0.1 Tangentplan

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Exempel 1 (Tangentplan)**.** Beräkna tangentplanet till $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ i punkten (3,4). Bestäm också lineariseringen av f i (3,4) och använd den för att approximera $f(3{,}01; 3{,}98)$.

Vi börjar med att räkna ut $f(3{,}4) = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. Vi behöver också de partiella derivatorna till f och deras värden i (3,4): $f_x = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_x(3{,}4) = \dfrac{3}{5}$, $f_y = \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ och $f_y(3{,}4) = \dfrac{4}{5}$.

Tangentplanet är då

$$z = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4).$$

$L(x,y) = 5 + \dfrac{3}{5}(x-3) + \dfrac{4}{5}(y-4)$. är lineariseringen av f. Det är en approximation nära (3,4).

Vi ska uppskatta $f(3{,}01; 3{,}98) \approx L(3{,}01; 3{,}98) = 5 + \frac{3}{5}(3{,}01-3) + \frac{4}{5}(3{,}98-4) = 5 + \frac{3}{5} \cdot 0{,}01 + \frac{4}{5} \cdot (-0{,}02) = 4{,}99$. Det verkliga värdet $f(3{,}01; 3{,}98) = 4{,}990040\ldots$ vilket är en rätt bra approximation.

0.2 Differentierbarhet (14.4)

0.2.1 En variabel

I en variabel gäller att om $f'(a)$ existerar kan man visa (finns i föreläsningsanteckningarna) att $f(x) = L(x) + \epsilon(x)(x-a)$ där $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ och $\epsilon(x) \to 0$ när $x \to a$. Det säger att om $f'(a)$ existerar är L en bra approximation av f nära a för $f(x) \to 0$ snabbare än alla linjära funktioner/förstagradspolynom (Och L är den enda linjära funktionen som uppfyller detta, alltså är L den ”bästa” approximationen av f med en linjär funktion.)

0.2.2 Fler variabler

Exempel 2. Låt $f(x) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ om $(x,y) \neq (0{,}0)$, 0 annars. $f(0{,}0) = 0$, $f_x(0{,}0) = 0$ och $f_y(0{,}0) = 0$. Dess linearisering kring (0,0) är då $L(x,y) = 0$. Vi kollar exempelvis längs linjen $f(t,t)$. $f(t,t) - L(t,t) = \dfrac{t^2}{t^2+t^2} - 0 = \dfrac{1}{2} \not\to 0$, alltså är L inte en bra approximation av f nära (0,0) trots att de partiella derivatorna existerar i den punkten.

Många resultat bygger på att L är en bra approximation av f. Vi inför därför följande definition:

Definition 1 (Deriverbarhet/Differentierbarhet)**.** $f(x{,}y)$ är *deriverbar* eller *differentierbar* i $(a{,}b)$ om $f_x(a{,}b)$ och $f_y(a{,}b)$ existerar och $f(x{,}y) = f(a{,}b) + f_x(a{,}b)(x-a) + f_y(a{,}b)(y-b) + \epsilon_1(x{,}y)(x-a) + \epsilon_2(x{,}y)(y-b)$ där $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ när $(x{,}y) \to (a{,}b)$. Speciellt innebär det att $f(x{,}y) - L(x{,}y) \to 0$ när $(x{,}y) \to (a{,}b)$.

Sats 1 (Kontinuitet och deriverbarhet)**.** Om $f_x(x{,}y)$ och $f_y(x{,}y)$ existerar och är kontinuerliga nära $(a{,}b)$ är f deriverbar i $(a{,}b)$.

Bevis. Beviset använder medelvärdessatsen, se appendix F i kursboken för det. □

0.3 Kedjeregeln (14.5)

0.3.1 En variabel

Om $y = f(x)$ och $x = g(t)$ är deriverbara så är $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$. Annorlunda uttryckt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

0.3.2 Två variabler

Låt $z = f(x{,}y)$, $x = g(t)$ och $y = h(t)$ vara deriverbara. Då är

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t), h(t)) = f_x(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + f_y(g(t), h(t)) \cdot h'(t)$$

eller kortare

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Beviset involverar definitionen av deriverbarhet i flera variabler.

"Nu har de flesta svarat, och några har svarat rätt i alla fall."

– Mr. Väsentligen

"Då får vi 1+1 vilket är 2."

– Mr. Väsentligen

0.3.3 Två variabler (variant)

Låt $z = f(x{,}y)$, $x = g(s,t)$ och $y = h(s{,}t)$ vara deriverbara. Då är kedjeregeln

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

eller med avseende på t:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Beviset följer av den andra varianten.

0.4 Riktningsderivator och gradienter (14.6)

De partiella derivatorna är derivator längs linjer där x eller y är konstant, d.v.s. med riktningsvektor $\hat{\imath} = \langle 1, 0\rangle$ eller $\hat{\jmath} = \langle 0,1\rangle$.

Definition 2 (Riktningsderivata)**.** *Riktningsderivatan (directional derivative)* av $f(x,y)$ i riktningen $\vec{u} = \langle a, b\rangle$ där $\vec{u}$ är en enhetsvektor (längd $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$) ges av

$$D_{\vec{u}}f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + ah, y + bh) - f(x,y)}{h}.$$

Anmärkning 1. $f_x = D_{\hat{\imath}}f$ och $f_y = D_{\hat{\jmath}}f$

Definition 3 (Gradient)**.** *Gradienten* av $f(x,y)$ är

$$\nabla f = \langle f_x, f_y\rangle$$

Sats 2 (Deriverbarhet, riktningsvektor och gradient)**.** Om f är deriverbar är

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u}.$$

Bevis. Låt $g(h) = f(x + ah, y + bh)$ och $\vec{u} = \langle a, b\rangle$. Enligt kedjeregeln är $g'(h) = f_x(x + ah, y + bh) \cdot a + f_y(x + ah, y + bh) \cdot b$. $g'(0) = f_x(x, y) \cdot a + f_y(x, y) \cdot b \implies D_{\vec{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}$. □