

Föreläsningsanteckningar  
Matematisk analys i flera variabler  
LMA017

Hugo Simonsson

3 oktober 2019

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Föreläsning 19-09-03</b>	<b>6</b>
1.1	Inledning . . . . .	6
1.2	Kurvor i rummet eller planet (13.1) . . . . .	6
1.3	Derivator av vektorvärda funktioner och tangentlinjer (13.2) . . .	6
<b>2</b>	<b>Föreläsning 19-09-05</b>	<b>7</b>
2.1	Funktioner av flera variabler (14.1) . . . . .	7
2.2	Annat sätt att visualisera en funktion . . . . .	8
2.3	Funktioner av tre variabler . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Föreläsning 19-09-06</b>	<b>10</b>
3.1	Gränsvärden i flera variabler (14.2) . . . . .	10
3.1.1	Räkneregler . . . . .	11
3.2	Kontinuitet . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Föreläsning 19-09-10</b>	<b>12</b>
4.1	Partiella derivator och annat . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Föreläsning 19-09-12</b>	<b>13</b>
5.1	Tangentplan . . . . .	13
5.2	Differentierbarhet (14.4) . . . . .	13
5.2.1	En variabel . . . . .	13
5.2.2	Fler variabler . . . . .	13
5.3	Kedjeregeln (14.5) . . . . .	14
5.3.1	En variabel . . . . .	14
5.3.2	Två variabler . . . . .	14
5.3.3	Två variabler (variant) . . . . .	14
5.4	Rikttningsderivator och gradienter (14.6) . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Föreläsning 19-09-13</b>	<b>15</b>
6.1	Rikttningsderivator och gradienter . . . . .	15
6.2	Tangentplan till nivåytor (14.6) . . . . .	16
6.3	Lokala extremvärden . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Föreläsning 19-09-17</b>	<b>18</b>
7.1	Lokala extremvärden forts. . . . .	18
7.2	Globala extremvärden (14.7) . . . . .	20
<b>8</b>	<b>Föreläsning 19-09-18</b>	<b>20</b>
8.1	Globala extremvärden (forts.) . . . . .	20
8.1.1	Metod för att bestämma globala max/min . . . . .	21
8.2	Optimering under bivillkor och Lagrangemultiplikatorer (14.8) .	22
8.2.1	Metoden med Lagrangemultiplikatorer . . . . .	22
<b>9</b>	<b>Föreläsning 19-09-20</b>	<b>23</b>
9.1	Längd av kurvor (10.2, 13.3) . . . . .	23
9.2	Rörelse av partiklar i rummet (13.4) . . . . .	23

<b>10 Föreläsning 19-09-24</b>	<b>24</b>
<b>11 Föreläsning 19-09-25</b>	<b>24</b>
<b>12 Föreläsning 19-09-27</b>	<b>25</b>
12.1 Integraler över allmänna områden (forts.) . . . . .	25
12.2 Dubbelintegraler och polära koordinater (15.3) . . . . .	25
12.2.1 Polära koordinater . . . . .	25
12.2.2 Integration i polära koordinater . . . . .	26
<b>13 Föreläsning 19-09-30</b>	<b>27</b>
13.1 Densitet, massa och masscentrum (15.4) . . . . .	27
13.1.1 Massa . . . . .	28
13.1.2 Masscentrum . . . . .	28
13.2 Medelvärden . . . . .	29
13.3 Areal av grafen till en funktion (15.5) . . . . .	30
<b>14 Föreläsning 19-10-01</b>	<b>30</b>
14.1 Trippelintegraler . . . . .	30
14.1.1 Upprepad integration i trippelintegraler . . . . .	30
14.2 Cylindriska koordinater och trippelintegraler (15.7) . . . . .	32
<b>15 Föreläsning 19-10-03</b>	<b>32</b>
15.1 Trippelintegraler . . . . .	32

## List of Theorems

1	Definition (Kurvor i rummet och deras parametrisering) . . . . .	6
2	Definition (Derivatan av vektorvärda funktioner) . . . . .	6
3	Definition (Tangentvektor och tangentlinje till linjer) . . . . .	7
4	Definition (Funktioner av två variabler, definitions mängd och vär- demängd) . . . . .	7
5	Definition (Graf) . . . . .	7
6	Definition (Nivåkurva) . . . . .	8
7	Definition (Gränsvärden i flera variabler (Formell)) . . . . .	10
8	Definition (Gränsvärden i flera variabler (Informell)) . . . . .	11
9	Definition (Kontinuitet i en punkt) . . . . .	12
10	Definition (Kontinuitet på ett område) . . . . .	12
11	Definition (Deriverbarhet/Differentierbarhet) . . . . .	14
1	Sats (Kontinuitet och deriverbarhet) . . . . .	14
12	Definition (Rikttningsderivata) . . . . .	15
13	Definition (Gradient) . . . . .	15
2	Sats (Deriverbarhet, rikttningsvektor och gradient) . . . . .	15
3	Sats (Största värde för rikttningsderivata) . . . . .	16
14	Definition (Tangentplan till nivåyta) . . . . .	17
15	Definition (Lokalt maximum) . . . . .	17
16	Definition (Absolut/Globalt maximum) . . . . .	17
17	Definition (Lokalt minimum) . . . . .	17
18	Definition (Absolut/Globalt minimum) . . . . .	17
19	Definition (Extremvärde) . . . . .	17
4	Sats (Extremvärde i en punkt) . . . . .	17
20	Definition (Kritiska/stationära punkter) . . . . .	18
5	Sats (Test för lokala extrempunkter i två variabler) . . . . .	18
21	Definition (Randpunkter) . . . . .	20
22	Definition (Slutna mängder) . . . . .	20
23	Definition (Begränsade mängder) . . . . .	20
6	Sats (Existens av globala max- och minpunkter) . . . . .	20
7	Sats (Längd av en kurva) . . . . .	23
8	Sats (Längden av en graf) . . . . .	23
24	Definition (Hastighetsvektor och fart) . . . . .	23
25	Definition (Accelerationsvektor) . . . . .	24
9	Sats (Newtons andra lag) . . . . .	24
10	Sats (Volym mellan grafer) . . . . .	25
26	Definition (Polära rektanglar och deras area) . . . . .	26
11	Sats (Integration av polära rektanglar) . . . . .	26
12	Sats (Massa för område) . . . . .	28
27	Definition (Moment) . . . . .	28
28	Definition (Jämvikt av moment) . . . . .	28
13	Sats (Totalt moment för en skiva och jämvikt) . . . . .	28
29	Definition (Moment kring $x$ -axeln) . . . . .	28
14	Sats (Masscentrum) . . . . .	28
15	Sats (Masscentrum för triangel) . . . . .	29
16	Sats (Medelvärde av en funktion) . . . . .	29
17	Sats (Arean av en graf) . . . . .	30

30	Definition (Trippelintegraler) . . . . .	30
----	--	----

# 1 Föreläsning 19-09-03

## 1.1 Inledning

Punkter i planet  $\mathbb{R}^2$  beskrivs med två koordinater, oftast  $(x, y)$ . Punkter i rummet  $\mathbb{R}^3$  beskrivs med tre koordinater, oftast  $(x, y, z)$ .

I envariabelanalys studerar man funktioner  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , då är det naturligt att också studera vektorvärda funktioner  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $f = \langle f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m) \rangle$  har  $n$  komponenter och  $m$  variabler. Detta är dock för allmänt, i kursen ska vi studera viktiga specialfall:

$n = 2, 3, m = 1 : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  så att  $f(t) = \langle f_1(t), f_2(t) \rangle$ . En variabel  $t$  bestämmer två komponenter  $f_1(t)$  och  $f_2(t)$ .

$n = 1, n = 2, 3 : f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) \in \mathbb{R}$  så att två variabler  $x, y$  bestämmer en komponent/tal  $f(x, y)$ .

$n = m = 2, 3 : f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Dessa kallas vektorfält.

## 1.2 Kurvor i rummet eller planet (13.1)

**Definition 1** (Kurvor i rummet och deras parametrisering). En *kurva*  $C$  i planet är alla punkter vars position ges av  $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$  där  $x(t), y(t)$  är kontinuerliga funktioner på något intervall.  $\vec{r}(t)$  kallas en *parametrisering* av  $C$ .

Motsvarande definition av kurvor i rummet.

**Exempel 1.** En rät linje genom en punkt  $(x_0, y_0)$  med riktningsvektor  $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$  är en kurva som kan parametriseras av  $\vec{r}(t) = \langle x_0 + tv_1, y_0 + tv_2 \rangle$ .

Om  $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$  är definierad för  $t$  nära  $t_0$  ges *gränsvärdet* av  $\vec{r}(t)$  när  $t$  går mot  $t_0$  av  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) \right\rangle$  om gränsvärdena i högerledet existerar.

## 1.3 Derivator av vektorvärda funktioner och tangentlinjer (13.2)

**Definition 2** (Derivatan av vektorvärda funktioner). *Derivatan* av  $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$  är  $\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$  om gränsvärdet existerar.

