0.1 Funktioner av flera variabler (14.1)

Def. 1. En (reellvärd) *funktion av två variabler* är en regel som för varje $(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ ger ett reellt tal $f(x,y)$. D kallas för *definitionsmängd* (domain) till f och $\{f(x,y)|(x,y) \in D\}$ kallas *värdemängden* (range) till f. Skriver $f : D \to \mathbb{R}$.
Ex. 1. Mest grundläggande: koordinatfunktionerna x och y.
Ex. 2. Om $f(x,y), g(x,y)$ är funktioner kan vi skapa nya funktioner:

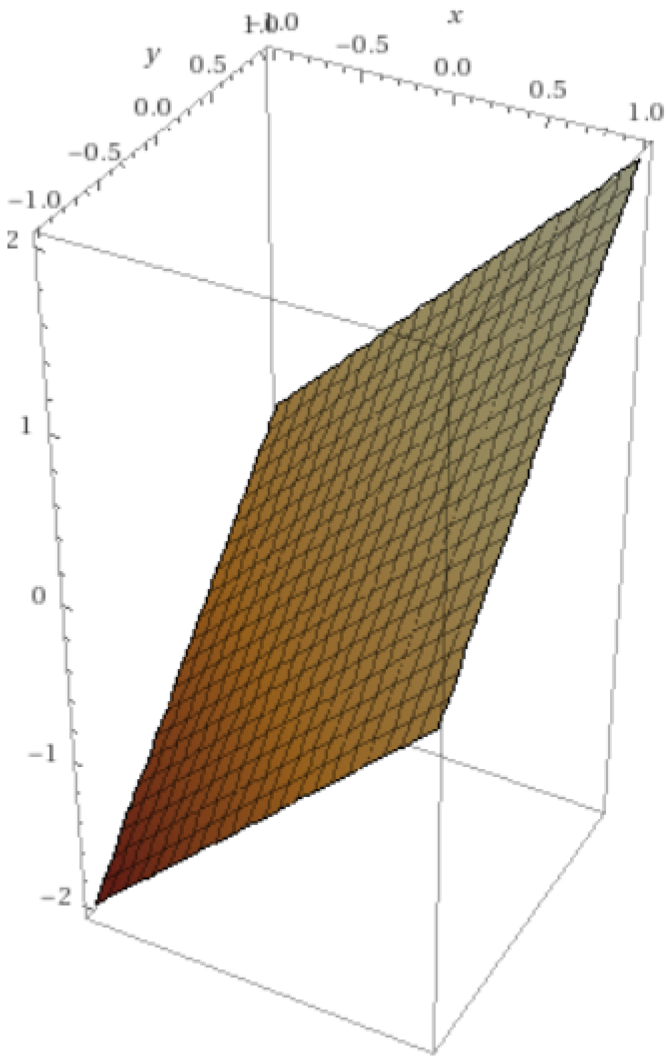
$$f(x,y) + g(x,y)$$
$$f(x,y) \cdot g(x,y)$$
$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \text{(Endast definierad där } g(x,y) \neq 0)$$
$$\sin(f(x,y)) \ldots$$
$$\sqrt{f(x,y)}, \ln(f(x,y)), \ldots \text{(Endast definierad där } f(x,y) \geq 0 \text{ respektive } f(x,y) > 0)$$

Def. 2. *Grafen* till $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$ är alla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ s.a. $z = f(x,y), (x,y) \in D$.
Ex. 3. Rita grafen till $f(x,y) = x + y$.

Provar att rita längs några räta linjer:

$$f(x,0) = x, f(x,1) = x + 1, f(x,2) = x + 2$$

$$f(0,y) = y, f(1,y) = y + 1, f(2,y) = y + 2$$



0.2 Annat sätt att visualisera en funktion

Def. 3. En *nivåkurva* till en funktion $f(x,y)$ består av alla punkter (x,y) s.a. $f(x,y) = k$ för ett givet värde $k \in \mathbb{R}$.

Ritar man nivåkurvor för olika värden på k får man en *höjdkarta* (contour map) som kan användas för att bättre förstå funktionen.

Beskriv nivåkurvorna och rita höjdkartor för olika funktioner.
Ex. 4. $f(x,y) = x + 2y$

$f(x,y) = x + 2y = k \iff y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{k}{2}$ vilket är en rät linje med lutning $-\frac{1}{2}$ som skär y-axeln i $\frac{k}{2}$.

Figur 2

Ex. 5. $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f(x,y) = x^2 + y^2 = k$ ger att om $k < 0$ har vi en tom nivåkurva. Anta dock $k \geq 0$, då är $x^2 + y^2 = k = \left(\sqrt{k}\right)^2$ vilket är en cirkel med radie $\sqrt{k}$ och origo i (0,0).

Figur 3

Ex. 6. $f(x,y) = e^{xy}$

$f(x,y) = e^{xy} = k$ ger att om $k \leq 0$ har vi en tom nivåkurva. Anta dock $k > 0$, då får vi $e^{xy} = k \iff xy = \ln(k)$. Nu har vi två fall, om $x \neq 0$ får vi $y = \frac{\ln(k)}{x}$ och om $x = 0$ får vi $0 = \ln(k) \iff k = 1$.

Figur 4

0.3 Funktioner av tre variabler

Kan på liknande sätt studera funktioner av tre variabler $f(x,y,z)$. Dock befinner sig dess graf $w = f(x,y,z)$ i ett rum med fyra dimensioner vilket är lite svårt att rita. Däremot är nivåytor $f(x,y,z) = k$ fortsatt användbara och kan visualiseras i vissa enkla fall.

Ex. 7. Beskriv nivåkurvorna till $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2$ vilket är avståndet från punkten (x,y,z) till origo i kvadrat. Då får vi att nivåytorna för varje k är antingen tom om $k < 0$ och sfären med radie $\sqrt{k}$ och centrum i origo om $k \geq 0$.