0.1 Integraler över allmänna områden (forts.)

Sats 1 (Volym mellan grafer)**.** Om $f(x,y) \geq g(x,y)$ ges volymen av området mellan $z = g(x,y)$ och $z = f(x,y)$ där $(x,y) \in D$ ges av $\iint_D f(x,y) - g(x,y)\mathrm{d}A$.

0.2 Dubbelintegraler och polära koordinater (15.3)

Exempel 1. Beräkna volymen av området mellan konen $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$ och planet $z = 1$.

Den första ekvationen ger en kon eftersom $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ där z är avståndet från (x,y) till origo.

Det beror inte på vinkeln θ i xy-planet, så vi kan rita $z = r$ för ex. $\theta = 0$, där är $r = x$, och sedan roterar vi kring z-axeln.

Ytorna $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $z = 1$ skär varandra i $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, d.v.s. $x^2 + y^2 = 1$ och $z = 1$. Området mellan de här ytorna ges då av $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. D sett som ett typ I-område begränsas av $y = \sqrt{1 - x^2}$ och $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Alltså är $D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$.

Områdets volym blir då $\iint_D 1 - \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}A = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$. Detta går att beräkna, men blir krångligt.

Idag ska vi snacka om ett betydligt enklare sätt att räkna ut detta.

0.2.1 Polära koordinater

En punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ kan beskrivas med *polära koordinater* (r, θ) genom $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ där θ är vinkeln mot x-axeln och r är avståndet från origo.

Exempel 2. Området $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ y \leq x\}$ ser ut som följande:

Figur 1

I polära koordinater är $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2,\ -\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.

Definition 1 (Polära rektanglar och deras area)**.** Ett område är en *polär rektangel* om det i polära koordinater ges av $a \leq r \leq b$ och $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Figur 2

Arean för den rektangeln är $\frac{(b^2 - a^2)(\beta - \alpha)}{2}$.

0.2.2 Integration i polära koordinater

Sats 2 (Integration av polära rektanglar)**.** Låt D vara en polär rektangel som ges av $a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, och anta att f är kontinuerlig på D.

Då är $\iint_D f \mathrm{d}A = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot r \; \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot r \; \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$.

Obs. 1. Vänsterledet är en integral över ett allmänt område. Högerledet är upprepade integraler.

Man brukar ofta sammanfatta formlerna som $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$ eller $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$. Den första sammanfattningen används i formelbladet.

Bevis. Idén bakom beviset är samma som för ett ”vanligt” koordinatsystem, men istället för att dela in i rektanglar delar vi in i polära rektanglar istället. Finns ganska komplett i föreläsningsslidesen. □

Exempel 3. Vi går tillbaka till exemplet i början av föreläsningen för att se om det blir enklare med polära koordinater.

Beräkna $\iint_D 1 - \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}A$ där $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

I polära koordinater ges D av $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vår funktion är då

$$\begin{aligned} f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} \\ &= \sqrt{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))} \\ &= \sqrt{r^2} \\ &= r \\ &= f(r,\theta). \end{aligned}$$

Då blir

$$\begin{aligned}
\iint_D 1-\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}A &= \iint_D 1-r\mathrm{d}A \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)r\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \big[(r-r^2)\theta\big]_{\theta=0}^{2\pi}\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\int_0^1 r-r^2\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 2\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$