Om  $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$  gäller att om  $x(t)$  och  $y(t)$  är deriverbara så är  $\vec{r}'(t) = \left\langle \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right\rangle = \langle x'(t), y'(t) \rangle$

**Exempel 2.** Låt  $\vec{r}(t) = \langle 2t, \sqrt{t} \rangle$ . Beräkna  $\vec{r}'(t)$ .

$$\vec{r}'(t) = \left\langle \frac{d}{dt}(2t), \frac{d}{dt}(\sqrt{t}) \right\rangle = \left\langle 2, \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \right\rangle = \left\langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right\rangle$$

**Definition 3** (Tangentvektor och tangentlinje till linjer).  $\vec{r}'(t)$  kallas för *tangentvektor* till  $\vec{r}(t)$  och linjen genom  $P = \vec{r}(t_0)$  med riktningsvektor  $\vec{r}'(t)$  kallas för *tangentlinjen* till  $\vec{r}$  i  $P$ . Tangentlinjen ges av  $L(t) = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}'(t_0)$ .

**Exempel 3.** Bestäm tangentlinjen till  $\vec{r}(t) = \langle 2t, \sqrt{t} \rangle$  i punkten  $P = \vec{r}(4) = \langle 2 \cdot 4, \sqrt{4} \rangle = \langle 8, 2 \rangle$ . Tangentvektor  $\vec{r}'(t) = \left\langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right\rangle \implies \vec{r}'(4) = \left\langle 2, \frac{1}{4} \right\rangle$ . Tangentlinjen  $L(t) = \langle 8, 2 \rangle + t \cdot \left\langle 2, \frac{1}{4} \right\rangle = \left\langle 8 + 2t, 2 + \frac{t}{4} \right\rangle$

## 2 Föreläsning 19-09-05

### 2.1 Funktioner av flera variabler (14.1)

**Definition 4** (Funktioner av två variabler, definitionsmängd och värdemängd). En (reellvärd) *funktion av två variabler* är en regel som för varje  $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$  ger ett reellt tal  $f(x, y)$ .  $D$  kallas för *definitionsmängd* (domain) till  $f$  och  $\{f(x, y) | (x, y) \in D\}$  kallas *värdemängden* (range) till  $f$ . Skriver  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exempel 4.** Mest grundläggande: koordinatfunktionerna  $x$  och  $y$ .

**Exempel 5.** Om  $f(x, y), g(x, y)$  är funktioner kan vi skapa nya funktioner:

$$f(x, y) + g(x, y)$$

$$f(x, y) \cdot g(x, y)$$

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \text{ (Endast definierad där } g(x, y) \neq 0 \text{)}$$

$$\sin(f(x, y)) \dots$$

$$\sqrt{f(x, y)}, \ln(f(x, y)), \dots \text{ (Endast definierad där } f(x, y) \geq 0 \text{ respektive } f(x, y) > 0 \text{)}$$

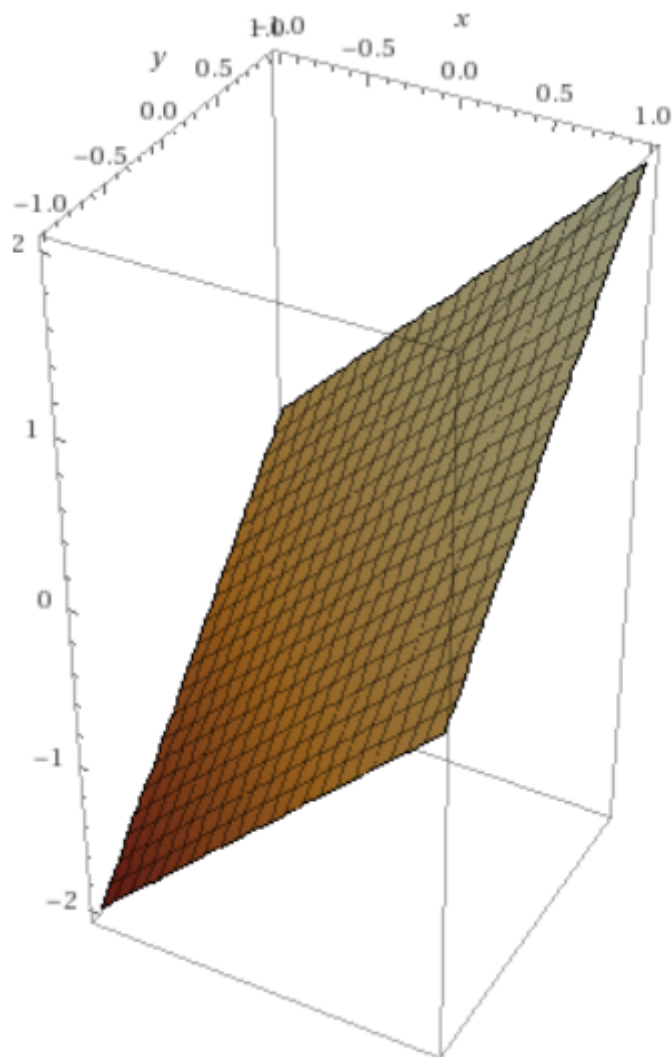
**Definition 5** (Graf). *Grafen* till  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$  är alla  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  s.a.  $z = f(x, y), (x, y) \in D$ .

**Exempel 6.** Rita grafen till  $f(x, y) = x + y$ .

Provar att rita längs några räta linjer:

$$f(x, 0) = x, f(x, 1) = x + 1, f(x, 2) = x + 2$$

$$f(0, y) = y, f(1, y) = y + 1, f(2, y) = y + 2$$



## 2.2 Annat sätt att visualisera en funktion

**Definition 6** (Nivåkurva). En *nivåkurva* till en funktion  $f(x,y)$  består av alla punkter  $(x,y)$  s.a.  $f(x,y) = k$  för ett givet värde  $k \in \mathbb{R}$ .

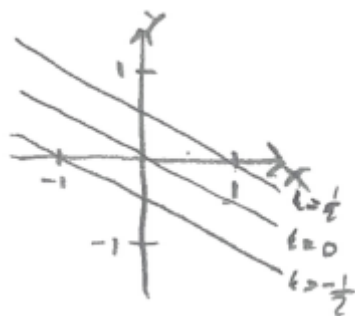
Ritar man nivåkurvor för olika värden på  $k$  får man en *höjdkarta* (contour map) som kan användas för att bättre förstå funktionen.

Beskriv nivåkurvorna och rita höjdkartor för olika funktioner.

**Exempel 7.**  $f(x,y) = x + 2y$

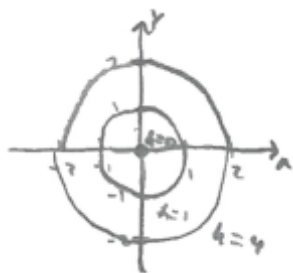
$f(x,y) = x + 2y = k \iff y = -\frac{x}{2} + \frac{k}{2}$  vilket är en rät linje med lutning  $-\frac{1}{2}$  som skär  $y$ -axeln i  $\frac{k}{2}$ .





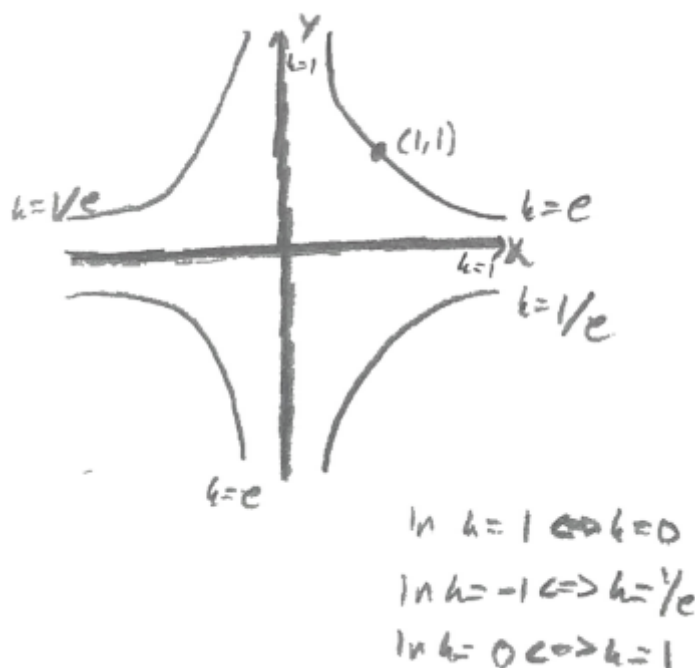
**Exempel 8.**  $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f(x,y) = x^2 + y^2 = k$  ger att om  $k < 0$  har vi en tom nivåkurva. Anta dock  $k \geq 0$ , då är  $x^2 + y^2 = k = (\sqrt{k})^2$  vilket är en cirkel med radie  $\sqrt{k}$  och origo i  $(0,0)$ .



