Föreläsningsanteckningar
Matematisk analys i flera variabler
LMA017

Hugo Simonsson

18 oktober 2019

Innehåll

List of Theorems

1 Föreläsning 19-09-03

1.1 Inledning

Punkter i planet $\mathbb{R}^2$ beskrivs med två koordinater, oftast (x,y). Punkter i rummet $\mathbb{R}^2$ beskrivs med tre koordinater, oftast (x,y,z).

I envariabelanalys studerar man funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, då är det naturligt att också studera vektorvärda funktioner $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. $f = \langle f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)\rangle$ har n komponenter och m variabler. Detta är dock för allmänt, i kursen ska vi studera viktiga specialfall:

$n = 2{,}3, m = 1 : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ så att $f(t) = \langle f_1(t), f_2(t)\rangle$. En variabel t bestämmer två komponenter $f_1(t)$ och $f_2(t)$.

$n = 1, n = 2{,}3 : f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) \in \mathbb{R}$ så att två variabler x,y bestämmer en komponent/tal $f(x,y)$.

$n = m = 2{,}3 : f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dessa kallas vektorfält.

1.2 Kurvor i rummet eller planet (13.1)

Definition 1 (Kurvor i rummet och deras parametrisering)**.** En *kurva C* i planet är alla punkter vars position ges av $\vec{r}(t) = \langle x(t),y(t)\rangle$ där $x(t), y(t)$ är kontinuerliga funktioner på något intervall. $\vec{r}(t)$ kallas en *parametrisering* av C.

Motsvarande definition av kurvor i rummet.
Exempel 1. En rät linje genom en punkt (x_0,y_0) med riktningsvektor $\vec{v} = \langle v_1,v_2\rangle$ är en kurva som kan parametriseras av $\vec{r}(t) = \langle x_0 + tv_1, y_0 + tv_2\rangle$.

Om $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ är definierad för t nära t_0 ges *gränsvärdet* av $\vec{r}(t)$ när t går mot t_0 av $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to t_0} x(t), \lim_{t\to t_0} y(t)\right\rangle$ om gränsvärdena i högerledet existerar.

1.3 Derivator av vektorvärda funktioner och tangentlinjer (13.2)

Definition 2 (Derivatan av vektorvärda funktioner)**.** *Derivatan* av $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$ om gränsvärdet existerar.

Om $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ gäller att om $x(t)$ och $y(t)$ är deriverbara så är $\vec{r}'(t) = \left\langle \lim_{h\to 0} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h\to 0} \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h}\right\rangle = \langle x'(t), y'(t)\rangle$
Exempel 2. Låt $\vec{r}(t) = \langle 2t, \sqrt{t}\rangle$. Beräkna $\vec{r}'(t)$.

$$\vec{r}(t) = \left\langle \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t), \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{t})\right\rangle = \left\langle 2, \tfrac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}\right\rangle = \left\langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right\rangle$$

Definition 3 (Tangentvektor och tangentlinje till linjer)**.** $\vec{r}'(t)$ kallas för *tangentvektor* till $\vec{r}(t)$ och linjen genom $P = \vec{r}(t_0)$ med riktningsvektor $\vec{r}'(t)$ kallas för *tangentlinjen* till $\vec{r}$ i P. Tangentlinjen ges av $L(t) = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}'(t_0)$.
Exempel 3. Bestäm tangentlinjen till $\vec{r}(t) = \langle 2t, \sqrt{t} \rangle$ i punkten $P = \vec{r}(4) = \langle 2 \cdot 4, \sqrt{4} \rangle = \langle 8, 2 \rangle$. Tangentvektor $\vec{r}'(t) = \left\langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right\rangle \implies \vec{r}'(4) = \langle 2, \frac{1}{4} \rangle$. Tangentlinjen $L(t) = \langle 8, 2 \rangle + t \cdot \langle 2, \frac{1}{4} \rangle = \left\langle 8 + 2t, 2 + \dfrac{t}{4} \right\rangle$

2 Föreläsning 19-09-05

2.1 Funktioner av flera variabler (14.1)

Definition 4 (Funktioner av två variabler, definitionsmängd och värdemängd)**.** En (reellvärd) *funktion av två variabler* är en regel som för varje $(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ ger ett reellt tal $f(x,y)$. D kallas för *definitionsmängd* (domain) till f och $\{f(x,y) | (x,y) \in D\}$ kallas *värdemängden* (range) till f. Skriver $f : D \to \mathbb{R}$.
Exempel 4. Mest grundläggande: koordinatfunktionerna x och y.
Exempel 5. Om $f(x,y), g(x,y)$ är funktioner kan vi skapa nya funktioner:

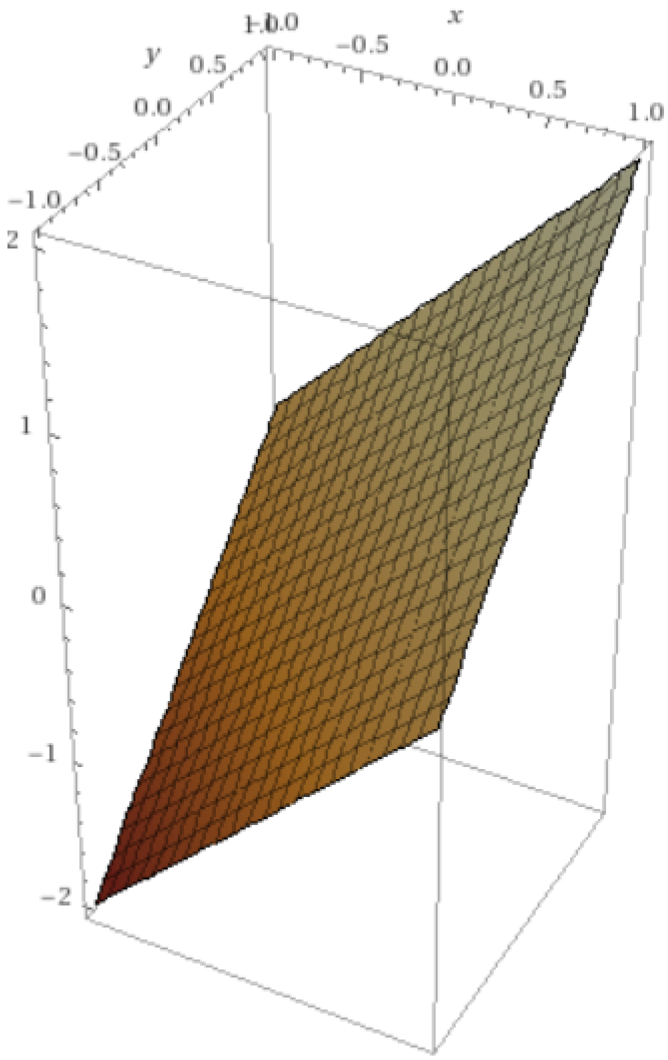
$$f(x,y) + g(x,y)$$
$$f(x,y) \cdot g(x,y)$$
$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \text{(Endast definierad där } g(x,y) \neq 0)$$
$$\sin(f(x,y)) \ldots$$
$$\sqrt{f(x,y)}, \ln(f(x,y)), \ldots \text{(Endast definierad där } f(x,y) \geq 0 \text{ respektive } f(x,y) > 0)$$

Definition 5 (Graf)**.** *Grafen* till $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$ är alla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ s.a. $z = f(x,y), (x,y) \in D$.
Exempel 6. Rita grafen till $f(x,y) = x + y$.

Provar att rita längs några räta linjer:

$$f(x,0) = x, f(x,1) = x + 1, f(x,2) = x + 2$$

$$f(0,y) = y, f(1,y) = y + 1, f(2,y) = y + 2$$



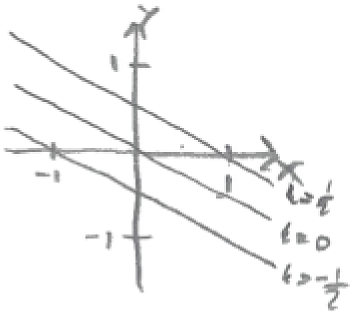
2.2 Annat sätt att visualisera en funktion

Definition 6 (Nivåkurva)**.** En *nivåkurva* till en funktion $f(x,y)$ består av alla punkter (x,y) s.a. $f(x,y) = k$ för ett givet värde $k \in \mathbb{R}$.

Ritar man nivåkurvor för olika värden på k får man en *höjdkarta* (contour map) som kan användas för att bättre förstå funktionen.

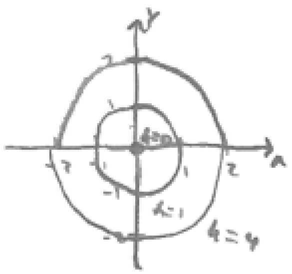
Beskriv nivåkurvorna och rita höjdkartor för olika funktioner.
Exempel 7. $f(x,y) = x + 2y$

$f(x,y) = x + 2y = k \iff y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{k}{2}$ vilket är en rät linje med lutning $-\frac{1}{2}$ som skär y-axeln i $\frac{k}{2}$.



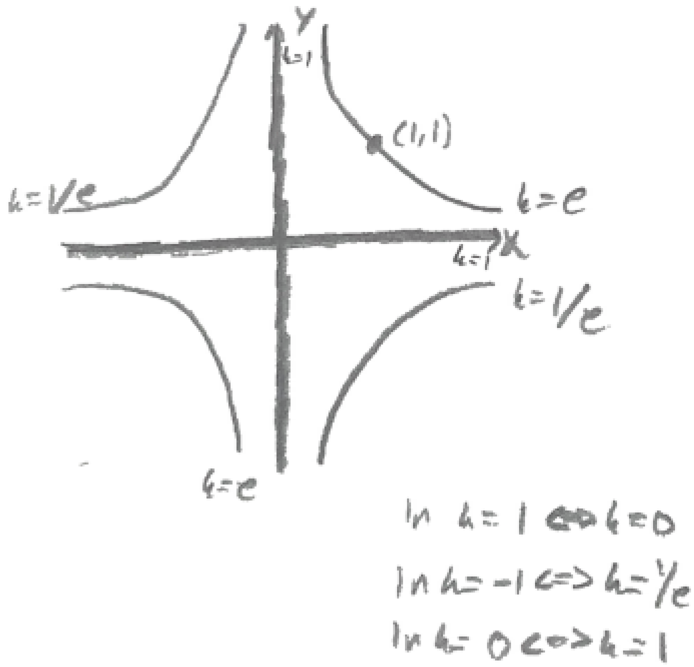
Exempel 8. $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f(x,y) = x^2 + y^2 = k$ ger att om $k < 0$ har vi en tom nivåkurva. Anta dock $k \geq 0$, då är $x^2 + y^2 = k = \left(\sqrt{k}\right)^2$ vilket är en cirkel med radie $\sqrt{k}$ och origo i (0,0).



Exempel 9. $f(x,y) = e^{xy}$

$f(x,y) = e^{xy} = k$ ger att om $k \leq 0$ har vi en tom nivåkurva. Anta dock $k > 0$, då får vi $e^{xy} = k \iff xy = \ln(k)$. Nu har vi två fall, om $x \neq 0$ får vi $y = \frac{\ln(k)}{x}$ och om $x = 0$ får vi $0 = \ln(k) \iff k = 1$.



2.3 Funktioner av tre variabler

Kan på liknande sätt studera funktioner av tre variabler $f(x,y,z)$. Dock befinner sig dess graf $w = f(x,y,z)$ i ett rum med fyra dimensioner vilket är lite svårt att rita. Däremot är nivåytor $f(x,y,z) = k$ fortsatt användbara och kan visualiseras i vissa enkla fall.
Exempel 10. Beskriv nivåkurvorna till $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2$ vilket är avståndet från punkten (x,y,z) till origo i kvadrat. Då får vi att nivåytorna för varje k är antingen tom om $k < 0$ och sfären med radie $\sqrt{k}$ och centrum i origo om $k \geq 0$.

3 Föreläsning 19-09-06

3.1 Gränsvärden i flera variabler (14.2)

Definition 7 (Gränsvärden i flera variabler (Formell))**.** En funktion $f(x,y)$ har *gränsvärde* L när (x,y) går mot (a,b), vilket skrivs $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, om $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.a. om $0 < |(x,y) - (a,b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ så är $|f(x,y) - L| < \epsilon$.

Definition 8 (Gränsvärden i flera variabler (Informell))**.** $f(x,y)$ är hur nära L som helst så länge (x,y) är tillräckligt nära (a,b). Liknande, men mer oprecist: $f(x,y)$ närmar sig L när (x,y) närmar sig (a,b).

