
$$\sin(f(x,y)) \dots$$
$$\sqrt{f(x,y)}, \ln(f(x,y)), \dots \text{(Endast definierad där } f(x,y) \geq 0 \text{ respektive } f(x,y) > 0)$$

Definition 5 (Graf)**.** *Grafen* till $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$ är alla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ s.a. $z = f(x,y), (x,y) \in D$.
Exempel 6. Rita grafen till $f(x,y) = x + y$.

Provar att rita längs några räta linjer:

$$f(x,0) = x, f(x,1) = x + 1, f(x,2) = x + 2$$

$$f(0,y) = y, f(1,y) = y + 1, f(2,y) = y + 2$$



2.2 Annat sätt att visualisera en funktion

Definition 6 (Nivåkurva)**.** En *nivåkurva* till en funktion $f(x,y)$ består av alla punkter (x,y) s.a. $f(x,y) = k$ för ett givet värde $k \in \mathbb{R}$.

Ritar man nivåkurvor för olika värden på k får man en *höjdkarta* (contour map) som kan användas för att bättre förstå funktionen.

Beskriv nivåkurvorna och rita höjdkartor för olika funktioner.
Exempel 7. $f(x,y) = x + 2y$

$f(x,y) = x + 2y = k \iff y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{k}{2}$ vilket är en rät linje med lutning $-\frac{1}{2}$ som skär y-axeln i $\frac{k}{2}$.

Figur 2

Exempel 8. $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f(x,y) = x^2 + y^2 = k$ ger att om $k < 0$ har vi en tom nivåkurva. Anta dock $k \geq 0$, då är $x^2 + y^2 = k = \left(\sqrt{k}\right)^2$ vilket är en cirkel med radie $\sqrt{k}$ och origo i (0,0).

Figur 3

Exempel 9. $f(x,y) = e^{xy}$

$f(x,y) = e^{xy} = k$ ger att om $k \leq 0$ har vi en tom nivåkurva. Anta dock $k > 0$, då får vi $e^{xy} = k \iff xy = \ln(k)$. Nu har vi två fall, om $x \neq 0$ får vi $y = \frac{\ln(k)}{x}$ och om $x = 0$ får vi $0 = \ln(k) \iff k = 1$.

Figur 4

2.3 Funktioner av tre variabler

Kan på liknande sätt studera funktioner av tre variabler $f(x,y,z)$. Dock befinner sig dess graf $w = f(x,y,z)$ i ett rum med fyra dimensioner vilket är lite svårt att rita. Däremot är nivåytor $f(x,y,z) = k$ fortsatt användbara och kan visualiseras i vissa enkla fall.

Exempel 10. Beskriv nivåkurvorna till $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2$ vilket är avståndet från punkten (x,y,z) till origo i kvadrat. Då får vi att nivåytorna för varje k är antingen tom om $k < 0$ och sfären med radie $\sqrt{k}$ och centrum i origo om $k \geq 0$.

3 Föreläsning 19-09-06

3.1 Gränsvärden i flera variabler (14.2)

Definition 7 (Gränsvärden i flera variabler (Formell))**.** En funktion $f(x,y)$ har *gränsvärde* L när (x,y) går mot (a,b), vilket skrivs $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, om $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ s.a. om $0 < |(x,y) - (a,b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ så är $|f(x,y) - L| < \epsilon$.

Definition 8 (Gränsvärden i flera variabler (Informell))**.** $f(x,y)$ är hur nära L som helst så länge (x,y) är tillräckligt nära (a,b). Liknande, men mer oprecist: $f(x,y)$ närmar sig L när (x,y) närmar sig (a,b).

3.1.1 Räkneregler

Anta $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$. Då gäller

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L + M$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L \cdot M$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \text{ (Endast om } g(x,y) \neq 0)$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$$

Om $h(t)$ en funktion och $\lim\limits_{t\to L} h(t) = K$ så är

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(f(x,y)) = K.$$

Instängningsregeln/Squeeze theorem: Om $\forall x, y : f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$ gäller

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L.$$

Exempel 11. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ om det existerar.

Naivt kan man säga $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$ och därmed anta att gränsvärdet inte existerar. Dock kan vi förenkla

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \\
=& \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\
=& \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 - y^2 \\
=& 0^2 - 0^2 \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Exempel 12. Visa att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0.$

Inse först att $\forall x, y : 0 \leq \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$ och $\dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = y^2 \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} \leq y^2 \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = y^2.$
Enligt instängingsregeln är $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0$ eftersom $0 \leq \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \leq y^2$ och $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0.$

Exempel 13. Låt $g(x,y) = \dfrac{\ln\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2 - 1}$. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x,y)$ om det existerar.