**Exempel 9.**  $f(x,y) = e^{xy}$

$f(x,y) = e^{xy} = k$  ger att om  $k \leq 0$  har vi en tom nivåkurva. Anta dock  $k > 0$ , då får vi  $e^{xy} = k \iff xy = \ln(k)$ . Nu har vi två fall, om  $x \neq 0$  får vi  $y = \frac{\ln(k)}{x}$  och om  $x = 0$  får vi  $0 = \ln(k) \iff k = 1$ .



## 2.3 Funktioner av tre variabler

Kan på liknande sätt studera funktioner av tre variabler  $f(x,y,z)$ . Dock befinner sig dess graf  $w = f(x,y,z)$  i ett rum med fyra dimensioner vilket är lite svårt att rita. Däremot är nivåytor  $f(x,y,z) = k$  fortsatt användbara och kan visualiseras i vissa enkla fall.

**Exempel 10.** Beskriv nivåkurvorna till  $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2$  vilket är avståndet från punkten  $(x,y,z)$  till origo i kvadrat. Då får vi att nivåytorna för varje  $k$  är antingen tom om  $k < 0$  och sfären med radie  $\sqrt{k}$  och centrum i origo om  $k \geq 0$ .

## 3 Föreläsning 19-09-06

### 3.1 Gränsvärden i flera variabler (14.2)

**Definition 7** (Gränsvärden i flera variabler (Formell)). En funktion  $f(x,y)$  har gränsvärde  $L$  när  $(x,y)$  går mot  $(a,b)$ , vilket skrivs  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ , om  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  s.a. om  $0 < |(x,y) - (a,b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$  så är  $|f(x,y) - L| < \epsilon$ .

**Definition 8** (Gränsvärden i flera variabler (Informell)).  $f(x,y)$  är hur nära  $L$  som helst så länge  $(x,y)$  är tillräckligt nära  $(a,b)$ . Liknande, men mer oprecist:  $f(x,y)$  närmar sig  $L$  när  $(x,y)$  närmar sig  $(a,b)$ .

### 3.1.1 Räkneregler

Anta  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$  och  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M$ . Då gäller

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L + M$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L \cdot M$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \quad (\text{Endast om } g(x,y) \neq 0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$$

Om  $h(t)$  en funktion och  $\lim_{t \rightarrow L} h(t) = K$  så är

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(f(x,y)) = K.$$

Instängningsregeln/Squeeze theorem: Om  $\forall x, y : f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$  och  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x,y)$  gäller

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = L.$$

**Exempel 11.** Beräkna  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$  om det existerar.

Naivt kan man säga  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$  och därmed anta att gränsvärdet inte existerar. Dock kan vi förenkla

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - y^2 \\ &= 0^2 - 0^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Exempel 12.** Visa att  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$ .

Inse först att  $\forall x, y : 0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$  och  $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = y^2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq y^2 \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = y^2$ .

Enligt instängningsregeln är  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$  eftersom  $0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq y^2$  och  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 = 0$ .

**Exempel 13.** Låt  $g(x,y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - 1}$ . Beräkna  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} g(x,y)$  om det existerar.

Om  $f(x,y) = x^2 + y^2$  och  $h(t) = \frac{\ln(t)}{t-1}$  så är  $g(x,y) = h(f(x,y))$ . Eftersom  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y) = 0^2 + 1^2 = 1$  får vi  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} g(x,y) = \lim_{t \rightarrow 1} h(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1$ . Sista steget är ett standardgränsvärde eller går att räkna ut med l'Hospitals regel.

Om  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$  måste gränsvärdet av  $f$  när man närmar sig punkten  $(a,b)$  längs alla räta linjer genom  $(a,b)$  vara  $L$ . Sådana räta linjer ges av  $\vec{r}(t) = \langle a + kt, b + lt \rangle$ .  $\vec{r}(t)$  går mot  $(a,b)$  när  $t \rightarrow 0$ . Detta ger en metod för att se när gränsvärden inte existerar och vad gränsvärdet måste vara om det existerar, men inte att det existerar.

**Exempel 14.** Beräkna  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  om det existerar.

Låt  $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ . Vi prövar vad som händer när  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  längs  $x$ -axeln och  $y$ -axeln.

$x$ -axeln:  $\vec{r}_1(t) = \langle t, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0 \rangle$  när  $t \rightarrow 0$ .  $f(\vec{r}_1(t)) = f(t, 0) = \frac{t^2 - 0^2}{t^2 + 0^2} = 1$  när  $t \rightarrow 0$ .

$y$ -axeln:  $\vec{r}_2(t) = \langle 0, t \rangle \rightarrow \langle 0, 0 \rangle$  när  $t \rightarrow 0$ .  $f(\vec{r}_2(t)) = f(0, t) = \frac{0^2 - t^2}{0^2 + t^2} = -1$  när  $t \rightarrow 0$ .

Eftersom dessa gränsvärden är olika existerar inte gränsvärdet för  $f(x,y)$ .

## 3.2 Kontinuitet

**Definition 9** (Kontinuitet i en punkt). En funktion  $f(x,y)$  är *kontinuerlig* i en punkt  $(a,b)$  om  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ .

**Definition 10** (Kontinuitet på ett område).  $f$  är kontinuerlig på ett område  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  om  $f$  är kontinuerlig på alla punkter  $(a,b) \in D$ . Man säger att  $f$  är kontinuerlig om den är kontinuerlig för alla punkter i sin definitionsomängd.

# 4 Föreläsning 19-09-10

## 4.1 Partiella derivator och annat

Missade föreläsningen, det kommer anteckningar här kanske.

## 5 Föreläsning 19-09-12

### 5.1 Tangentplan

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

**Exempel 15** (Tangentplan). Beräkna tangentplanet till  $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  i punkten  $(3,4)$ . Bestäm också lineariseringen av  $f$  i  $(3,4)$  och använd den för att approximera  $f(3,01; 3,98)$ .

Vi börjar med att räkna ut  $f(3,4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ . Vi behöver också de partiella derivatorna till  $f$  och deras värden i  $(3,4)$ :  $f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $f_x(3,4) = \frac{3}{5}$ ,  $f_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$  och  $f_y(3,4) = \frac{4}{5}$ .

Tangentplanet är då

$$z = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4).$$

$L(x,y) = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)$ . är lineariseringen av  $f$ . Det är en approximation nära  $(3,4)$ .

Vi ska uppskatta  $f(3,01; 3,98) \approx L(3,01; 3,98) = 5 + \frac{3}{5}(3,01-3) + \frac{4}{5}(3,98-4) = 5 + \frac{3}{5} \cdot 0,01 + \frac{4}{5} \cdot (-0,02) = 4,99$ . Det verkliga värdet  $f(3,01; 3,98) = 4,990040 \dots$  vilket är en rätt bra approximation.

### 5.2 Differentierbarhet (14.4)

#### 5.2.1 En variabel

I en variabel gäller att om  $f'(a)$  existerar kan man visa (finns i föreläsningssanteckningarna) att  $f(x) = L(x) + \epsilon(x)(x-a)$  där  $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$  och  $\epsilon(x) \rightarrow 0$  när  $x \rightarrow a$ . Det säger att om  $f'(a)$  existerar är  $L$  en bra approximation av  $f$  nära  $a$  för  $f(x) \rightarrow 0$  snabbare än alla linjära funktioner/förstgradspolynom (Och  $L$  är den enda linjära funktionen som uppfyller detta, alltså är  $L$  den "bästa" approximationen av  $f$  med en linjär funktion.)

#### 5.2.2 Fler variabler

**Exempel 16.** Låt  $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  om  $(x,y) \neq (0,0)$ ,  $0$  annars.  $f(0,0) = 0$ ,  $f_x(0,0) = 0$  och  $f_y(0,0) = 0$ . Dess linearisering kring  $(0,0)$  är då  $L(x,y) = 0$ . Vi kollar exempelvis längs linjen  $f(t,t)$ .  $f(t,t) - L(t,t) = \frac{t^2}{t^2 + t^2} - 0 = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$ , alltså är  $L$  inte en bra approximation av  $f$  nära  $(0,0)$  trots att de partiella derivatorna existerar i den punkten.

Många resultat bygger på att  $L$  är en bra approximation av  $f$ . Vi inför därför följande definition:

**Definition 11** (Deriverbarhet/Differentierbarhet).  $f(x,y)$  är *deriverbar* eller *differentierbar* i  $(a,b)$  om  $f_x(a,b)$  och  $f_y(a,b)$  existerar och  $f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \epsilon_1(x,y)(x-a) + \epsilon_2(x,y)(y-b)$  där  $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$  när  $(x,y) \rightarrow (a,b)$ . Speciellt innebär det att  $f(x,y) - L(x,y) \rightarrow 0$  när  $(x,y) \rightarrow (a,b)$ .

**Sats 1** (Kontinuitet och deriverbarhet). Om  $f_x(x,y)$  och  $f_y(x,y)$  existerar och är kontinuerliga nära  $(a,b)$  är  $f$  deriverbar i  $(a,b)$ .