3.1.1 Räkneregler

Anta $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$. Då gäller

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L + M$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L \cdot M$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \text{ (Endast om } g(x,y) \neq 0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$$

Om $h(t)$ en funktion och $\lim\limits_{t\to L} h(t) = K$ så är

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(f(x,y)) = K.$$

Instängningsregeln/Squeeze theorem: Om $\forall x, y : f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$ gäller

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L.$$

Exempel 11. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ om det existerar.

Naivt kan man säga $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$ och därmed anta att gränsvärdet inte existerar. Dock kan vi förenkla

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \\
=&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\
=&\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 - y^2 \\
=&0^2 - 0^2 \\
=&0.
\end{aligned}$$

Exempel 12. Visa att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Inse först att $\forall x, y : 0 \leq \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$ och $\dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = y^2 \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} \leq y^2 \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = y^2$. Enligt instängingsregeln är $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0$ eftersom $0 \leq \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \leq y^2$ och $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$.

Exempel 13. Låt $g(x,y) = \dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2-1}$. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x,y)$ om det existerar.

Om $f(x,y) = x^2 + y^2$ och $h(t) = \dfrac{\ln(t)}{t-1}$ så är $g(x,y) = h(f(x,y))$. Eftersom $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0^2 + 1^2 = 1$ får vi $\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x,y) = \lim_{t\to 1} h(t) = \lim_{t\to 1} \dfrac{\ln(t)}{t-1} = 1$. Sista steget är ett standardgränsvärde eller går att räkna ut med l'Hospitals regel.

Om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ måste gränsvärdet av f när man närmar sig punkten (a,b) längs alla räta linjer genom (a,b) vara L. Sådana räta linjer ges av $\vec{r}(t) = \langle a + kt, b + lt\rangle$. $\vec{r}(t)$ går mot (a,b) när $t \to 0$. Detta ger en metod för att se när gränsvärden inte existerar och vad gränsvärdet måste vara om det existerar, men inte att det existerar.

Exempel 14. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ om det existerar.

Låt $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Vi prövar vad som händer när $(x,y) \to (0,0)$ längs x-axeln och y-axeln.

x-axeln: $\vec{r}_1(t) = \langle t, 0\rangle \to \langle 0, 0\rangle$ när $t \to 0$. $f(\vec{r}_1(t)) = f(t,0) = \dfrac{t^2-0^2}{t^2+0^2} = 1$ när $t \to 0$.

y-axeln: $\vec{r}_2(t) = \langle 0, t\rangle \to \langle 0, 0\rangle$ när $t \to 0$. $f(\vec{r}_2(t)) = f(0,t) = \dfrac{0^2-t^2}{0^2+t^2} = -1$ när $t \to 0$.

Eftersom dessa gränsvärden är olika existerar inte gränsvärdet för $f(x,y)$.

3.2 Kontinuitet

Definition 9 (Kontinuitet i en punkt)**.** En funktion $f(x,y)$ är *kontinuerlig* i en punkt (a,b) om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Definition 10 (Kontinuitet på ett område)**.** f är kontinuerlig på ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ om f är kontinuerlig på alla punkter $(a,b) \in D$. Man säger att f är kontinuerlig om den är kontinuerlig för alla punkter i sin definitionsmängd.

4 Föreläsning 19-09-10

4.1 Partiella derivator och annat

Missade föreläsningen, det kommer anteckningar här kanske.

5 Föreläsning 19-09-12

5.1 Tangentplan

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Exempel 15 (Tangentplan)**.** Beräkna tangentplanet till $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ i punkten (3,4). Bestäm också lineariseringen av f i (3,4) och använd den för att approximera $f(3{,}01; 3{,}98)$.

Vi börjar med att räkna ut $f(3,4) = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. Vi behöver också de partiella derivatorna till f och deras värden i (3,4): $f_x = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_x(3,4) = \dfrac{3}{5}$, $f_y = \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ och $f_y(3,4) = \dfrac{4}{5}$.

Tangentplanet är då

$$z = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4).$$

$L(x,y) = 5+\dfrac{3}{5}(x-3)+\dfrac{4}{5}(y-4)$. är lineariseringen av f. Det är en approximation nära (3,4).

Vi ska uppskatta $f(3{,}01; 3{,}98) \approx L(3{,}01; 3{,}98) = 5 + \frac{3}{5}(3{,}01-3) + \frac{4}{5}(3{,}98-4) = 5 + \frac{3}{5}\cdot 0{,}01 + \frac{4}{5}\cdot(-0{,}02) = 4{,}99$. Det verkliga värdet $f(3{,}01; 3{,}98) = 4{,}990040\ldots$ vilket är en rätt bra approximation.

5.2 Differentierbarhet (14.4)

5.2.1 En variabel

I en variabel gäller att om $f'(a)$ existerar kan man visa (finns i föreläsningsanteckningarna) att $f(x) = L(x) + \epsilon(x)(x-a)$ där $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ och $\epsilon(x) \to 0$ när $x \to a$. Det säger att om $f'(a)$ existerar är L en bra approximation av f nära a för $f(x) \to 0$ snabbare än alla linjära funktioner/förstagradspolynom (Och L är den enda linjära funktionen som uppfyller detta, alltså är L den ”bästa” approximationen av f med en linjär funktion.)

5.2.2 Fler variabler

Exempel 16. Låt $f(x) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ om $(x,y) \neq (0,0)$, 0 annars.$f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 0$ och $f_y(0,0) = 0$. Dess linearisering kring (0,0) är då $L(x,y) = 0$. Vi kollar exempelvis längs linjen $f(t,t)$. $f(t,t) - L(t,t) = \dfrac{t^2}{t^2+t^2} - 0 = \dfrac{1}{2} \not\to 0$, alltså är L inte en bra approximation av f nära (0,0) trots att de partiella derivatorna existerar i den punkten.

Många resultat bygger på att L är en bra approximation av f. Vi inför därför följande definition:

Definition 11 (Deriverbarhet/Differentierbarhet)**.** $f(x,y)$ är *deriverbar* eller *differentierbar* i (a,b) om $f_x(a,b)$ och $f_y(a,b)$ existerar och $f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \epsilon_1(x,y)(x-a) + \epsilon_2(x,y)(y-b)$ där $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ när $(x,y) \to (a,b)$. Speciellt innebär det att $f(x,y) - L(x,y) \to 0$ när $(x,y) \to (a,b)$.
Sats 1 (Kontinuitet och deriverbarhet)**.** Om $f_x(x,y)$ och $f_y(x,y)$ existerar och är kontinuerliga nära (a,b) är f deriverbar i (a,b).

Bevis. Beviset använder medelvärdessatsen, se appendix F i kursboken för det. □

5.3 Kedjeregeln (14.5)

5.3.1 En variabel

Om $y = f(x)$ och $x = g(t)$ är deriverbara så är $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$. Annorlunda uttryckt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

5.3.2 Två variabler

Låt $z = f(x,y)$, $x = g(t)$ och $y = h(t)$ vara deriverbara. Då är

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t), h(t)) = f_x(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + f_y(g(t), h(t)) \cdot h'(t)$$

eller kortare

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Beviset involverar definitionen av deriverbarhet i flera variabler.

"Nu har de flesta svarat, och några har svarat rätt i alla fall."

– Mr. Väsentligen

"Då får vi 1+1 vilket är 2."

– Mr. Väsentligen

5.3.3 Två variabler (variant)

Låt $z = f(x,y)$, $x = g(s,t)$ och $y = h(s,t)$ vara deriverbara. Då är kedjeregeln

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

eller med avseende på t:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Beviset följer av den andra varianten.

5.4 Riktningsderivator och gradienter (14.6)

De partiella derivatorna är derivator längs linjer där x eller y är konstant, d.v.s. med riktningsvektor $\hat{\imath} = \langle 1, 0\rangle$ eller $\hat{\jmath} = \langle 0{,}1\rangle$.

Definition 12 (Riktningsderivata)**.** *Riktningsderivatan (directional derivative)* av $f(x{,}y)$ i riktningen $\vec{u} = \langle a, b\rangle$ där $\vec{u}$ är en enhetsvektor (längd $\sqrt{a^2+b^2} = 1$) ges av

$$D_{\vec{u}}f(x{,}y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+ah, y+bh) - f(x{,}y)}{h}.$$

Anmärkning 1. $f_x = D_{\hat{\imath}}f$ och $f_y = D_{\hat{\jmath}}f$

Definition 13 (Gradient)**.** *Gradienten* av $f(x{,}y)$ är

$$\nabla f = \langle f_x, f_y\rangle$$

Sats 2 (Deriverbarhet, riktningsvektor och gradient)**.** Om f är deriverbar är

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u}.$$

Bevis. Låt $g(h) = f(x+ah, y+bh)$ och $\vec{u} = \langle a, b\rangle$. Enligt kedjeregeln är $g'(h) = f_x(x+ah, y+bh)\cdot a + f_y(x+ah, y+bh)\cdot b$. $g'(0) = f_x(x, y)\cdot a + f_y(x, y)\cdot b \implies D_{\vec{u}}f(x{,}y) = \nabla f(x{,}y)\cdot\vec{u}$. □

6 Föreläsning 19-09-13

6.1 Riktningsderivator och gradienter

Påminnelse 1. Låt $\vec{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ och $\vec{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ vara vektorer.

Skalärprodukten är då

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Längden av $\vec{u}$ är

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Det gäller också att

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\theta)$$

där θ är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Det följer av förra påståendet att för två vinkelräta vektorer är $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Sats 3 (Största värde för riktningsderivata)**.** $D_{\vec{u}}f(x,y)$ är som störst när $\vec{u}$ pekar i samma riktning som $\nabla f(x,y)$ d.v.s. när $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$.

Alltså $f(x,y)$ växer som mest när (x,y) rör sig från (x_0, y_0) i riktningen $\dfrac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x,y)|}$.

Bevis. $D_{\vec{u}}f(x,y) = \vec{u} \cdot \nabla f(x,y) = |\vec{u}| \cdot |\nabla f(x,y)| \cos(\theta)$ där θ är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\nabla f(x,y)$. Eftersom $\vec{u}$ är en enhetsvektor vet vi att $|\vec{u}| = 1$. $|\nabla f(x,y)| \cos(\theta)$ blir som störst när $\cos(\theta) = 1$, d.v.s. $\theta = 0$. Det betyder att $\vec{u}$ och $\nabla f(x,y)$ pekar i samma riktning. $\square$

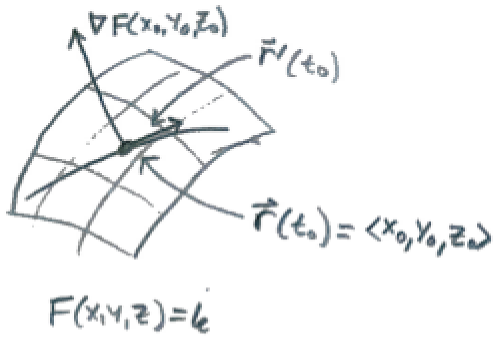
Anmärkning 2. I princip allt från denna veckan generaliserar enkelt från två till tre eller fler variabler.

6.2 Tangentplan till nivåytor (14.6)

En nivåyta bestäms av $F(x,y,x) = k$ för något konstant $k \in \mathbb{R}$.

En graf $z = f(x,y)$ är ett specialfall av en nivåyta, eftersom vi kan ta $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ och $k = 0$.

Ska definiera tangentplan till allmän nivåyta. Vill definiera tangentplanet till $F(x,y,z) = k$ i (x_0, y_0, z_0) som det plan som genom (x_0, y_0, z_0) s.a. det för varje kurva $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ som uppfyller $\vec{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ och ligger i nivåytan så innehåller tangentplanet $\vec{r}'(t_0)$.



Anta att $\vec{r}$ är en sådan kurva. Då är $\forall t : F(x(t), y(t), z(t)) = k$. Nu deriverar vi båda sidor med avseende på t m.h.a. kedjeregeln så att vi får

$$\begin{aligned} F_x \cdot x'(t) + F_y \cdot y'(t) + F_z \cdot z'(t) &= 0 \\ \nabla F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Om vi tar $t = t_0$ får vi att $\nabla F(\vec{r}(t_0)) = \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ är vinkelrät mot $\vec{r}'(t_0)$.

Påminnelse 2. En normalvektor $\vec{n}$ till ett plan är en nollskild vektor som är vinkelrät mot alla vektorer i planet. Om planet går genom (x_0, y_0, z_0) ges hela planet av

$$\vec{n} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0.$$

Definition 14 (Tangentplan till nivåyta)**.** *Tangentplanet* till en nivåyta $F(x,y,z) = k$ genom en punkt (x_0, y_0, z_0) där $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq \vec{0}$ är $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$.

