0.1 Lokala extremvärden forts.

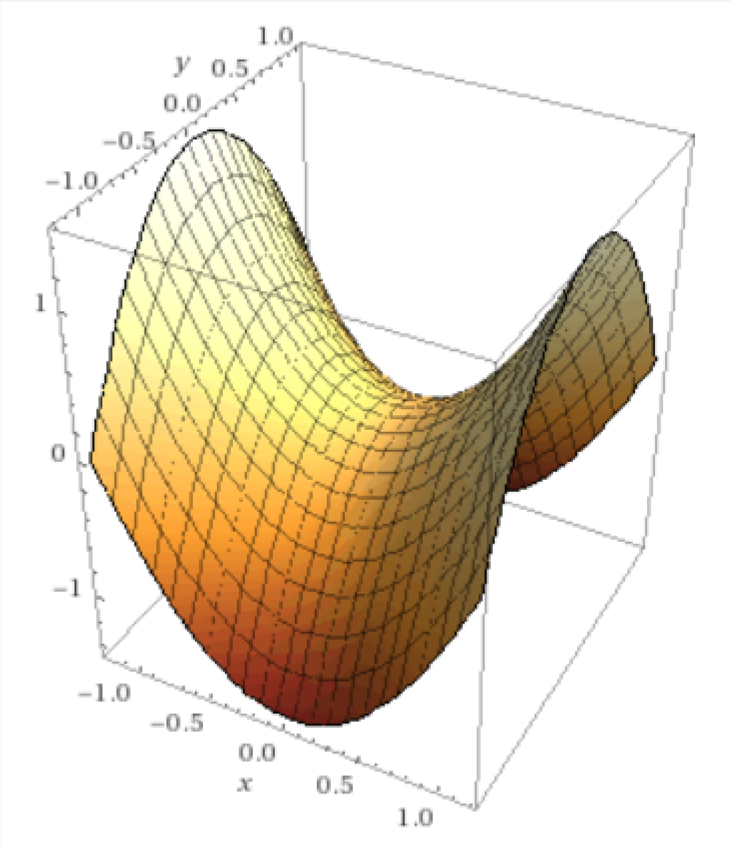
Definition 1 (Kritiska/stationära punkter)**.** Om $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ säger man att f har en *kritisk/stationär punkt* i (a,b).

Alla lokala extremvärden är kritiska punkter (om de partiella derivatorna existerar) men det kan finns kritiska punkter som inte är lokala extremvärden. Sådana punkter kallas *sadelpunkter*.

Exempel 1. Låt $f(x,y) = x^2 - y^2$, bestäm dess kritiska punkter.

Den har en sadelpunkt i $(0,0)$ eftersom $\nabla f = \langle 2x, -2y \rangle \implies \nabla f(0,0) = (0,0)$, d.v.s. $(0,0)$ är en kritisk punkt, men den är varken ett lokalt maximum eller minimum.

Grafen har formen av en "sadel".



Hur avgör man då om en kritisk punkt är ett extremvärde? I en variabel gäller, för funktioner där $f'(a) = 0$, att om $f''(a) > 0$ så har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x = a$ och om $f''(a) < 0$ så har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x = a$. Om $f''(a) = 0$ kan vi inte säga något om punkten.

Sats 1 (Test för lokala extrempunkter i två variabler)**.** Anta att de partiella derivatorna av ordning 2 till $f(x,y)$ är kontinuerliga nära (a,b) och att $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

Låt $D = f_{xx}(ab)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$. Då har vi fyra fall:

1. Om $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) > 0$ (eller $f_{yy}(a,b) > 0$) är (a,b) ett lokalt minimum.
2. Om $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) < 0$ (eller $f_{yy}(a,b) < 0$) är (a,b) ett lokalt maximum.
3. Om $D < 0$ är (a,b) en sadelpunkt.
4. Om $D = 0$ vet vi inget om punkten.

Bevis. Går ut på att reducera till motsvarande test i en variabel, se slutet av 14.7 i boken. □

Eftersom $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ (Clairaut's sats) är $D = \det\{H\}$ där H är "Hessianmatrisen" $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$.