*Bevis.* Beviset använder medelvärdessatsen, se appendix F i kursboken för det.  $\square$

## 5.3 Kedjeregeln (14.5)

### 5.3.1 En variabel

Om  $y = f(x)$  och  $x = g(t)$  är deriverbara så är  $\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$ . Annorlunda uttryckt  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$ .

### 5.3.2 Två variabler

Låt  $z = f(x,y)$ ,  $x = g(t)$  och  $y = h(t)$  vara deriverbara. Då är

$$\frac{d}{dt}f(g(t), h(t)) = f_x(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + f_y(g(t), h(t)) \cdot h'(t)$$

eller kortare

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Beviset involverar definitionen av deriverbarhet i flera variabler.

*”Nu har de flesta svarat, och några har svarat rätt i alla fall.”*

– Mr. Väsentligen

*”Då får vi 1+1 vilket är 2.”*

– Mr. Väsentligen

### 5.3.3 Två variabler (variant)

Låt  $z = f(x,y)$ ,  $x = g(s,t)$  och  $y = h(s,t)$  vara deriverbara. Då är kedjeregeln

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

eller med avseende på  $t$ :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Beviset följer av den andra varianten.

## 5.4 Rikttningsderivator och gradienter (14.6)

De partiella derivatorna är derivator längs linjer där  $x$  eller  $y$  är konstant, d.v.s. med riktningsvektor  $\hat{i} = \langle 1, 0 \rangle$  eller  $\hat{j} = \langle 0, 1 \rangle$ .

**Definition 12** (Rikttningsderivata). *Rikttningsderivatan (directional derivative) av  $f(x, y)$  i riktningen  $\vec{u} = \langle a, b \rangle$  där  $\vec{u}$  är en enhetsvektor (längd  $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$ ) ges av*

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + ah, y + bh) - f(x, y)}{h}.$$

**Anmärkning 1.**  $f_x = D_{\hat{i}}f$  och  $f_y = D_{\hat{j}}f$

**Definition 13** (Gradient). *Gradienten av  $f(x, y)$  är*

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$$

**Sats 2** (Deriverbarhet, riktningsvektor och gradient). Om  $f$  är deriverbar är

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u}.$$

*Bevis.* Låt  $g(h) = f(x + ah, y + bh)$  och  $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ . Enligt kedjeregeln är  $g'(h) = f_x(x + ah, y + bh) \cdot a + f_y(x + ah, y + bh) \cdot b$ .  $g'(0) = f_x(x, y) \cdot a + f_y(x, y) \cdot b \implies D_{\vec{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$ .  $\square$

## 6 Föreläsning 19-09-13

### 6.1 Rikttningsderivator och gradienter

**Påminnelse 1.** Låt  $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$  och  $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$  vara vektorer.

Skalarprodukten är då

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Längden av  $\vec{u}$  är

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Det gäller också att

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\theta)$$

där  $\theta$  är vinkeln mellan  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$ .

Det följer av förra påståendet att för två vinkelräta vektorer är  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

**Sats 3** (Största värde för riktningsderivata).  $D_{\vec{u}}f(x,y)$  är som störst när  $\vec{u}$  pekar i samma riktning som  $\nabla f(x,y)$  d.v.s. när  $\vec{u} = \frac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$ .

Alltså  $f(x,y)$  växer som mest när  $(x,y)$  rör sig från  $(x_0, y_0)$  i riktningen  $\frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}$ .

*Bevis.*  $D_{\vec{u}}f(x,y) = \vec{u} \cdot \nabla f(x,y) = |\vec{u}| \cdot |\nabla f(x,y)| \cos(\theta)$  där  $\theta$  är vinkeln mellan  $\vec{u}$  och  $\nabla f(x,y)$ . Eftersom  $\vec{u}$  är en enhetsvektor vet vi att  $|\vec{u}| = 1$ .  $|\nabla f(x,y)| \cos(\theta)$  blir som störst när  $\cos(\theta) = 1$ , d.v.s.  $\theta = 0$ . Det betyder att  $\vec{u}$  och  $\nabla f(x,y)$  pekar i samma riktning.  $\square$

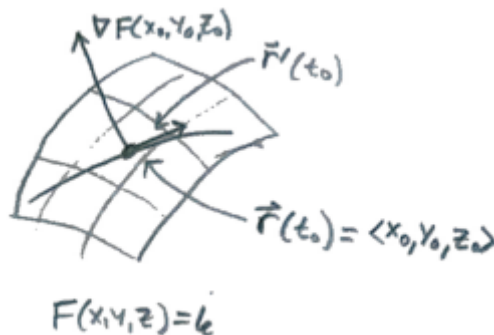
**Anmärkning 2.** I princip allt från denna veckan generaliserar enkelt från två till tre eller fler variabler.

## 6.2 Tangentplan till nivåytor (14.6)

En nivåyta bestäms av  $F(x,y,z) = k$  för något konstant  $k \in \mathbb{R}$ .

En graf  $z = f(x,y)$  är ett specialfall av en nivåyta, eftersom vi kan ta  $F(x,y,z) = z - f(x,y)$  och  $k = 0$ .

Ska definiera tangentplan till allmän nivåyta. Vill definiera tangentplanet till  $F(x,y,z) = k$  i  $(x_0, y_0, z_0)$  som det plan som genom  $(x_0, y_0, z_0)$  s.a. det för varje kurva  $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$  som uppfyller  $\vec{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$  och ligger i nivåytan så innehåller tangentplanet  $\vec{r}'(t_0)$ .



Anta att  $\vec{r}$  är en sådan kurva. Då är  $\forall t : F(x(t), y(t), z(t)) = k$ . Nu deriverar vi båda sidor med avseende på  $t$  m.h.a. kedjeregeln så att vi får

$$F_x \cdot x'(t) + F_y \cdot y'(t) + F_z \cdot z'(t) = 0$$

$$\nabla F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0.$$

Om vi tar  $t = t_0$  får vi att  $\nabla F(\vec{r}(t_0)) = \nabla F(x_0, y_0, z_0)$  är vinkelrät mot  $\vec{r}'(t_0)$ .

**Påminnelse 2.** En normalvektor  $\vec{n}$  till ett plan är en nollskild vektor som är vinkelrät mot alla vektorer i planet. Om planet går genom  $(x_0, y_0, z_0)$  ges hela planet av

$$\vec{n} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0.$$



**Definition 14** (Tangentplan till nivåyta). *Tangentplanet* till en nivåyta  $F(x,y,z) = k$  genom en punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  där  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$  är  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$ .

Det är definierat s.a. det uppfyller vad vi ville att det skulle uppfylla.

**Obs. 1.** Om  $F(x,y,z) = z - f(x,y)$  är nivåytan där  $F = 0$  samma som grafen  $z = f(x,y)$ . Eftersom  $\nabla F = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$  får i en punkt  $(a, b, f(a,b))$  samma tangentplan  $\langle -f_x(a,b), -f_y(a,b), 1 \rangle \cdot \langle x - a, y - b, z - f(a,b) \rangle$  oavsett om man ser ytan som en nivåyta eller grafen till en funktion.

**Exempel 17.** Bestäm tangentplanet till ytan  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$  i punkten  $(1, 1, 1)$ .

Ytan är nivåytan  $F(x,y,z) = 1$  där  $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ .

$\nabla F = \langle 2x, -2y, 2z \rangle$  och  $\nabla F(1,1,1) = \langle 2, -2, 2 \rangle$ . Då är tangentplanet  $\nabla F(1,1,1) \cdot \langle x - 1, y - 1, z - 1 \rangle = 0$  vilket ger

$$\begin{aligned} 2(x - 1) - 2(y - 1) + 2(z - 1) &= 0 \\ x - 1 - y + 1 + z - 1 &= 0 \\ x - y + z &= 1. \end{aligned}$$

### 6.3 Lokala extremvärden

**Definition 15** (Lokalt maximum).  $f(x,y)$  har ett *lokalt maximum* i  $(a,b)$  om  $f(x,y) \leq f(a,b)$  gäller för  $(x,y)$  nära  $(a,b)$ . (D.v.s. det gäller för  $(x,y)$  i någon cirkelskiva kring  $(a,b)$ .)

**Definition 16** (Absolut/Globalt maximum).  $f(x,y)$  har ett *absolut/globalt maximum* i  $(a,b)$  om  $f(x,y) \leq f(a,b)$  gäller för alla  $(x,y)$  i definitionsmängden till  $f$ .

**Definition 17** (Lokalt minimum).  $f(x,y)$  har ett *lokalt minimum* i  $(a,b)$  om  $f(x,y) \geq f(a,b)$  gäller för  $(x,y)$  nära  $(a,b)$ . (D.v.s. det gäller för  $(x,y)$  i någon cirkelskiva kring  $(a,b)$ .)

**Definition 18** (Absolut/Globalt minimum).  $f(x,y)$  har ett *absolut/globalt minimum* i  $(a,b)$  om  $f(x,y) \geq f(a,b)$  gäller för alla  $(x,y)$  i definitionsmängden till  $f$ .

