Sats 1 (Volym under graf)**.** Anta att f är en funktion definierad på en mängd $D = [a,b] \times [c \times d] = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$.

Volymen under grafen $z = f(x,y)$ är då $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$.

Bevis. Dela in D i $m \times n$ stycken lika stora rektanglar A_{ij} med area $\Delta A = \frac{b-a}{m}\frac{d-c}{n}$ och låt punkten $(x_{ij}, y_{ij}) \in A_{ij}$. Då är volymen under grafen ungefär $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$.

Definition 1 (Integrerbarhet)**.** Vi låter $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$ om gränsvärdet existerar. Då säger vi att f är integrerbar.

Om $f(x,y) \geq 0$ och f är integrerbar är volymen mellan D och $z = f(x,y)$ då $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$. □

Sats 2 (Krav för integrerbarhet)**.** Om en funktion f är kontinuerlig på en mängd D är f integrerbar på D.

Sats 3 (Fubinis sats)**.** Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på $D = [a,b] \times [c,d]$ är

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Idé. Idén bakom satsen är att i två variabler är volymen integralen av tvärsnittsarean, likt att arean är integralen av höjden i en variabel. Integralen av tvärsnittsarean borde bli samma oberoende av vilket håll vi tar tvärsnittsarean. □

Definition 2 (Dubbelintegral över begränsade områden)**.** Låt $f(x,y)$ vara definierad på ett begränsat område $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Låt också R vara en rektangel som helt innehåller D och definiera $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \text{ om } (x,y) \in D \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$. Då definierar man $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_R F(x,y)\mathrm{d}A$ om F är integrerbar.

Eftersom $F(x,y) = f(x,y)$ på hela D och $F(x,y) = 0$ utanför D så borde volymen mellan $z = f(x,y)$ och D vara samma som volymen mellan $z = F(x,y)$ och R och bör därför vara en rimlig definition av en integral av f över D.