Om $f(x,y) = x^2 + y^2$ och $h(t) = \dfrac{\ln(t)}{t-1}$ så är $g(x,y) = h(f(x,y))$. Eftersom $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0^2 + 1^2 = 1$ får vi $\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x,y) = \lim_{t\to 1} h(t) = \lim_{t\to 1} \dfrac{\ln(t)}{t-1} = 1$. Sista steget är ett standardgränsvärde eller går att räkna ut med l'Hospitals regel.

Om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ måste gränsvärdet av f när man närmar sig punkten (a,b) längs alla räta linjer genom (a,b) vara L. Sådana räta linjer ges av $\vec{r}(t) = \langle a + kt, b + lt\rangle$. $\vec{r}(t)$ går mot (a,b) när $t \to 0$. Detta ger en metod för att se när gränsvärden inte existerar och vad gränsvärdet måste vara om det existerar, men inte att det existerar.

Exempel 14. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ om det existerar.

Låt $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Vi prövar vad som händer när $(x,y) \to (0,0)$ längs x-axeln och y-axeln.

x-axeln: $\vec{r}_1(t) = \langle t, 0\rangle \to \langle 0, 0\rangle$ när $t \to 0$. $f(\vec{r}_1(t)) = f(t,0) = \dfrac{t^2 - 0^2}{t^2 + 0^2} = 1$ när $t \to 0$.

y-axeln: $\vec{r}_2(t) = \langle 0, t\rangle \to \langle 0, 0\rangle$ när $t \to 0$. $f(\vec{r}_2(t)) = f(0,t) = \dfrac{0^2 - t^2}{0^2 + t^2} = -1$ när $t \to 0$.

Eftersom dessa gränsvärden är olika existerar inte gränsvärdet för $f(x,y)$.

3.2 Kontinuitet

Definition 9 (Kontinuitet i en punkt)**.** En funktion $f(x,y)$ är *kontinuerlig* i en punkt (a,b) om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.
Definition 10 (Kontinuitet på ett område)**.** f är kontinuerlig på ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ om f är kontinuerlig på alla punkter $(a,b) \in D$. Man säger att f är kontinuerlig om den är kontinuerlig för alla punkter i sin definitionsmängd.

4 Föreläsning 19-09-10

4.1 Partiella derivator och annat

Missade föreläsningen, det kommer anteckningar här kanske.

5 Föreläsning 19-09-12

5.1 Tangentplan

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Exempel 15 (Tangentplan)**.** Beräkna tangentplanet till $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ i punkten (3,4). Bestäm också lineariseringen av f i (3,4) och använd den för att approximera $f(3{,}01; 3{,}98)$.

Vi börjar med att räkna ut $f(3{,}4) = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. Vi behöver också de partiella derivatorna till f och deras värden i (3,4): $f_x = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_x(3{,}4) = \dfrac{3}{5}$, $f_y = \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ och $f_y(3{,}4) = \dfrac{4}{5}$.

Tangentplanet är då

$$z = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4).$$

$L(x,y) = 5+\dfrac{3}{5}(x-3)+\dfrac{4}{5}(y-4)$. är lineariseringen av f. Det är en approximation nära (3,4).

Vi ska uppskatta $f(3{,}01; 3{,}98) \approx L(3{,}01; 3{,}98) = 5 + \frac{3}{5}(3{,}01-3) + \frac{4}{5}(3{,}98-4) = 5 + \frac{3}{5}\cdot 0{,}01 + \frac{4}{5}\cdot(-0{,}02) = 4{,}99$. Det verkliga värdet $f(3{,}01; 3{,}98) = 4{,}990040\ldots$ vilket är en rätt bra approximation.

5.2 Differentierbarhet (14.4)

5.2.1 En variabel

I en variabel gäller att om $f'(a)$ existerar kan man visa (finns i föreläsningsanteckningarna) att $f(x) = L(x) + \epsilon(x)(x-a)$ där $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ och $\epsilon(x) \to 0$ när $x \to a$. Det säger att om $f'(a)$ existerar är L en bra approximation av f nära a för $f(x) \to 0$ snabbare än alla linjära funktioner/förstagradspolynom (Och L är den enda linjära funktionen som uppfyller detta, alltså är L den "bästa" approximationen av f med en linjär funktion.)

5.2.2 Fler variabler

Exempel 16. Låt $f(x) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ om $(x,y) \neq (0{,}0)$, 0 annars.$f(0{,}0) = 0$, $f_x(0{,}0) = 0$ och $f_y(0{,}0) = 0$. Dess linearisering kring (0,0) är då $L(x,y) = 0$. Vi kollar exempelvis längs linjen $f(t,t)$. $f(t,t) - L(t,t) = \dfrac{t^2}{t^2+t^2} - 0 = \dfrac{1}{2} \not\to 0$, alltså är L inte en bra approximation av f nära (0,0) trots att de partiella derivatorna existerar i den punkten.