**Definition 19** (Extremvärde). Ett *extremvärde* är ett minimum eller maximum.

**Exempel 18.**  $f(x,y) = 3x^2 + y^2$  har ett lokalt och globalt minimum, var?

Inses lätt att det sker i  $(0,0)$  då den annars är strikt positiv för  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Påminnelse 3.** I en variabel, om  $f$  är deriverbar och har ett (lokalt) extremvärde i  $a$  är  $f'(a) = 0$ .

**Sats 4** (Extremvärde i en punkt). Om  $f(x,y)$  har ett (lokalt) extremvärde i punkten  $(a,b)$  och  $f_x(a,b)$  och  $f_y(a,b)$  existerar är  $f_x(a,b) = 0$  och  $f_y(a,b) = 0$ .

*Bevis.* Om vi låter  $h(x) = f(x,b)$  ha ett extremvärde i  $x = a$  gäller  $h'(a) = 0$  och  $h'(a) = f_x(a,b)$ , vilket ger att  $f_x(a,b) = 0$ .

$f_y(a,b) = 0$  visas analogt. □

## 7 Föreläsning 19-09-17

### 7.1 Lokala extremvärden forts.

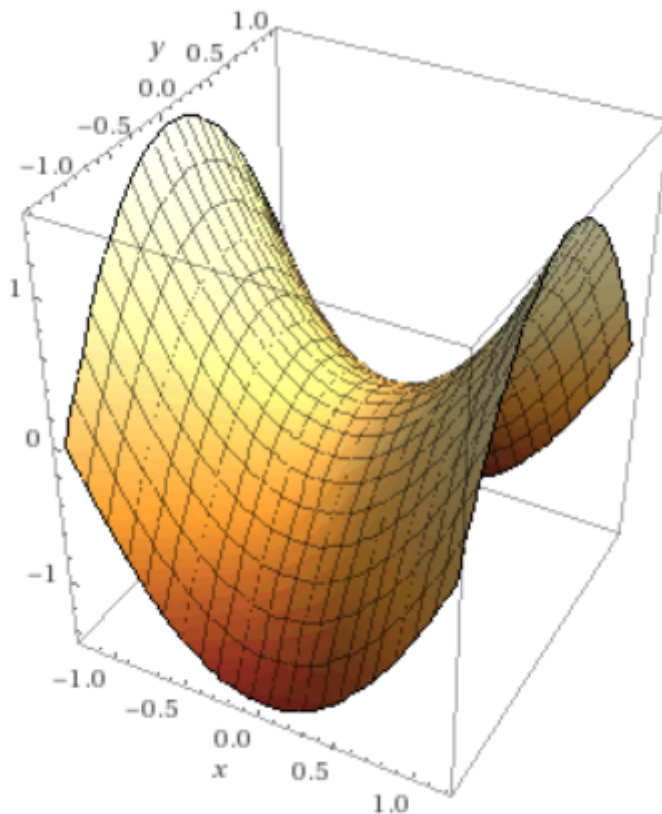
**Definition 20** (Kritiska/stationära punkter). Om  $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$  säger man att  $f$  har en *kritisk/stationär punkt* i  $(a,b)$ .

Alla lokala extremvärden är kritiska punkter (om de partiella derivatorna existerar) men det kan finnas kritiska punkter som inte är lokala extremvärden. Sådana punkter kallas *sadelpunkter*.

**Exempel 19.** Låt  $f(x,y) = x^2 - y^2$ , bestäm dess kritiska punkter.

Den har en sadelpunkt i  $(0,0)$  eftersom  $\nabla f = \langle 2x, -2y \rangle \implies \nabla f(0,0) = (0,0)$ , d.v.s.  $(0,0)$  är en kritisk punkt, men den är varken ett lokalt maximum eller minimum.

Grafen har formen av en "sadel".



Hur avgör man då om en kritisk punkt är ett extremvärde? I en variabel gäller, för funktioner där  $f'(a) = 0$ , att om  $f''(a) > 0$  så har  $f(x)$  ett lokalt minimum i  $x = a$  och om  $f''(a) < 0$  så har  $f(x)$  ett lokalt maximum i  $x = a$ . Om  $f''(a) = 0$  kan vi inte säga något om punkten.

**Sats 5** (Test för lokala extrempunkter i två variabler). Anta att de partiella

derivatorna av ordning 2 till  $f(x,y)$  är kontinuerliga nära  $(a,b)$  och att  $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ .

Låt  $D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$ . Då har vi fyra fall:

1. Om  $D > 0$  och  $f_{xx}(a,b) > 0$  (eller  $f_{yy}(a,b) > 0$ ) är  $(a,b)$  ett lokalt minimum.
2. Om  $D > 0$  och  $f_{xx}(a,b) < 0$  (eller  $f_{yy}(a,b) < 0$ ) är  $(a,b)$  ett lokalt maximum.
3. Om  $D < 0$  är  $(a,b)$  en sadelpunkt.
4. Om  $D = 0$  vet vi inget om punkten.

*Bevis.* Går ut på att reducera till motsvarande test i en variabel, se slutet av 14.7 i boken.  $\square$

Eftersom  $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$  (Clairaut's sats) är  $D = \det\{H\}$  där  $H$  är "Hessianmatrisen"  $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ .

För att komma ihåg vilket villkor som ger vilken slutsats kan man jämföra med följande modellfall:

1.  $f(x,y) = x^2 + y^2$  som har ett lokalt minimum i origo.  $D = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$ ,  $f_{xx} = 2 > 0$ .
2.  $f(x,y) = -x^2 - y^2$  som har ett lokalt maximum i origo.  $D = (-2) \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = 4 > 0$ ,  $f_{xx} = -2 < 0$ .
3.  $f(x,y) = x^2 - y^2$  som har en sadelpunkt i origo.  $D = 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = -4 < 0$ .

**Exempel 20.** Bestäm de kritiska punkterna till  $f(x,y) = 3x^2 + 6xy - y^3$  och avgör om de är sadelpunkter, lokala minimum eller lokala maximum.

Vi börjar med att avgöra kritiska punkter, d.v.s. punkter där de partiella derivatorna är 0.

$$\begin{cases} f_x = 6x + 6y = 0 & \iff x = -y \\ f_y = 6x - 3y^2 = 0 & \iff 2x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Detta ger, om man sätter in uttrycken i varandra,  $2(-y) - y^2 = 0 \iff y(-2 - y) = 0 \iff y = 0$  el.  $y = -2$ . Om vi sätter in detta i uttrycket för  $x$  får vi  $x = -y = -0 = 0$  och  $x = -(-2) = 2$  vilket ger de kritiska punkterna  $(0,0)$  och  $(2, -2)$ .

Vi undersöker nu dessa kritiska punkter.

$$f_{xx} = 6, f_{yy} = -6y \text{ och } f_{xy} = 6.$$

I  $(0,0)$  gäller  $D(0,0) = f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 6 \cdot 0 - 6^2 = -36 \implies (0,0)$  är en sadelpunkt.

I  $(2, -2)$  gäller  $D(2, -2) = f_{xx}(2, -2) \cdot f_{yy}(2, -2) - f_{xy}(2, -2)^2 = 6 \cdot (-6) \cdot (-2) - 6^2 = 72 - 36 = 36 \implies (2, -2)$  är en lokal extrempunkt. Eftersom  $f_{xx}(2, -2) = 6 > 0$  är  $(2, -2)$  ett lokalt minimum.

För att generalisera det här till tre eller fler variabler måste man bygga på egenvärden till Hessianmatrisen.

## 7.2 Globala extremvärden (14.7)

I en variabel, om  $f(x)$  är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall  $[a, b]$  så har  $f$  ett globalt max- och min-värde någonstans i  $[a, b]$ . Ej sant för t.ex. öppna intervall eller obegränsade intervall. Se exempelvis  $f(x) = x$  på intervallet  $x \in (0, \infty)$ , då finns inget specifikt max-värde eftersom vi alltid kan gå närmare  $\infty$  och det finns inget min-värde eftersom vi alltid kan gå lite närmare 0.

Vi ska definiera motsvarigheten till ”sluten och begränsad” i två variabler.

**Definition 21** (Randpunkter).  $(a, b)$  är en *randpunkt* (*boundary point*) till  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  om varje cirkelskiva kring  $(a, b)$  innehåller både punkter i  $D$  och punkter som inte är i  $D$ .

**Exempel 21.** Randpunkter till  $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  är  $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ .

Till  $D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$  är randpunkterna precis som ovan  $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ , trots att de inte är i  $D$ .

”Här går kanske inte intuitionen jättebra.”

– Mr. Väsentligen om sin publik

**Definition 22** (Slutna mängder). En mängd  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  är *sluten* om den innehåller alla sina randpunkter.

I exemplet ovan är  $D_1$  sluten och  $D_2$  inte sluten.

**Definition 23** (Begränsade mängder). En mängd  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  är *begränsad* om den är innehållen i någon cirkelskiva.

**Exempel 22.**  $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  är begränsad eftersom vi kan innesluta kvadraten i en stor cirkel, exempelvis en cirkel med centrum i origo och radie 31415.

