0.1 Parametriserade ytor (16.6)

En kurva C har dimension 1, d.v.s. den beskrivs med en parameter $\vec{r}(t)$.

Definition 1 (Parametriserade ytor)**.** En *parametriserad yta* S är alla punkter $\{\vec{r}(u,v) \mid (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2\}$ där $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ är en vektorvärd funktion.

En yta har då dimension 2, d.v.s. den beskrivs av två parametrar $\vec{r}(u,v)$.

Vi skriver ofta parametriseringen i sina komponenter $\vec{r}(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v)\rangle$.

Exempel 1. Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Då är grafen $z = f(x,y)$ en parametriserad yta med $\vec{r}(u,v) = \langle u, v, f(u,v)\rangle$. Dock brukar vi ofta istället skriva $\vec{r}(x,y) = \langle x, y, f(x,y)\rangle$.

Exempel 2. Låt $g : [a,b] \to [0,\infty)$.

Då ges rotationsytan kring z-axeln med radien $g(z)$ av $\vec{r}(u,v) = \langle g(u)\cos v, g(u)\sin v, u\rangle$ där $(u,v) \in [a,b] \times [0, 2\pi]$.

I cylindriska koordinater svarar det mot att $r = g(u)$, $\theta = v$ och $z = u$.

Vi kan också skriva $\vec{r}(z,\theta) = \langle g(z)\cos\theta, g(z)\sin\theta, z\rangle$.

0.2 Tangentplan till parametriserade ytor (16.6)

Låt S vara en yta som parametriseras av $\vec{r}(u,v)$. Fixera en punkt $\langle a, b, c\rangle = \vec{r}(u_0, v_0)$ på S. Låt också $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ och $\vec{r}_v(u_0,v_0)$ vara de partiella derivatorna av $\vec{r}$ med avseende på u respektive v i (u_0,v_0). Kurvorna $\vec{r}_1(u) = \vec{r}(u,v_0)$ och $\vec{r}_2(v) = \vec{r}(u_0, v)$ ligger då i S och deras tangentvektorer i u_0 respektive v_0 är de partiella derivatorna ovan.

Figur 1

Definition 2 (Glatta (smooth) ytor i en punkt)**.** En yta S är *glatt* i $\vec{r}(u_0, v_0)$ om $\vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0) \neq 0$.

Det är samma sak som att vektorerna inte är parallella. Det är också samma sak som att de spänner upp ett plan.

Definition 3 (Tangentplan till en parametriserad yta)**.** Om S är glatt i en punkt $(a,b,c) = \vec{r}(u_0,v_0)$ är dess *tangentplan* det plan som går genom (a,b,c) och innehåller alla tangentvektorer till kurvor i S som går genom (a,b,c).

Tangentplanet har normalvektor $\vec{n} = \vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0)$ och om man skriver $\vec{n} = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ så ges tangentplanet av

$$n_1(x-a) + n_2(y-b) + n_3(z-c) = 0$$

eller ekvivalent

$$\vec{n} \cdot \langle x-a, y-b, z-c \rangle = 0.$$

Härledningen är lik den för tangentplanet av en nivåyta, den finns också på Canvas.

Om S är grafen $z = f(x,y)$ får vi samma formel som tidigare för tangentplanet, eftersom om $\vec{r}(x,y) = \langle x,y,f(x,y) \rangle$ blir $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$ och $\vec{r}(a,b) = \langle a, b, f(a,b) \rangle$ så att tangentplanet blir $-f_x(a,b)(x-a) - f_y(a,b)(y-b) + 1 \cdot (z - f(a,b)) = 0$ vilket är samma sak som $z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$.

0.3 Arean av parametriserade ytor (16.6)

Sats 1 (Arean för parametriserade ytor)**.** Arean för en yta S som parametriseras av $\vec{r}(u,v)$ där $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ är

$$A = \iint_D |\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)| \mathrm{d}A.$$

Bevis. Härledning finns i föreläsningsslides. □

Exempel 3. Om S är grafen till en funktion f och S parametriseras av $\vec{r}(x,y) = \langle x, y, f(x,y) \rangle$ där $(x,y) \in D$ såg vi att $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$. Eftersom $|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ ger det formeln från tidigare som säger att arean är $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \mathrm{d}A$.

Exempel 4. Låt S vara rotationsytan $\vec{r}(u,v) = \langle g(u) \cos v, g(u) \sin v, u \rangle$ där $(u,v) \in D = [a,b] \times [0,2\pi]$.

Då kan vi räkna fram (finns i föreläsningsanteckningar på Canvas) att arean av S är $A = 2\pi \int_a^b g(u) \sqrt{1 + g'(u)^2} \mathrm{d}u$.

Den formeln finns i avsnitt 8.2 där den härleds på ett annat sätt.