Många resultat bygger på att L är en bra approximation av f. Vi inför därför följande definition:
Definition 11 (Deriverbarhet/Differentierbarhet)**.** $f(x,y)$ är *deriverbar* eller *differentierbar* i (a,b) om $f_x(a,b)$ och $f_y(a,b)$ existerar och $f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \epsilon_1(x,y)(x-a) + \epsilon_2(x,y)(y-b)$ där $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ när $(x,y) \to (a,b)$. Speciellt innebär det att $f(x,y) - L(x,y) \to 0$ när $(x,y) \to (a,b)$.

Sats 1 (Kontinuitet och deriverbarhet)**.** Om $f_x(x,y)$ och $f_y(x,y)$ existerar och är kontinuerliga nära (a,b) är f deriverbar i (a,b).

Bevis. Beviset använder medelvärdessatsen, se appendix F i kursboken för det. □

5.3 Kedjeregeln (14.5)

5.3.1 En variabel

Om $y = f(x)$ och $x = g(t)$ är deriverbara så är $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$. Annorlunda uttryckt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

5.3.2 Två variabler

Låt $z = f(x,y)$, $x = g(t)$ och $y = h(t)$ vara deriverbara. Då är

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(g(t), h(t)) = f_x(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + f_y(g(t), h(t)) \cdot h'(t)$$

eller kortare

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Beviset involverar definitionen av deriverbarhet i flera variabler.

"Nu har de flesta svarat, och några har svarat rätt i alla fall."

– Mr. Väsentligen

"Då får vi 1+1 vilket är 2."

– Mr. Väsentligen

5.3.3 Två variabler (variant)

Låt $z = f(x,y)$, $x = g(s,t)$ och $y = h(s,t)$ vara deriverbara. Då är kedjeregeln

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

eller med avseende på t:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Beviset följer av den andra varianten.

5.4 Riktningsderivator och gradienter (14.6)

De partiella derivatorna är derivator längs linjer där x eller y är konstant, d.v.s. med riktningsvektor $\hat{\imath} = \langle 1, 0 \rangle$ eller $\hat{\jmath} = \langle 0,1 \rangle$.

Definition 12 (Riktningsderivata)**.** *Riktningsderivatan (directional derivative)* av $f(x,y)$ i riktningen $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ där $\vec{u}$ är en enhetsvektor (längd $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$) ges av

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + ah, y + bh) - f(x,y)}{h}.$$

Anmärkning 1. $f_x = D_{\hat{\imath}} f$ och $f_y = D_{\hat{\jmath}} f$

Definition 13 (Gradient)**.** *Gradienten* av $f(x,y)$ är

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$$

Sats 2 (Deriverbarhet, riktningsvektor och gradient)**.** Om f är deriverbar är

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u}.$$

Bevis. Låt $g(h) = f(x+ah, y+bh)$ och $\vec{u} = \langle a, b \rangle$. Enligt kedjeregeln är $g'(h) = f_x(x+ah, y+bh) \cdot a + f_y(x+ah, y+bh) \cdot b$. $g'(0) = f_x(x, y) \cdot a + f_y(x, y) \cdot b \implies D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}$. □

6 Föreläsning 19-09-13

6.1 Riktningsderivator och gradienter

Påminnelse 1. Låt $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ och $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ vara vektorer.

Skalärprodukten är då

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Längden av $\vec{u}$ är

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Det gäller också att

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\theta)$$

där θ är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Det följer av förra påståeendet att för två vinkelräta vektorer är $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Sats 3 (Största värde för riktningsderivata)**.** $D_{\vec{u}} f(x,y)$ är som störst när $\vec{u}$ pekar i samma riktning som $\nabla f(x,y)$ d.v.s. när $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$.

Alltså $f(x,y)$ växer som mest när (x,y) rör sig från (x_0, y_0) i riktningen $\dfrac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x,y)|}$.

Bevis. $D_{\vec{u}} f(x,y) = \vec{u} \cdot \nabla f(x,y) = |\vec{u}| \cdot |\nabla f(x,y)| \cos(\theta)$ där θ är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\nabla f(x,y)$. Eftersom $\vec{u}$ är en enhetsvektor vet vi att $|\vec{u}| = 1$. $|\nabla f(x,y)| \cos(\theta)$ blir som störst när $\cos(\theta) = 1$, d.v.s. $\theta = 0$. Det betyder att $\vec{u}$ och $\nabla f(x,y)$ pekar i samma riktning. □

Anmärkning 2. I princip allt från denna veckan generaliserar enkelt från två till tre eller fler variabler.