$\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1\}$  är inte begränsad eftersom den inte går att innesluta i en cirkel.

**Sats 6** (Existens av globala max- och minpunkter). Om  $f(x, y)$  är kontinuerlig på  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  och  $D$  är både sluten och begränsad då har  $f$  globala max- och min-punkter någonstans i  $D$ .

*Bevis.* Beviset involverar definitionen av reella tal vilket är lite lagom överkurs för den här kursen. Finns säkert på nätet eller något.  $\square$

## 8 Föreläsning 19-09-18

### 8.1 Globala extremvärden (forts.)

Om  $f(x, y)$  har ett globalt max-/min-värde i  $(a, b) \in D$  och  $(a, b)$  inte är en randpunkt måste den vara ett lokalt min/max och därmed också en kritisk

punkt (om  $f$  är deriverbar i  $(a,b)$ ).

### 8.1.1 Metod för att bestämma globala max/min

Låt  $f$  vara en deriverbar funktion på  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  där  $D$  är sluten och begränsad.

Globala max och min fås genom att jämföra funktionsvärden i följande kandidater:

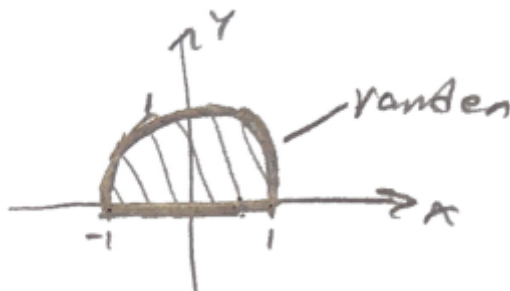
1. Kritiska punkter i  $D$
2. Randpunkter till  $D$

Om man parametriserar randpunkterna till  $D$  med ett antal kurvor räcker det med följande kandidater i punkt 2 ovan:

- 2.1. Kritiska punkter när man ser  $f$  som en funktion av en variabel längs randkurvor
- 2.2. "Hörn", d.v.s. ändpunkter till randkurvorna

**Exempel 23.** Beräkna de globala max-/min-punkterna till funktionen  $f(x,y) = x^2 + y^2 - y$  på området  $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ .

Området är en halvcirkelskiva som ganska uppenbart är sluten och begränsad.



Vi börjar med att leta kritiska punkter:  $\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y - 1 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0;0,5).$

Nu får vi kolla om den kritiska punkten ligger i  $D$ .  $0^2 + (0,5)^2 = 0,25 \leq 1$  och  $0,5 \geq 0$ , så den ligger i  $D$ .  $f(0;0,5) = -\frac{1}{4}$ .

Nu ska vi titta på randpunkter, så vi börjar med att parametrisera randen. Vi delar upp det i det raka strecket ( $C_1$ ) och i halvcirkelbågen ( $C_2$ ) för enkelhetens skull.

$C_1 : \vec{r}_1(t) = \langle t, 0 \rangle$  där  $-1 \leq t \leq 1$ .

$C_2 : \vec{r}_2(t) = \langle \cos(t), \sin(t) \rangle$  där  $0 \leq t \leq \pi$ .

Då tittar vi på kritiska punkter för randkurvorna, och vi börjar med  $C_1$ .  $g_1(t) = f(\vec{r}_1(t)) = f(t, 0) = t^2$ . Kritiska punkter för  $g_1$  är då  $g'_1(t) = 0 \iff t = 0$ . Det ger kandidaten  $g_1(0) = f(0,0) = 0$ . Nu kör vi på  $C_2$ .  $g_2(t) = f(\vec{r}_2(t)) = f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) + \sin^2(t) - \sin(t) = 1 - \sin(t)$ . Kritiska punkter är då

$g_2'(t) = -\cos(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}$  (Fler punkter egentligen, men den här är den enda i vårt tillåtna intervall). Kandidaten är då  $g_2(\frac{\pi}{2}) = f(0,1) = 0$ .

Nästa steg är att titta på ”hörnen”  $(-1,0)$  och  $(1,0)$ .  $f(-1,0) = (-1)^2 + 0^2 - 0 = 1$  och  $f(1,0) = 1^2 + 0^2 - 0 = 1$ .

Allt som allt är vårt globala max  $(\pm 1, 0)$  och vårt globala min  $(0; 0, 5)$ .

## 8.2 Optimering under bivillkor och Lagrangemultiplikatorer (14.8)

Vi vill lösa följande slags problem: Beräkna max av  $4x^2 + 4y$  när  $(x,y)$  ligger på enhetscirkeln  $x^2 + y^2 = 1$ . En möjlighet är att parametrisera enhetscirkeln, t.ex. med  $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle$  när  $0 \leq t \leq 2\pi$  och hitta max av  $g(t) = f(\vec{r}(t)) = 4\cos^2(t) + 4\sin(t)$  som vanligt.

En annan möjlighet är att se det som ett fall av optimering under bivillkor. Låt  $f(x,y), g(x,y)$  vara definierade på någon mängd  $D$ . Vi vill hitta max och min av  $f(x,y)$  på  $D$  under förutsättning att  $g(x,y) = k$  där  $k$  är konstant. Villkoret  $g(x,y) = k$  kallas för *bivillkor (constraint)*.

### 8.2.1 Metoden med Lagrangemultiplikatorer

För att hitta max och min till  $f(x,y)$  under bivillkoret  $g(x,y) = k$  (under förutsättning att extremvärden finns och  $\nabla g(x,y) \neq 0$  på  $g(x,y) = k$ ) gör man följande:

- Hitta alla lösningar  $(x,y)$  till  $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$  för något  $\lambda$  ( $\lambda$  kallas för Lagrangemultiplikator).
- Jämför  $f(x,y)$  för alla lösningar  $(x,y)$  från punkt a. Det största värdet ger max och det minsta ger min.

**Anmärkning 3.** Förutsättningen att extremvärden finns är uppfylld om  $\{g(x,y) = k\}$  är sluten och begränsad. I kursen kommer vi bara att studera problem där extremvärden existerar.

**Exempel 24.** Hitta max och min till  $f(x,y) = 4x^2 + 4y$  under bivillkoret  $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$ .

Enligt metoden ska vi då lösa ekvationssystemet  $\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f_x = \lambda \cdot g_x \\ f_y = \lambda \cdot g_y \\ g^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} 8x = \lambda \cdot 2x \\ 4 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ Den första ekvationen ger } 8x = \lambda \cdot 2x \iff 4x = \lambda x \iff x =$$

0 el.  $\lambda = 4$ . Första fallet ( $x = 0$ ) ger genom ekvation 3  $y^2 = 1 \iff y = \pm 1$  vilket med ekvation 2 ger  $\lambda = \frac{4}{2y} = \pm 2$ . Här får vi komma ihåg att det ger två lösningar  $(x,y,\lambda) = (0,1,2)$  och  $(0,-1,-2)$ . Andra fallet ger genom ekvation 2  $4 = 4 \cdot 2 \cdot y \iff y = \frac{1}{2}$ . Ekvation 3 ger då  $x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \iff x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Vi

kontrollerar att det ger de två lösningarna  $(x, y, \lambda) = (\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4)$ . Med det får vi följande lösningar till det ursprungliga problemet:

$$\begin{aligned} f(0, 1) &= 4 \\ f(0, -1) &= -4 \\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 5 \\ f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 5 \end{aligned}$$

Alltså har vi ett max på 5 i  $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$  och ett min på -4 i  $(0, -1)$ .

## 9 Föreläsning 19-09-20

### 9.1 Längd av kurvor (10.2, 13.3)

**Sats 7** (Längd av en kurva). Låt  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  vara en kurva. Då är dess längd  $l = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$ .

*Bevis.* Finns en skiss till ett argument i 10.2 i boken. □

**Exempel 25.** Beräkna längden av kurvan med parametrisering  $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle = \langle t^2, t^3 \rangle$  för  $0 \leq t \leq 1$ .

$$\text{Då är } |\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = \sqrt{t^2(4 + 9t^2)} = \sqrt{t^2} \sqrt{4 + 9t^2} = t\sqrt{4 + 9t^2}.$$

$$\text{Från formeln ovan är } l = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2} dt = \begin{cases} s = 4 + 9t^2 \\ ds = 18t dt \implies t dt = \frac{ds}{18} \\ t = 0 \implies s = 4 \\ t = 1 \implies s = 13 \end{cases} =$$

$$\frac{1}{18} \int_4^{13} \sqrt{s} ds = \frac{1}{18} \left[ \frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_4^{13} = \frac{1}{18} \left( \frac{13^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{27} (13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}})$$

**Sats 8** (Längden av en graf). Längden av en graf  $y = f(x)$  är  $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .

*Bevis.*  $f(x)$  kan parametriseras med ekvationen  $\vec{r}(t) = \langle t, f(t) \rangle$ . Då blir  $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$  och längden därmed  $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .

Alternativ härledning finns i föreläsningsslides. □

### 9.2 Rörelse av partiklar i rummet (13.4)

Man kan använda en vektorvärd funktion  $\vec{r}(t)$  för att beskriva hur en partikel rör sig genom rummet. Vid tiden  $t$  befinner sig partikeln i  $\vec{r}(t)$ .

