

Föreläsningsanteckningar
Matematisk analys i flera variabler
LMA017

Hugo Simonsson

1 oktober 2019

Innehåll

1	Föreläsning 19-09-03	6
1.1	Inledning	6
1.2	Kurvor i rummet eller planet (13.1)	6
1.3	Derivator av vektorvärda funktioner och tangentlinjer (13.2) . . .	6
2	Föreläsning 19-09-05	7
2.1	Funktioner av flera variabler (14.1)	7
2.2	Annat sätt att visualisera en funktion	8
2.3	Funktioner av tre variabler	10
3	Föreläsning 19-09-06	10
3.1	Gränsvärden i flera variabler (14.2)	10
3.1.1	Räkneregler	11
3.2	Kontinuitet	12
4	Föreläsning 19-09-10	12
4.1	Partiella derivator och annat	12
5	Föreläsning 19-09-12	13
5.1	Tangentplan	13
5.2	Differentierbarhet (14.4)	13
5.2.1	En variabel	13
5.2.2	Fler variabler	13
5.3	Kedjeregeln (14.5)	14
5.3.1	En variabel	14
5.3.2	Två variabler	14
5.3.3	Två variabler (variant)	14
5.4	Rikttningsderivator och gradienter (14.6)	15
6	Föreläsning 19-09-13	15
6.1	Rikttningsderivator och gradienter	15
6.2	Tangentplan till nivåytor (14.6)	16
6.3	Lokala extremvärden	17
7	Föreläsning 19-09-17	18
7.1	Lokala extremvärden forts.	18
7.2	Globala extremvärden (14.7)	20
8	Föreläsning 19-09-18	20
8.1	Globala extremvärden (forts.)	20
8.1.1	Metod för att bestämma globala max/min	21
8.2	Optimering under bivillkor och Lagrangemultiplikatorer (14.8) .	22
8.2.1	Metoden med Lagrangemultiplikatorer	22
9	Föreläsning 19-09-20	23
9.1	Längd av kurvor (10.2, 13.3)	23
9.2	Rörelse av partiklar i rummet (13.4)	23

10 Föreläsning 19-09-24	24
11 Föreläsning 19-09-25	24
12 Föreläsning 19-09-27	25
12.1 Integraler över allmänna områden (forts.)	25
12.2 Dubbelintegraler och polära koordinater (15.3)	25
12.2.1 Polära koordinater	25
12.2.2 Integration i polära koordinater	26
13 Föreläsning 19-09-30	27
13.1 Densitet, massa och masscentrum (15.4)	27
13.1.1 Massa	28
13.1.2 Masscentrum	28
13.2 Medelvärden	29
13.3 Areal av grafen till en funktion (15.5)	30
14 Föreläsning 19-10-01	30
14.1 Trippelintegraler	30
14.1.1 Upprepad integration i trippelintegraler	30
14.2 Cylindriska koordinater och trippelintegraler (15.7)	32

List of Theorems

1	Definition (Kurvor i rummet och deras parametrisering)	6
2	Definition (Derivatan av vektorvärda funktioner)	6
3	Definition (Tangentvektor och tangentlinje till linjer)	7
4	Definition (Funktioner av två variabler, definitions mängd och vär- demängd)	7
5	Definition (Graf)	7
6	Definition (Nivåkurva)	8
7	Definition (Gränsvärden i flera variabler (Formell))	10
8	Definition (Gränsvärden i flera variabler (Informell))	11
9	Definition (Kontinuitet i en punkt)	12
10	Definition (Kontinuitet på ett område)	12
11	Definition (Deriverbarhet/Differentierbarhet)	14
1	Sats (Kontinuitet och deriverbarhet)	14
12	Definition (Rikttningsderivata)	15
13	Definition (Gradient)	15
2	Sats (Deriverbarhet, rikttningsvektor och gradient)	15
3	Sats (Största värde för rikttningsderivata)	16
14	Definition (Tangentplan till nivåyta)	17
15	Definition (Lokalt maximum)	17
16	Definition (Absolut/Globalt maximum)	17
17	Definition (Lokalt minimum)	17
18	Definition (Absolut/Globalt minimum)	17
19	Definition (Extremvärde)	17
4	Sats (Extremvärde i en punkt)	17
20	Definition (Kritiska/stationära punkter)	18
5	Sats (Test för lokala extrempunkter i två variabler)	18
21	Definition (Randpunkter)	20
22	Definition (Slutna mängder)	20
23	Definition (Begränsade mängder)	20
6	Sats (Existens av globala max- och minpunkter)	20
7	Sats (Längd av en kurva)	23
8	Sats (Längden av en graf)	23
24	Definition (Hastighetsvektor och fart)	23
25	Definition (Accelerationsvektor)	24
9	Sats (Newtons andra lag)	24
10	Sats (Volym mellan grafer)	25
26	Definition (Polära rektanglar och deras area)	26
11	Sats (Integration av polära rektanglar)	26
12	Sats (Massa för område)	28
27	Definition (Moment)	28
28	Definition (Jämvikt av moment)	28
13	Sats (Totalt moment för en skiva och jämvikt)	28
29	Definition (Moment kring x -axeln)	28
14	Sats (Masscentrum)	28
15	Sats (Masscentrum för triangel)	29
16	Sats (Medelvärde av en funktion)	29
17	Sats (Arean av en graf)	30

30	Definition (Trippelintegraler)	30
----	--	----

1 Föreläsning 19-09-03

1.1 Inledning

Punkter i planet \mathbb{R}^2 beskrivs med två koordinater, oftast (x, y) . Punkter i rummet \mathbb{R}^3 beskrivs med tre koordinater, oftast (x, y, z) .

I envariabelanalys studerar man funktioner $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, då är det naturligt att också studera vektorvärda funktioner $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. $f = \langle f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m) \rangle$ har n komponenter och m variabler. Detta är dock för allmänt, i kursen ska vi studera viktiga specialfall:

$n = 2, 3, m = 1 : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ så att $f(t) = \langle f_1(t), f_2(t) \rangle$. En variabel t bestämmer två komponenter $f_1(t)$ och $f_2(t)$.

$n = 1, n = 2, 3 : f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) \in \mathbb{R}$ så att två variabler x, y bestämmer en komponent/tal $f(x, y)$.

$n = m = 2, 3 : f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dessa kallas vektorfält.

1.2 Kurvor i rummet eller planet (13.1)

Definition 1 (Kurvor i rummet och deras parametrisering). En *kurva* C i planet är alla punkter vars position ges av $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ där $x(t), y(t)$ är kontinuerliga funktioner på något intervall. $\vec{r}(t)$ kallas en *parametrisering* av C .

Motsvarande definition av kurvor i rummet.

Exempel 1. En rät linje genom en punkt (x_0, y_0) med riktningsvektor $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ är en kurva som kan parametriseras av $\vec{r}(t) = \langle x_0 + tv_1, y_0 + tv_2 \rangle$.

Om $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ är definierad för t nära t_0 ges *gränsvärdet* av $\vec{r}(t)$ när t går mot t_0 av $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) \right\rangle$ om gränsvärdena i högerledet existerar.

1.3 Derivator av vektorvärda funktioner och tangentlinjer (13.2)

Definition 2 (Derivatan av vektorvärda funktioner). *Derivatan* av $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ är $\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$ om gränsvärdet existerar.

Om $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ gäller att om $x(t)$ och $y(t)$ är deriverbara så är $\vec{r}'(t) = \left\langle \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right\rangle = \langle x'(t), y'(t) \rangle$

Exempel 2. Låt $\vec{r}(t) = \langle 2t, \sqrt{t} \rangle$. Beräkna $\vec{r}'(t)$.

$$\vec{r}'(t) = \left\langle \frac{d}{dt}(2t), \frac{d}{dt}(\sqrt{t}) \right\rangle = \left\langle 2, \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \right\rangle = \left\langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right\rangle$$

Definition 3 (Tangentvektor och tangentlinje till linjer). $\vec{r}'(t)$ kallas för *tangentvektor* till $\vec{r}(t)$ och linjen genom $P = \vec{r}(t_0)$ med riktningsvektor $\vec{r}'(t)$ kallas för *tangentlinjen* till \vec{r} i P . Tangentlinjen ges av $L(t) = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}'(t_0)$.