6.2 Tangentplan till nivåytor (14.6)

En nivåyta bestäms av $F(x,y,x) = k$ för något konstant $k \in \mathbb{R}$.

En graf $z = f(x,y)$ är ett specialfall av en nivåyta, eftersom vi kan ta $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ och $k = 0$.

Ska definiera tangentplan till allmän nivåyta. Vill definiera tangentplanet till $F(x,y,z) = k$ i (x_0, y_0, z_0) som det plan som genom (x_0, y_0, z_0) s.a. det för varje kurva $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ som uppfyller $\vec{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ och ligger i nivåytan så innehåller tangentplanet $\vec{r}'(t_0)$.

Figur 1

Anta att $\vec{r}$ är en sådan kurva. Då är $\forall t : F(x(t), y(t), z(t)) = k$. Nu deriverar vi båda sidor med avseende på t m.h.a. kedjeregeln så att vi får

$$\begin{aligned} F_x \cdot x'(t) + F_y \cdot y'(t) + F_z \cdot z'(t) &= 0 \\ \nabla F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Om vi tar $t = t_0$ får vi att $\nabla F(\vec{r}(t_0)) = \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ är vinkelrät mot $\vec{r}'(t_0)$.
Påminnelse 2. En normalvektor $\vec{n}$ till ett plan är en nollskild vektor som är vinkelrät mot alla vektorer i planet. Om planet går genom (x_0, y_0, z_0) ges hela planet av

$$\vec{n} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0.$$

Definition 14 (Tangentplan till nivåyta)**.** *Tangentplanet* till en nivåyta $F(x,y,z) = k$ genom en punkt (x_0, y_0, z_0) där $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq \vec{0}$ är $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0$.

Det är definierat s.a. det uppfyller vad vi ville att det skulle uppfylla.
Obs. 1. Om $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ är nivåytan där $F = 0$ samma som grafen $z = f(x,y)$. Eftersom $\nabla F = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle$ får i en punkt $(a, b, f(a,b))$ samma tangentplan $\langle -f_x(a,b), -f_y(a,b), 1\rangle \cdot \langle x - a, y - b, z - f(a,b)\rangle$ oavsett om man ser ytan som en nivåyta eller grafen till en funktion.
Exempel 17. Bestäm tangentplanet till ytan $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$.

Ytan är nivåytan $F(x,y,z) = 1$ där $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$.

$\nabla F = \langle 2x, -2y, 2z\rangle$ och $\nabla F(1,1,1) = \langle 2, -2, 2\rangle$. Då är tangentplanet $\nabla F(1,1,1) \cdot \langle x - 1, y - 1, z - 1\rangle = 0$ vilket ger

$$\begin{aligned} 2(x - 1) - 2(y - 1) + 2(z - 1) &= 0 \\ x - 1 - y + 1 + z - 1 &= 0 \\ x - y + z &= 1. \end{aligned}$$

6.3 Lokala extremvärden

Definition 15 (Lokalt maximum)**.** $f(x,y)$ har ett *lokalt maximum* i (a,b) om $f(x,y) \leq f(a,b)$ gäller för (x,y) nära (a,b). (D.v.s. det gäller för (x,y) i någon cirkelskiva kring (a,b).)
Definition 16 (Absolut/Globalt maximum)**.** $f(x,y)$ har ett *absolut/globalt maximum* i (a,b) om $f(x,y) \leq f(a,b)$ gäller för alla (x,y) i definitionsmängden till f.
Definition 17 (Lokalt minimum)**.** $f(x,y)$ har ett *lokalt minimum* i (a,b) om $f(x,y) \geq f(a,b)$ gäller för (x,y) nära (a,b). (D.v.s. det gäller för (x,y) i någon cirkelskiva kring (a,b).)
Definition 18 (Absolut/Globalt minimum)**.** $f(x,y)$ har ett *absolut/globalt minimum* i (a,b) om $f(x,y) \geq f(a,b)$ gäller för alla (x,y) i definitionsmängden till f.
Definition 19 (Extremvärde)**.** Ett *extremvärde* är ett minimum eller maximum.
Exempel 18. $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ har ett lokalt och globalt minimum, var?

Inses lätt att det sker i $(0,0)$ då den annars är strikt positiv för $x, y, \in \mathbb{R}$.
Påminnelse 3. I en variabel, om f är deriverbar och har ett (lokalt) extremvärde i a är $f'(a) = 0$.
Sats 4 (Extremvärde i en punkt)**.** Om $f(x,y)$ har ett (lokalt) extremvärde i punkten (a,b) och $f_x(a,b)$ och $f_y(a,b)$ existerar är $f_x(a,b) = 0$ och $f_y(a,b) = 0$.