**Definition 24** (Hastighetsvektor och fart). *Hastighetsvektorn*  $\vec{v}(t)$  för en sådan partikel ovan är  $\vec{r}'(t)$  och farten är  $|\vec{v}(t)|$ .

**Definition 25** (Accelerationsvektor). *Accelerationsvektorn* för en partikel som ovan är  $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$ .

Dessa definitioner används för att beskriva olika fysiska fenomen. Ett exempel på en sådan är Newtons andra lag:

**Sats 9** (Newtons andra lag). Om kraften  $\vec{F}(t)$  verkar på en partikel med massa  $m$  så är  $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$ .

**Exempel 26.** Anta att bara tyngdkraften verkar på en partikel med massa  $m$ , d.v.s.  $\vec{F} = \langle 0, 0, -mg \rangle$ . Anta också att partikeln vid  $t = 0$  har position  $\vec{r}(0) = \langle a, b, c \rangle$  och hastighet  $\vec{v}(0) = \langle d, e, f \rangle$ . Verifiera att partikeln med position  $\vec{r}(t) = \left\langle a + dt, b + et, c + ft - \frac{gt^2}{2} \right\rangle$  uppfyller dessa villkor och rör sig enligt Newtons andra lag.

Vi kontrollerar detta: Vi stoppar in  $t = 0$  i  $\vec{r}$  och får  $\vec{r}(0) = \langle a, b, c \rangle$  vilket stämmer. Vi deriverar nu för att få  $\vec{v}$  och får  $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \langle d, e, f - gt \rangle$ . Kontrollerar genom att stoppa in  $t = 0$ :  $\vec{v}(0) = \langle d, e, f \rangle$ . Kontrollerar nu med ytterligare en derivata  $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \langle 0, 0, -g \rangle$ . Använder Newtons andra lag för att kontrollera  $m \cdot \vec{a}(t) = \langle 0, 0, -mg \rangle = \vec{F}$ .

*"0 är ju en typisk konstant."*

– Mr. Väsentligen

*"Du har ju nog rätt idé, men vad menar du?"*

– Mr. Väsentligen

*"Ja, det hade man kunnat tänka sig, men så är det inte."*

– Mr. Väsentligen

## 10 Föreläsning 19-09-24

Missade föreläsningen, handlade om dubbelintegraler över rektanglar och upprepad integration.

## 11 Föreläsning 19-09-25

Missade föreläsningen, handlade om dubbelintegraler över allmänna områden.



## 12 Föreläsning 19-09-27

### 12.1 Integraler över allmänna områden (forts.)

**Sats 10** (Volym mellan grafer). Om  $f(x,y) \geq g(x,y)$  ges volymen av området mellan  $z = g(x,y)$  och  $z = f(x,y)$  där  $(x,y) \in D$  ges av  $\iint_D f(x,y) - g(x,y) dA$ .

### 12.2 Dubbelintegraler och polära koordinater (15.3)

**Exempel 27.** Beräkna volymen av området mellan konen  $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$  och planet  $z = 1$ .

Den första ekvationen ger en kon eftersom  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  där  $z$  är avståndet från  $(x,y)$  till origo.

Det beror inte på vinkeln  $\theta$  i  $xy$ -planet, så vi kan rita  $z = r$  för ex.  $\theta = 0$ , där är  $r = x$ , och sedan roterar vi kring  $z$ -axeln.

Ytorna  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  och  $z = 1$  skär varandra i  $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ , d.v.s.  $x^2 + y^2 = 1$  och  $z = 1$ . Området mellan de här ytorna ges då av  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ ,  $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .  $D$  sett som ett typ I-område begränsas av  $y = \sqrt{1 - x^2}$  och  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ . Alltså är  $D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$ .

Områdets volym blir då  $\iint_D 1 - \sqrt{1 - x^2} dA = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$ . Detta går att beräkna, men blir krångligt.

Idag ska vi snacka om ett betydligt enklare sätt att räkna ut detta.

#### 12.2.1 Polära koordinater

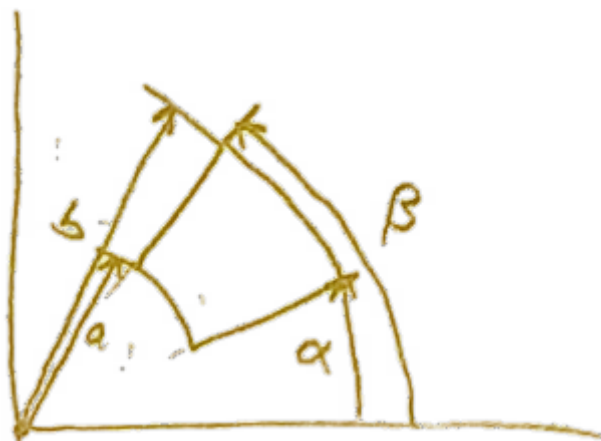
En punkt  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  kan beskrivas med *polära koordinater*  $(r, \theta)$  genom 
$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$
där  $\theta$  är vinkeln mot  $x$ -axeln och  $r$  är avståndet från origo.

**Exempel 28.** Området  $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x\}$  ser ut som följande:



I polära koordinater är  $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, -\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$ .

**Definition 26** (Polära rektanglar och deras area). Ett område är en *polär rektangel* om det i polära koordinater ges av  $a \leq r \leq b$  och  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ .



Arean för den rektangeln är  $\frac{(b^2 - a^2)(\beta - \alpha)}{2}$ .

### 12.2.2 Integration i polära koordinater

**Sats 11** (Integration av polära rektanglar). Låt  $D$  vara en polär rektangel som ges av  $a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$ , och anta att  $f$  är kontinuerlig på  $D$ .

Då är  $\iint_D f dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cdot r dr d\theta = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cdot r d\theta dr$ .

**Obs. 2.** Vänsterledet är en integral över ett allmänt område. Högerledet är upprepade integraler.

Man brukar ofta sammanfatta formlerna som  $dA = r dr d\theta = r d\theta dr$  eller  $dx dy = r dr d\theta = r d\theta dr$ . Den första sammanfattningen används i formelbladet.

*Bevis.* Idén bakom beviset är samma som för ett ”vanligt” koordinatsystem, men istället för att dela in i rektanglar delar vi in i polära rektanglar istället. Finns ganska komplett i föreläsningsslidesen.  $\square$

**Exempel 29.** Vi går tillbaka till exemplet i början av föreläsningen för att se om det blir enklare med polära koordinater.

Beräkna  $\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} dA$  där  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

I polära koordinater ges  $D$  av  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Vår funktion är då

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} \\ &= \sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\ &= \sqrt{r^2} \\ &= r \\ &= f(r, \theta). \end{aligned}$$

Då blir

$$\begin{aligned} \iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} dA &= \iint_D 1 - r dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r) r d\theta dr \\ &= \int_0^1 [(r - r^2)\theta]_{\theta=0}^{2\pi} dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r - r^2 dr \\ &= 2\pi \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

## 13 Föreläsning 19-09-30

### 13.1 Densitet, massa och masscentrum (15.4)

Låt  $D$  vara en tunn skiva (lamina) som representeras av  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  med densitet  $\rho(x, y)$ .  $\rho(x, y)$  är gränsvärdet när  $\epsilon \rightarrow 0$  för densiteten av en kvadrat  $A_\epsilon$  med sidlängd  $\epsilon$  och centrum i  $(x, y)$ .

Om  $E$  är ett litet område kring punkten  $(x,y)$  bör  $\rho(x,y)$  vara detsamma oberoende av  $E$ . För ett sådant område blir då

$$\text{massa}(E) \approx \rho(x,y) \cdot \text{area}(E). \quad (1)$$

M.h.a.  $\rho$  vill vi beskriva massan på och masscentrum i  $D$  ovan.

### 13.1.1 Massa

Vi börjar med att anta att  $D$  är en rektangel med  $\rho(x,y) = 0$  om  $(x,y) \notin D$ . Då delar vi in  $D$  i  $M \times N$  stycken lika stora delrektanglar  $R_{ij}$  där  $i \in \{1, \dots, M\}$  och  $j \in \{1, \dots, N\}$  med area  $\Delta R$  och  $(x_{ij}, y_{ij}) \in R_{ij}$ . Om  $M$  och  $N$  är stora blir varje  $R_{ij}$  litet, så att från ekvation 1 ovan får vi  $\text{massa}(R_{ij}) \approx \rho(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta R$ . Total massan är då  $m = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \text{massa}(R_{ij}) \approx \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \rho(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta R = \iint_D \rho(x,y) dA$ . Uppskattningen för massan blir också bättre och bättre när  $M, N \rightarrow \infty$ .

**Sats 12** (Massa för område). För en skiva  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  med densitet  $\rho(x,y)$  i varje punkt  $(x,y)$  är den totala massan  $m = \iint_D \rho(x,y) dA$ .