Exempel 3. Bestäm tangentlinjen till $\vec{r}(t) = \langle 2t, \sqrt{t} \rangle$ i punkten $P = \vec{r}(4) = \langle 2 \cdot 4, \sqrt{4} \rangle = \langle 8, 2 \rangle$. Tangentvektor $\vec{r}'(t) = \left\langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right\rangle \implies \vec{r}'(4) = \left\langle 2, \frac{1}{4} \right\rangle$. Tangentlinjen $L(t) = \langle 8, 2 \rangle + t \cdot \left\langle 2, \frac{1}{4} \right\rangle = \left\langle 8 + 2t, 2 + \frac{t}{4} \right\rangle$

2 Föreläsning 19-09-05

2.1 Funktioner av flera variabler (14.1)

Definition 4 (Funktioner av två variabler, definitionsmängd och värdemängd). En (reellvärd) *funktion av två variabler* är en regel som för varje $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ ger ett reellt tal $f(x, y)$. D kallas för *definitionsmängd* (domain) till f och $\{f(x, y) | (x, y) \in D\}$ kallas *värdemängden* (range) till f . Skriver $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Exempel 4. Mest grundläggande: koordinatfunktionerna x och y .

Exempel 5. Om $f(x, y), g(x, y)$ är funktioner kan vi skapa nya funktioner:

$$f(x, y) + g(x, y)$$

$$f(x, y) \cdot g(x, y)$$

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \text{ (Endast definierad där } g(x, y) \neq 0 \text{)}$$

$$\sin(f(x, y)) \dots$$

$$\sqrt{f(x, y)}, \ln(f(x, y)), \dots \text{ (Endast definierad där } f(x, y) \geq 0 \text{ respektive } f(x, y) > 0 \text{)}$$

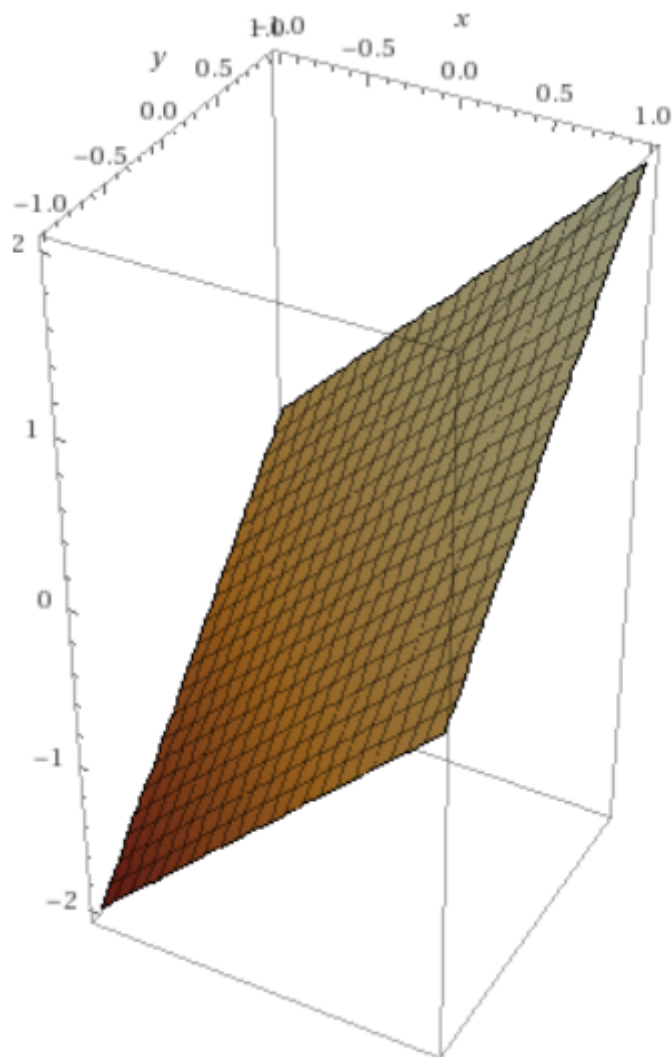
Definition 5 (Graf). *Grafen* till $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$ är alla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s.a. $z = f(x, y), (x, y) \in D$.

Exempel 6. Rita grafen till $f(x, y) = x + y$.

Provar att rita längs några räta linjer:

$$f(x, 0) = x, f(x, 1) = x + 1, f(x, 2) = x + 2$$

$$f(0, y) = y, f(1, y) = y + 1, f(2, y) = y + 2$$



2.2 Annat sätt att visualisera en funktion

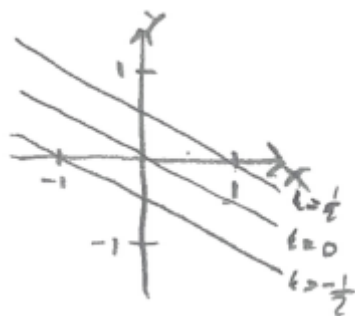
Definition 6 (Nivåkurva). En *nivåkurva* till en funktion $f(x,y)$ består av alla punkter (x,y) s.a. $f(x,y) = k$ för ett givet värde $k \in \mathbb{R}$.

Ritar man nivåkurvor för olika värden på k får man en *höjdkarta* (contour map) som kan användas för att bättre förstå funktionen.

Beskriv nivåkurvorna och rita höjdkartor för olika funktioner.

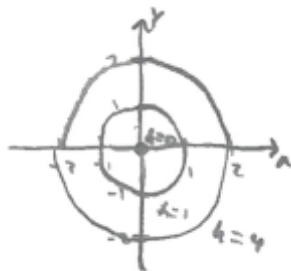
Exempel 7. $f(x,y) = x + 2y$

$f(x,y) = x + 2y = k \iff y = -\frac{x}{2} + \frac{k}{2}$ vilket är en rät linje med lutning $-\frac{1}{2}$ som skär y -axeln i $\frac{k}{2}$.



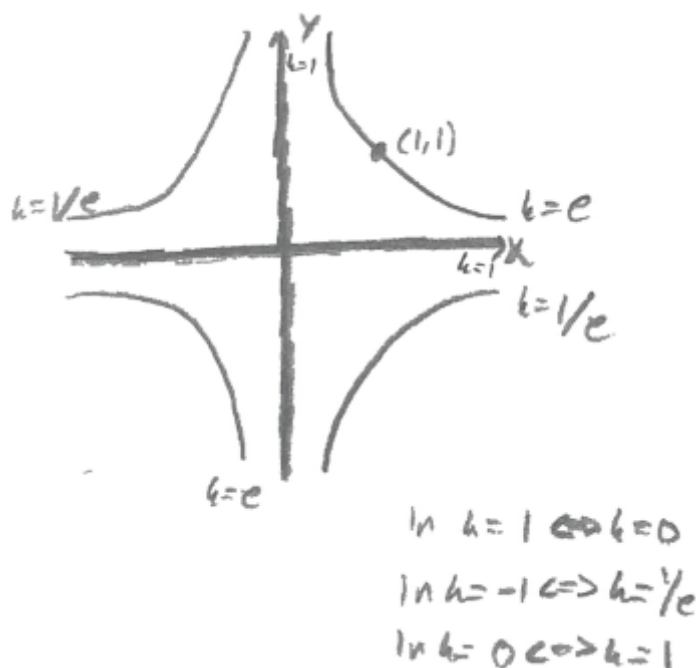
Exempel 8. $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f(x,y) = x^2 + y^2 = k$ ger att om $k < 0$ har vi en tom nivåkurva. Anta dock $k \geq 0$, då är $x^2 + y^2 = k = (\sqrt{k})^2$ vilket är en cirkel med radie \sqrt{k} och origo i $(0,0)$.



Exempel 9. $f(x,y) = e^{xy}$

$f(x,y) = e^{xy} = k$ ger att om $k \leq 0$ har vi en tom nivåkurva. Anta dock $k > 0$, då får vi $e^{xy} = k \iff xy = \ln(k)$. Nu har vi två fall, om $x \neq 0$ får vi $y = \frac{\ln(k)}{x}$ och om $x = 0$ får vi $0 = \ln(k) \iff k = 1$.



