0.1 Sfäriska koordinater och trippelintegraler (15.8)

Kom ihåg att en punkt (x,y) i planet kan beskrivas i polära koordinater med ett avstånd $r = \sqrt{x^2+y^2}$ från origo och en vinkel θ från positiva x-axeln.

Definition 1 (Sfäriska koordinater)**.** En punkt (x,y,z) i rummet kan beskrivas med ett avstånd ρ till origo och två vinklar, vanligtvis θ till positiva x-axeln i xy-planet och ϕ, vinkeln till positiva z-axeln. (ρ,θ,ϕ) kallas *sfäriska koordinater* och ges av $\begin{cases} x = \rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\phi) \end{cases}$.

Man brukar kräva att $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ och oftast antingen $0 \leq \theta \leq 2\pi$ eller $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Härledning.

1. Vi börjar med punkten $P_0 = (0,0,\rho)$ som ligger rakt upp från origo. Den har ρ rätt, $\phi = 0$ och θ odefinierat.
2. Om vi roterar punkten i xz-planet får vi $P_1 = (\rho\sin(\phi), 0, \rho\cos(\phi))$. Den har ρ rätt, ϕ rätt och $\theta = 0$ eftersom den ligger rakt över x-axeln.
3. Om vi roterar i xy-planet får vi $(\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$.

□

Sats 1 (Formel för integration i sfäriska koordinater)**.** Om E är en "sfärisk låda", d.v.s. att $a \leq \rho \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ och $c \leq \phi \leq d$ är

$$\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_\alpha^\beta \int_a^b \int_c^d f(\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))\rho^2\sin(\phi)\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.$$

Det brukar sammanfattas som

$$\mathrm{d}V = \rho^2\sin(\phi)\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.$$

Bevis. Kort idé till varför finns i avsnitt 15.8 i boken. □

Exempel 1. Beräkna $\iiint_E (x^2+y^2+z^2)^2\mathrm{d}V$ där E är området som ligger ovanför konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ och innanför sfären $x^2+y^2+z^2 = 4$.

Figur 1

Vinkeln ϕ mot positiva z-axeln är $\frac{\pi}{4}$ eftersom om man bara kollar i xz-planet beskrivs linjen som $z = x$ vilken har vinkeln $\frac{\pi}{4}$ mot z-axeln. Området ovanför konen ges då av att $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$. Sfären $x^2+y^2+z^2 = 4$ ges av $\rho = 2$, då är området innanför sfären $0 \leq \rho \leq 2$. Vi har inga villkor på θ, alltså är $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Alltså ges E i sfäriska koordinater av att $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Integralen är då

$$\begin{aligned}
\iiint_E (x^2+y^2+z^2)^2 \mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^{2^2} \rho^2 \sin(\phi) \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^6 \left[-\cos(\phi)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^6 (-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(0)) \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \\
&= (-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(0)) \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^7}{7}\right]_0^2 \mathrm{d}\theta \\
&= (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \int_0^{2\pi} \frac{2^7}{7} \mathrm{d}\theta \\
&= (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \frac{2^7}{7} \int_0^{2\pi} 1 \mathrm{d}\theta \\
&= (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \frac{2^7}{7} \cdot 2\pi \\
&= (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \frac{2^8 \pi}{7}
\end{aligned}$$

0.2 Vektorfält (16.1)

Hittils har vi studerat funktioner

1. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Det är naturligt att också studera funktioner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definition 2 (Vektorfält)**.** Ett *vektorfält* på $D \subseteq \mathbb{R}^n$ där $n \in \mathbb{Z}$ är en funktion $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^n$, d.v.s. att för varje $(x,y) \in D$ ger det en vektor $\vec{F}(x,y) \in \mathbb{R}^n$.

Vektorfält dyker ofta upp i fysikaliska tillämpningar, t.ex.

1. Ett *hastighetsfält* $\vec{v}$ är ett vektorfält där $\vec{v}(x,y)$ representerar hastigheten i punkten (x,y) av något som rör sig med varierande hastighet, t.ex. en gas eller en vätska.
2. Ett *kraftfält* $\vec{F}$ är ett vektorfält där $\vec{F}(x,y)$ representerar kraften på en partikel i punkten (x,y), t.ex. ett gravitationsfält eller ett elektriskt fält.

Ett viktigt matematiskt exempel är följande:

Definition 3 (Gradientfält)**.** Om vi har en funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D\mathbb{R}^2$ så är dess *gradientfält*

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle .$$

Motsvarande funkar även i $\mathbb{R}^3$.