Det är definierat s.a. det uppfyller vad vi ville att det skulle uppfylla.
Obs. 1. Om $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ är nivåytan där $F = 0$ samma som grafen $z = f(x,y)$. Eftersom $\nabla F = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$ får i en punkt $(a, b, f(a,b))$ samma tangentplan $\langle -f_x(a,b), -f_y(a,b), 1 \rangle \cdot \langle x - a, y - b, z - f(a,b) \rangle$ oavsett om man ser ytan som en nivåyta eller grafen till en funktion.
Exempel 17. Bestäm tangentplanet till ytan $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$.

Ytan är nivåytan $F(x,y,z) = 1$ där $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$.

$\nabla F = \langle 2x, -2y, 2z \rangle$ och $\nabla F(1,1,1) = \langle 2, -2, 2 \rangle$. Då är tangentplanet $\nabla F(1,1,1) \cdot \langle x - 1, y - 1, z - 1 \rangle = 0$ vilket ger

$$\begin{aligned} 2(x-1) - 2(y-1) + 2(z-1) &= 0 \\ x - 1 - y + 1 + z - 1 &= 0 \\ x - y + z &= 1. \end{aligned}$$

6.3 Lokala extremvärden

Definition 15 (Lokalt maximum)**.** $f(x,y)$ har ett *lokalt maximum* i (a,b) om $f(x,y) \leq f(a,b)$ gäller för (x,y) nära (a,b). (D.v.s. det gäller för (x,y) i någon cirkelskiva kring (a,b).)
Definition 16 (Absolut/Globalt maximum)**.** $f(x,y)$ har ett *absolut/globalt maximum* i (a,b) om $f(x,y) \leq f(a,b)$ gäller för alla (x,y) i definitionsmängden till f.
Definition 17 (Lokalt minimum)**.** $f(x,y)$ har ett *lokalt minimum* i (a,b) om $f(x,y) \geq f(a,b)$ gäller för (x,y) nära (a,b). (D.v.s. det gäller för (x,y) i någon cirkelskiva kring (a,b).)
Definition 18 (Absolut/Globalt minimum)**.** $f(x,y)$ har ett *absolut/globalt minimum* i (a,b) om $f(x,y) \geq f(a,b)$ gäller för alla (x,y) i definitionsmängden till f.
Definition 19 (Extremvärde)**.** Ett *extremvärde* är ett minimum eller maximum.
Exempel 18. $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ har ett lokalt och globalt minimum, var?

Inses lätt att det sker i (0,0) då den annars är strikt positiv för $x, y, \in \mathbb{R}$.
Påminnelse 3. I en variabel, om f är deriverbar och har ett (lokalt) extremvärde i a är $f'(a) = 0$.
Sats 4 (Extremvärde i en punkt)**.** Om $f(x,y)$ har ett (lokalt) extremvärde i punkten (a,b) och $f_x(a,b)$ och $f_y(a,b)$ existerar är $f_x(a,b) = 0$ och $f_y(a,b) = 0$.

Bevis. Om vi låter $h(x) = f(x,b)$ ha ett extremvärde i $x = a$ gäller $h'(a) = 0$ och $h'(a) = f_x(a,b)$, vilket ger att $f_x(a,b) = 0$.

$f_y(a,b) = 0$ visas analogt. □

7 Föreläsning 19-09-17

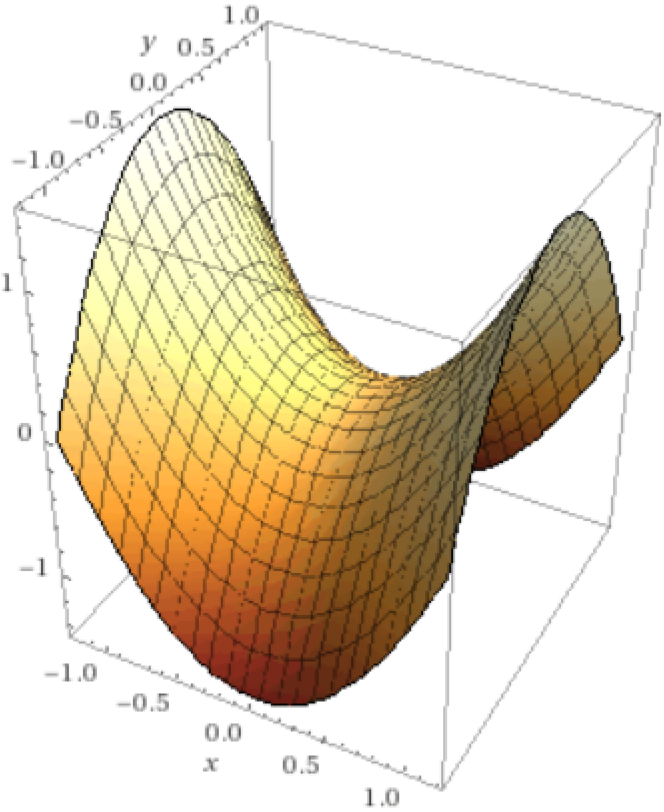
7.1 Lokala extremvärden forts.

Definition 20 (Kritiska/stationära punkter)**.** Om $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ säger man att f har en *kritisk/stationär punkt* i (a,b).

Alla lokala extremvärden är kritiska punkter (om de partiella derivatorna existerar) men det kan finns kritiska punkter som inte är lokala extremvärden. Sådana punkter kallas *sadelpunkter*.
Exempel 19. Låt $f(x,y) = x^2 - y^2$, bestäm dess kritiska punkter.

Den har en sadelpunkt i $(0,0)$ eftersom $\nabla f = \langle 2x, -2y\rangle \implies \nabla f(0,0) = (0,0)$, d.v.s. $(0,0)$ är en kritisk punkt, men den är varken ett lokalt maximum eller minimum.

Grafen har formen av en "sadel".



Hur avgör man då om en kritisk punkt är ett extremvärde? I en variabel gäller, för funktioner där $f'(a) = 0$, att om $f''(a) > 0$ så har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x = a$ och om $f''(a) < 0$ så har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x = a$. Om $f''(a) = 0$ kan vi inte säga något om punkten.
Sats 5 (Test för lokala extrempunkter i två variabler)**.** Anta att de partiella

derivatorna av ordning 2 till $f(x,y)$ är kontinuerliga nära (a,b) och att $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

Låt $D = f_{xx}(ab)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$. Då har vi fyra fall:

1. Om $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) > 0$ (eller $f_{yy}(a,b) > 0$) är (a,b) ett lokalt minimum.
2. Om $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) < 0$ (eller $f_{yy}(a,b) < 0$) är (a,b) ett lokalt maximum.
3. Om $D < 0$ är (a,b) en sadelpunkt.
4. Om $D = 0$ vet vi inget om punkten.

Bevis. Går ut på att reducera till motsvarande test i en variabel, se slutet av 14.7 i boken. □

Eftersom $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ (Clairaut's sats) är $D = \det\{H\}$ där H är ”Hessianmatrisen” $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$.

För att komma ihåg vilket villkor som ger vilken slutsats kan man jämföra med följande modellfall:

1. $f(x,y) = x^2+y^2$ som har ett lokalt minimum i origo. $D = 2\cdot 2-0\cdot 0 = 4 > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$.
2. $f(x,y) = -x^2 - y^2$ som har ett lokalt maximum i origo. $D = (-2)\cdot(-2) - 0\cdot 0 = 4 > 0$, $f_{xx} = -2 < 0$.
3. $f(x,y) = x^2-y^2$ som har en sadelpunkt i origo. $D = 2\cdot(-2)-0\cdot 0 = -4 < 0$.

Exempel 20. Bestäm de kritiska punkterna till $f(x,y) = 3x^2 + 6xy - y^3$ och avgör om de är sadelpunkter, lokala minimum eller lokala maximum.

Vi börjar med att avgöra kritiska punkter, d.v.s. punkter där de partiella derivatorna är 0.

$$\begin{cases} f_x = 6x + 6y = 0 \iff x = -y \\ f_y = 6x - 3y^2 = 0 \iff 2x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Detta ger, om man sätter in uttrycken i varandra, $2(-y) - y^2 = 0 \iff y(-2-y) = 0 \iff y = 0$ el. $y = -2$. Om vi sätter in detta i uttrycket för x får vi $x = -y = -0 = 0$ och $x = -(-2) = 2$ vilket ger de kritiska punkterna $(0,0)$ och $(2,-2)$.

Vi undersöker nu dessa kritiska punkter.

$f_{xx} = 6$, $f_{yy} = -6y$ och $f_{xy} = 6$.

I $(0,0)$ gäller $D(0,0) = f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 6\cdot 0 - 6^2 = -36 \implies (0,0)$ är en sadelpunkt.

I $(2,-2)$ gäller $D(2,-2) = f_{xx}(2,-2)\cdot f_{yy}(2,-2) - f_{xy}(2,-2)^2 = 6\cdot(-6)\cdot(-2) - 6^2 = 72 - 36 = 36 \implies (2,-2)$ är en lokal extrempunkt. Eftersom $f_{xx}(2,-2) = 6 > 0$ är $(2,-2)$ ett lokalt minimum.

För att generalisera det här till tre eller fler variabler måste man bygga på egenvärden till Hessianmatrisen.

7.2 Globala extremvärden (14.7)

I en variabel, om $f(x)$ är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a,b]$ så har f ett globalt max- och min-värde någonstans i $[a,b]$. Ej sant för t.ex. öppna intervall eller obegränsade intervall. Se exempelvis $f(x) = x$ på intervallet $x \in (0,\infty)$, då finns inget specifikt max-värde eftersom vi alltid kan gå närmare ∞ och det finns inget min-värde eftersom vi alltid kan gå lite närmare 0.

Vi ska definiera motsvarigheten till ”sluten och begränsad” i två variabler.
Definition 21 (Randpunkter)**.** (a,b) är en *randpunkt (boundary point)* till $D \subseteq \mathbb{R}^2$ om varje cirkelskiva kring (a,b) innehåller både punkter i D och punkter som inte är i D.
Exempel 21. Randpunkter till $D_1 = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$ är $\{(x,y)|x^2+y^2 = 1\}$.

Till $D_2 = \{(x,y)|x^2+y^2 < 1\}$ är randpunkterna precis som ovan $\{(x,y)|x^2+y^2 = 1\}$, trots att de inte är i D.

”Här går kanske inte intuitionen jättebra.”

– Mr. Väsentligen om sin publik

Definition 22 (Slutna mängder)**.** En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är *sluten* om den innehåller alla sina randpunkter.

I exemplet ovan är D_1 sluten och D_2 inte sluten.
Definition 23 (Begränsade mängder)**.** En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är *begränsad* om den är innehållen i någon cirkelskiva.
Exempel 22. $\{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ är begränsad eftersom vi kan innesluta kvadraten i en stor cirkel, exempelvis en cirkel med centrum i origo och radie 31415.

$\{(x,y)|0 \leq x \leq 1\}$ är inte begränsad eftersom den inte går att innesluta i en cirkel.
Sats 6 (Existens av globala max- och minpunkter)**.** Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och D är både sluten och begränsad då har f globala max- och min-punkter någonstans i D.

Bevis. Beviset involverar definitionen av reella tal vilket är lite lagom överkurs för den här kursen. Finns säkert på nätet eller något. □

8 Föreläsning 19-09-18

8.1 Globala extremvärden (forts.)

Om $f(x,y)$ har ett globalt max-/min-värde i $(a,b) \in D$ och (a,b) inte är en randpunkt måste den vara ett lokalt min/max och därmed också en kritisk punkt (om f är deriverbar i (a,b)).

8.1.1 Metod för att bestämma globala max/min

Låt f vara en deriverbar funktion på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ där D är sluten och begränsad.

Globala max och min fås genom att jämföra funktionsvärden i följande kandidater:

1. Kritiska punkter i D
2. Randpunkter till D

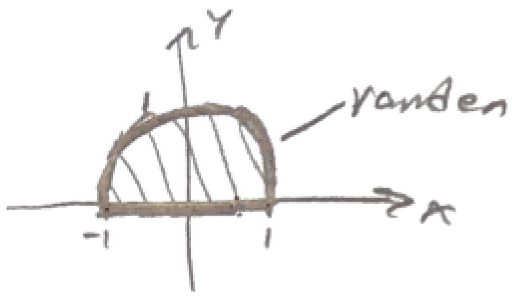
Om man parametriserar randpunkterna till D med ett antal kurvor räcker det med följande kandidater i punkt 2 ovan:

2.1. Kritiska punkter när man ser f som en funktion av en variabel längs randkurvor

2.2. "Hörn", d.v.s. ändpunkter till randkurvorna

Exempel 23. Beräkna de globala max-/min-punkterna till funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2 - y$ på området $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Området är en halvcirkelskiva som ganska uppenbart är sluten och begränsad.



