0.1 Kurvintegraler (16.2)

Definition 1 (Kurvintegraler)**.** Låt C vara en kurva med en parametrisering $\vec{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$ och $\vec{r}$ är glatt (smooth), d.v.s. att $\vec{r}'(t)$ existerar och är kontinuerlig. Låt också $f(x,y)$ vara definierad på hela C.

Kurvintegralen av f längs C är då arean under grafen $f(x,y)$ när (x,y) går längs C.

Formeln för att räkna ut kurvintegralen av f längs C (givet att f är kontinuerlig på C) är

$$\int_C f \mathrm{d}s = \int_a^b f(\vec{r}(t))|\vec{r}'(t)|\mathrm{d}t.$$

Härledning. Härledningen är lik härledningen för formeln för längden av kurvor. □

Om $f = 1$ är ovanstående formeln för längden av en kurva. $\mathrm{d}s$ brukar kallas *längdelement*. Formeln brukar förkortas $\mathrm{d}s = |\vec{r}'(t)|\mathrm{d}t$ vilket också är vad som används i formelbladet.

Anmärkning 1. Formeln för kurvintegraler är i termer av en parametrisering $\vec{r}(t)$ av en kurva C men i själva verket beror inte integralen av parametriseringen utan bara på C, d.v.s. punkterna $\{\vec{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$. Man kan därför välja vilken parametrisering som helst av C.

Exempel 1. Övre halvan av enhetscirkeln kan t.ex. parametriseras med $\vec{r}_1(t) = \langle \cos(t), \sin(t) \rangle$, $0 \leq t \leq 2\pi$ eller $\vec{r}_2(t) = \left\langle t, \sqrt{1-t^2} \right\rangle$, $-1 \leq t \leq 1$. Båda funkar för att kurvintegrera över.

Sats 1 (Massa och masscentrum för en kurva)**.** På liknande sätt som tidigare kan man härleda att om en tråd med densitet $\rho(x,y)$ går längs en kurva C är dess massa

$$m = \int_C \rho \mathrm{d}s$$

och dess masscentrum

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m} \right)$$

där $M_x = \int_C x\rho(x,y)\mathrm{d}s$ och $M_y = \int_C y\rho(x,y)\mathrm{d}s$.

0.2 Kurvintegraler av vektorfält (16.2)

Definition 2 (Arbete under konstant kraft)**.** I en dimension är *arbetet* utfört av en konstant kraft F på en partikel som förflyttar sig sträckan d

är

$$W = F \cdot d.$$

Det kan vara både positivt och negativt beroende på riktningarna på termerna.

I två/tre dimensioner, om en konstant kraft $\vec{F}$ verkar på en partikel som förflyttas från en punkt P till en punkt Q blir arbetet som utförs

$$\vec{F} \bullet \vec{PQ}.$$

Anta att vi har en kurva C som parametriseras av $\vec{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$ och $\vec{r}$ är glatt. Om vi har ett kraftfält $\vec{F}(x,y)$ som varierar vill vi att kurvintegralen av $\vec{F}$ längs C ska ge arbetet som $\vec{F}$ utför på en partikel som rör sig längs C från $\vec{r}(a)$ till $\vec{r}(b)$. Med Riemannsummor kan man härleda följande formel, se kapitel 16.2 i boken för härledning.

Definition 3 (Kurvintegral av ett vektorfält)**.** *Kurvintegralen* av ett vektorfält $\vec{F}$ längs en kurva C som parametriseras av $\vec{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$ är

$$\int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t)\mathrm{d}t.$$

Det brukar förkortas som $\mathrm{d}\vec{r}(t) = \vec{r}'(t)\mathrm{d}t$ vilket är hur det skrivs på formelbladet.

Exempel 2. Beräkna arbetet som utförs av kraftfältet $\vec{F} = \langle 0, -2y \rangle$ på en partikel som rör sig längs en kurva C som ges av $\vec{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t) \rangle$ när $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Arbetet ges av $W = \int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{r}$. Vi börjar med att räkna ut $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(\cos t, \sin t) = \langle 0, -2\sin t \rangle$ och $\vec{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t \rangle$. Då får vi att $\vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t) = 0 \cdot (-\sin t) + (-2 \sin t \cos t) = -\sin(2t)$.

Arbetet blir då

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{r} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(2t)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\cos(\pi) - \cos(0)}{2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

0.3 Huvudsatsen för kurvintegraler (16.3)

Sats 2 (Huvudsatsen för kurvintegraler)**.** Anta att C är en kurva som ges av $\vec{r}(t)$ när $a \leq t \leq b$ och att f är en funktion så att ∇f är kontinuerlig längs C.

Då är

$$\int_C \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Om $\vec{r}(t) = \langle t, 0 \rangle$ och om f bara beror på x blir detta integralkalkylens fundamentalsats.

Bevis. Satsen i allmänhet följer av specialfallet ovan och av kedjeregeln. Beviset finns i kapitel 16.3 i boken. □

Definition 4 (Konservativa vektorfält och potential)**.** Ett vektorfält $\vec{F}$ är *konservativt* om $\vec{F} = \nabla f$ för någon funktion f. f kallas för en *potential* till $\vec{F}$.

Konservativa vektorfält är alltså lätta att integrera. Men hur avgör man om ett vektorfält är konservativt?

Sats 3 (Villkor för konservativa vektorfält)**.** Om vi antar att vi har ett konservativt vektorfält $\vec{F} = \langle P, Q \rangle = \nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$ och att f har kontinuerliga partiella andraderivator så är $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Alltså måste

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

om $\vec{F}$ är konservativt.

Vi ska nu se att villkoret ibland medför att $\vec{F}$ är konservativt.

Definition 5 (Sluten kurva)**.** En *sluten* (closed) kurva börjar och slutar i samma punkt.

Definition 6 (Enkel kurva)**.** En *enkel* kurva (simple) korsar aldrig sig själv.

Definition 7 (Enkelt sammanhängande mängd)**.** En mängd D är *enkelt sammanhängande* om den ”inte innehåller några hål”. Mer precist säger vi att för alla enkla slutna kurvor C i $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ligger alla punkter innanför C också i D.