2.3 Funktioner av tre variabler

Kan på liknande sätt studera funktioner av tre variabler $f(x,y,z)$. Dock befinner sig dess graf $w = f(x,y,z)$ i ett rum med fyra dimensioner vilket är lite svårt att rita. Däremot är nivåytorna $f(x,y,z) = k$ fortsatt användbara och kan visualiseras i vissa enkla fall.

Exempel 10. Beskriv nivåkurvorna till $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2$ vilket är avståndet från punkten (x,y,z) till origo i kvadrat. Då får vi att nivåytorna för varje k är antingen tom om $k < 0$ och sfären med radie \sqrt{k} och centrum i origo om $k \geq 0$.

3 Föreläsning 19-09-06

3.1 Gränsvärden i flera variabler (14.2)

Definition 7 (Gränsvärden i flera variabler (Formell)). En funktion $f(x,y)$ har gränsvärde L när (x,y) går mot (a,b) , vilket skrivs $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$, om $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.a. om $0 < |(x,y) - (a,b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ så är $|f(x,y) - L| < \epsilon$.

Definition 8 (Gränsvärden i flera variabler (Informell)). $f(x,y)$ är hur nära L som helst så länge (x,y) är tillräckligt nära (a,b) . Liknande, men mer oprecist: $f(x,y)$ närmar sig L när (x,y) närmar sig (a,b) .

3.1.1 Räkneregler

Anta $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ och $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M$. Då gäller

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) + g(x,y) &= L + M \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) &= L \cdot M \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} &= \frac{L}{M} \text{ (Endast om } g(x,y) \neq 0) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x &= a \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y &= b\end{aligned}$$

Om $h(t)$ en funktion och $\lim_{t \rightarrow L} h(t) = K$ så är

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(f(x,y)) = K.$$

Instängningsregeln/Squeeze theorem: Om $\forall x, y : f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ och $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x,y)$ gäller

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = L.$$

Exempel 11. Beräkna $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ om det existerar.

Naivt kan man säga $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$ och därmed anta att gränsvärdet inte existerar. Dock kan vi förenkla

$$\begin{aligned}& \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - y^2 \\ &= 0^2 - 0^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exempel 12. Visa att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Inse först att $\forall x, y : 0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ och $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = y^2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq y^2 \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = y^2$.

Enligt instängningsregeln är $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$ eftersom $0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq y^2$ och $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 = 0$.

Exempel 13. Låt $g(x,y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - 1}$. Beräkna $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} g(x,y)$ om det existerar.

Om $f(x,y) = x^2 + y^2$ och $h(t) = \frac{\ln(t)}{t-1}$ så är $g(x,y) = h(f(x,y))$. Eftersom $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y) = 0^2 + 1^2 = 1$ får vi $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} g(x,y) = \lim_{t \rightarrow 1} h(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1$. Sista steget är ett standardgränsvärde eller går att räkna ut med l'Hospitals regel.

Om $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ måste gränsvärdet av f när man närmar sig punkten (a,b) längs alla räta linjer genom (a,b) vara L . Sådana räta linjer ges av $\vec{r}(t) = \langle a + kt, b + lt \rangle$. $\vec{r}(t)$ går mot (a,b) när $t \rightarrow 0$. Detta ger en metod för att se när gränsvärden inte existerar och vad gränsvärdet måste vara om det existerar, men inte att det existerar.

Exempel 14. Beräkna $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ om det existerar.

Låt $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Vi prövar vad som händer när $(x,y) \rightarrow (0,0)$ längs x -axeln och y -axeln.

x -axeln: $\vec{r}_1(t) = \langle t, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0 \rangle$ när $t \rightarrow 0$. $f(\vec{r}_1(t)) = f(t, 0) = \frac{t^2 - 0^2}{t^2 + 0^2} = 1$ när $t \rightarrow 0$.

y -axeln: $\vec{r}_2(t) = \langle 0, t \rangle \rightarrow \langle 0, 0 \rangle$ när $t \rightarrow 0$. $f(\vec{r}_2(t)) = f(0, t) = \frac{0^2 - t^2}{0^2 + t^2} = -1$ när $t \rightarrow 0$.

Eftersom dessa gränsvärden är olika existerar inte gränsvärdet för $f(x,y)$.

3.2 Kontinuitet

Definition 9 (Kontinuitet i en punkt). En funktion $f(x,y)$ är *kontinuerlig* i en punkt (a,b) om $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Definition 10 (Kontinuitet på ett område). f är kontinuerlig på ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ om f är kontinuerlig på alla punkter $(a,b) \in D$. Man säger att f är kontinuerlig om den är kontinuerlig för alla punkter i sin definitionsomängd.

4 Föreläsning 19-09-10

4.1 Partiella derivator och annat

Missade föreläsningen, det kommer anteckningar här kanske.

5 Föreläsning 19-09-12

5.1 Tangentplan

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Exempel 15 (Tangentplan). Beräkna tangentplanet till $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ i punkten $(3,4)$. Bestäm också lineariseringen av f i $(3,4)$ och använd den för att approximera $f(3,01; 3,98)$.

Vi börjar med att räkna ut $f(3,4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Vi behöver också de partiella derivatorna till f och deras värden i $(3,4)$: $f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f_x(3,4) = \frac{3}{5}$, $f_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$ och $f_y(3,4) = \frac{4}{5}$.

Tangentplanet är då

$$z = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4).$$

$L(x,y) = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)$. är lineariseringen av f . Det är en approximation nära $(3,4)$.

Vi ska uppskatta $f(3,01; 3,98) \approx L(3,01; 3,98) = 5 + \frac{3}{5}(3,01-3) + \frac{4}{5}(3,98-4) = 5 + \frac{3}{5} \cdot 0,01 + \frac{4}{5} \cdot (-0,02) = 4,99$. Det verkliga värdet $f(3,01; 3,98) = 4,990040 \dots$ vilket är en rätt bra approximation.

5.2 Differentierbarhet (14.4)

5.2.1 En variabel

I en variabel gäller att om $f'(a)$ existerar kan man visa (finns i föreläsningssanteckningarna) att $f(x) = L(x) + \epsilon(x)(x-a)$ där $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ och $\epsilon(x) \rightarrow 0$ när $x \rightarrow a$. Det säger att om $f'(a)$ existerar är L en bra approximation av f nära a för $f(x) \rightarrow 0$ snabbare än alla linjära funktioner/förstgradspolynom (Och L är den enda linjära funktionen som uppfyller detta, alltså är L den "bästa" approximationen av f med en linjär funktion.)

5.2.2 Fler variabler

Exempel 16. Låt $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ om $(x,y) \neq (0,0)$, 0 annars. $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 0$ och $f_y(0,0) = 0$. Dess linearisering kring $(0,0)$ är då $L(x,y) = 0$. Vi kollar exempelvis längs linjen $f(t,t)$. $f(t,t) - L(t,t) = \frac{t^2}{t^2 + t^2} - 0 = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$, alltså är L inte en bra approximation av f nära $(0,0)$ trots att de partiella derivatorna existerar i den punkten.

Många resultat bygger på att L är en bra approximation av f . Vi inför därför följande definition:

Definition 11 (Deriverbarhet/Differentierbarhet). $f(x,y)$ är *deriverbar* eller *differentierbar* i (a,b) om $f_x(a,b)$ och $f_y(a,b)$ existerar och $f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \epsilon_1(x,y)(x-a) + \epsilon_2(x,y)(y-b)$ där $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ när $(x,y) \rightarrow (a,b)$. Speciellt innebär det att $f(x,y) - L(x,y) \rightarrow 0$ när $(x,y) \rightarrow (a,b)$.

Sats 1 (Kontinuitet och deriverbarhet). Om $f_x(x,y)$ och $f_y(x,y)$ existerar och är kontinuerliga nära (a,b) är f deriverbar i (a,b) .