Vi börjar med att leta kritiska punkter: $\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y - 1 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0;0{,}5)$.

Nu får vi kolla om den kritiska punkten ligger i D. $0^2 + (0{,}5)^2 = 0{,}25 \leq 1$ och $0{,}5 \geq 0$, så den ligger i D. $f(0;0{,}5) = -\frac{1}{4}$.

Nu ska vi titta på randpunkter, så vi börjar med att parametrisera randen. Vi delar upp det i det raka strecket (C_1) och i halvcirkelbågen (C_2) för enkelhetens skull.

$C_1 : \vec{r}_1(t) = \langle t, 0 \rangle$ där $-1 \leq t \leq 1$.

$C_2 : \vec{r}_2(t) = \langle \cos(t), \sin(t) \rangle$ där $0 \leq t \leq \pi$.

Då tittar vi på kritiska punkter för randkurvorna, och vi börjar med C_1. $g_1(t) = f(\vec{r}_1(t)) = f(t, 0) = t^2$. Kritiska punkter för g_1 är då $g_1'(t) = 0 \iff t = 0$. Det ger kandidaten $g_1(0) = f(0{,}0) = 0$. Nu kör vi på C_2. $g_2(t) = f(\vec{r}_2(t)) = f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) + \sin^2(t) - \sin(t) = 1 - \sin(t)$. Kritiska punkter är då

$g_2'(t) = -\cos(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}$ (Fler punkter egentligen, men den här är den enda i vårt tillåtna intervall). Kandidaten är då $g_2(\frac{\pi}{2}) = f(0{,}1) = 0$.

Nästa steg är att titta på "hörnen" $(-1,0)$ och $(1{,}0)$. $f(-1,0) = (-1)^2 + 0^2 - 0 = 1$ och $f(1{,}0) = 1^2 + 0^2 - 0 = 1$.

Allt som allt är vårt globala max $(\pm 1, 0)$ och vårt globala min $(0; 0{,}5)$.

8.2 Optimering under bivillkor och Lagrangemultiplikatorer (14.8)

Vi vill lösa följande slags problem: Beräkna max av $4x^2 + 4y$ när $(x{,}y)$ ligger på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$. En möjlighet är att parametrisera enhetscirkeln, t.ex. med $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle$ när $0 \leq t \leq 2\pi$ och hitta max av $g(t) = f(\vec{r}(t)) = 4\cos^2(t) + 4\sin(t)$ som vanligt.

En annan möjlighet är att se det som ett fall av optimering under bivillkor. Låt $f(x{,}y), g(x{,}y)$ vara definierade på någon mängd D. Vi vill hitta max och min av $f(x{,}y)$ på D under förutsättning att $g(x{,}y) = k$ där k är konstant. Villkoret $g(x{,}y) = k$ kallas för *bivillkor (constraint)*.

8.2.1 Metoden med Lagrangemultiplikatorer

För att hitta max och min till $f(x{,}y)$ under bivillkoret $g(x{,}y) = k$ (under förutsättning att extremvärden finns och $\nabla g(x{,}y) \neq 0$ på $g(x{,}y) = k$) gör man följande:

a) Hitta alla lösningar $(x{,}y)$ till $\begin{cases} \nabla f(x{,}y) = \lambda \cdot \nabla g(x{,}y) \\ g(x{,}y) = k \end{cases}$ för något λ (λ kallas för Lagrangemultiplikator).

b) Jämför $f(x{,}y)$ för alla lösningar $(x{,}y)$ från punkt a. Det största värdet ger max och det minsta ger min.

Anmärkning 3. Förutsättningen att extremvärden finns är uppfylld om $\{g(x{,}y) = k\}$ är sluten och begränsad. I kursen kommer vi bara att studera problem där extremvärden existerar.

Exempel 24. Hitta max och min till $f(x{,}y) = 4x^2 + 4y$ under bivillkoret $g(x{,}y) = x^2 + y^2 = 1$.

Enligt metoden ska vi då lösa ekvationssystemet $\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f_x = \lambda \cdot g_x \\ f_y = \lambda \cdot g_y \\ g^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} 8x = \lambda \cdot 2x \\ 4 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ Den första ekvationen ger $8x = \lambda \cdot 2x \iff 4x = \lambda x \iff x = 0$ el. $\lambda = 4$. Första fallet ($x = 0$) ger genom ekvation 3 $y^2 = 1 \iff y = \pm 1$ vilket med ekvation 2 ger $\lambda = \frac{4}{2y} = \pm 2$. Här får vi komma ihåg att det ger två lösningar $(x{,}y{,}\lambda) = (0{,}1{,}2)$ och $(0, -1, -2)$. Andra fallet ger genom ekvation 2 $4 = 4 \cdot 2 \cdot y \iff y = \frac{1}{2}$. Ekvation 3 ger då $x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \iff x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vi kontrollerar att det ger de två lösningarna $(x,y,\lambda) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4)$. Med det får vi följande lösningar till det ursprungliga problemet:

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 4 \\ f(0,-1) &= -4 \\ f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) &= 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 5 \\ f(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) &= 5 \end{aligned}$$

Alltså har vi ett max på 5 i $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ och ett min på -4 i $(0, -1)$.

9 Föreläsning 19-09-20

9.1 Längd av kurvor (10.2, 13.3)

Sats 7 (Längd av en kurva)**.** *Låt $\vec{r}(t), a \leq t \leq b$ vara en kurva. Då är dess längd $l = \int_a^b |\vec{r}'(t)| \mathrm{d}t$.*

Bevis. Finns en skiss till ett argument i 10.2 i boken. □

Exempel 25. Beräkna längden av kurvan med parametrisering $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle = \left\langle t^2, t^3 \right\rangle$ för $0 \leq t \leq 1$.

Då är $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = \sqrt{t^2(4 + 9t^2)} = \sqrt{t^2}\sqrt{4 + 9t^2} = t\sqrt{4 + 9t^2}$.

Från formeln ovan är $l = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2}\mathrm{d}t = \begin{cases} s = 4 + 9t^2 \\ \mathrm{d}s = 18t\mathrm{d}t \implies t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{18} \\ t = 0 \implies s = 4 \\ t = 1 \implies s = 13 \end{cases} =$

$\frac{1}{18}\int_4^{13} \sqrt{s}\mathrm{d}s = \frac{1}{18}\left[\frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{13} = \frac{1}{18}\left(\frac{13^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right)$

Sats 8 (Längden av en graf)**.** *Längden av en graf $y = f(x)$ är $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$.*

Bevis. $f(x)$ kan parametriseras med ekvationen $\vec{r}(t) = \langle t, f(t) \rangle$. Då blir $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ och längden därmed $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$.

Alternativ härledning finns i föreläsningsslides. □

9.2 Rörelse av partiklar i rummet (13.4)

Man kan använda en vektorvärd funktion $\vec{r}(t)$ för att beskriva hur en partikel rör sig genom rummet. Vid tiden t befinner sig partikeln i $\vec{r}(t)$.

Definition 24 (Hastighetsvektor och fart)**.** *Hastighetsvektorn* $\vec{v}(t)$ för en sådan partikel ovan är $\vec{r}'(t)$ och farten är $|\vec{v}(t)|$.

Definition 25 (Accelerationsvektor)**.** *Accelerationsvektorn* för en partikel som ovan är $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$.

Dessa definitioner används för att beskriva olika fysiska fenomen. Ett exempel på en sådan är Newtons andra lag:
Sats 9 (Newtons andra lag)**.** Om kraften $\vec{F}(t)$ verkar på en partikel med massa m så är $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$.
Exempel 26. Anta att bara tyngdkraften verkar på en partikel med massa m, d.v.s. $\vec{F} = \langle 0, 0, -mg \rangle$. Anta också att partikeln vid $t = 0$ har position $\vec{r}(0) = \langle a,b,c \rangle$ och hastighet $\vec{v}(0) = \langle d, e, f \rangle$. Verifiera att partikeln med position $\vec{r}(t) = \left\langle a + dt, b + et, c + ft - \frac{gt^2}{2} \right\rangle$ uppfyller dessa villkor och rör sig enligt Newtons andra lag.

Vi kontrollerar detta: Vi stoppar in $t = 0$ i $\vec{r}$ och får $\vec{r}(0) = \langle a, b, c \rangle$ vilket stämmer. Vi deriverar nu för att få $\vec{v}$ och får $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \langle d, e, f - gt \rangle$. Kontrollerar genom att stoppa in $t = 0$: $\vec{v}(0) = \langle d, e, f \rangle$. Kontrollerar nu med ytterligare en derivata $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \langle 0, 0, -g \rangle$. Använder Newtons andra lag för att kontrollera $m \cdot \vec{a}(t) = \langle 0, 0, -mg \rangle = \vec{F}$.

” 0 är ju en typisk konstant.”

– Mr. Väsentligen

”Du har ju nog rätt idé, men vad menar du?”

– Mr. Väsentligen

”Ja, det hade man kunnat tänka sig, men så är det inte.”

– Mr. Väsentligen

10 Föreläsning 19-09-24

Sats 10 (Volym under graf)**.** Anta att f är en funktion definierad på en mängd $D = [a,b] \times [c \times d] = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$.

Volymen under grafen $z = f(x,y)$ är då $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$.

Bevis. Dela in D i $m \times n$ stycken lika stora rektanglar A_{ij} med area $\Delta A = \frac{b-a}{m}\frac{d-c}{n}$ och låt punkten $(x_{ij}, y_{ij}) \in A_{ij}$. Då är volymen under grafen ungefär $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$.

Definition 26 (Integrerbarhet)**.** Vi låter $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$ om gränsvärdet existerar. Då säger vi att f är integrerbar.

Om $f(x,y) \geq 0$ och f är integrerbar är volymen mellan D och $z = f(x,y)$ då $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$. $\square$

Sats 11 (Krav för integrerbarhet)**.** Om en funktion f är kontinuerlig på en mängd D är f integrerbar på D.
Sats 12 (Fubinis sats)**.** Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på $D = [a,b] \times [c,d]$ är

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Idé. Idén bakom satsen är att i två variabler är volymen integralen av tvärsnittsarean, likt att arean är integralen av höjden i en variabel. Integralen av tvärsnittsarean borde bli samma oberoende av vilket håll vi tar tvärsnittsarean. □

Definition 27 (Dubbelintegral över begränsade områden)**.** Låt $f(x,y)$ vara definierad på ett begränsat område $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Låt också R vara en rektangel som helt innehåller D och definiera $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$. Då definierar man $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_R F(x,y)\mathrm{d}A$ om F är integrerbar.

Eftersom $F(x,y) = f(x,y)$ på hela D och $F(x,y) = 0$ utanför D så borde volymen mellan $z = f(x,y)$ och D vara samma som volymen mellan $z = F(x,y)$ och R och bör därför vara en rimlig definition av en integral av f över D.

11 Föreläsning 19-09-25

Definition 28 (Typ I-område)**.** Ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är av *Typ I* om det kan skrivas som $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c(x) \leq y \leq d(x)\}$ där $c(x)$ och $d(x)$ är kontinuerliga.
Definition 29 (Typ II-område)**.** Ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är av *Typ II* om det kan skrivas som $D = \{(x,y) \mid a(y) \leq x \leq b(y),\ c \leq y \leq d\}$ där $a(x)$ och $b(x)$ är kontinuerliga.
Sats 13. Om D är ett område av typ I eller II och $f(x,y)$ är kontinuerlig på D är f integrerbar.

Bevis. Anta att D är ett område av typ I och att $D \subseteq E = [a,b] \times [g,h]$ så att $g \leq c(x)\ \forall\ x$ och $h \geq d(x)\ \forall\ x$. Då är

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A &= \iint_R F(x,y)\mathrm{d}A \\
&= \int_a^b \int_g^h F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \{F(x,y) = 0 \text{ om } g \leq y \leq c(x) \text{ el. } d(x) \leq y \leq h\} \\
&= \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \{F(x,y) = f(x,y) \text{ om } (x,y) \in D\} \\
&= \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Samma härledning gäller för typ II-områden. □

12 Föreläsning 19-09-27

12.1 Integraler över allmänna områden (forts.)

Sats 14 (Volym mellan grafer)**.** Om $f(x,y) \geq g(x,y)$ ges volymen av området mellan $z = g(x,y)$ och $z = f(x,y)$ där $(x,y) \in D$ ges av $\iint_D f(x,y) - g(x,y)\mathrm{d}A$.

12.2 Dubbelintegraler och polära koordinater (15.3)

Exempel 27. Beräkna volymen av området mellan konen $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$ och planet $z = 1$.

Den första ekvationen ger en kon eftersom $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ där z är avståndet från (x,y) till origo.

