0.1 Densitet, massa och masscentrum (15.4)

Låt D vara en tunn skiva (lamina) som representeras av $D \subseteq \mathbb{R}^2$ med densitet $\rho(x,y)$. $\rho(x,y)$ är gränsvärdet när $\epsilon \to 0$ för densiteten av en kvadrat A_ϵ med sidlängd ϵ och centrum i (x,y).

Om E är ett litet område kring punkten (x,y) bör $\rho(x,y)$ vara detsamma oberoende av E. För ett sådant område blir då

$$\text{massa}(E) \approx \rho(x,y) \cdot \text{area}(E). \tag{1}$$

M.h.a. ρ vill vi beskriva massan på och masscentrum i D ovan.

0.1.1 Massa

Vi börjar med att anta att D är en rektangel med $\rho(x,y) = 0$ om $(x,y) \notin D$. Då delar vi in D i $M \times N$ stycken lika stora delrektanglar R_{ij} där $i \in \{1, \ldots, M\}$ och $j \in \{1, \ldots, N\}$ med area ΔR och $(x_{ij}, y_{ij}) \in R_{ij}$. Om M och N är stora blir varje R_{ij} litet, så att från ekvation 1 ovan får vi $\text{massa}(R_{ij}) \approx \rho(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta R$. Total massan är då $m = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \text{massa}(R_{ij}) \approx \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \rho(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta R = \iint_D \rho(x,y) \mathrm{d}A$. Uppskattningen för massan blir också bättre och bättre när $M, N \to \infty$.

Sats 1 (Massa för område)**.** För en skiva $D \subseteq \mathbb{R}^2$ med densitet $rho(x,y)$ i varje punkt (x,y) är den totala massan $m = \iint_D \rho(x,y) \mathrm{d}A$.

Bevis. Bevis finns ovan. □

0.1.2 Masscentrum

Definition 1 (Moment)**.** *Momentet* med avseende på x-axeln kring en punkt $x = a$ för en partikel med position (x,y) och massa m är $m(x - a)$.

Definition 2 (Jämvikt av moment)**.** En samling partiklar med positioner (x_i, y_i) och massor m_i där $i \in \{1, \ldots, n\}$ är i *jämvikt* kring $x = a$ om dess totala moment $\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - a) = 0$.

Motsvarande definition funkar även i y-led.

Sats 2 (Totalt moment för en skiva och jämvikt)**.** Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en tunn skiva med densitet $\rho(x,y)$.

Dess totala moment med avseende på x-axeln kring $x = a$ är då $\iint_D (x - a)\rho(x,y) \mathrm{d}A$.

Samma sak funkar igen även för y-led.

Om $\iint_D (x-a)\rho(x,y)\mathrm{d}A = \iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}A - a\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}A = 0$ är skivan i jämvikt.

Bevis. Härleds på samma sätt som för massan. □

Definition 3 (Moment kring x-axeln)**.** Momentet med avseende på x-axeln kring $x = 0$ är $M_x = \iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}A$.

Sats 3 (Masscentrum)**.** För en skiva $D \subseteq \mathbb{R}^2$ med densitet $\rho(x,y)$ är dess *masscentrum* $(\overline{x}, \overline{y})$ där $\overline{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}A$ och $\overline{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}A$.

Exempel 1. Beräkna massan och masscentrum för triangeln D med hörn i (0,0), (1,0) och (0,1) med konstant densitet $\rho(x,y) = 1$.

$m = \iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}A = \iint 1\mathrm{d}A = \frac{1}{2}$.

För att räkna ut M_x måste vi kunna beskriva randerna till D. Vi noterar att hypotenusan till triangeln beskrivs av $y = 1-x$ så att $D\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$ och därmed

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}A \\ &= \iint_d x\mathrm{d}A \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x \int_0^{1-x} 1\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x \cdot (1-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x - x^2\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Då har vi x-koordinaten för masscentrum $\overline{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{M_x}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

I och med att triangeln är symmetrisk måste $M_y = M_x = \frac{1}{3}$ och därmed är masscentrum $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Man kan självklart räkna ut M_y på samma sätt, men det behövs inte här.

Sats 4 (Masscentrum för triangel)**.** I en triangel, om densiteten är konstant, är masscentrumet skärningspunkten för triangelns medianer, d.v.s. linjerna från triangelns hörn till mitten av motstående sida.

0.2 Medelvärden

Sats 5 (Medelvärde av en funktion)**.** Låt $f(x,y)$ vara definierad på en mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Då är dess *medelvärde* $\frac{\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A}{\iint_D 1\mathrm{d}A} = \frac{\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A}{\mathrm{area}(D)}$.

Speciellt, om D är en skiva med konstant densitet $\rho(x,y) = 1$ är komponenterna i dess masscentrum $(\overline{x}, \overline{y})$ medelvärdet av x och y på D.

0.3 Arean av grafen till en funktion (15.5)

Låt $f(x,y)$ vara definierad på D, då ger den en yta (dess graf) $z = f(x,y)$ där $(x,y) \in D$.

Sats 6 (Arean av en graf)**.** $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\mathrm{d}A$.

Bevis. Inte idag. $\square$

Jämför med längden av en graf $y = f(x)$ där $a \leq x \leq b$: $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$.

Nästa vecka pratar vi om en formel för mer allmänna ytor och kort om varför den ser ut som den gör.

Exempel 2. Bestäm arean av grafen $z = f(x,y)$ där $(x,y) \in D$, $f(x,y) = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$ och $D = [0,1] \times [0,2]$.

$f_x = \frac{2}{3}\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. På samma sätt blir $f_y = \sqrt{y}$.

$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2} = \sqrt{1 + x + y}$ ger $A \iint_D \sqrt{1 + x + y}\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{1 + x + y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \cdots = \frac{4}{15}(33 - 4\sqrt{2} - 9\sqrt{3})$.