Bevis. Beviset använder medelvärdessatsen, se appendix F i kursboken för det. \square

5.3 Kedjeregeln (14.5)

5.3.1 En variabel

Om $y = f(x)$ och $x = g(t)$ är deriverbara så är $\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$. Annorlunda uttryckt $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$.

5.3.2 Två variabler

Låt $z = f(x,y)$, $x = g(t)$ och $y = h(t)$ vara deriverbara. Då är

$$\frac{d}{dt}f(g(t), h(t)) = f_x(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + f_y(g(t), h(t)) \cdot h'(t)$$

eller kortare

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Beviset involverar definitionen av deriverbarhet i flera variabler.

”Nu har de flesta svarat, och några har svarat rätt i alla fall.”

– Mr. Väsentligen

”Då får vi 1+1 vilket är 2.”

– Mr. Väsentligen

5.3.3 Två variabler (variant)

Låt $z = f(x,y)$, $x = g(s,t)$ och $y = h(s,t)$ vara deriverbara. Då är kedjeregeln

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

eller med avseende på t :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Beviset följer av den andra varianten.

5.4 Rikttningsderivator och gradienter (14.6)

De partiella derivatorna är derivator längs linjer där x eller y är konstant, d.v.s. med riktningsvektor $\hat{i} = \langle 1, 0 \rangle$ eller $\hat{j} = \langle 0, 1 \rangle$.

Definition 12 (Rikttningsderivata). *Rikttningsderivatan (directional derivative) av $f(x, y)$ i riktningen $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ där \vec{u} är en enhetsvektor (längd $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$) ges av*

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + ah, y + bh) - f(x, y)}{h}.$$

Anmärkning 1. $f_x = D_{\hat{i}}f$ och $f_y = D_{\hat{j}}f$

Definition 13 (Gradient). *Gradienten av $f(x, y)$ är*

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$$

Sats 2 (Deriverbarhet, riktningsvektor och gradient). Om f är deriverbar är

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u}.$$

Bevis. Låt $g(h) = f(x + ah, y + bh)$ och $\vec{u} = \langle a, b \rangle$. Enligt kedjeregeln är $g'(h) = f_x(x + ah, y + bh) \cdot a + f_y(x + ah, y + bh) \cdot b$. $g'(0) = f_x(x, y) \cdot a + f_y(x, y) \cdot b \implies D_{\vec{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$. \square

6 Föreläsning 19-09-13

6.1 Rikttningsderivator och gradienter

Påminnelse 1. Låt $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ och $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ vara vektorer.

Skalarprodukten är då

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Längden av \vec{u} är

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Det gäller också att

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\theta)$$

där θ är vinkeln mellan \vec{u} och \vec{v} .

Det följer av förra påståendet att för två vinkelräta vektorer är $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Sats 3 (Största värde för riktningsderivata). $D_{\vec{u}}f(x,y)$ är som störst när \vec{u} pekar i samma riktning som $\nabla f(x,y)$ d.v.s. när $\vec{u} = \frac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$.

Alltså $f(x,y)$ växer som mest när (x,y) rör sig från (x_0, y_0) i riktningen $\frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}$.

Bevis. $D_{\vec{u}}f(x,y) = \vec{u} \cdot \nabla f(x,y) = |\vec{u}| \cdot |\nabla f(x,y)| \cos(\theta)$ där θ är vinkeln mellan \vec{u} och $\nabla f(x,y)$. Eftersom \vec{u} är en enhetsvektor vet vi att $|\vec{u}| = 1$. $|\nabla f(x,y)| \cos(\theta)$ blir som störst när $\cos(\theta) = 1$, d.v.s. $\theta = 0$. Det betyder att \vec{u} och $\nabla f(x,y)$ pekar i samma riktning. \square

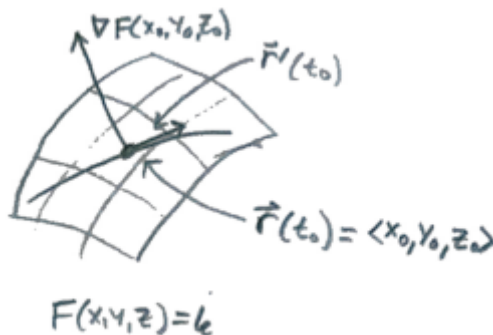
Anmärkning 2. I princip allt från denna veckan generaliserar enkelt från två till tre eller fler variabler.

6.2 Tangentplan till nivåytor (14.6)

En nivåyta bestäms av $F(x,y,z) = k$ för något konstant $k \in \mathbb{R}$.

En graf $z = f(x,y)$ är ett specialfall av en nivåyta, eftersom vi kan ta $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ och $k = 0$.

Ska definiera tangentplan till allmän nivåyta. Vill definiera tangentplanet till $F(x,y,z) = k$ i (x_0, y_0, z_0) som det plan som genom (x_0, y_0, z_0) s.a. det för varje kurva $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ som uppfyller $\vec{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ och ligger i nivåytan så innehåller tangentplanet $\vec{r}'(t_0)$.



Anta att \vec{r} är en sådan kurva. Då är $\forall t : F(x(t), y(t), z(t)) = k$. Nu deriverar vi båda sidor med avseende på t m.h.a. kedjeregeln så att vi får

$$F_x \cdot x'(t) + F_y \cdot y'(t) + F_z \cdot z'(t) = 0$$

$$\nabla F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0.$$

Om vi tar $t = t_0$ får vi att $\nabla F(\vec{r}(t_0)) = \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ är vinkelrät mot $\vec{r}'(t_0)$.

Påminnelse 2. En normalvektor \vec{n} till ett plan är en nollskild vektor som är vinkelrät mot alla vektorer i planet. Om planet går genom (x_0, y_0, z_0) ges hela planet av

$$\vec{n} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0.$$

Definition 14 (Tangentplan till nivåyta). *Tangentplanet* till en nivåyta $F(x,y,z) = k$ genom en punkt (x_0, y_0, z_0) där $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ är $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$.

Det är definierat s.a. det uppfyller vad vi ville att det skulle uppfylla.

Obs. 1. Om $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ är nivåytan där $F = 0$ samma som grafen $z = f(x,y)$. Eftersom $\nabla F = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$ får i en punkt $(a, b, f(a,b))$ samma tangentplan $\langle -f_x(a,b), -f_y(a,b), 1 \rangle \cdot \langle x - a, y - b, z - f(a,b) \rangle$ oavsett om man ser ytan som en nivåyta eller grafen till en funktion.

Exempel 17. Bestäm tangentplanet till ytan $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$.

Ytan är nivåytan $F(x,y,z) = 1$ där $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$.

$\nabla F = \langle 2x, -2y, 2z \rangle$ och $\nabla F(1,1,1) = \langle 2, -2, 2 \rangle$. Då är tangentplanet $\nabla F(1,1,1) \cdot \langle x - 1, y - 1, z - 1 \rangle = 0$ vilket ger

$$\begin{aligned} 2(x - 1) - 2(y - 1) + 2(z - 1) &= 0 \\ x - 1 - y + 1 + z - 1 &= 0 \\ x - y + z &= 1. \end{aligned}$$

6.3 Lokala extremvärden

Definition 15 (Lokalt maximum). $f(x,y)$ har ett *lokalt maximum* i (a,b) om $f(x,y) \leq f(a,b)$ gäller för (x,y) nära (a,b) . (D.v.s. det gäller för (x,y) i någon cirkelskiva kring (a,b) .)

Definition 16 (Absolut/Globalt maximum). $f(x,y)$ har ett *absolut/globalt maximum* i (a,b) om $f(x,y) \leq f(a,b)$ gäller för alla (x,y) i definitionsmängden till f .

Definition 17 (Lokalt minimum). $f(x,y)$ har ett *lokalt minimum* i (a,b) om $f(x,y) \geq f(a,b)$ gäller för (x,y) nära (a,b) . (D.v.s. det gäller för (x,y) i någon cirkelskiva kring (a,b) .)

Definition 18 (Absolut/Globalt minimum). $f(x,y)$ har ett *absolut/globalt minimum* i (a,b) om $f(x,y) \geq f(a,b)$ gäller för alla (x,y) i definitionsmängden till f .

