0.1 Längd av kurvor (10.2, 13.3)

Sats 1 (Längd av en kurva)**.** Låt $\vec{r}(t), a \leq t \leq b$ vara en kurva. Då är dess längd $l = \int_a^b |\vec{r}'(t)| \mathrm{d}t$.

Bevis. Finns en skiss till ett argument i 10.2 i boken. □

Exempel 1. Beräkna längden av kurvan med parametrisering $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle = \langle t^2, t^3 \rangle$ för $0 \leq t \leq 1$.

Då är $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = \sqrt{t^2(4 + 9t^2)} = \sqrt{t^2}\sqrt{4 + 9t^2} = t\sqrt{4 + 9t^2}$.

Från formeln ovan är $l = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2} \mathrm{d}t = \begin{cases} s = 4 + 9t^2 \\ \mathrm{d}s = 18t\mathrm{d}t \implies t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{18} \\ t = 0 \implies s = 4 \\ t = 1 \implies s = 13 \end{cases} =$

$\frac{1}{18} \int_4^{13} \sqrt{s} \mathrm{d}s = \frac{1}{18} \left[\frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_4^{13} = \frac{1}{18} \left(\frac{13^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{27} \left(13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right)$

Sats 2 (Längden av en graf)**.** Längden av en graf $y = f(x)$ är $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \mathrm{d}x$.

Bevis. $f(x)$ kan parametriseras med ekvationen $\vec{r}(t) = \langle t, f(t) \rangle$. Då blir $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ och längden därmed $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \mathrm{d}x$.

Alternativ härledning finns i föreläsningsslides. □

0.2 Rörelse av partiklar i rummet (13.4)

Man kan använda en vektorvärd funktion $\vec{r}(t)$ för att beskriva hur en partikel rör sig genom rummet. Vid tiden t befinner sig partikeln i $\vec{r}(t)$.

Definition 1 (Hastighetsvektor och fart)**.** *Hastighetsvektorn* $\vec{v}(t)$ för en sådan partikel ovan är $\vec{r}'(t)$ och farten är $|\vec{v}(t)|$.

Definition 2 (Accelerationsvektor)**.** *Accelerationsvektorn* för en partikel som ovan är $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$.

Dessa definitioner används för att beskriva olika fysiska fenomen. Ett exempel på en sådan är Newtons andra lag:

Sats 3 (Newtons andra lag)**.** Om kraften $\vec{F}(t)$ verkar på en partikel med massa m så är $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$.

Exempel 2. Anta att bara tyngdkraften verkar på en partikel med massa m, d.v.s. $\vec{F} = \langle 0, 0, -mg \rangle$. Anta också att partikeln vid $t = 0$ har position $\vec{r}(0) = \langle a,b,c \rangle$ och hastighet $\vec{v}(0) = \langle d, e, f \rangle$. Verifiera att partikeln med position $\vec{r}(t) = \left\langle a + dt, b + et, c + ft - \frac{gt^2}{2} \right\rangle$ uppfyller dessa villkor och rör sig enligt Newtons andra lag.

Vi kontrollerar detta: Vi stoppar in $t = 0$ i $\vec{r}$ och får $\vec{r}(0) = \langle a, b, c \rangle$ vilket stämmer. Vi deriverar nu för att få $\vec{v}$ och får $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \langle d, e, f - gt \rangle$. Kontrollerar genom att stoppa in $t = 0$: $\vec{v}(0) = \langle d, e, f \rangle$. Kontrollerar nu med ytterligare en derivata $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \langle 0, 0, -g \rangle$. Använder Newtons andra lag för att kontrollera $m \cdot \vec{a}(t) = \langle 0, 0, -mg \rangle = \vec{F}$.

” 0 är ju en typisk konstant.”

– Mr. Väsentligen

”Du har ju nog rätt idé, men vad menar du?”

– Mr. Väsentligen

”Ja, det hade man kunnat tänka sig, men så är det inte.”

– Mr. Väsentligen