För att komma ihåg vilket villkor som ger vilken slutsats kan man jämföra med följande modellfall:

1. $f(x,y) = x^2+y^2$ som har ett lokalt minimum i origo. $D = 2\cdot 2-0\cdot 0 = 4 > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$.
2. $f(x,y) = -x^2 - y^2$ som har ett lokalt maximum i origo. $D = (-2)\cdot(-2) - 0\cdot 0 = 4 > 0$, $f_{xx} = -2 < 0$.
3. $f(x,y) = x^2-y^2$ som har en sadelpunkt i origo. $D = 2\cdot(-2)-0\cdot 0 = -4 < 0$.

Exempel 2. Bestäm de kritiska punkterna till $f(x,y) = 3x^2 + 6xy - y^3$ och avgör om de är sadelpunkter, lokala minimum eller lokala maximum.

Vi börjar med att avgöra kritiska punkter, d.v.s. punkter där de partiella derivatorna är 0.

$$\begin{cases} f_x = 6x + 6y = 0 \iff x = -y \\ f_y = 6x - 3y^2 = 0 \iff 2x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Detta ger, om man sätter in uttrycken i varandra, $2(-y) - y^2 = 0 \iff y(-2-y) = 0 \iff y = 0$ el. $y = -2$. Om vi sätter in detta i uttrycket för x får vi $x = -y = -0 = 0$ och $x = -(-2) = 2$ vilket ger de kritiska punkterna $(0,0)$ och $(2,-2)$.

Vi undersöker nu dessa kritiska punkter.

$f_{xx} = 6$, $f_{yy} = -6y$ och $f_{xy} = 6$.

I $(0,0)$ gäller $D(0,0) = f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 6\cdot 0 - 6^2 = -36 \implies$ $(0,0)$ är en sadelpunkt.

I $(2,-2)$ gäller $D(2,-2) = f_{xx}(2,-2) \cdot f_{yy}(2,-2) - f_{xy}(2,-2)^2 = 6 \cdot (-6) \cdot (-2) - 6^2 = 72 - 36 = 36 \implies (2,-2)$ är en lokal extrempunkt. Eftersom $f_{xx}(2,-2) = 6 > 0$ är $(2,-2)$ ett lokalt minimum.

För att generalisera det här till tre eller fler variabler måste man bygga på egenvärden till Hessianmatrisen.

0.2 Globala extremvärden (14.7)

I en variabel, om $f(x)$ är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a,b]$ så har f ett globalt max- och min-värde någonstans i $[a,b]$. Ej sant för t.ex. öppna intervall eller obegränsade intervall. Se exempelvis $f(x) = x$ på intervallet $x \in (0,\infty)$, då finns inget specifikt max-värde eftersom vi alltid kan gå närmare ∞ och det finns inget min-värde eftersom vi alltid kan gå lite närmare 0.

Vi ska definiera motsvarigheten till ”sluten och begränsad” i två variabler.

Definition 2 (Randpunkter)**.** (a,b) är en *randpunkt (boundary point)* till $D \subseteq \mathbb{R}^2$ om varje cirkelskiva kring (a,b) innehåller både punkter i D och punkter som inte är i D.

Exempel 3. Randpunkter till $D_1 = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$ är $\{(x,y)|x^2+y^2 = 1\}$.

Till $D_2 = \{(x,y)|x^2+y^2 < 1\}$ är randpunkterna precis som ovan $\{(x,y)|x^2+y^2 = 1\}$, trots att de inte är i D.

”Här går kanske inte intuitionen jättebra.”

– Mr. Väsentligen om sin publik

Definition 3 (Slutna mängder)**.** En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är *sluten* om den innehåller alla sina randpunkter.

I exemplet ovan är D_1 sluten och D_2 inte sluten.

Definition 4. En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är *begränsad* om den är innehållen i någon cirkelskiva.

Exempel 4. $\{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ är begränsad eftersom vi kan innesluta kvadraten i en stor cirkel, exempelvis en cirkel med centrum i origo och radie 31415.

$\{(x,y)|0 \leq x \leq 1\}$ är inte begränsad eftersom den inte går att innesluta i en cirkel.

Sats 2. Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och D är både sluten och begränsad då har f globala max- och min-punkter någonstans i D.

Bevis. Beviset involverar definitionen av reella tal vilket är lite lagom överkurs för den här kursen. Finns säkert på nätet eller något. $\square$