Bevis. Om vi låter $h(x) = f(x,b)$ ha ett extremvärde i $x = a$ gäller $h'(a) = 0$ och $h'(a) = f_x(a,b)$, vilket ger att $f_x(a,b) = 0$.

$f_y(a,b) = 0$ visas analogt. □

7 Föreläsning 19-09-17

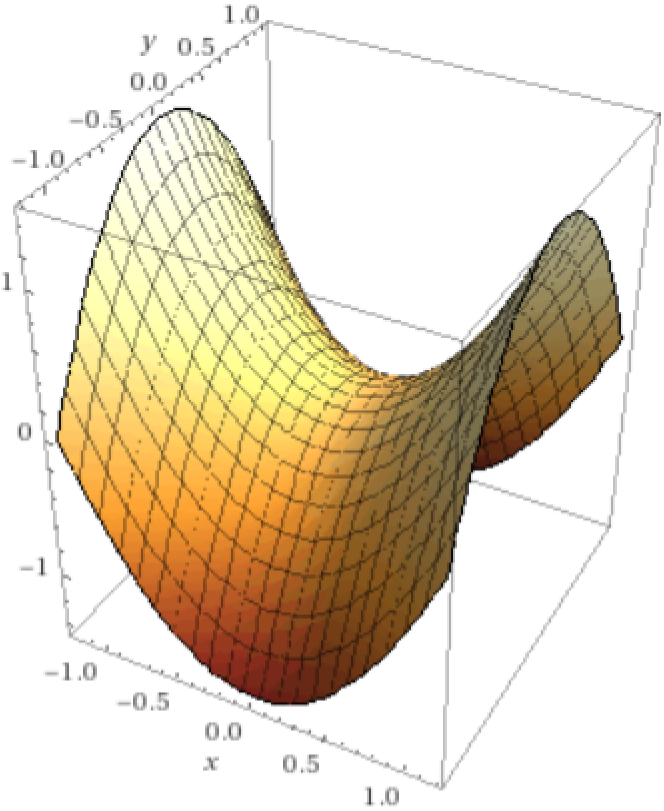
7.1 Lokala extremvärden forts.

Definition 20 (Kritiska/stationära punkter)**.** Om $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ säger man att f har en *kritisk/stationär punkt* i (a,b).

Alla lokala extremvärden är kritiska punkter (om de partiella derivatorna existerar) men det kan finns kritiska punkter som inte är lokala extremvärden. Sådana punkter kallas *sadelpunkter*.
Exempel 19. Låt $f(x,y) = x^2 - y^2$, bestäm dess kritiska punkter.

Den har en sadelpunkt i $(0,0)$ eftersom $\nabla f = \langle 2x, -2y \rangle \implies \nabla f(0,0) = (0,0)$, d.v.s. $(0,0)$ är en kritisk punkt, men den är varken ett lokalt maximum eller minimum.

Grafen har formen av en ”sadel”.



Hur avgör man då om en kritisk punkt är ett extremvärde? I en variabel gäller, för funktioner där $f'(a) = 0$, att om $f''(a) > 0$ så har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x = a$ och om $f''(a) < 0$ så har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x = a$. Om $f''(a) = 0$ kan vi inte säga något om punkten.

Sats 5 (Test för lokala extrempunkter i två variabler)**.** Anta att de partiella derivatorna av ordning 2 till $f(x,y)$ är kontinuerliga nära (a,b) och att $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

Låt $D = f_{xx}(ab)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$. Då har vi fyra fall:

1. Om $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) > 0$ (eller $f_{yy}(a,b) > 0$) är (a,b) ett lokalt minimum.

2. Om $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) < 0$ (eller $f_{yy}(a,b) < 0$) är (a,b) ett lokalt maximum.

3. Om $D < 0$ är (a,b) en sadelpunkt.

4. Om $D = 0$ vet vi inget om punkten.

Bevis. Går ut på att reducera till motsvarande test i en variabel, se slutet av 14.7 i boken. □

Eftersom $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ (Clairaut's sats) är $D = \det\{H\}$ där H är ”Hessianmatrisen" $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$.

För att komma ihåg vilket villkor som ger vilken slutsats kan man jämföra med följande modellfall:

1. $f(x,y) = x^2+y^2$ som har ett lokalt minimum i origo. $D = 2\cdot 2 - 0\cdot 0 = 4 > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$.
2. $f(x,y) = -x^2 - y^2$ som har ett lokalt maximum i origo. $D = (-2)\cdot(-2) - 0\cdot 0 = 4 > 0$, $f_{xx} = -2 < 0$.
3. $f(x,y) = x^2-y^2$ som har en sadelpunkt i origo. $D = 2\cdot(-2) - 0\cdot 0 = -4 < 0$.