Det beror inte på vinkeln θ i xy-planet, så vi kan rita $z = r$ för ex. $\theta = 0$, där är $r = x$, och sedan roterar vi kring z-axeln.

Ytorna $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $z = 1$ skär varandra i $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, d.v.s. $x^2 + y^2 = 1$ och $z = 1$. Området mellan de här ytorna ges då av $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. D sett som ett typ I-område begränsas av $y = \sqrt{1 - x^2}$ och $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Alltså är $D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$.

Områdets volym blir då $\iint_D 1 - \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}A = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$. Detta går att beräkna, men blir krångligt.

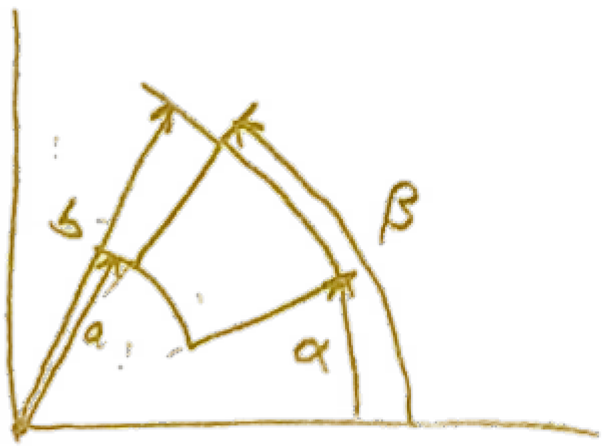
Idag ska vi snacka om ett betydligt enklare sätt att räkna ut detta.

12.2.1 Polära koordinater

En punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ kan beskrivas med *polära koordinater* (r, θ) genom $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ där θ är vinkeln mot x-axeln och r är avståndet från origo.

Exempel 28. Området $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ y \leq x\}$ ser ut som följande:

I polära koordinater är $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2,\ -\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.
Definition 30 (Polära rektanglar och deras area)**.** Ett område är en *polär rektangel* om det i polära koordinater ges av $a \leq r \leq b$ och $\alpha \leq \theta \leq \beta$.



Arean för den rektangeln är $\frac{(b^2-a^2)(\beta-\alpha)}{2}$.

12.2.2 Integration i polära koordinater

Sats 15 (Integration av polära rektanglar)**.** Låt D vara en polär rektangel som ges av $a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, och anta att f är kontinuerlig på D.

Då är $\iint_D f \mathrm{d}A = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot r \ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot r \ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$.
Obs. 2. Vänsterledet är en integral över ett allmänt område. Högerledet är upprepade integraler.

Man brukar ofta sammanfatta formlerna som $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$ eller $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$. Den första sammanfattningen används i formelbladet.

Bevis. Idén bakom beviset är samma som för ett ”vanligt” koordinatsystem, men istället för att dela in i rektanglar delar vi in i polära rektanglar istället. Finns ganska komplett i föreläsningsslidesen. □

Exempel 29. Vi går tillbaka till exemplet i början av föreläsningen för att se om det blir enklare med polära koordinater.

Beräkna $\iint_D 1 - \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}A$ där $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

I polära koordinater ges D av $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vår funktion är då

$$\begin{aligned} f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} \\ &= \sqrt{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))} \\ &= \sqrt{r^2} \\ &= r \\ &= f(r,\theta). \end{aligned}$$

Då blir

$$\begin{aligned} \iint_D 1 - \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}A &= \iint_D 1 - r\mathrm{d}A \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r)r \ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \left[(r-r^2)\theta\right]_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^1 r - r^2\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 2\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

13 Föreläsning 19-09-30

13.1 Densitet, massa och masscentrum (15.4)

Låt D vara en tunn skiva (lamina) som representeras av $D \subseteq \mathbb{R}^2$ med densitet $\rho(x,y)$. $\rho(x,y)$ är gränsvärdet när $\epsilon \to 0$ för densiteten av en kvadrat A_ϵ med sidlängd ϵ och centrum i (x,y).

Om E är ett litet område kring punkten (x,y) bör $\rho(x,y)$ vara detsamma oberoende av E. För ett sådant område blir då

$$\text{massa}(E) \approx \rho(x,y) \cdot \text{area}(E). \tag{1}$$

M.h.a. ρ vill vi beskriva massan på och masscentrum i D ovan.

13.1.1 Massa

Vi börjar med att anta att D är en rektangel med $\rho(x,y) = 0$ om $(x,y) \notin D$. Då delar vi in D i $M \times N$ stycken lika stora delrektanglar R_{ij} där $i \in \{1, \ldots, M\}$ och $j \in \{1, \ldots, N\}$ med area ΔR och $(x_{ij}, y_{ij}) \in R_{ij}$. Om M och N är stora blir varje R_{ij} litet, så att från ekvation 1 ovan får vi massa$(R_{ij}) \approx \rho(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta R$. Total massan är då $m = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \text{massa}(R_{ij}) \approx \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \rho(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta R = \iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}A$. Uppskattningen för massan blir också bättre och bättre när $M, N \to \infty$.

Sats 16 (Massa för område)**.** För en skiva $D \subseteq \mathbb{R}^2$ med densitet $rho(x,y)$ i varje punkt (x,y) är den totala massan $m = \iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}A$.

Bevis. Bevis finns ovan. □

13.1.2 Masscentrum

Definition 31 (Moment)**.** *Momentet* med avseende på x-axeln kring en punkt $x = a$ för en partikel med position (x,y) och massa m är $m(x - a)$.

Definition 32 (Jämvikt av moment)**.** En samling partiklar med positioner (x_i, y_i) och massor m_i där $i \in \{1, \ldots, n\}$ är i *jämvikt* kring $x = a$ om dess totala moment $\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - a) = 0$.

Motsvarande definition funkar även i y-led.

Sats 17 (Totalt moment för en skiva och jämvikt)**.** Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en tunn skiva med densitet $\rho(x,y)$.

Dess totala moment med avseende på x-axeln kring $x = a$ är då $\iint_D (x - a)\rho(x,y)\mathrm{d}A$.

Samma sak funkar igen även för y-led.

Om $\iint_D (x - a)\rho(x,y)\mathrm{d}A = \iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}A - a\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}A = 0$ är skivan i jämvikt.

Bevis. Härleds på samma sätt som för massan. □

Definition 33 (Moment kring x-axeln)**.** Momentet med avseende på x-axeln kring $x = 0$ är $M_x = \iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}A$.

Sats 18 (Masscentrum)**.** För en skiva $D \subseteq \mathbb{R}^2$ med densitet $\rho(x,y)$ är dess *masscentrum* $(\overline{x}, \overline{y})$ där $\overline{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}A$ och $\overline{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}A$.

Exempel 30. Beräkna massan och masscentrum för triangeln D med hörn i (0,0), (1,0) och (0,1) med konstant densitet $\rho(x,y) = 1$.

$m = \iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}A = \iint 1\mathrm{d}A = \frac{1}{2}$.

För att räkna ut M_x måste vi kunna beskriva randerna till D. Vi noterar att hypotenusan till triangeln beskrivs av $y = 1 - x$ så att $D\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$ och därmed

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}A \\ &= \iint_d x\mathrm{d}A \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x \int_0^{1-x} 1\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x \cdot (1-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x - x^2\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Då har vi x-koordinaten för masscentrum $\overline{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{M_x}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

I och med att triangeln är symmetrisk måste $M_y = M_x = \frac{1}{3}$ och därmed är masscentrum $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Man kan självklart räkna ut M_y på samma sätt, men det behövs inte här.

Sats 19 (Masscentrum för triangel)**.** I en triangel, om densiteten är konstant, är masscentrumet skärningspunkten för triangelns medianer, d.v.s. linjerna från triangelns hörn till mitten av motstående sida.

13.2 Medelvärden

Sats 20 (Medelvärde av en funktion)**.** Låt $f(x,y)$ vara definierad på en mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Då är dess *medelvärde* $\frac{\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A}{\iint_D 1\mathrm{d}A} = \frac{\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A}{\mathrm{area}(D)}$.

Speciellt, om D är en skiva med konstant densitet $\rho(x,y) = 1$ är komponenterna i dess masscentrum $(\overline{x}, \overline{y})$ medelvärdet av x och y på D.

13.3 Arean av grafen till en funktion (15.5)

Låt $f(x,y)$ vara definierad på D, då ger den en yta (dess graf) $z = f(x,y)$ där $(x,y) \in D$.

Sats 21 (Arean av en graf)**.** $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \mathrm{d}A$.

Bevis. Inte idag. □

Jämför med längden av en graf $y = f(x)$ där $a \leq x \leq b$: $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \mathrm{d}x$.

Nästa vecka pratar vi om en formel för mer allmänna ytor och kort om varför den ser ut som den gör.

Exempel 31. Bestäm arean av grafen $z = f(x,y)$ där $(x,y) \in D$, $f(x,y) = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$ och $D = [0,1] \times [0,2]$.

$f_x = \frac{2}{3}\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. På samma sätt blir $f_y = \sqrt{y}$.

$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2} = \sqrt{1 + x + y}$ ger $A \iint_D \sqrt{1 + x + y} \mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{1 + x + y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \cdots = \frac{4}{15}(33 - 4\sqrt{2} - 9\sqrt{3})$.

14 Föreläsning 19-10-01

14.1 Trippelintegraler

Definition 34 (Trippelintegraler)**.** Låt $E \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett område och $g(x,y,z)$ vara definierad på E.

Då definierar vi trippelintegralen av g över E:

$$\iiint_E g(x,y,z) \mathrm{d}V$$

på samma sätt som dubbelintegraler, först när $E = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ är ett rätblock m.h.a. Riemannsummor och sedan för allmänna begränsade områden genom att reducera till fallet med rätblock.

14.1.1 Upprepad integration i trippelintegraler

Vi antar att de funktioner vi använder är kontunierliga s.a. integralerna existerar. Annars blir det svårt.

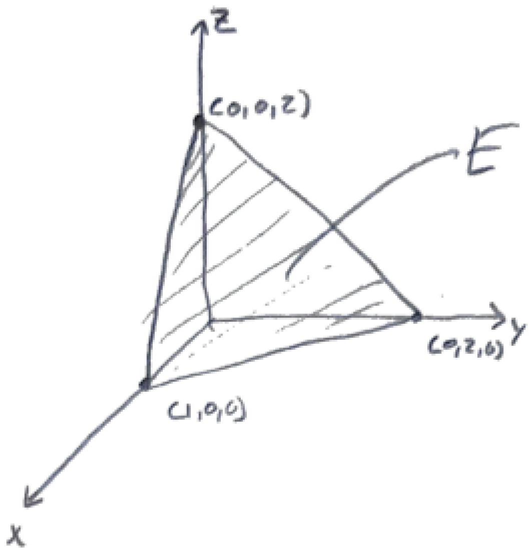
Om $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ e(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är $\iiint_E g(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint_D \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}A$.

Om $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c(x) \leq y \leq d(x)\}$ (är ett typ I-område) är $E = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b,\ c(x) \leq y \leq d(x),\ e(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$. Då är integralen

$$\iiint_E g(x,y,z)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

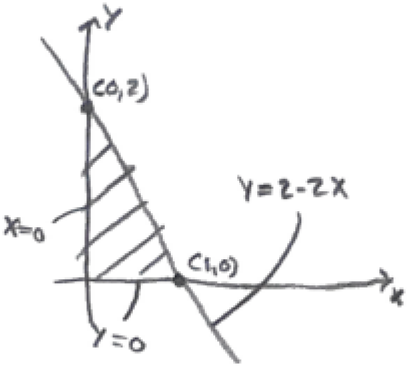
Motsvarande formler fås om vi byter roller på variablerna.
Exempel 32. Beräkna $\iiint_E z\mathrm{d}V$ där E är den tetraeder som begränsas av planen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ och $2x + y + z = 2$.

Området mellan ett antal ytor som bestäms av likheter beskrivs typiskt sett av motsvarande olikheter. (D.v.s. byt = mot $\geq$ el. $\leq$.) Men vilket håll ska olikheten vara på? Brukar funka att rita en figur. För att göra det enklare att rita kollar vi var den skär de tre axlarna. För x-axeln får vi när $y = z = 0$. Då är $2x + 0 + 0 = 2 \implies x = 1$ och därmed innehåller planet punkten (1,0,0). På motsvarande sätt får vi $y = 2$ och $z = 2$ och punkterna (0,2,0) och (0,0,2). Då får vi följande utritade tetraeder:



För att beskriva E med olikheter får vi $E = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ 2x{+}y{+}z \leq 0\}$. Hållen på olikheterna fås genom att kolla punkter i tetraedern. Ex. får vi i punkten (0,0,0) som ligger i tetraedern $2 \cdot 0 + 0 + 0 = 0$ i origo, och $0 \leq 2$.

