0.1 Gränsvärden i flera variabler (14.2)

Def. 1 (Gränsvärden i flera variabler (Formell))**.** En funktion $f(x,y)$ har *gränsvärde* L när (x,y) går mot (a,b), vilket skrivs $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, om $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ s.a. om $0 < |(x,y) - (a,b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ så är $|f(x,y) - L| < \epsilon$.

Def. 2 (Gränsvärden i flera variabler (Informell))**.** $f(x,y)$ är hur nära L som helst så länge (x,y) är tillräckligt nära (a,b). Liknande, men mer oprecist: $f(x,y)$ närmar sig L när (x,y) närmar sig (a,b).

0.1.1 Räkneregler

Anta $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$. Då gäller

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L + M$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L \cdot M$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \text{ (Endast om } g(x,y) \neq 0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$$

Om $h(t)$ en funktion och $\lim\limits_{t\to L} h(t) = K$ så är

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(f(x,y)) = K.$$

Instängningsregeln/Squeeze theorem: Om $\forall x, y : f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$ gäller

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L.$$

Ex. 1. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ om det existerar.

Naivt kan man säga $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$ och därmed anta att gränsvärdet inte existerar. Dock kan vi förenkla

$$
\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} \\
=&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \\
=&\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2-y^2 \\
=&0^2-0^2 \\
=&0.
\end{aligned}
$$

Ex. 2. Visa att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$.

Inse först att $\forall x,y : 0 \leq \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ och $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = y^2\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq y^2\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = y^2$. Enligt instängingsregeln är $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$ eftersom $0 \leq \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq y^2$ och $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$.

Ex. 3. Låt $g(x,y) = \dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2-1}$. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x,y)$ om det existerar.

Om $f(x,y) = x^2+y^2$ och $h(t) = \dfrac{\ln(t)}{t-1}$ så är $g(x,y) = h(f(x,y))$. Eftersom $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0^2+1^2 = 1$ får vi $\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x,y) = \lim_{t\to1} h(t) = \lim_{t\to1} \dfrac{\ln(t)}{t-1} = 1$. Sista steget är ett standardgränsvärde eller går att räkna ut med l'Hospitals regel.

Om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ måste gränsvärdet av f när man närmar sig punkten (a,b) längs alla räta linjer genom (a,b) vara L. Sådana räta linjer ges av $\vec{r}(t) = \langle a+kt, b+lt\rangle$. $\vec{r}(t)$ går mot (a,b) när $t \to 0$. Detta ger en metod för att se när gränsvärden inte existerar och vad gränsvärdet måste vara om det existerar, men inte att det existerar.

Ex. 4. Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ om det existerar.

Låt $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Vi prövar vad som händer när $(x,y) \to (0,0)$ längs x-axeln och y-axeln.

x-axeln: $\vec{r}_1(t) = \langle t, 0\rangle \to \langle 0,0\rangle$ när $t \to 0$. $f(\vec{r}_1(t)) = f(t,0) = \dfrac{t^2-0^2}{t^2+0^2} = 1$ när $t \to 0$.

y-axeln: $\vec{r}_2(t) = \langle 0, t\rangle \to \langle 0,0\rangle$ när $t \to 0$. $f(\vec{r}_2(t)) = f(0,t) = \dfrac{0^2-t^2}{0^2+t^2} = -1$ när $t \to 0$.

Eftersom dessa gränsvärden är olika existerar inte gränsvärdet för $f(x,y)$.

0.2 Kontinuitet

Def. 3 (Kontinuitet i en punkt)**.** En funktion $f(x,y)$ är *kontinuerlig* i en punkt (a,b) om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Def. 4 (Kontinuitet på ett område)**.** f är kontinuerlig på ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ om f är kontinuerlig på alla punkter $(a,b) \in D$. Man säger att f är kontinuerlig om den är kontinuerlig för alla punkter i sin definitionsmängd.