Exempel 20. Bestäm de kritiska punkterna till $f(x,y) = 3x^2 + 6xy - y^3$ och avgör om de är sadelpunkter, lokala minimum eller lokala maximum.

Vi börjar med att avgöra kritiska punkter, d.v.s. punkter där de partiella derivatorna är 0.

$$\begin{cases} f_x = 6x + 6y = 0 \iff x = -y \\ f_y = 6x - 3y^2 = 0 \iff 2x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Detta ger, om man sätter in uttrycken i varandra, $2(-y) - y^2 = 0 \iff y(-2 - y) = 0 \iff y = 0$ el. $y = -2$. Om vi sätter in detta i uttrycket för x får vi $x = -y = -0 = 0$ och $x = -(-2) = 2$ vilket ger de kritiska punkterna $(0,0)$ och $(2,-2)$.

Vi undersöker nu dessa kritiska punkter.

$f_{xx} = 6$, $f_{yy} = -6y$ och $f_{xy} = 6$.

I $(0,0)$ gäller $D(0,0) = f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 6\cdot 0 - 6^2 = -36 \implies (0,0)$ är en sadelpunkt.

I $(2,-2)$ gäller $D(2,-2) = f_{xx}(2,-2)\cdot f_{yy}(2,-2) - f_{xy}(2,-2)^2 = 6\cdot(-6)\cdot(-2) - 6^2 = 72 - 36 = 36 \implies (2,-2)$ är en lokal extrempunkt. Eftersom $f_{xx}(2,-2) = 6 > 0$ är $(2,-2)$ ett lokalt minimum.

För att generalisera det här till tre eller fler variabler måste man bygga på egenvärden till Hessianmatrisen.

7.2 Globala extremvärden (14.7)

I en variabel, om $f(x)$ är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a,b]$ så har f ett globalt max- och min-värde någonstans i $[a,b]$. Ej sant för t.ex. öppna intervall eller obegränsade intervall. Se exempelvis $f(x) = x$ på intervallet $x \in (0,\infty)$, då finns inget specifikt max-värde eftersom vi alltid kan gå närmare ∞ och det finns inget min-värde eftersom vi alltid kan gå lite närmare 0.

Vi ska definiera motsvarigheten till "sluten och begränsad" i två variabler.

Definition 21 (Randpunkter)**.** (a,b) är en *randpunkt (boundary point)* till $D \subseteq \mathbb{R}^2$ om varje cirkelskiva kring (a,b) innehåller både punkter i D och punkter som inte är i D.

Exempel 21. Randpunkter till $D_1 = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$ är $\{(x,y)|x^2+y^2 = 1\}$.

Till $D_2 = \{(x,y)|x^2+y^2 < 1\}$ är randpunkterna precis som ovan $\{(x,y)|x^2+y^2 = 1\}$, trots att de inte är i D.

"Här går kanske inte intuitionen jättebra."

– Mr. Väsentligen om sin publik

Definition 22 (Slutna mängder)**.** En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är *sluten* om den innehåller alla sina randpunkter.

I exemplet ovan är D_1 sluten och D_2 inte sluten.
Definition 23. En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är *begränsad* om den är innehållen i någon cirkelskiva.
Exempel 22. $\{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ är begränsad eftersom vi kan innesluta kvadraten i en stor cirkel, exempelvis en cirkel med centrum i origo och radie 31415.

$\{(x,y)|0 \leq x \leq 1\}$ är inte begränsad eftersom den inte går att innesluta i en cirkel.
Sats 6. Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och D är både sluten och begränsad då har f globala max- och min-punkter någonstans i D.

Bevis. Beviset involverar definitionen av reella tal vilket är lite lagom överkurs för den här kursen. Finns säkert på nätet eller något. □

8 Föreläsning 19-09-18

8.1 Globala extremvärden (forts.)

Om $f(x,y)$ har ett globalt max-/min-värde i $(a,b) \in D$ och (a,b) inte är en randpunkt måste den vara ett lokalt min/max och därmed också en kritisk punkt (om f är deriverbar i (a,b)).

8.1.1 Metod för att bestämma globala max/min

Låt f vara en deriverbar funktion på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ där D är sluten och begränsad.