Genom att kombinera de två sista olikheterna fås $0 \leq z \leq 2 - 2x - y$. För att det ska finnas sådana (x,y,z) måste $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $2 - 2x - y \geq 0$. Då får vi följande område:



Då får vi att $E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2-2x,\ 0 \leq z \leq 2-2x-y\}$. Nu kan vi till slut integrera!

$$\begin{aligned}
\iiint_E z\mathrm{d}V &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{2-2x-y} z\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{2-2x-y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (2-2x-y)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{(2-2x-y)^3}{-3}\right]_{y=0}^{2-2x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 (2-2x)^3 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{(2-2x)^4}{4\cdot(-2)}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{2^4}{4\cdot 2} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

”Fyra plus två plus två blir åtta.”

– Randomsnubbe om trivialiteter

14.2 Cylindriska koordinater och trippelintegraler (15.7)

Cylindriska koordinater betecknas $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3$ och fås genom att byta ut (x,y) mot de polära koordinaterna (r,θ), d.v.s. $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$. Om vi har ett område

$E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ e(x,y) \leq z \leq e(x,y)\}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en polär rektangel med $a \leq r \leq b$ och $\alpha \leq \theta \leq \beta$ följer av formlerna för upprepad integration av trippelintegraler och formeln för integration i polära koordianter för dubbelintegraler att

$$\iiint_E g(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_{e(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}^{f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r.$$

Kort säger man ofta att $\mathrm{d}V = r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$.

Exempel 33. Beräkna $\iiint_E z\mathrm{d}V$ där E är området mellan konen $x^2+y^2 = z^2$, $z \geq 0$ och planet $z = 1$.

Vi såg förra veckan att om vi låter $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ är $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$. D ges i polära koordinater av $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Då får vi

$$\begin{aligned}
\iiint_E z\mathrm{d}V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^1 z\mathrm{d}zr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2 r}{2}\right]_{z=r}^1 \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{2\pi} r - r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \pi \int_0^1 r - r^3\mathrm{d}r \\
&= \pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

15 Föreläsning 19-10-03

15.1 Sfäriska koordinater och trippelintegraler (15.8)

Kom ihåg att en punkt (x,y) i planet kan beskrivas i polära koordinater med ett avstånd $r = \sqrt{x^2+y^2}$ från origo och en vinkel θ från positiva x-axeln.

Definition 35 (Sfäriska koordinater)**.** En punkt (x,y,z) i rummet kan beskrivas med ett avstånd ρ till origo och två vinklar, vanligtvis θ till positiva x-axeln i xy-planet och ϕ, vinkeln till positiva z-axeln. (ρ, θ, ϕ) kallas *sfäriska koordinater* och ges av $\begin{cases} x = \rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\phi) \end{cases}$.

Man brukar kräva att $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ och oftast antingen $0 \leq \theta \leq 2\pi$ eller $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Härledning.

1. Vi börjar med punkten $P_0 = (0{,}0{,}\rho)$ som ligger rakt upp från origo. Den har ρ rätt, $\phi = 0$ och θ odefinierat.
2. Om vi roterar punkten i xz-planet får vi $P_1 = (\rho\sin(\phi), 0, \rho\cos(\phi))$. Den har ρ rätt, ϕ rätt och $\theta = 0$ eftersom den ligger rakt över x-axeln.
3. Om vi roterar i xy-planet får vi $(\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$.

$\square$

Sats 22 (Formel för integration i sfäriska koordinater)**.** Om E är en ”sfärisk låda”, d.v.s. att $a \le \rho \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$ och $c \le \phi \le d$ är

$$\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_\alpha^\beta \int_a^b \int_c^d f(\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))\rho^2\sin(\phi)\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.$$

Det brukar sammanfattas som

$$\mathrm{d}V = \rho^2\sin(\phi)\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.$$

Bevis. Kort idé till varför finns i avsnitt 15.8 i boken. $\square$

Exempel 34. Beräkna $\iiint_E (x^2+y^2+z^2)^2\mathrm{d}V$ där E är området som ligger ovanför konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ och innanför sfären $x^2+y^2+z^2 = 4$.

Figur 1

Vinkeln ϕ mot positiva z-axeln är $\frac{\pi}{4}$ eftersom om man bara kollar i xz-planet beskrivs linjen som $z = x$ vilken har vinkeln $\frac{\pi}{4}$ mot z-axeln. Området ovanför konen ges då av att $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$. Sfären $x^2+y^2+z^2 = 4$ ges av $\rho = 2$, då är området innanför sfären $0 \le \rho \le 2$. Vi har inga villkor på θ, alltså är $0 \le \theta \le 2\pi$. Alltså ges E i sfäriska koordinater av att $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$ och $0 \le \theta \le 2\pi$.

Integralen är då

$$\begin{aligned}
\iiint_E (x^2+y^2+z^2)^2\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^{2^2}\rho^2\sin(\phi)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^6\left[-\cos(\phi)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^6(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(0))\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= (-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(0))\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^7}{7}\right]_0^2\mathrm{d}\theta \\
&= (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\int_0^{2\pi}\frac{2^7}{7}\mathrm{d}\theta \\
&= (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{2^7}{7}\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}\theta \\
&= (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{2^7}{7}\cdot 2\pi
\end{aligned}$$

$$= (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{2^8\pi}{7}$$

15.2 Vektorfält (16.1)

Hittils har vi studerat funktioner

1. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Det är naturligt att också studera funktioner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Definition 36 (Vektorfält)**.** Ett *vektorfält* på $D \subseteq \mathbb{R}^n$ där $n \in \mathbb{Z}$ är en funktion $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^n$, d.v.s. att för varje $(x,y) \in D$ ger det en vektor $\vec{F}(x,y) \in \mathbb{R}^n$.

Vektorfält dyker ofta upp i fysikaliska tillämpningar, t.ex.

1. Ett *hastighetsfält* $\vec{v}$ är ett vektorfält där $\vec{v}(x,y)$ representerar hastigheten i punkten (x,y) av något som rör sig med varierande hastighet, t.ex. en gas eller en vätska.
2. Ett *kraftfält* $\vec{F}$ är ett vektorfält där $\vec{F}(x,y)$ representerar kraften på en partikel i punkten (x,y), t.ex. ett gravitationsfält eller ett elektriskt fält.

Ett viktigt matematiskt exempel är följande:
Definition 37 (Gradientfält)**.** Om vi har en funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D\mathbb{R}^2$ så är dess *gradientfält*

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle .$$

Motsvarande funkar även i $\mathbb{R}^3$.

16 Föreläsning 19-10-04

16.1 Kurvintegraler (16.2)

Definition 38 (Kurvintegraler)**.** Låt C vara en kurva med en parametrisering $\vec{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$ och $\vec{r}$ är glatt (smooth), d.v.s. att $\vec{r}'(t)$ existerar och är kontinuerlig. Låt också $f(x,y)$ vara definierad på hela C.

Kurvintegralen av f längs C är då arean under grafen $f(x,y)$ när (x,y) går längs C.

Formeln för att räkna ut kurvintegralen av f längs C (givet att f är kontinuerlig på C) är

$$\int_C f\mathrm{d}s = \int_a^b f(\vec{r}(t))|\vec{r}'(t)|\mathrm{d}t.$$

Härledning. Härledningen är lik härledningen för formeln för längden av kurvor. □

Om $f = 1$ är ovanstående formeln för längden av en kurva. ds brukar kallas *längdelement*. Formeln brukar förkortas $\mathrm{d}s = |\vec{r}'(t)|\mathrm{d}t$ vilket också är vad som används i formelbladet.

Anmärkning 4. Formeln för kurvintegraler är i termer av en parametrisering $\vec{r}(t)$ av en kurva C men i själva verket beror inte integralen av parametriseringen utan bara på C, d.v.s. punkterna $\{\vec{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$. Man kan därför välja vilken parametrisering som helst av C.

Exempel 35. Övre halvan av enhetscirkeln kan t.ex. parametriseras med $\vec{r}_1(t) = \langle \cos(t), \sin(t) \rangle$, $0 \leq t \leq 2\pi$ eller $\vec{r}_2(t) = \left\langle t, \sqrt{1-t^2} \right\rangle$, $-1 \leq t \leq 1$. Båda funkar för att kurvintegrera över.

Sats 23 (Massa och masscentrum för en kurva)**.** På liknande sätt som tidigare kan man härleda att om en tråd med densitet $\rho(x,y)$ går längs en kurva C är dess massa

$$m = \int_C \rho \mathrm{d}s$$

och dess masscentrum

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m} \right)$$

där $M_x = \int_C x\rho(x,y)\mathrm{d}s$ och $M_y = \int_C y\rho(x,y)\mathrm{d}s$.

16.2 Kurvintegraler av vektorfält (16.2)

Definition 39 (Arbete under konstant kraft)**.** I en dimension är *arbetet* utfört av en konstant kraft F på en partikel som förflyttar sig sträckan d är

$$W = F \cdot d.$$

Det kan vara både positivt och negativt beroende på riktningarna på termerna.

I två/tre dimensioner, om en konstant kraft $\vec{F}$ verkar på en partikel som förflyttas från en punkt P till en punkt Q blir arbetet som utförs

$$\vec{F} \cdot \vec{PQ}.$$

Anta att vi har en kurva C som parametriseras av $\vec{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$ och $\vec{r}$ är glatt. Om vi har ett kraftfält $\vec{F}(x,y)$ som varierar vill vi att kurvintegralen av $\vec{F}$ längs C ska ge arbetet som $\vec{F}$ utför på en partikel som rör sig längs C från $\vec{r}(a)$ till $\vec{r}(b)$. Med Riemannsummor kan man härleda följande formel, se kapitel 16.2 i boken för härledning.

Definition 40 (Kurvintegral av ett vektorfält)**.** *Kurvintegralen* av ett vektorfält $\vec{F}$ längs en kurva C som parametriseras av $\vec{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$ är

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\mathrm{d}t.$$

Det brukar förkortas som $\mathrm{d}\vec{r}(t) = \vec{r}'(t)\mathrm{d}t$ vilket är hur det skrivs på formelbladet.

Exempel 36. Beräkna arbetet som utförs av kraftfältet $\vec{F} = \langle 0, -2y \rangle$ på en partikel som rör sig längs en kurva C som ges av $\vec{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t) \rangle$ när $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Arbetet ges av $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Vi börjar med att räkna ut $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(\cos t, \sin t) = \langle 0, -2\sin t \rangle$ och $\vec{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t \rangle$. Då får vi att $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0 \cdot (-\sin t) + (-2\sin t \cos t) = -\sin(2t)$.

Arbetet blir då

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(2t) dt \\ &= \left[\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\cos(\pi) - \cos(0)}{2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

16.3 Huvudsatsen för kurvintegraler (16.3)

Sats 24 (Huvudsatsen för kurvintegraler)**.** Anta att C är en kurva som ges av $\vec{r}(t)$ när $a \leq t \leq b$ och att f är en funktion så att ∇f är kontinuerlig längs C.

Då är

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Om $\vec{r}(t) = \langle t, 0 \rangle$ och om f bara beror på x blir detta integralkalkylens fundamentalsats.

Bevis. Satsen i allmänhet följer av specialfallet ovan och av kedjeregeln. Beviset finns i kapitel 16.3 i boken. □

Definition 41 (Konservativa vektorfält och potential)**.** Ett vektorfält $\vec{F}$ är *konservativt* om $\vec{F} = \nabla f$ för någon funktion f. f kallas för en *potential* till $\vec{F}$.

Konservativa vektorfält är alltså lätta att integrera. Men hur avgör man om ett vektorfält är konservativt?

Sats 25 (Villkor för konservativa vektorfält)**.** Om vi antar att vi har ett konservativt vektorfält $\vec{F} = \langle P, Q \rangle = \nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$ och att f har kontinuerliga partiella andraderivator så är $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Alltså måste

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

om $\vec{F}$ är konservativt.

Vi ska nu se att villkoret ibland medför att $\vec{F}$ är konservativt.
Definition 42 (Sluten kurva)**.** En *sluten* (closed) kurva börjar och slutar i samma punkt.
Definition 43 (Enkel kurva)**.** En *enkel* kurva (simple) korsar aldrig sig själv.
Definition 44 (Enkelt sammanhängande mängd)**.** En mängd D är *enkelt sammanhängande* om den "inte innehåller några hål". Mer precist säger vi att för alla enkla slutna kurvor C i $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ligger alla punkter innanför C också i D.

