0.1 Rotation av vektorfält (16.5)

Definition 1 (Rotation (curl) av vektorfält)**.** *Rotationen* av ett vektorfält $\vec{F} = \langle P,Q,R \rangle$ i $\mathbb{R}^3$ är

$$\text{rot}\vec{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{F} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle$$

Formeln är kryssprodukten mellan $\boldsymbol{\nabla}$ och $\vec{F}$.

Rotation används bland annat för att formulera två av Maxwells lagar i elektromagnetism.

Sats 1 (Rotation av gradient)**.** Om f är en funktion med kontinuerliga partiella andraderivator blir $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right\rangle =$ $\langle 0,0,0 \rangle$ enligt Clairauts sats.

Sats 2. Om $\vec{F}$ är ett vektorfält på $\mathbb{R}^3$ vars komponenter har kontinuerliga partiella derivator och $\boldsymbol{\nabla} \times \vec{F} = \langle 0,0,0 \rangle$ så är $\vec{F}$ konservativt, d.v.s. $\vec{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ för någon funktion f.

Detta gäller mer allmänt på områden i $\mathbb{R}^3$ som är enkelt sammanhängande, d.v.s. ”utan hål”. Det är mer invecklat att definiera i tre dimensioner än två, och vi gör det inte här.

Vi kan använda en liknande metod som i $\mathbb{R}^2$ för att hitta en potential.

Exempel 1. Låt $\vec{F} = \langle z,2y,x + 2z \rangle$ vara ett konservativt vektorfält. Bestäm en potential till $\vec{F}$.

Vi vill alltså lösa $\begin{cases} f_x = z & \text{(i)} \\ f_y = 2y & \text{(ii)} \\ f_z = x + 2z & \text{(iii)} \end{cases}$

En lösning till (i) är $f_0 = xz$ och utifrån det är den allmänna lösningen $f = xz + g(y,z)$ (*). Vi sätter in den i (ii) och får $2y = f_y = \{\text{enligt (*)}\} = \frac{\partial}{\partial y}(xz + g(y,z)) = g_y(y,z)$. En lösning för g_0 är $g_0 = y^z$ och därmed är den allmänna lösningen $g(y,z) = y^2 + h(z)$. Om vi stoppar in den i (*) fås $f(x,y,z) = xz + g(y,z) = xz + y^2 + h(z)$ (**). Om vi sätter in det i (iii) får vi $x + 2z = f_z = \frac{\partial}{\partial z}\big(xz + y^2 + h(z)\big)$ och därmed $x + 2z = x + h'(z) \implies h'(z) = 2z \implies h(z) = z^2 + C$. Då får vi genom att gå tillbaka till (**) att $f(x,y,z) = xz + g(yz) = xz + y^2 + h(z) = xz + y^2 + z^2 + C$ vilket är en potential till $\vec{F}$, vilket man vanligtvis bör kontrollera.

0.2 Stokes sats

Definition 2 (Positivt orienterad rand till en yta i $\mathbb{R}^3$)**.** Låt S vara en yta i $\mathbb{R}^3$ som parametriseras av $\vec{r}(u,v)$ där $(u,v) \in D$. Randen ∂S till ytan S är bilden av randen ∂D till D.

En orientering $\vec{n}$ av S ger en orientering av ∂S genom att man går moturs längs ∂S runt $\vec{n}$. Om ∂S har den orienteringen så säger man att den är *positivt orienterad.*

Sats 3 (Stokes sats)**.** Låt S vara en orienterad yta i $\mathbb{R}^3$ och anta att dess rand $C = \partial S$ är en enkel, sluten och positivt orienterad kurva. Låt också $\vec{F}$ vara ett vektorfält med kontinuerliga partiella derivator.

Då gäller att

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times F) \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Om ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kan det också ses som en yta $S = \{(x,y,0) \mid (x,y) \in D\}$ i $\mathbb{R}^3$. I detta fallet är Greens formel för D samma som Stokes sats för S. Mer om det i anteckningarna på kurshemsidan.

Anmärkning 1. Man ser på liknande sätt som att $\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla}\vec{F}\right) = 0$ också att $\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \times \vec{F}\right) =$, d.v.s. att $\vec{G} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{F}$ är källfritt.

Omvänt gäller på $\mathbb{R}^3$ eller andra ”lämpliga områden” $E \subseteq \mathbb{R}^3$ att om $\vec{G}$ är källfritt, d.v.s. om $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{G} = 0$ så är $\vec{G} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{F}$ för något vektorfält $\vec{F}$.

Inom framför allt fysik är det ett vanligt krav/antagande att vektorfält är källfria, vilket ger relevanta exempel när Stokes sats är tillämpbar och användbar.