Definition 19 (Extremvärde). Ett *extremvärde* är ett minimum eller maximum.

Exempel 18. $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ har ett lokalt och globalt minimum, var?

Inses lätt att det sker i $(0,0)$ då den annars är strikt positiv för $x, y \in \mathbb{R}$.

Påminnelse 3. I en variabel, om f är deriverbar och har ett (lokalt) extremvärde i a är $f'(a) = 0$.

Sats 4 (Extremvärde i en punkt). Om $f(x,y)$ har ett (lokalt) extremvärde i punkten (a,b) och $f_x(a,b)$ och $f_y(a,b)$ existerar är $f_x(a,b) = 0$ och $f_y(a,b) = 0$.

Bevis. Om vi låter $h(x) = f(x,b)$ ha ett extremvärde i $x = a$ gäller $h'(a) = 0$ och $h'(a) = f_x(a,b)$, vilket ger att $f_x(a,b) = 0$.

$f_y(a,b) = 0$ visas analogt. □

7 Föreläsning 19-09-17

7.1 Lokala extremvärden forts.

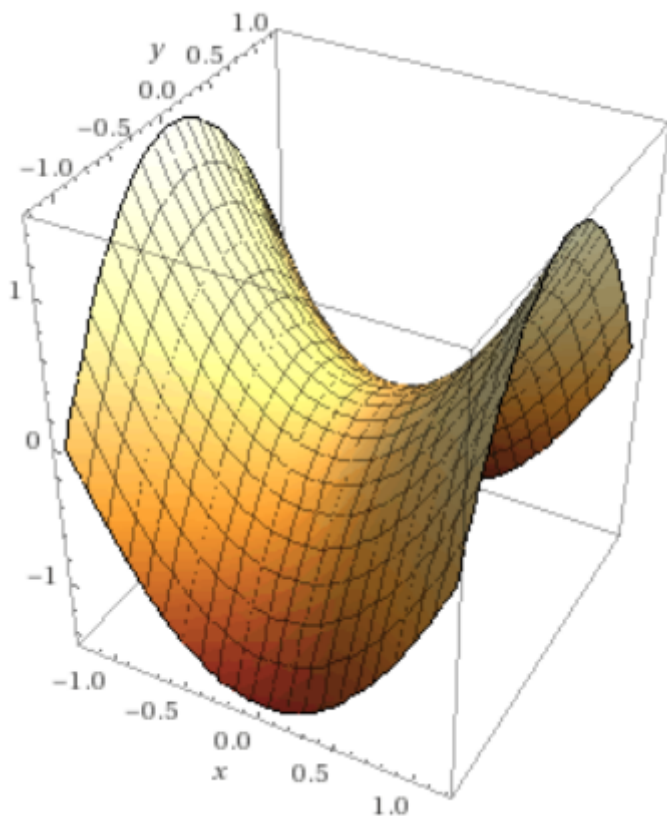
Definition 20 (Kritiska/stationära punkter). Om $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ säger man att f har en *kritisk/stationär punkt* i (a,b) .

Alla lokala extremvärden är kritiska punkter (om de partiella derivatorna existerar) men det kan finnas kritiska punkter som inte är lokala extremvärden. Sådana punkter kallas *sadelpunkter*.

Exempel 19. Låt $f(x,y) = x^2 - y^2$, bestäm dess kritiska punkter.

Den har en sadelpunkt i $(0,0)$ eftersom $\nabla f = \langle 2x, -2y \rangle \implies \nabla f(0,0) = (0,0)$, d.v.s. $(0,0)$ är en kritisk punkt, men den är varken ett lokalt maximum eller minimum.

Grafen har formen av en "sadel".



Hur avgör man då om en kritisk punkt är ett extremvärde? I en variabel gäller, för funktioner där $f'(a) = 0$, att om $f''(a) > 0$ så har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x = a$ och om $f''(a) < 0$ så har $f(x)$ ett lokalt maximum i $x = a$. Om $f''(a) = 0$ kan vi inte säga något om punkten.

Sats 5 (Test för lokala extrempunkter i två variabler). Anta att de partiella

derivatorna av ordning 2 till $f(x,y)$ är kontinuerliga nära (a,b) och att $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

Låt $D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$. Då har vi fyra fall:

1. Om $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) > 0$ (eller $f_{yy}(a,b) > 0$) är (a,b) ett lokalt minimum.
2. Om $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) < 0$ (eller $f_{yy}(a,b) < 0$) är (a,b) ett lokalt maximum.
3. Om $D < 0$ är (a,b) en sadelpunkt.
4. Om $D = 0$ vet vi inget om punkten.

Bevis. Går ut på att reducera till motsvarande test i en variabel, se slutet av 14.7 i boken. \square

Eftersom $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ (Clairaut's sats) är $D = \det\{H\}$ där H är "Hessianmatrisen" $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$.

För att komma ihåg vilket villkor som ger vilken slutsats kan man jämföra med följande modellfall:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ som har ett lokalt minimum i origo. $D = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$.
2. $f(x,y) = -x^2 - y^2$ som har ett lokalt maximum i origo. $D = (-2) \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = 4 > 0$, $f_{xx} = -2 < 0$.
3. $f(x,y) = x^2 - y^2$ som har en sadelpunkt i origo. $D = 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = -4 < 0$.

Exempel 20. Bestäm de kritiska punkterna till $f(x,y) = 3x^2 + 6xy - y^3$ och avgör om de är sadelpunkter, lokala minimum eller lokala maximum.

Vi börjar med att avgöra kritiska punkter, d.v.s. punkter där de partiella derivatorna är 0.

$$\begin{cases} f_x = 6x + 6y = 0 & \iff x = -y \\ f_y = 6x - 3y^2 = 0 & \iff 2x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Detta ger, om man sätter in uttrycken i varandra, $2(-y) - y^2 = 0 \iff y(-2 - y) = 0 \iff y = 0$ el. $y = -2$. Om vi sätter in detta i uttrycket för x får vi $x = -y = -0 = 0$ och $x = -(-2) = 2$ vilket ger de kritiska punkterna $(0,0)$ och $(2, -2)$.

Vi undersöker nu dessa kritiska punkter.

$$f_{xx} = 6, f_{yy} = -6y \text{ och } f_{xy} = 6.$$

I $(0,0)$ gäller $D(0,0) = f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 6 \cdot 0 - 6^2 = -36 \implies (0,0)$ är en sadelpunkt.

I $(2, -2)$ gäller $D(2, -2) = f_{xx}(2, -2) \cdot f_{yy}(2, -2) - f_{xy}(2, -2)^2 = 6 \cdot (-6) \cdot (-2) - 6^2 = 72 - 36 = 36 \implies (2, -2)$ är en lokal extrempunkt. Eftersom $f_{xx}(2, -2) = 6 > 0$ är $(2, -2)$ ett lokalt minimum.

För att generalisera det här till tre eller fler variabler måste man bygga på egenvärden till Hessianmatrisen.

7.2 Globala extremvärden (14.7)

I en variabel, om $f(x)$ är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ så har f ett globalt max- och min-värde någonstans i $[a, b]$. Ej sant för t.ex. öppna intervall eller obegränsade intervall. Se exempelvis $f(x) = x$ på intervallet $x \in (0, \infty)$, då finns inget specifikt max-värde eftersom vi alltid kan gå närmare ∞ och det finns inget min-värde eftersom vi alltid kan gå lite närmare 0.

Vi ska definiera motsvarigheten till ”sluten och begränsad” i två variabler.

Definition 21 (Randpunkter). (a, b) är en *randpunkt* (*boundary point*) till $D \subseteq \mathbb{R}^2$ om varje cirkelskiva kring (a, b) innehåller både punkter i D och punkter som inte är i D .

Exempel 21. Randpunkter till $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ är $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.

Till $D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ är randpunkterna precis som ovan $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, trots att de inte är i D .

”Här går kanske inte intuitionen jättebra.”

– Mr. Väsentligen om sin publik

Definition 22 (Slutna mängder). En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är *sluten* om den innehåller alla sina randpunkter.