17 Föreläsning 19-10-08

17.1 Konservativa vektorfält (16.3)

Sats 26 (Partiella derivator till vektorfält och konservativa vektorfält)**.** Låt $\vec{F} = \langle P, Q \rangle$ vara ett vektorfält på en enkelt sammanhängande mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ så att $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Då är $\vec{F}$ konservativt.

Bevis. Bevisas med hjälp av Greens sats, vilket vi kommer in på snart. $\square$

Anmärkning 5. Satsen gäller inte på mängder D som inte är enkelt sammanhängande. Viktigt att dubbelkolla när man räknar!

17.1.1 Metod för att hitta en potential om den existerar

Vi vill lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} f_x = P & \text{(i)} \\ f_y = Q & \text{(ii)} \end{cases}$$

vilket görs genom att först ta en lösning till (i), d.v.s. hittar en primitiv funktion f_0 till P med avseende på x. Den allmänna lösningen till (i) är då $f(x,y) = f_0(x,y) + g(y)$. Den stoppar vi in i (ii) för att bestämma $g(y)$. Alltså är $Q = f_y \frac{\partial}{\partial y}(f_0 + g) = \frac{\partial}{\partial y}(f_0) + g'(y) \iff g'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y}(f_0) \iff g(y)$ är en primitiv funktion till $Q - \frac{\partial}{\partial y}(f_0)$ med avseende på y.
Obs. 3. I detta sista steget måste vi få att $Q - \frac{\partial}{\partial y} f_0$ bara beror på y, annars är något fel. Exempelvis att $\vec{F}$ inte är konservativt eller att man har räknat fel.

17.2 Greens sats (16.4)

Definition 45 (Styckvis glatta kurvor)**.** En kurva C är *styckvis glatt* om den kan delas in i ett antal glatta kurvor $C_1, \ldots, C_n$ där C_i slutar där C_{i+1} börjar.
Definition 46 (Kurvintegraler över styckvis glatta kurvor)**.** Om en kurva C är styckvis glatt definierar vi $\int_C f \mathrm{d}s = \int_{C_1} f \mathrm{d}s + \cdots + \int_{C_n} f \mathrm{d}s$ och $\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \cdots + \int_{C_n} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

Vi antar i fortsättningen att våra kurvor är styckvis glatta.

Kom ihåg att kurvintegralen av ett vektorfält längs en kurva C som parametriseras av $\vec{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$ beror på kurvan sedd som en *orienterad kurva* som består av dess punkter $\{\vec{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ och riktningen man går längs kurvan.

Definition 47 (Negationen av kurvor)**.** Kurvan $-C$ består av samma punkter som C men går i motsatt riktning. Parametriseras t.ex. som $\vec{s}(t) = \vec{r}(b-t)$ där $0 \leq t \leq b-a$.

Från definitionen av vektorfält följer då att $\int_{-C} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$. (Däremot är $\int_{-C} f\mathrm{d}s = \int_C f\mathrm{d}s$.)

Definition 48 (Områden begränsade av en kurva)**.** Låt C vara en enkel sluten kurva. Då *begränsar* C ett område D, d.v.s. C är randen till D.

Att visa detta är förvånansvärt komplicerat, det visades inte förrän en bit in på 1900-talet.

Definition 49 (Kurvors orientation)**.** En enkel sluten kurva C är *positivt orienterad* om den går moturs kring området den begränsar. Man kan också säga att området alltid ligger till vänster när man går längs C:s riktning. Annars är den *negativt orienterad* och då är $-C$ positivt orienterad.

Definition 50 (Notation)**.** Anta att C ges av $\vec{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$. Låt också $\vec{F} = \langle P, Q \rangle$ och $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$. Då skrivs $\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\mathrm{d}t$ också som $\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, d.v.s. $\mathrm{d}x = x'(t)$ och $\mathrm{d}y = y'(t)$.

Sats 27 (Greens sats)**.** Om C är en enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D och P och Q har kontinuerliga partiella derivator är

$$\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}A.$$

Bevis. Den har liknande form som integralkalkylens fundamentalsats, båda formlerna säger att integralen av en derivata på något område kan utryckas m.h.a. värden på randen. Beviset för satsen när D är ett typ I och ett typ II-område följer satsen relativt enkelt från integralkalkylens fundamentalsats och formeln för upprepad integration för typ I och typ II-områden. Bokens 16.4 har mer specifikt bevis. □

Greens sats kan alltså användas för att beräkna kurvintegraler som dubbelintegraler och tvärtom.

Sats 28 (Greens sats och areor)**.** Om $\langle P, Q \rangle = \langle -y, 0 \rangle$, $\langle 0, x \rangle$ eller $\left\langle -\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \right\rangle$ är $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ så att $\operatorname{area}(D) = \iint_D 1 = \int_C -y\mathrm{d}x = \int_C x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_C -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$.

18 Föreläsning 19-10-10

18.1 Parametriserade ytor (16.6)

En kurva C har dimension 1, d.v.s. den beskrivs med en parameter $\vec{r}(t)$.

Definition 51 (Parametriserade ytor)**.** En *parametriserad yta* S är alla punkter $\{\vec{r}(u,v) \mid (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2\}$ där $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ är en vektorvärd funktion.

En yta har då dimension 2, d.v.s. den beskrivs av två parametrar $\vec{r}(u,v)$.

Vi skriver ofta parametriseringen i sina komponenter $\vec{r}(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v)\rangle$.
Exempel 37. Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Då är grafen $z = f(x,y)$ en parametriserad yta med $\vec{r}(u,v) = \langle u, v, f(u,v)\rangle$. Dock brukar vi ofta istället skriva $\vec{r}(x,y) = \langle x, y, f(x,y)\rangle$.
Exempel 38. Låt $g : [a,b] \to [0, \infty)$.

Då ges rotationsytan kring z-axeln med radien $g(z)$ av $\vec{r}(u,v) = \langle g(u)\cos v, g(u)\sin v, u\rangle$ där $(u,v) \in [a,b] \times [0, 2\pi]$.

I cylindriska koordinater svarar det mot att $r = g(u)$, $\theta = v$ och $z = u$.

Vi kan också skriva $\vec{r}(z, \theta) = \langle g(z)\cos\theta, g(z)\sin\theta, z\rangle$.

18.2 Tangentplan till parametriserade ytor (16.6)

Låt S vara en yta som parametriseras av $\vec{r}(u,v)$. Fixera en punkt $\langle a, b, c\rangle = \vec{r}(u_0, v_0)$ på S. Låt också $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ och $\vec{r}_v(u_0,v_0)$ vara de partiella derivatorna av $\vec{r}$ med avseende på u respektive v i (u_0,v_0). Kurvorna $\vec{r}_1(u) = \vec{r}(u,v_0)$ och $\vec{r}_2(v) = \vec{r}(u_0, v)$ ligger då i S och deras tangentvektorer i u_0 respektive v_0 är de partiella derivatorna ovan.

Figur 1
Definition 52 (Glatta (smooth) ytor i en punkt)**.** En yta S är *glatt* i $\vec{r}(u_0, v_0)$ om $\vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0) \neq 0$.

Det är samma sak som att vektorerna inte är parallella. Det är också samma sak som att de spänner upp ett plan.
Definition 53 (Tangentplan till en parametriserad yta)**.** Om S är glatt i en punkt $(a,b,c) = \vec{r}(u_0,v_0)$ är dess *tangentplan* det plan som går genom (a,b,c) och innehåller alla tangentvektorer till kurvor i S som går genom (a,b,c).

Tangentplanet har normalvektor $\vec{n} = \vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0)$ och om man skriver $\vec{n} = \langle n_1, n_2, n_3\rangle$ så ges tangentplanet av

$$n_1(x-a) + n_2(y-b) + n_3(z-c) = 0$$

eller ekvivalent

$$\vec{n} \cdot \langle x-a, y-b, z-c\rangle = 0.$$

Härledningen är lik den för tangentplanet av en nivåyta, den finns också på Canvas.

Om S är grafen $z = f(x,y)$ får vi samma formel som tidigare för tangentplanet, eftersom om $\vec{r}(x,y) = \langle x,y,f(x,y)\rangle$ blir $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle$ och $\vec{r}(a,b) = \langle a, b, f(a,b)\rangle$ så att tangentplanet blir $-f_x(a,b)(x-a) - f_y(a,b)(y-b) + 1 \cdot (z - f(a,b)) = 0$ vilket är samma sak som $z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$.

18.3 Arean av parametriserade ytor (16.6)

Sats 29 (Arean för parametriserade ytor)**.** Arean för en yta S som parametriseras av $\vec{r}(u,v)$ där $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ är

$$A = \iint_D |\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)| \mathrm{d}A.$$

Bevis. Härledning finns i föreläsningsslides. □

Exempel 39. Om S är grafen till en funktion f och S parametriseras av $\vec{r}(x,y) = \langle x, y, f(x,y)\rangle$ där $(x,y) \in D$ såg vi att $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle$. Eftersom $|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ ger det formeln från tidigare som säger att arean är $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \mathrm{d}A$.
Exempel 40. Låt S vara rotationsytan $\vec{r}(u,v) = \langle g(u)\cos v, g(u)\sin v, u\rangle$ där $(u,v) \in D = [a,b] \times [0,2\pi]$.

Då kan vi räkna fram (finns i föreläsningsanteckningar på Canvas) att arean av S är $A = 2\pi \int_a^b g(u)\sqrt{1 + g'(u)^2} \mathrm{d}u$.

Den formeln finns i avsnitt 8.2 där den härleds på ett annat sätt.

19 Föreläsning 19-10-15

19.1 Ytintegraler av funktioner (16.7)

På ett liknande sätt som för kurvintegraler av funktioner definierar vi ytintegraler av funktioner som gränsvärden av Riemannsummor $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\vec{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*))\mathrm{area}(S_{ij})$ och med liknande härledning som för arean fås följande formel för ytintegralen av en funktion:
Sats 30 (Ytintegraler av funktioner)**.** Låt f vara definierad på någon yta s som parametriseras av $\vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$. Då är ytintegralen av f över S

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D f(\vec{r}(u,v))|\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)| \mathrm{d}A.$$

Kort skriver vi att $\mathrm{d}S = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \mathrm{d}A$.
Sats 31 (Massa och masscentrum för en yta)**.** Om en yta S har densitet $\rho(x,y,z)$ är dess massa $m = \iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$ och dess masscentrum $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (\frac{M_x}{x}, \frac{M_y}{y}, \frac{M_z}{z})$ där $M_x = \iint_S x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$.

19.2 Flödesintegraler (16.7)

Vi vill definiera ytintegralen för ett vektorfält $\vec{F}$ över en yta S så att det ger flöde, d.v.s. om $\vec{F}$ är ett hastighetsfält för exempelvis en vätska är flödet volymen av all vätska som passerar S per tidsenhet.

19.3 Orientering av ytor

Möbiusbandet är en speciell yta som fås genom att ta en remsa, vrida ett halvt varv och sätta ihop. Den har bara en sida vilket är coolt. Flödet beror på riktningen som man passerar ytan, alltså måste man ha en fram- och en baksida eller en ut- och en insida, men det finns ju då inte på ett Möbiusband.

Påminnelse 4. Om S är en yta som parametriseras av $\vec{r}(u,v)$ är $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)}{|\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)|}$ en enhetsnormalvektor till tangentplanet till S i $\vec{r}(u,v)$.

Varje tangentplan har två enhetsnormalvektorer $\pm\vec{n}$ som pekar åt motsatta håll.

Definition 54 (Orienterade ytor)**.** En yta sägs vara *orienterad* om man för varje (x,y,z) på S kan välja en enhetsnormalvektor $\vec{n}(x,y,z)$ så att $\vec{n}$ varierar kontinuerligt på S. $\vec{n}$ kallas för en *orientering* av S.

Exempel 41. Ett Möbiusband är inte en orienterad yta.

Sats 32 (Orientering för en yta)**.** Om S är en glatt orienterad yta som parametriseras av $\vec{r}(u,v)$ är $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}$ en orientering av S.

Om S är grafen $z = f(x,y)$ kan den orienteras genom att ta orienteringen som pekar uppåt i positiv z-riktning. Om S parametriseras av $\vec{r}(x,y) = \langle x,y,f(x,y)\rangle$ är den orienteringen $\vec{n} = \frac{\vec{r}_x\times\vec{r}_y}{|\vec{r}_x\times\vec{r}_y|} = \frac{\langle -f_x,-f_y,1\rangle}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$.