Globala max och min fås genom att jämföra funktionsvärden i följande kandidater:

1. Kritiska punkter i D
2. Randpunkter till D

Om man parametriserar randpunkterna till D med ett antal kurvor räcker det med följande kandidater i punkt 2 ovan:

2.1. Kritiska punkter när man ser f som en funktion av en variabel längs randkurvor

2.2. ”Hörn”, d.v.s. ändpunkter till randkurvorna

Exempel 23. Beräkna de globala max-/min-punkterna till funktionen $f(x{,}y) = x^2 + y^2 - y$ på området $D = \{(x{,}y)|x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Området är en halvcirkelskiva som ganska uppenbart är sluten och begränsad.

Figur 1

Vi börjar med att leta kritiska punkter: $\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y - 1 = 0 \end{cases} \iff (x{,}y) = (0; 0{,}5)$.

Nu får vi kolla om den kritiska punkten ligger i D. $0^2 + (0{,}5)^2 = 0{,}25 \leq 1$ och $0{,}5 \geq 0$, så den ligger i D. $f(0; 0{,}5) = -\frac{1}{4}$.

Nu ska vi titta på randpunkter, så vi börjar med att parametrisera randen. Vi delar upp det i det raka strecket (C_1) och i halvcirkelbågen (C_2) för enkelhetens skull.

$C_1 : \vec{r}_1(t) = \langle t, 0\rangle$ där $-1 \leq t \leq 1$.

$C_2 : \vec{r}_2(t) = \langle \cos(t), \sin(t)\rangle$ där $0 \leq t \leq \pi$.

Då tittar vi på kritiska punkter för randkurvorna, och vi börjar med C_1. $g_1(t) = f(\vec{r}_1(t)) = f(t, 0) = t^2$. Kritiska punkter för g_1 är då $g_1'(t) = 0 \iff t = 0$. Det ger kandidaten $g_1(0) = f(0{,}0) = 0$. Nu kör vi på C_2. $g_2(t) = f(\vec{r}_2(t)) = f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) + \sin^2(t) - \sin(t) = 1 - \sin(t)$. Kritiska punkter är då $g_2'(t) = -\cos(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}$ (Fler punkter egentligen, men den här är den enda i vårt tillåtna intervall). Kandidaten är då $g_2(\frac{\pi}{2}) = f(0{,}1) = 0$.

Nästa steg är att titta på ”hörnen” $(-1, 0)$ och $(1{,}0)$. $f(-1, 0) = (-1)^2 + 0^2 - 0 = 1$ och $f(1{,}0) = 1^2 + 0^2 - 0 = 1$.

Allt som allt är vårt globala max $(\pm 1, 0)$ och vårt globala min $(0; 0{,}5)$.

8.2 Optimering under bivillkor och Lagrangemultiplikatorer (14.8)

Vi vill lösa följande slags problem: Beräkna max av $4x^2 + 4y$ när $(x{,}y)$ ligger på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$. En möjlighet är att parametrisera enhetscirkeln, t.ex. med $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t\rangle$ när $0 \leq t \leq 2\pi$ och hitta max av $g(t) = f(\vec{r}(t)) = 4\cos^2(t) + 4\sin(t)$ som vanligt.

En annan möjlighet är att se det som ett fall av optimering under bivillkor. Låt $f(x{,}y), g(x{,}y)$ vara definierade på någon mängd D. Vi vill hitta max och min av $f(x{,}y)$ på D under förutsättning att $g(x{,}y) = k$ där k är konstant. Villkoret $g(x{,}y) = k$ kallas för *bivillkor (constraint)*.

8.2.1 Metoden med Lagrangemultiplikatorer

För att hitta max och min till $f(x{,}y)$ under bivillkoret $g(x{,}y) = k$ (under förutsättning att extremvärden finns och $\nabla g(x{,}y) \neq 0$ på $g(x{,}y) = k$) gör man följande:

a) Hitta alla lösningar (x,y) till $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$ för något λ (λ kallas för Lagrangemultiplikator).

b) Jämför $f(x,y)$ för alla lösningar (x,y) från punkt a. Det största värdet ger max och det minsta ger min.

Anmärkning 3. Förutsättningen att extremvärden finns är uppfylld om $\{g(x,y) = k\}$ är sluten och begränsad. I kursen kommer vi bara att studera problem där extremvärden existerar.

Exempel 24. Hitta max och min till $f(x,y) = 4x^2 + 4y$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$.

