0.1 Divergens av ett vektorfält och flöde genom kurvor

Definition 1 (Flödet genom en sluten kurva)**.** Anta att C är en enkel, sluten, positivt orienterad kurva som begränsar ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och att C parametriseras av $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$.

Då kan man visa att $\vec{n} = \frac{\langle y'(t), -x'(t)\rangle}{|\vec{r}'(t)|}$ är en enhetsnormalvektor till tangentlinjen som pekar ut från D. ($\vec{n}$ fås från $\vec{r}'$ genom att rotera $-90°$ och sedan normalisera.)

Som för ytor definieras flödet av $\vec{F} = \langle P, Q\rangle$ genom C som $\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \mathrm{d}s$.

Vi vill nu härleda en smidigare formel för flödet som en dubbelintegral över D.

Påminnelse 1 (Kurvintegraler av funktioner)**.** Kurvintegralen av en funktion f över en kurva C är $\int_C f \mathrm{d}s = \int_C f|\vec{r}'(t)|\mathrm{d}t$.

Påminnelse 2 (Kurvintegraler av vektorfält)**.** Kurvintegralen av ett vektorfält $\vec{F} = \langle P, Q\rangle$ över en kurva C är $\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ där $\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$ och $\mathrm{d}y = y'(t)\mathrm{d}t$.

Påminnelse 3 (Greens sats)**.** $\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}A$.

Flödet ovan blir då $\int_C \vec{F} \cdot \vec{n}\mathrm{d}s = \frac{\int_a^b P \cdot y' - Q \cdot x'}{|\vec{r}'|} \cdot |\vec{r}'|\mathrm{d}t = \int_a^b Py' - Qx'\mathrm{d}t = \int_C -Q\mathrm{d}x + P\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}A$. Funktionen innanför återkommer, så vi ger det ett namn.

Definition 2 (Divergens av ett vektorfält)**.** För $\vec{F} = \langle P,Q\rangle$ i $\mathbb{R}^2$ är *divergensen* av $\vec{F}$ div $F = \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$.

För $\vec{F} = \langle P,Q,R\rangle$ i $\mathbb{R}^3$ definierar vi *divergensen* av $\vec{F}$ som div $F = \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Då skrivs beräkningen innan definitionen som följer:

Sats 1 (Divergenssatsen för kurvor)**.**

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n}\mathrm{d}s = \iint_D \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F}\mathrm{d}A$$

0.2 Divergenssatsen för ytor

Definition 3 (Slutna ytor)**.** S är en *sluten yta* om den är randen till något begränsat område $E \subseteq \mathbb{R}^3$.

Vi antar att S består av ändligt många glatta ytor, t.ex. består en kub av sex kvadrater.

Definition 4. En sluten yta S är *positivt orienterad* om dess orientering pekar ut från området E den begränsar.

Sats 2 (Divergenssatsen)**.** Låt $E \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett begränsat område med rand S. Anta att S är positivt orienterad och att den består av ändligt många glatta ytor. Anta också att $\vec{F}$ är ett vektorfält på E med kontinuerliga partiella derivator på E.

Då är

$$\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_E \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} \mathrm{d}V.$$

Detta motsvarar fallet med kurvor eftersom $\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S$

Bevis. Vi visar det i ett specialfall. Beviset i bokens 16.9 bygger på samma idé men är lite mer allmänt.

Låt $E = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ och anta att $\vec{F} = \langle 0,0,R \rangle$.

Då följer divergenssatsen från vanlig upprepad integration:

Låt $D = [a,b] \times [c,d]$ så att $E = D \times [e,f]$.

Då är $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial R}{\partial z}$ och därmed

$$\begin{aligned}
\iiint_E \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} \mathrm{d}V &= \iint_D \int_e^f \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}z \mathrm{d}A \\
&= \iint_D [R]_e^f \mathrm{d}A \\
&= \iint_D R(x,y,f) \mathrm{d}A - \iint_D R(x,y,e) \mathrm{d}A.
\end{aligned}$$

Vi jämför nu detta med ytintegralerna i vänsterledet i divergenssatsen. Randen S till E består av sex stycken rektanglar i och med att E är ett rätblock. Normalvektorerna behöver peka åt olika håll för att E ska vara positivt orienterad. Toppen av rätblocket S_1 (där $z = f$) kan parametriseras av $\vec{r}_1(x,y) = \langle x,y,f \rangle$ där $(x,y) \in D$ och dess normalvektor är $\vec{n}_1 = \langle 0,0,1 \rangle$.

Då blir $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}_1(x,y)) \cdot \vec{n}_1 \mathrm{d}A = \iint_D \langle 0,0,R(x,y,f) \rangle \cdot \langle 0,0,1 \rangle \, \mathrm{d}A = \iint_D R(x,y,f)\mathrm{d}A$ vilket ger första integralen i divergenssatsen.

På samma sätt kan man hantera botten av rätblocket S_2 som ger andra integralen. Minustecknet kommer av att dess normalvektor $\vec{n}_2 = \langle 0,0,-1 \rangle$.

De andra sidorna av kuben kommer inte att ge bidrag eftersom de bara pekar i x- eller y-led så att deras z-koordinat är 0. Då blir skalärprodukten inuti integralerna 0.

För att sammanfatta blir $\iint_E \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F}\mathrm{d}V = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \cdots + \iint_{S_6} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ vilket visar divergenssatsen i detta specialfallet. $\square$

Exempel 1. Beräkna flödet av $\vec{F} = \left\langle z^2, y^2, x^2 \right\rangle$ ut ur området mellan planen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 2 - 2x$.

Området som begränsas av planen är $E = \{(x,y,z) \parallel 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - 2x\}$.

Då får vi att om S är den positivt orienterade randen till E så är flödet ut ur E samma som flödet genom S vilket är

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \iiint_E \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F}\mathrm{d}V \\
&= \iiint_E 2y\mathrm{d}V \\
&= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2-2x} 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \ldots \\
&= 4
\end{aligned}$$