I exemplet ovan är D_1 sluten och D_2 inte sluten.

Definition 23 (Begränsade mängder). En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är *begränsad* om den är innehållen i någon cirkelskiva.

Exempel 22. $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ är begränsad eftersom vi kan innesluta kvadraten i en stor cirkel, exempelvis en cirkel med centrum i origo och radie 31415.

$\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1\}$ är inte begränsad eftersom den inte går att innesluta i en cirkel.

Sats 6 (Existens av globala max- och minpunkter). Om $f(x, y)$ är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och D är både sluten och begränsad då har f globala max- och min-punkter någonstans i D .

Bevis. Beviset involverar definitionen av reella tal vilket är lite lagom överkurs för den här kursen. Finns säkert på nätet eller något. \square

8 Föreläsning 19-09-18

8.1 Globala extremvärden (forts.)

Om $f(x, y)$ har ett globalt max-/min-värde i $(a, b) \in D$ och (a, b) inte är en randpunkt måste den vara ett lokalt min/max och därmed också en kritisk

punkt (om f är deriverbar i (a,b)).

8.1.1 Metod för att bestämma globala max/min

Låt f vara en deriverbar funktion på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ där D är sluten och begränsad.

Globala max och min fås genom att jämföra funktionsvärden i följande kandidater:

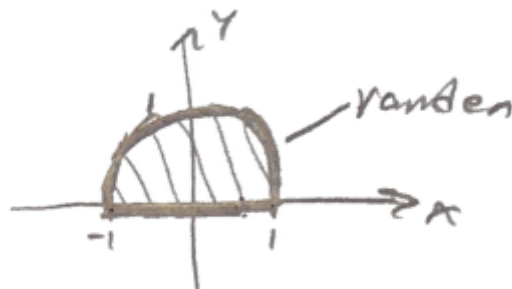
1. Kritiska punkter i D
2. Randpunkter till D

Om man parametriserar randpunkterna till D med ett antal kurvor räcker det med följande kandidater i punkt 2 ovan:

- 2.1. Kritiska punkter när man ser f som en funktion av en variabel längs randkurvor
- 2.2. "Hörn", d.v.s. ändpunkter till randkurvorna

Exempel 23. Beräkna de globala max-/min-punkterna till funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2 - y$ på området $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Området är en halvcirkelskiva som ganska uppenbart är sluten och begränsad.



Vi börjar med att leta kritiska punkter: $\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y - 1 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0;0,5).$

Nu får vi kolla om den kritiska punkten ligger i D . $0^2 + (0,5)^2 = 0,25 \leq 1$ och $0,5 \geq 0$, så den ligger i D . $f(0;0,5) = -\frac{1}{4}$.

Nu ska vi titta på randpunkter, så vi börjar med att parametrisera randen. Vi delar upp det i det raka strecket (C_1) och i halvcirkelbågen (C_2) för enkelhetens skull.

$C_1 : \vec{r}_1(t) = \langle t, 0 \rangle$ där $-1 \leq t \leq 1$.

$C_2 : \vec{r}_2(t) = \langle \cos(t), \sin(t) \rangle$ där $0 \leq t \leq \pi$.

Då tittar vi på kritiska punkter för randkurvorna, och vi börjar med C_1 . $g_1(t) = f(\vec{r}_1(t)) = f(t, 0) = t^2$. Kritiska punkter för g_1 är då $g'_1(t) = 0 \iff t = 0$. Det ger kandidaten $g_1(0) = f(0,0) = 0$. Nu kör vi på C_2 . $g_2(t) = f(\vec{r}_2(t)) = f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) + \sin^2(t) - \sin(t) = 1 - \sin(t)$. Kritiska punkter är då

$g_2'(t) = -\cos(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}$ (Fler punkter egentligen, men den här är den enda i vårt tillåtna intervall). Kandidaten är då $g_2(\frac{\pi}{2}) = f(0,1) = 0$.

Nästa steg är att titta på "hörnen" $(-1,0)$ och $(1,0)$. $f(-1,0) = (-1)^2 + 0^2 - 0 = 1$ och $f(1,0) = 1^2 + 0^2 - 0 = 1$.

Allt som allt är vårt globala max $(\pm 1, 0)$ och vårt globala min $(0; 0, 5)$.

8.2 Optimering under bivillkor och Lagrangemultiplikatorer (14.8)

Vi vill lösa följande slags problem: Beräkna max av $4x^2 + 4y$ när (x,y) ligger på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$. En möjlighet är att parametrisera enhetscirkeln, t.ex. med $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle$ när $0 \leq t \leq 2\pi$ och hitta max av $g(t) = f(\vec{r}(t)) = 4\cos^2(t) + 4\sin(t)$ som vanligt.

En annan möjlighet är att se det som ett fall av optimering under bivillkor. Låt $f(x,y), g(x,y)$ vara definierade på någon mängd D . Vi vill hitta max och min av $f(x,y)$ på D under förutsättning att $g(x,y) = k$ där k är konstant. Villkoret $g(x,y) = k$ kallas för *bivillkor (constraint)*.

8.2.1 Metoden med Lagrangemultiplikatorer

För att hitta max och min till $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = k$ (under förutsättning att extremvärden finns och $\nabla g(x,y) \neq 0$ på $g(x,y) = k$) gör man följande:

- Hitta alla lösningar (x,y) till $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$ för något λ (λ kallas för Lagrangemultiplikator).
- Jämför $f(x,y)$ för alla lösningar (x,y) från punkt a. Det största värdet ger max och det minsta ger min.

Anmärkning 3. Förutsättningen att extremvärden finns är uppfylld om $\{g(x,y) = k\}$ är sluten och begränsad. I kursen kommer vi bara att studera problem där extremvärden existerar.

Exempel 24. Hitta max och min till $f(x,y) = 4x^2 + 4y$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$.

Enligt metoden ska vi då lösa ekvationssystemet $\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f_x = \lambda \cdot g_x \\ f_y = \lambda \cdot g_y \\ g^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} 8x = \lambda \cdot 2x \\ 4 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ Den första ekvationen ger } 8x = \lambda \cdot 2x \iff 4x = \lambda x \iff x =$$

0 el. $\lambda = 4$. Första fallet ($x = 0$) ger genom ekvation 3 $y^2 = 1 \iff y = \pm 1$ vilket med ekvation 2 ger $\lambda = \frac{4}{2y} = \pm 2$. Här får vi komma ihåg att det ger två lösningar $(x,y,\lambda) = (0,1,2)$ och $(0,-1,-2)$. Andra fallet ger genom ekvation 2 $4 = 4 \cdot 2 \cdot y \iff y = \frac{1}{2}$. Ekvation 3 ger då $x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \iff x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vi

kontrollerar att det ger de två lösningarna $(x, y, \lambda) = (\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4)$. Med det får vi följande lösningar till det ursprungliga problemet:

$$\begin{aligned} f(0, 1) &= 4 \\ f(0, -1) &= -4 \\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 5 \\ f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 5 \end{aligned}$$

Alltså har vi ett max på 5 i $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ och ett min på -4 i $(0, -1)$.

9 Föreläsning 19-09-20

9.1 Längd av kurvor (10.2, 13.3)

Sats 7 (Längd av en kurva). Låt $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ vara en kurva. Då är dess längd $l = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$.

Bevis. Finns en skiss till ett argument i 10.2 i boken. □

Exempel 25. Beräkna längden av kurvan med parametrisering $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle = \langle t^2, t^3 \rangle$ för $0 \leq t \leq 1$.

$$\text{Då är } |\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = \sqrt{t^2(4 + 9t^2)} = \sqrt{t^2} \sqrt{4 + 9t^2} = t\sqrt{4 + 9t^2}.$$

$$\text{Från formeln ovan är } l = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2} dt = \begin{cases} s = 4 + 9t^2 \\ ds = 18t dt \implies t dt = \frac{ds}{18} \\ t = 0 \implies s = 4 \\ t = 1 \implies s = 13 \end{cases} =$$

$$\frac{1}{18} \int_4^{13} \sqrt{s} ds = \frac{1}{18} \left[\frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_4^{13} = \frac{1}{18} \left(\frac{13^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{27} \left(13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right)$$

Sats 8 (Längden av en graf). Längden av en graf $y = f(x)$ är $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

Bevis. $f(x)$ kan parametriseras med ekvationen $\vec{r}(t) = \langle t, f(t) \rangle$. Då blir $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ och längden därmed $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

Alternativ härledning finns i föreläsningsslides. □

9.2 Rörelse av partiklar i rummet (13.4)

Man kan använda en vektorvärd funktion $\vec{r}(t)$ för att beskriva hur en partikel rör sig genom rummet. Vid tiden t befinner sig partikeln i $\vec{r}(t)$.

