0.1 Globala extremvärden (forts.)

Om $f(x,y)$ har ett globalt max-/min-värde i $(a,b) \in D$ och (a,b) inte är en randpunkt måste den vara ett lokalt min/max och därmed också en kritisk punkt (om f är deriverbar i (a,b)).

0.1.1 Metod för att bestämma globala max/min

Låt f vara en deriverbar funktion på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ där D är sluten och begränsad.

Globala max och min fås genom att jämföra funktionsvärden i följande kandidater:

1. Kritiska punkter i D
2. Randpunkter till D

Om man parametriserar randpunkterna till D med ett antal kurvor räcker det med följande kandidater i punkt 2 ovan:

2.1. Kritiska punkter när man ser f som en funktion av en variabel längs randkurvor

2.2. ”Hörn”, d.v.s. ändpunkter till randkurvorna

Exempel 1. Beräkna de globala max-/min-punkterna till funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2 - y$ på området $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Området är en halvcirkelskiva som ganska uppenbart är sluten och begränsad.

Figur 1

Vi börjar med att leta kritiska punkter: $\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y - 1 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0;0{,}5)$. Nu får vi kolla om den kritiska punkten ligger i D. $0^2 + (0{,}5)^2 = 0{,}25 \leq 1$ och $0{,}5 \geq 0$, så den ligger i D. $f(0;0{,}5) = -\frac{1}{4}$.

Nu ska vi titta på randpunkter, så vi börjar med att parametrisera randen. Vi delar upp det i det raka strecket (C_1) och i halvcirkelbågen (C_2) för enkelhetens skull.

$C_1 : \vec{r}_1(t) = \langle t, 0\rangle$ där $-1 \leq t \leq 1$.

$C_2 : \vec{r}_2(t) = \langle \cos(t), \sin(t)\rangle$ där $0 \leq t \leq \pi$.

Då tittar vi på kritiska punkter för randkurvorna, och vi börjar med C_1. $g_1(t) = f(\vec{r}_1(t)) = f(t,0) = t^2$. Kritiska punkter för g_1 är då $g_1'(t) = 0 \iff t = 0$. Det ger kandidaten $g_1(0) = f(0{,}0) = 0$. Nu kör vi på C_2. $g_2(t) = f(\vec{r}_2(t)) = f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) + \sin^2(t) - \sin(t) = 1 - \sin(t)$. Kritiska punkter är då $g_2'(t) = -\cos(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}$ (Fler punkter egentligen, men den här är den enda i vårt tillåtna intervall). Kandidaten är då $g_2(\frac{\pi}{2}) = f(0{,}1) = 0$.

Nästa steg är att titta på ”hörnen” $(-1,0)$ och $(1{,}0)$. $f(-1,0) = (-1)^2 + 0^2 - 0 = 1$ och $f(1{,}0) = 1^2 + 0^2 - 0 = 1$.

Allt som allt är vårt globala max $(\pm 1, 0)$ och vårt globala min $(0; 0{,}5)$.

0.2 Optimering under bivillkor och Lagrangemultiplikatorer (14.8)

Vi vill lösa följande slags problem: Beräkna max av $4x^2 + 4y$ när $(x{,}y)$ ligger på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$. En möjlighet är att parametrisera enhetscirkeln, t.ex. med $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle$ när $0 \leq t \leq 2\pi$ och hitta max av $g(t) = f(\vec{r}(t)) = 4\cos^2(t) + 4\sin(t)$ som vanligt.

En annan möjlighet är att se det som ett fall av optimering under bivillkor. Låt $f(x{,}y), g(x{,}y)$ vara definierade på någon mängd D. Vi vill hitta max och min av $f(x{,}y)$ på D under förutsättning att $g(x{,}y) = k$ där k är konstant. Villkoret $g(x{,}y) = k$ kallas för *bivillkor (constraint)*.

0.2.1 Metoden med Lagrangemultiplikatorer

För att hitta max och min till $f(x{,}y)$ under bivillkoret $g(x{,}y) = k$ (under förutsättning att extremvärden finns och $\nabla g(x{,}y) \neq 0$ på $g(x{,}y) = k$) gör man följande:

a) Hitta alla lösningar $(x{,}y)$ till $\begin{cases} \nabla f(x{,}y) = \lambda \cdot \nabla g(x{,}y) \\ g(x{,}y) = k \end{cases}$ för något λ (λ kallas för Lagrangemultiplikator).

b) Jämför $f(x{,}y)$ för alla lösningar $(x{,}y)$ från punkt a. Det största värdet ger max och det minsta ger min.

Anmärkning 1. Förutsättningen att extremvärden finns är uppfylld om $\{g(x{,}y) = k\}$ är sluten och begränsad. I kursen kommer vi bara att studera problem där extremvärden existerar.

Exempel 2. Hitta max och min till $f(x{,}y) = 4x^2 + 4y$ under bivillkoret $g(x{,}y) = x^2 + y^2 = 1$.

Enligt metoden ska vi då lösa ekvationssystemet $\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f_x = \lambda \cdot g_x \\ f_y = \lambda \cdot g_y \\ g^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x = \lambda \cdot 2x \\ 4 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ Den första ekvationen ger $8x = \lambda \cdot 2x \iff 4x = \lambda x \iff x = 0$ el. $\lambda = 4$. Första fallet ($x = 0$) ger genom ekvation 3 $y^2 = 1 \iff y = \pm 1$ vilket med ekvation 2 ger $\lambda = \frac{4}{2y} = \pm 2$. Här får vi komma ihåg att det ger två lösningar $(x{,}y{,}\lambda) = (0{,}1{,}2)$ och $(0{,}-1{,}-2)$. Andra fallet ger genom ekvation 2 $4 = 4 \cdot 2 \cdot y \iff y = \frac{1}{2}$. Ekvation 3 ger då $x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \iff x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vi kontrollerar att det ger de två lösningarna $(x,y,\lambda) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4)$. Med det får vi följande lösningar till det ursprungliga problemet:

$$
\begin{aligned}
f(0,1) &= 4 \\
f(0,-1) &= -4 \\
f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) &= 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 5 \\
f(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) &= 5
\end{aligned}
$$

Alltså har vi ett max på 5 i $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ och ett min på -4 i $(0,-1)$.