Enligt metoden ska vi då lösa ekvationssystemet $\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f_x = \lambda \cdot g_x \\ f_y = \lambda \cdot g_y \\ g^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff$ $\begin{cases} 8x = \lambda \cdot 2x \\ 4 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ Den första ekvationen ger $8x = \lambda \cdot 2x \iff 4x = \lambda x \iff x = 0$ el. $\lambda = 4$. Första fallet ($x = 0$) ger genom ekvation 3 $y^2 = 1 \iff y = \pm 1$ vilket med ekvation 2 ger $\lambda = \frac{4}{2y} = \pm 2$. Här får vi komma ihåg att det ger två lösningar $(x,y,\lambda) = (0,1,2)$ och $(0,-1,-2)$. Andra fallet ger genom ekvation 2 $4 = 4 \cdot 2 \cdot y \iff y = \frac{1}{2}$. Ekvation 3 ger då $x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \iff x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vi kontrollerar att det ger de två lösningarna $(x,y,\lambda) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4)$. Med det får vi följande lösningar till det ursprungliga problemet:

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 4 \\ f(0,-1) &= -4 \\ f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) &= 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 5 \\ f(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) &= 5 \end{aligned}$$

Alltså har vi ett max på 5 i $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ och ett min på -4 i $(0,-1)$.

9 Föreläsning 19-09-20

9.1 Längd av kurvor (10.2, 13.3)

Sats 7 (Längd av en kurva)**.** Låt $\vec{r}(t), a \le t \le b$ vara en kurva. Då är dess längd $l = \int_a^b |\vec{r}'(t)| \mathrm{d}t$.

Bevis. Finns en skiss till ett argument i 10.2 i boken. □

Exempel 25. Beräkna längden av kurvan med parametrisering $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle = \langle t^2, t^3 \rangle$ för $0 \le t \le 1$.

Då är $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = \sqrt{t^2(4 + 9t^2)} = \sqrt{t^2}\sqrt{4 + 9t^2} = t\sqrt{4 + 9t^2}$.

Från formeln ovan är $l = \int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}\mathrm{d}t = \begin{cases} s = 4+9t^2 \\ \mathrm{d}s = 18t\mathrm{d}t \implies t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{18} \\ t=0 \implies s=4 \\ t=1 \implies s=13 \end{cases} =$

$\frac{1}{18}\int_4^{13}\sqrt{s}\mathrm{d}s = \frac{1}{18}\left[\frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{13} = \frac{1}{18}\left(\frac{13^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right)$

Sats 8 (Längden av en graf)**.** Längden av en graf $y = f(x)$ är $l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$.

Bevis. $f(x)$ kan parametriseras med ekvationen $\vec{r}(t) = \langle t, f(t)\rangle$. Då blir $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1+f'(x)^2}$ och längden därmed $l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$.

Alternativ härledning finns i föreläsningsslides. □

9.2 Rörelse av partiklar i rummet (13.4)

Man kan använda en vektorvärd funktion $\vec{r}(t)$ för att beskriva hur en partikel rör sig genom rummet. Vid tiden t befinner sig partikeln i $\vec{r}(t)$.

Definition 24 (Hastighetsvektor och fart)**.** *Hastighetsvektorn* $\vec{v}(t)$ för en sådan partikel ovan är $\vec{r}'(t)$ och farten är $|\vec{v}(t)|$.

Definition 25 (Accelerationsvektor)**.** *Accelerationsvektorn* för en partikel som ovan är $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$.

Dessa definitioner används för att beskriva olika fysiska fenomen. Ett exempel på en sådan är Newtons andra lag:

Sats 9 (Newtons andra lag)**.** Om kraften $\vec{F}(t)$ verkar på en partikel med massa m så är $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$.

Exempel 26. Anta att bara tyngdkraften verkar på en partikel med massa m, d.v.s. $\vec{F} = \langle 0, 0, -mg\rangle$. Anta också att partikeln vid $t = 0$ har position $\vec{r}(0) = \langle a,b,c\rangle$ och hastighet $\vec{v}(0) = \langle d, e, f\rangle$. Verifiera att partikeln med position $\vec{r}(t) = \left\langle a + dt, b + et, c + ft - \frac{gt^2}{2}\right\rangle$ uppfyller dessa villkor och rör sig enligt Newtons andra lag.

Vi kontrollerar detta: Vi stoppar in $t = 0$ i $\vec{r}$ och får $\vec{r}(0) = \langle a, b, c\rangle$ vilket stämmer. Vi deriverar nu för att få $\vec{v}$ och får $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \langle d, e, f - gt\rangle$. Kontrollerar genom att stoppa in $t = 0$: $\vec{v}(0) = \langle d, e, f\rangle$. Kontrollerar nu med ytterligare en derivata $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \langle 0, 0, -g\rangle$. Använder Newtons andra lag för att kontrollera $m \cdot \vec{a}(t) = \langle 0, 0, -mg\rangle = \vec{F}$.

” 0 är ju en typisk konstant.”

– Mr. Väsentligen

”Du har ju nog rätt idé, men vad menar du?”

– Mr. Väsentligen

"Ja, det hade man kunnat tänka sig, men så är det inte."

– Mr. Väsentligen