Definition 24 (Hastighetsvektor och fart). *Hastighetsvektorn* $\vec{v}(t)$ för en sådan partikel ovan är $\vec{r}'(t)$ och farten är $|\vec{v}(t)|$.

Definition 25 (Accelerationsvektor). *Accelerationsvektorn* för en partikel som ovan är $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$.

Dessa definitioner används för att beskriva olika fysiska fenomen. Ett exempel på en sådan är Newtons andra lag:

Sats 9 (Newtons andra lag). Om kraften $\vec{F}(t)$ verkar på en partikel med massa m så är $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$.

Exempel 26. Anta att bara tyngdkraften verkar på en partikel med massa m , d.v.s. $\vec{F} = \langle 0, 0, -mg \rangle$. Anta också att partikeln vid $t = 0$ har position $\vec{r}(0) = \langle a, b, c \rangle$ och hastighet $\vec{v}(0) = \langle d, e, f \rangle$. Verifiera att partikeln med position $\vec{r}(t) = \left\langle a + dt, b + et, c + ft - \frac{gt^2}{2} \right\rangle$ uppfyller dessa villkor och rör sig enligt Newtons andra lag.

Vi kontrollerar detta: Vi stoppar in $t = 0$ i \vec{r} och får $\vec{r}(0) = \langle a, b, c \rangle$ vilket stämmer. Vi deriverar nu för att få \vec{v} och får $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \langle d, e, f - gt \rangle$. Kontrollerar genom att stoppa in $t = 0$: $\vec{v}(0) = \langle d, e, f \rangle$. Kontrollerar nu med ytterligare en derivata $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \langle 0, 0, -g \rangle$. Använder Newtons andra lag för att kontrollera $m \cdot \vec{a}(t) = \langle 0, 0, -mg \rangle = \vec{F}$.

"0 är ju en typisk konstant."

– Mr. Väsentligen

"Du har ju nog rätt idé, men vad menar du?"

– Mr. Väsentligen

"Ja, det hade man kunnat tänka sig, men så är det inte."

– Mr. Väsentligen

10 Föreläsning 19-09-24

Missade föreläsningen, handlade om dubbelintegraler över rektanglar och upprepad integration.

11 Föreläsning 19-09-25

Missade föreläsningen, handlade om dubbelintegraler över allmänna områden.

12 Föreläsning 19-09-27

12.1 Integraler över allmänna områden (forts.)

Sats 10 (Volym mellan grafer). Om $f(x,y) \geq g(x,y)$ ges volymen av området mellan $z = g(x,y)$ och $z = f(x,y)$ där $(x,y) \in D$ ges av $\iint_D f(x,y) - g(x,y) dA$.

12.2 Dubbelintegraler och polära koordinater (15.3)

Exempel 27. Beräkna volymen av området mellan konen $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$ och planet $z = 1$.

Den första ekvationen ger en kon eftersom $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ där z är avståndet från (x,y) till origo.

Det beror inte på vinkeln θ i xy -planet, så vi kan rita $z = r$ för ex. $\theta = 0$, där är $r = x$, och sedan roterar vi kring z -axeln.

Ytorna $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $z = 1$ skär varandra i $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, d.v.s. $x^2 + y^2 = 1$ och $z = 1$. Området mellan de här ytorna ges då av $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. D sett som ett typ I-område begränsas av $y = \sqrt{1 - x^2}$ och $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Alltså är $D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$.

Områdets volym blir då $\iint_D 1 - \sqrt{1 - x^2} dA = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$. Detta går att beräkna, men blir krångligt.

Idag ska vi snacka om ett betydligt enklare sätt att räkna ut detta.

12.2.1 Polära koordinater

En punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ kan beskrivas med *polära koordinater* (r, θ) genom
$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$
där θ är vinkeln mot x -axeln och r är avståndet från origo.

Exempel 28. Området $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x\}$ ser ut som följande:



I polära koordinater är $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, -\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.

Definition 26 (Polära rektanglar och deras area). Ett område är en *polär rektangel* om det i polära koordinater ges av $a \leq r \leq b$ och $\alpha \leq \theta \leq \beta$.



Arean för den rektangeln är $\frac{(b^2 - a^2)(\beta - \alpha)}{2}$.

12.2.2 Integration i polära koordinater

Sats 11 (Integration av polära rektanglar). Låt D vara en polär rektangel som ges av $a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, och anta att f är kontinuerlig på D .

Då är $\iint_D f dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cdot r dr d\theta = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cdot r d\theta dr$.

Obs. 2. Vänsterledet är en integral över ett allmänt område. Högerledet är upprepade integraler.

Man brukar ofta sammanfatta formlerna som $dA = r dr d\theta = r d\theta dr$ eller $dx dy = r dr d\theta = r d\theta dr$. Den första sammanfattningen används i formelbladet.

Bevis. Idén bakom beviset är samma som för ett ”vanligt” koordinatsystem, men istället för att dela in i rektanglar delar vi in i polära rektanglar istället. Finns ganska komplett i föreläsningsslidesen. \square

Exempel 29. Vi går tillbaka till exemplet i början av föreläsningen för att se om det blir enklare med polära koordinater.

Beräkna $\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} dA$ där $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

I polära koordinater ges D av $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vår funktion är då

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} \\ &= \sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\ &= \sqrt{r^2} \\ &= r \\ &= f(r, \theta). \end{aligned}$$

Då blir

$$\begin{aligned} \iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} dA &= \iint_D 1 - r dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r) r d\theta dr \\ &= \int_0^1 [(r - r^2)\theta]_{\theta=0}^{2\pi} dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r - r^2 dr \\ &= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

13 Föreläsning 19-09-30

13.1 Densitet, massa och masscentrum (15.4)

Låt D vara en tunn skiva (lamina) som representeras av $D \subseteq \mathbb{R}^2$ med densitet $\rho(x, y)$. $\rho(x, y)$ är gränsvärdet när $\epsilon \rightarrow 0$ för densiteten av en kvadrat A_ϵ med sidlängd ϵ och centrum i (x, y) .

Om E är ett litet område kring punkten (x,y) bör $\rho(x,y)$ vara detsamma oberoende av E . För ett sådant område blir då

$$\text{massa}(E) \approx \rho(x,y) \cdot \text{area}(E). \quad (1)$$

M.h.a. ρ vill vi beskriva massan på och masscentrum i D ovan.

13.1.1 Massa

Vi börjar med att anta att D är en rektangel med $\rho(x,y) = 0$ om $(x,y) \notin D$. Då delar vi in D i $M \times N$ stycken lika stora delrektanglar R_{ij} där $i \in \{1, \dots, M\}$ och $j \in \{1, \dots, N\}$ med area ΔR och $(x_{ij}, y_{ij}) \in R_{ij}$. Om M och N är stora blir varje R_{ij} litet, så att från ekvation 1 ovan får vi $\text{massa}(R_{ij}) \approx \rho(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta R$. Total massan är då $m = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \text{massa}(R_{ij}) \approx \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \rho(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta R = \iint_D \rho(x,y) dA$. Uppskattningen för massan blir också bättre och bättre när $M, N \rightarrow \infty$.

Sats 12 (Massa för område). För en skiva $D \subseteq \mathbb{R}^2$ med densitet $\rho(x,y)$ i varje punkt (x,y) är den totala massan $m = \iint_D \rho(x,y) dA$.