*Bevis.* Bevis finns ovan. □

### 13.1.2 Masscentrum

**Definition 27** (Moment). *Momentet* med avseende på  $x$ -axeln kring en punkt  $x = a$  för en partikel med position  $(x,y)$  och massa  $m$  är  $m(x - a)$ .

**Definition 28** (Jämvikt av moment). En samling partiklar med positioner  $(x_i, y_i)$  och massor  $m_i$  där  $i \in \{1, \dots, n\}$  är i *jämvikt* kring  $x = a$  om dess totala moment  $\sum_{i=1}^n m_i(x_i - a) = 0$ .

Motsvarande definition funkar även i  $y$ -led.

**Sats 13** (Totalt moment för en skiva och jämvikt). Låt  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  vara en tunn skiva med densitet  $\rho(x,y)$ .

Dess totala moment med avseende på  $x$ -axeln kring  $x = a$  är då  $\iint_D (x - a)\rho(x,y) dA$ .

Samma sak funkar igen även för  $y$ -led.

Om  $\iint_D (x - a)\rho(x,y) dA = \iint_D x\rho(x,y) dA - a \iint_D \rho(x,y) dA = 0$  är skivan i jämvikt.

*Bevis.* Härleds på samma sätt som för massan. □

**Definition 29** (Moment kring  $x$ -axeln). Momentet med avseende på  $x$ -axeln kring  $x = 0$  är  $M_x = \iint_D x\rho(x,y) dA$ .

**Sats 14** (Masscentrum). För en skiva  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  med densitet  $\rho(x,y)$  är dess *masscentrum*  $(\bar{x}, \bar{y})$  där  $\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x,y) dA$  och  $\bar{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x,y) dA$ .

**Exempel 30.** Beräkna massan och masscentrum för triangeln  $D$  med hörn i  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  och  $(0,1)$  med konstant densitet  $\rho(x,y) = 1$ .

$$m = \iint_D \rho(x,y) dA = \iint_D 1 dA = \frac{1}{2}.$$

För att räkna ut  $M_x$  måste vi kunna beskriva randerna till  $D$ . Vi noterar att hypotenusan till triangeln beskrivs av  $y = 1 - x$  så att  $D\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$  och därmed

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D x \rho(x,y) dA \\ &= \iint_D x dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx \\ &= \int_0^1 x \int_0^{1-x} 1 dy dx \\ &= \int_0^1 x \cdot (1 - x) dx \\ &= \int_0^1 x - x^2 dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Då har vi  $x$ -koordinaten för masscentrum  $\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{M_x}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ .

I och med att triangeln är symmetrisk måste  $M_y = M_x = \frac{1}{6}$  och därmed är masscentrum  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . Man kan självklart räkna ut  $M_y$  på samma sätt, men det behövs inte här.

**Sats 15** (Masscentrum för triangel). I en triangel, om densiteten är konstant, är masscentrumet skärningspunkten för triangelns medianer, d.v.s. linjerna från triangelns hörn till mitten av motstående sida.

## 13.2 Medelvärden

**Sats 16** (Medelvärde av en funktion). Låt  $f(x,y)$  vara definierad på en mängd  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Då är dess *medelvärde*  $\frac{\iint_D f(x,y) dA}{\iint_D 1 dA} = \frac{\iint_D f(x,y) dA}{\text{area}(D)}$ .

Speciellt, om  $D$  är en skiva med konstant densitet  $\rho(x,y) = 1$  är komponenterna i dess masscentrum  $(\bar{x}, \bar{y})$  medelvärdet av  $x$  och  $y$  på  $D$ .

### 13.3 Arean av grafen till en funktion (15.5)

Låt  $f(x,y)$  vara definierad på  $D$ , då ger den en yta (dess graf)  $z = f(x,y)$  där  $(x,y) \in D$ .

**Sats 17** (Arean av en graf).  $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA$ .

*Bevis.* Inte idag. □

Jämför med längden av en graf  $y = f(x)$  där  $a \leq x \leq b$ :  $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .

Nästa vecka pratar vi om en formel för mer allmänna ytor och kort om varför den ser ut som den gör.

**Exempel 31.** Bestäm arean av grafen  $z = f(x,y)$  där  $(x,y) \in D$ ,  $f(x,y) = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$  och  $D = [0,1] \times [0,2]$ .

$f_x = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ . På samma sätt blir  $f_y = \sqrt{y}$ .

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2} = \sqrt{1 + x + y} \text{ ger } A = \iint_D \sqrt{1 + x + y} dA = \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{1 + x + y} dy dx = \dots = \frac{4}{15}(33 - 4\sqrt{2} - 9\sqrt{3}).$$

## 14 Föreläsning 19-10-01

### 14.1 Trippelintegraler

**Definition 30** (Trippelintegraler). Låt  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  vara ett område och  $g(x,y,z)$  vara definierad på  $E$ .

Då definierar vi trippelintegralen av  $g$  över  $E$ :

$$\iiint_E g(x,y,z) dV$$

på samma sätt som dubbelintegraler, först när  $E = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$  är ett rätblock m.h.a. Riemannsummor och sedan för allmänna begränsade områden genom att reducera till fallet med rätblock.

#### 14.1.1 Upprepad integration i trippelintegraler

Vi antar att de funktioner vi använder är kontinuerliga s.a. integralerna existerar. Annars blir det svårt.

Om  $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, e(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$  där  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  är  $\iiint_E g(x,y,z) dV = \iint_D \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z) dz dA$ .

Om  $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$  (är ett typ I-område) är  $E = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), e(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$ . Då är

integralen

$$\iiint_E g(x,y,z) dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z) dz dy dx.$$

Motsvarande formler fås om vi byter roller på variablerna.

**Exempel 32.** Beräkna  $\iiint_E z dV$  där  $E$  är den tetraeder som begränsas av planen  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  och  $2x + y + z = 2$ .

Området mellan ett antal ytor som bestäms av likheter beskrivs typiskt sett av motsvarande olikheter. (D.v.s. byt = mot  $\geq$  el.  $\leq$ .) Men vilket håll ska olikheten vara på? Brukar funka att rita en figur. För att göra det enklare att rita kollar vi var den skär de tre axlarna. För  $x$ -axeln får vi när  $y = z = 0$ . Då är  $2x + 0 + 0 = 2 \implies x = 1$  och därmed innehåller planet punkten  $(1,0,0)$ . På motsvarande sätt får vi  $y = 2$  och  $z = 2$  och punkterna  $(0,2,0)$  och  $(0,0,2)$ . Då får vi följande utritade tetraeder:

Figur 1

För att beskriva  $E$  med olikheter får vi  $E = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x+y+z \leq 2\}$ . Hållen på olikheterna fås genom att kolla punkter i tetraedern. Ex. får vi i punkten  $(0,0,0)$  som ligger i tetraedern  $2 \cdot 0 + 0 + 0 = 0$  i origo, och  $0 \leq 2$ .

Genom att kombinera de två sista olikheterna fås  $0 \leq z \leq 2 - 2x - y$ . För att det ska finnas sådana  $(x,y,z)$  måste  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  och  $2 - 2x - y \geq 0$ . Då får vi följande område:

Figur 2

Då får vi att  $E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x, 0 \leq z \leq 2 - 2x - y\}$ . Nu kan vi till slut integrera!

$$\begin{aligned} \iiint_E z dV &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{2-2x-y} z dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-2x-y} dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (2-2x-y)^2 dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \frac{(2-2x-y)^3}{-3} \right]_{y=0}^{2-2x} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (2-2x)^3 dx \\ &= \frac{1}{6} \left[ \frac{(2-2x)^4}{4 \cdot (-2)} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{2^4}{4 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

"Fyra plus två plus två blir åtta."

– Randomsnubbe om trivialiteter

## 14.2 Cylindriska koordinater och trippelintegraler (15.7)

Cylindriska koordinater betecknas  $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$  och fås genom att byta ut  $(x, y)$  mot de polära koordinaterna  $(r, \theta)$ , d.v.s.  $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$ . Om vi har ett område  $E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, e(x, y) \leq z \leq e(x, y)\}$  där  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  är en polär rektangel med  $a \leq r \leq b$  och  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  följer av formlerna för upprepad integration av trippelintegraler och formeln för integration i polära koordinater för dubbelintegraler att

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_{e(r \cos(\theta), r \sin(\theta))}^{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} g(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dz d\theta dr.$$

Kort säger man ofta att  $dV = r dz d\theta dr$ .

**Exempel 33.** Beräkna  $\iiint_E z dV$  där  $E$  är området mellan konen  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z \geq 0$  och planet  $z = 1$ .

Vi såg förra veckan att om vi låter  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  är  $E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ .  $D$  ges i polära koordinater av  $0 \leq r \leq 1$  och  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Då får vi

$$\begin{aligned} \iiint_E z dV &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^1 z dz r d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{z^2 r}{2} \right]_{z=r}^1 d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r - r^3 dr d\theta dr \\ &= \pi \int_0^1 r - r^3 dr \\ &= \pi \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

## 15 Föreläsning 19-10-03

### 15.1 Trippelintegraler