0.1 Trippelintegraler

Definition 1 (Trippelintegraler)**.** Låt $E \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett område och $g(x,y,z)$ vara definierad på E.

Då definierar vi trippelintegralen av g över E:

$$\iiint_E g(x,y,z)\mathrm{d}V$$

på samma sätt som dubbelintegraler, först när $E = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ är ett rätblock m.h.a. Riemannsummor och sedan för allmänna begränsade områden genom att reducera till fallet med rätblock.

0.1.1 Upprepad integration i trippelintegraler

Vi antar att de funktioner vi använder är kontunierliga s.a. integralerna existerar. Annars blir det svårt.

Om $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ e(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är $\iiint_E g(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint_D \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}A$.

Om $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c(x) \leq y \leq d(x)\}$ (är ett typ I-område) är $E = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b,\ c(x) \leq y \leq d(x),\ e(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$. Då är integralen

$$\iiint_E g(x,y,z)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Motsvarande formler fås om vi byter roller på variablerna.

Exempel 1. Beräkna $\iiint_E z\mathrm{d}V$ där E är den tetraeder som begränsas av planen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ och $2x + y + z = 2$.

Området mellan ett antal ytor som bestäms av likheter beskrivs typiskt sett av motsvarande olikheter. (D.v.s. byt = mot $\geq$ el. $\leq$.) Men vilket håll ska olikheten vara på? Brukar funka att rita en figur. För att göra det enklare att rita kollar vi var den skär de tre axlarna. För x-axeln får vi när $y = z = 0$. Då är $2x + 0 + 0 = 2 \implies x = 1$ och därmed innehåller planet punkten $(1,0,0)$. På motsvarande sätt får vi $y = 2$ och $z = 2$ och punkterna $(0,2,0)$ och $(0,0,2)$. Då får vi följande utritade tetraeder:

Figur 1

För att beskriva E med olikheter får vi $E = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ 2x + y + z \leq 0\}$. Hållen på olikheterna fås genom att kolla punkter i tetraedern. Ex. får vi i punkten $(0,0,0)$ som ligger i tetraedern $2\cdot 0{+}0{+}0 = 0$ i origo, och $0 \leq 2$.

Genom att kombinera de två sista olikheterna fås $0 \leq z \leq 2 - 2x - y$. För att det ska finnas sådana (x,y,z) måste $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $2 - 2x - y \geq 0$.

Då får vi följande område:

Figur 2

Då får vi att $E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2-2x,\ 0 \leq z \leq 2-2x-y\}$. Nu kan vi till slut integrera!

$$\begin{aligned}
\iiint_E z\mathrm{d}V &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{2-2x-y} z\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{2-2x-y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (2-2x-y)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{(2-2x-y)^3}{-3}\right]_{y=0}^{2-2x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 (2-2x)^3 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{(2-2x)^4}{4\cdot(-2)}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{2^4}{4\cdot 2} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

"Fyra plus två plus två blir åtta."

– Randomsnubbe om trivialiteter

0.2 Cylindriska koordinater och trippelintegraler (15.7)

Cylindriska koordinater betecknas $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3$ och fås genom att byta ut (x,y) mot de polära koordinaterna (r,θ), d.v.s. $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$. Om vi har ett område $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ e(x,y) \leq z \leq e(x,y)\}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en polär rektangel med $a \leq r \leq b$ och $\alpha \leq \theta \leq \beta$ följer av formlerna för upprepad integration av trippelintegraler och formeln för integration i polära koordianter för dubbelintegraler att

$$\iiint_E g(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_{e(r\cos(\theta),r\sin(\theta))}^{f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r.$$

Kort säger man ofta att $\mathrm{d}V = r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$.

Exempel 2. Beräkna $\iiint_E z\mathrm{d}V$ där E är området mellan konen $x^2+y^2 = z^2$, $z \geq 0$ och planet $z = 1$.

Vi såg förra veckan att om vi låter $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ är $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$. D ges i polära koordinater av $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Då får vi

$$\begin{aligned}
\iiint_E z\mathrm{d}V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^1 z\mathrm{d}zr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2 r}{2}\right]_{z=r}^1 \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{2\pi} r - r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \pi \int_0^1 r - r^3\mathrm{d}r \\
&= \pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$