Bevis. Bevis finns ovan. □

13.1.2 Masscentrum

Definition 27 (Moment). *Momentet* med avseende på x -axeln kring en punkt $x = a$ för en partikel med position (x,y) och massa m är $m(x - a)$.

Definition 28 (Jämvikt av moment). En samling partiklar med positioner (x_i, y_i) och massor m_i där $i \in \{1, \dots, n\}$ är i *jämvikt* kring $x = a$ om dess totala moment $\sum_{i=1}^n m_i(x_i - a) = 0$.

Motsvarande definition funkar även i y -led.

Sats 13 (Totalt moment för en skiva och jämvikt). Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en tunn skiva med densitet $\rho(x,y)$.

Dess totala moment med avseende på x -axeln kring $x = a$ är då $\iint_D (x - a)\rho(x,y) dA$.

Samma sak funkar igen även för y -led.

Om $\iint_D (x - a)\rho(x,y) dA = \iint_D x\rho(x,y) dA - a \iint_D \rho(x,y) dA = 0$ är skivan i jämvikt.

Bevis. Härleds på samma sätt som för massan. □

Definition 29 (Moment kring x -axeln). Momentet med avseende på x -axeln kring $x = 0$ är $M_x = \iint_D x\rho(x,y) dA$.

Sats 14 (Masscentrum). För en skiva $D \subseteq \mathbb{R}^2$ med densitet $\rho(x,y)$ är dess *masscentrum* (\bar{x}, \bar{y}) där $\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x,y) dA$ och $\bar{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x,y) dA$.

Exempel 30. Beräkna massan och masscentrum för triangeln D med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$ med konstant densitet $\rho(x,y) = 1$.

$$m = \iint_D \rho(x,y) dA = \iint_D 1 dA = \frac{1}{2}.$$

För att räkna ut M_x måste vi kunna beskriva randerna till D . Vi noterar att hypotenusan till triangeln beskrivs av $y = 1 - x$ så att $D\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ och därmed

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D x\rho(x,y) dA \\ &= \iint_D x dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx \\ &= \int_0^1 x \int_0^{1-x} 1 dy dx \\ &= \int_0^1 x \cdot (1 - x) dx \\ &= \int_0^1 x - x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Då har vi x -koordinaten för masscentrum $\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{M_x}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

I och med att triangeln är symmetrisk måste $M_y = M_x = \frac{1}{6}$ och därmed är masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Man kan självklart räkna ut M_y på samma sätt, men det behövs inte här.

Sats 15 (Masscentrum för triangel). I en triangel, om densiteten är konstant, är masscentrumet skärningspunkten för triangelns medianer, d.v.s. linjerna från triangelns hörn till mitten av motstående sida.

13.2 Medelvärden

Sats 16 (Medelvärde av en funktion). Låt $f(x,y)$ vara definierad på en mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Då är dess *medelvärde* $\frac{\iint_D f(x,y) dA}{\iint_D 1 dA} = \frac{\iint_D f(x,y) dA}{\text{area}(D)}$.

Speciellt, om D är en skiva med konstant densitet $\rho(x,y) = 1$ är komponenterna i dess masscentrum (\bar{x}, \bar{y}) medelvärdet av x och y på D .

13.3 Arean av grafen till en funktion (15.5)

Låt $f(x,y)$ vara definierad på D , då ger den en yta (dess graf) $z = f(x,y)$ där $(x,y) \in D$.

Sats 17 (Arean av en graf). $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA$.

Bevis. Inte idag. □

Jämför med längden av en graf $y = f(x)$ där $a \leq x \leq b$: $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

Nästa vecka pratar vi om en formel för mer allmänna ytor och kort om varför den ser ut som den gör.

Exempel 31. Bestäm arean av grafen $z = f(x,y)$ där $(x,y) \in D$, $f(x,y) = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$ och $D = [0,1] \times [0,2]$.

$f_x = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. På samma sätt blir $f_y = \sqrt{y}$.

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2} = \sqrt{1 + x + y} \text{ ger } A = \iint_D \sqrt{1 + x + y} dA = \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{1 + x + y} dy dx = \dots = \frac{4}{15}(33 - 4\sqrt{2} - 9\sqrt{3}).$$

14 Föreläsning 19-10-01

14.1 Trippelintegraler

Definition 30 (Trippelintegraler). Låt $E \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett område och $g(x,y,z)$ vara definierad på E .

Då definierar vi trippelintegralen av g över E :

$$\iiint_E g(x,y,z) dV$$

på samma sätt som dubbelintegraler, först när $E = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ är ett rätblock m.h.a. Riemannsummor och sedan för allmänna begränsade områden genom att reducera till fallet med rätblock.

14.1.1 Upprepad integration i trippelintegraler

Vi antar att de funktioner vi använder är kontinuerliga s.a. integralerna existerar. Annars blir det svårt.

Om $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, e(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är $\iiint_E g(x,y,z) dV = \iint_D \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z) dz dA$.

Om $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ (är ett typ I-område) är $E = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), e(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$. Då är

integralen

$$\iiint_E g(x,y,z) dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z) dz dy dx.$$

Motsvarande formler fås om vi byter roller på variablerna.

Exempel 32. Beräkna $\iiint_E z dV$ där E är den tetraeder som begränsas av planen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ och $2x + y + z = 2$.

Området mellan ett antal ytor som bestäms av likheter beskrivs typiskt sett av motsvarande olikheter. (D.v.s. byt = mot \geq el. \leq .) Men vilket håll ska olikheten vara på? Brukar funka att rita en figur. För att göra det enklare att rita kollar vi var den skär de tre axlarna. För x -axeln får vi när $y = z = 0$. Då är $2x + 0 + 0 = 2 \implies x = 1$ och därmed innehåller planet punkten $(1,0,0)$. På motsvarande sätt får vi $y = 2$ och $z = 2$ och punkterna $(0,2,0)$ och $(0,0,2)$. Då får vi följande utritade tetraeder:

Figur 1

För att beskriva E med olikheter får vi $E = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x+y+z \leq 2\}$. Hållen på olikheterna fås genom att kolla punkter i tetraedern. Ex. får vi i punkten $(0,0,0)$ som ligger i tetraedern $2 \cdot 0 + 0 + 0 = 0$ i origo, och $0 \leq 2$.

Genom att kombinera de två sista olikheterna fås $0 \leq z \leq 2 - 2x - y$. För att det ska finnas sådana (x,y,z) måste $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $2 - 2x - y \geq 0$. Då får vi följande område:

Figur 2

Då får vi att $E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x, 0 \leq z \leq 2 - 2x - y\}$. Nu kan vi till slut integrera!

$$\begin{aligned} \iiint_E z dV &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{2-2x-y} z dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{2-2x-y} dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (2-2x-y)^2 dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{(2-2x-y)^3}{-3} \right]_{y=0}^{2-2x} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (2-2x)^3 dx \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{(2-2x)^4}{4 \cdot (-2)} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{2^4}{4 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

"Fyra plus två plus två blir åtta."

– Randomsnubbe om trivialiteter

14.2 Cylindriska koordinater och trippelintegraler (15.7)

Cylindriska koordinater betecknas $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$ och fås genom att byta ut (x, y) mot de polära koordinaterna (r, θ) , d.v.s. $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$. Om vi har ett område $E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, e(x, y) \leq z \leq e(x, y)\}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en polär rektangel med $a \leq r \leq b$ och $\alpha \leq \theta \leq \beta$ följer av formeln för upprepad integration av trippelintegraler och formeln för integration i polära koordinater för dubbelintegraler att

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_{e(r \cos(\theta), r \sin(\theta))}^{f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} g(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dz d\theta dr.$$

Kort säger man ofta att $dV = r dz d\theta dr$.

Exempel 33. Beräkna $\iiint_E z dV$ där E är området mellan konen $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$ och planet $z = 1$.

Vi såg förra veckan att om vi låter $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ är $E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$. D ges i polära koordinater av $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Då får vi

$$\begin{aligned} \iiint_E z dV &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^1 z dz r d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2 r}{2} \right]_{z=r}^1 d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r - r^3 dr d\theta dr \\ &= \pi \int_0^1 r - r^3 dr \\ &= \pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$