19.4 Flöde genom en yta

Sats 33 (Flöde genom en yta)**.** Om S är en orienterad yta med orientering $\vec{n}(x,y,z)$ och $\vec{v}(x,y,z)$ är ett hastighetsfält härleder vi via lämpliga Riemann-summor där S approximeras med rektanglar (finns i 16.7 i boken) att *flödet* genom S är

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S.$$

Sats 34 (Ytintegralen av ett vektorfält över en yta)**.** Låt $\vec{F}$ vara ett vektorfält på ytan S som har orientering $\vec{n}$. Då är *ytintegralen*

$$\iint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_s \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Ytintegralen kallas också för *flödesintegral* (flux integral) och dess värde kallas *flödet av $\vec{F}$ genom S* eftersom det är vad ytintegralen ger när $\vec{F}$ är ett hastighetsfält.

Sats 35 (Direkt formel för flödesintegraler)**.** Låt S vara en glatt orienterad yta som parametriseras av $\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$.

Påminnelse 5. $\iint_S f\,\mathrm{d}S = \iint_D f|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|\,\mathrm{d}A$

Påminnelse 6. $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}$ ger en orientering av S.

Med orienteringen ovan blir $\iint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S f\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_D \vec{F}\cdot\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|\,\mathrm{d}A = \iint_D \vec{F}\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,\mathrm{d}A$.

Formeln gäller också med motsatt orientering om man sätter ett minustecken framför.

Kort säger vi att $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \mathrm{d}A$.
Exempel 42. Beräkna flödet av vektorfältet $\vec{F} = \langle zx, zy, 0\rangle$ genom halvcylindern $\vec{r}(u,v) = \langle \cos u, \sin u, v\rangle$ där $(u,v) \in D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,1]$ och halvcylindern är orienterad i positiv x-riktning.

För att beräkna det måste vi först räkna ut $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \langle \cos u, \sin u, 0\rangle$.

Om $\frac{-\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ är $\cos u \geq 0$, alltså pekar den här i positiv x-riktning, så den har orienteringen vi ville ha.

$\vec{F}(\vec{r}(u,v)) = \vec{F}(\cos u, \sin u, v) = \langle v\cos u, v\sin u, 0\rangle$.

$\vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = \langle v\cos u, v\sin u, 0\rangle \cdot \langle \cos u, \sin u, v\rangle = v(\cos^2 u + \sin^2 u) = v$.

Alltså är flödet $\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \cdots = \frac{\pi}{2}$.

20 Föreläsning 19-10-17

20.1 Divergens av ett vektorfält och flöde genom kurvor

Definition 55 (Flödet genom en sluten kurva)**.** Anta att C är en enkel, sluten, positivt orienterad kurva som begränsar ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och att C parametriseras av $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$.

Då kan man visa att $\vec{n} = \frac{\langle y'(t), -x'(t)\rangle}{|\vec{r}'(t)|}$ är en enhetsnormalvektor till tangentlinjen som pekar ut från D. ($\vec{n}$ fås från $\vec{r}'$ genom att rotera $-90°$ och sedan normalisera.)

Som för ytor definieras flödet av $\vec{F} = \langle P, Q\rangle$ genom C som $\int_C \vec{F} \cdot \vec{n}\mathrm{d}s$.

Vi vill nu härleda en smidigare formel för flödet som en dubbelintegral över D.
Påminnelse 7 (Kurvintegraler av funktioner)**.** Kurvintegralen av en funktion f över en kurva C är $\int_C f\mathrm{d}s = \int_C f|\vec{r}'(t)|\mathrm{d}t$.
Påminnelse 8 (Kurvintegraler av vektorfält)**.** Kurvintegralen av ett vektorfält $\vec{F} = \langle P, Q\rangle$ över en kurva C är $\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ där $\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$ och $\mathrm{d}y = y'(t)\mathrm{d}t$.
Påminnelse 9 (Greens sats)**.** $\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}A$.

Flödet ovan blir då $\int_C \vec{F} \cdot \vec{n}\mathrm{d}s = \frac{\int_a^b P\cdot y' - Q\cdot x'}{|\vec{r}'|} \cdot |\vec{r}'|\mathrm{d}t = \int_a^b Py' - Qx'\mathrm{d}t = \int_C -Q\mathrm{d}x + P\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}A$. Funktionen innanför återkommer, så vi ger det ett namn.

Definition 56 (Divergens av ett vektorfält)**.** För $\vec{F} = \langle P,Q \rangle$ i $\mathbb{R}^2$ är *divergensen* av $\vec{F}$ div $F = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$.

För $\vec{F} = \langle P,Q,R \rangle$ i $\mathbb{R}^3$ definierar vi *divergensen* av $\vec{F}$ som div $F = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Då skrivs beräkningen innan definitionen som följer:
Sats 36 (Divergenssatsen för kurvor)**.**

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \mathrm{d}s = \iint_D \nabla \cdot \vec{F} \mathrm{d}A$$

20.2 Divergenssatsen för ytor

Definition 57 (Slutna ytor)**.** S är en *sluten yta* om den är randen till något begränsat område $E \subseteq \mathbb{R}^3$.

Vi antar att S består av ändligt många glatta ytor, t.ex. består en kub av sex kvadrater.
Definition 58. En sluten yta S är *positivt orienterad* om dess orientering pekar ut från området E den begränsar.
Sats 37 (Divergenssatsen)**.** Låt $E \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett begränsat område med rand S. Anta att S är positivt orienterad och att den består av ändligt många glatta ytor. Anta också att $\vec{F}$ är ett vektorfält på E med kontinuerliga partiella derivator på E.

Då är

$$\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_E \nabla \cdot \vec{F} \mathrm{d}V.$$

Detta motsvarar fallet med kurvor eftersom $\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S$

Bevis. Vi visar det i ett specialfall. Beviset i bokens 16.9 bygger på samma idé men är lite mer allmänt.

Låt $E = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ och anta att $\vec{F} = \langle 0,0,R \rangle$.

Då följer divergenssatsen från vanlig upprepad integration:

Låt $D = [a,b] \times [c,d]$ så att $E = D \times [e,f]$.

Då är $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial R}{\partial z}$ och därmed

$$\begin{aligned}
\iiint_E \nabla \cdot \vec{F} \mathrm{d}V &= \iint_D \int_e^f \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}z \mathrm{d}A \\
&= \iint_D [R]_e^f \mathrm{d}A \\
&= \iint_D R(x,y,f) \mathrm{d}A - \iint_D R(x,y,e) \mathrm{d}A.
\end{aligned}$$

Vi jämför nu detta med ytintegralerna i vänsterledet i divergenssatsen. Randen S till E består av sex stycken rektanglar i och med att E är ett rätblock. Normalvektorerna behöver peka åt olika håll för att E ska vara positivt orienterad.

Toppen av rätblocket S_1 (där $z = f$) kan parametriseras av $\vec{r}_1(x,y) = \langle x,y,f\rangle$ där $(x,y) \in D$ och dess normalvektor är $\vec{n}_1 = \langle 0,0,1\rangle$.

Då blir $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}_1(x,y)) \cdot \vec{n}_1 \mathrm{d}A = \iint_D \langle 0,0,R(x,y,f)\rangle \cdot \langle 0,0,1\rangle \,\mathrm{d}A = \iint_D R(x,y,f)\mathrm{d}A$ vilket ger första integralen i divergenssatsen.

På samma sätt kan man hantera botten av rätblocket S_2 som ger andra integralen. Minustecknet kommer av att dess normalvektor $\vec{n}_2 = \langle 0,0,-1\rangle$.

De andra sidorna av kuben kommer inte att ge bidrag eftersom de bara pekar i x- eller y-led så att deras z-koordinat är 0. Då blir skalärprodukten inuti integralerna 0.

För att sammanfatta blir $\iint_E \nabla \cdot \vec{F}\mathrm{d}V = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \cdots + \iint_{S_6} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ vilket visar divergenssatsen i detta specialfallet. $\square$

Exempel 43. Beräkna flödet av $\vec{F} = \left\langle z^2, y^2, x^2 \right\rangle$ ut ur området mellan planen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 2 - 2x$.

Området som begränsas av planen är $E = \{(x,y,z) \parallel 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 2 - 2x\}$.

Då får vi att om S är den positivt orienterade randen till E så är flödet ut ur E samma som flödet genom S vilket är

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \iiint_E \nabla \cdot \vec{F}\mathrm{d}V \\ &= \iiint_E 2y\mathrm{d}V \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2-2x} 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \dots \\ &= 4\end{aligned}$$

21 Föreläsning 19-10-18

21.1 Rotation av vektorfält (16.5)

Definition 59 (Rotation (curl) av vektorfält)**.** *Rotationen* av ett vektorfält $\vec{F} = \langle P,Q,R\rangle$ i $\mathbb{R}^3$ är

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle$$

Formeln är kryssprodukten mellan ∇ och $\vec{F}$.

Rotation används bland annat för att formulera två av Maxwells lagar i elektromagnetism.

Sats 38 (Rotation av gradient)**.** Om f är en funktion med kontinuerliga partiella andraderivator blir $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla} f) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right\rangle =$ $\langle 0,0,0 \rangle$ enligt Clairauts sats.

Sats 39. Om $\vec{F}$ är ett vektorfält på $\mathbb{R}^3$ vars komponenter har kontinuerliga partiella derivator och $\boldsymbol{\nabla} \times \vec{F} = \langle 0,0,0 \rangle$ så är $\vec{F}$ konservativt, d.v.s. $\vec{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ för någon funktion f.

Detta gäller mer allmänt på områden i $\mathbb{R}^3$ som är enkelt sammanhängande, d.v.s. ”utan hål”. Det är mer invecklat att definiera i tre dimensioner än två, och vi gör det inte här.

Vi kan använda en liknande metod som i $\mathbb{R}^2$ för att hitta en potential.

Exempel 44. Låt $\vec{F} = \langle z, 2y, x + 2z \rangle$ vara ett konservativt vektorfält. Bestäm en potential till $\vec{F}$.

Vi vill alltså lösa $\begin{cases} f_x = z & \text{(i)} \\ f_y = 2y & \text{(ii)} \\ f_z = x + 2z & \text{(iii)} \end{cases}$

En lösning till (i) är $f_0 = xz$ och utifrån det är den allmänna lösningen $f = xz + g(y,z)$ (*). Vi sätter in den i (ii) och får $2y = f_y = \{\text{enligt } (*)\} = \frac{\partial}{\partial y}(xz + g(y,z)) = g_y(y,z)$. En lösning för g_0 är $g_0 = y^z$ och därmed är den allmänna lösningen $g(y,z) = y^2 + h(z)$. Om vi stoppar in den i (*) fås $f(x,y,z) = xz + g(y,z) = xz + y^2 + h(z)$ (**). Om vi sätter in det i (iii) får vi $x + 2z = f_z = \frac{\partial}{\partial z}\big(xz + y^2 + h(z)\big)$ och därmed $x + 2z = x + h'(z) \implies h'(z) = 2z \implies h(z) = z^2 + C$. Då får vi genom att gå tillbaka till (**) att $f(x,y,z) = xz + g(yz) = xz + y^2 + h(z) = xz + y^2 + z^2 + C$ vilket är en potential till $\vec{F}$, vilket man vanligtvis bör kontrollera.

21.2 Stokes sats

Definition 60 (Positivt orienterad rand till en yta i $\mathbb{R}^3$)**.** Låt S vara en yta i $\mathbb{R}^3$ som parametriseras av $\vec{r}(u,v)$ där $(u,v) \in D$. Randen ∂S till ytan S är bilden av randen ∂D till D.

En orientering $\vec{n}$ av S ger en orientering av ∂S genom att man går moturs längs ∂S runt $\vec{n}$. Om ∂S har den orienteringen så säger man att den är *positivt orienterad.*

Sats 40 (Stokes sats)**.** Låt S vara en orienterad yta i $\mathbb{R}^3$ och anta att dess rand $C = \partial S$ är en enkel, sluten och positivt orienterad kurva. Låt också $\vec{F}$ vara ett vektorfält med kontinuerliga partiella derivator.

Då gäller att
$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times F) \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Om ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kan det också ses som en yta $S = \{(x,y,0) \mid (x,y) \in D\}$ i $\mathbb{R}^3$. I detta fallet är Greens formel för D samma som Stokes sats för S. Mer om det i anteckningarna på kurshemsidan.

Anmärkning 6. Man ser på liknande sätt som att $\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla}\vec{F}\right) = 0$ också att $\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \times \vec{F}\right) =$, d.v.s. att $\vec{G} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{F}$ är källfritt.

Omvänt gäller på $\mathbb{R}^3$ eller andra "lämpliga områden" $E \subseteq \mathbb{R}^3$ att om $\vec{G}$ är källfritt, d.v.s. om $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{G} = 0$ så är $\vec{G} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{F}$ för något vektorfält $\vec{F}$.

Inom framför allt fysik är det ett vanligt krav/antagande att vektorfält är källfria, vilket ger relevanta exempel när Stokes sats är tillämpbar och användbar.