0.1 Konservativa vektorfält (16.3)

Sats 1 (Partiella derivator till vektorfält och konservativa vektorfält)**.** Låt $\vec{F} = \langle P, Q \rangle$ vara ett vektorfält på en enkelt sammanhängande mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ så att $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Då är $\vec{F}$ konservativt.

Bevis. Bevisas med hjälp av Greens sats, vilket vi kommer in på snart. □

Anmärkning 1. Satsen gäller inte på mängder D som inte är enkelt sammanhängande. Viktigt att dubbelkolla när man räknar!

0.1.1 Metod för att hitta en potential om den existerar

Vi vill lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} f_x = P & \text{(i)} \\ f_y = Q & \text{(ii)} \end{cases}$$

vilket görs genom att först ta en lösning till (i), d.v.s. hittar en primitiv funktion f_0 till P med avseende på x. Den allmänna lösningen till (i) är då $f(x,y) = f_0(x,y) + g(y)$. Den stoppar vi in i (ii) för att bestämma $g(y)$. Alltså är $Q = f_y \frac{\partial}{\partial y}(f_0 + g) = \frac{\partial}{\partial y}(f_0) + g'(y) \iff g'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y}(f_0) \iff g(y)$ är en primitiv funktion till $Q - \frac{\partial}{\partial y}(f_0)$ med avseende på y.

Obs. 1. I detta sista steget måste vi få att $Q - \frac{\partial}{\partial y} f_0$ bara beror på y, annars är något fel. Exempelvis att $\vec{F}$ inte är konservativt eller att man har räknat fel.

0.2 Greens sats (16.4)

Definition 1 (Styckvis glatta kurvor)**.** En kurva C är *styckvis glatt* om den kan delas in i ett antal glatta kurvor $C_1, \ldots, C_n$ där C_i slutar där C_{i+1} börjar.

Definition 2 (Kurvintegraler över styckvis glatta kurvor)**.** Om en kurva C är styckvis glatt definierar vi $\int_C f \mathrm{d}s = \int_{C_1} f \mathrm{d}s + \cdots + \int_{C_n} f \mathrm{d}s$ och $\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \cdots + \int_{C_n} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

Vi antar i fortsättningen att våra kurvor är styckvis glatta.

Kom ihåg att kurvintegralen av ett vektorfält längs en kurva C som parametriseras av $\vec{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$ beror på kurvan sedd som en *orienterad kurva* som består av dess punkter $\{\vec{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ och riktningen man går längs kurvan.

Definition 3 (Negationen av kurvor)**.** Kurvan $-C$ består av samma punkter som C men går i motsatt riktning. Parametriseras t.ex. som $\vec{s}(t) = \vec{r}(b-t)$ där $0 \leq t \leq b-a$.

Från definitionen av vektorfält följer då att $\int_{-C} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$. (Däremot är $\int_{-C} f \mathrm{d}s = \int_C f \mathrm{d}s$.)

Definition 4 (Områden begränsade av en kurva)**.** Låt C vara en enkel sluten kurva. Då *begränsar* C ett område D, d.v.s. C är randen till D.

Att visa detta är förvånansvärt komplicerat, det visades inte förrän en bit in på 1900-talet.

Definition 5 (Kurvors orientation)**.** En enkel sluten kurva C är *positivt orienterad* om den går moturs kring området den begränsar. Man kan också säga att området alltid ligger till vänster när man går längs C:s riktning. Annars är den *negativt orienterad* och då är $-C$ positivt orienterad.

Definition 6 (Notation)**.** Anta att C ges av $\vec{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$. Låt också $\vec{F} = \langle P, Q \rangle$ och $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$. Då skrivs $\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \mathrm{d}t = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \mathrm{d}t$ också som $\int_C P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y$, d.v.s. $\mathrm{d}x = x'(t)$ och $\mathrm{d}y = y'(t)$.

Sats 2 (Greens sats)**.** Om C är en enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D och P och Q har kontinuerliga partiella derivator är

$$\int_C P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \mathrm{d}A.$$

Bevis. Den har liknande form som integralkalkylens fundamentalsats, båda formlerna säger att integralen av en derivata på något område kan utryckas m.h.a. värden på randen. Beviset för satsen när D är ett typ I och ett typ II-område följer satsen relativt enkelt från integralkalkylens fundamentalsats och formeln för upprepad integration för typ I och typ II-områden. Bokens 16.4 har mer specifikt bevis. $\square$

Greens sats kan alltså användas för att beräkna kurvintegraler som dubbelintegraler och tvärtom.

Sats 3 (Greens sats och areor)**.** Om $\langle P, Q \rangle = \langle -y, 0 \rangle$, $\langle 0, x \rangle$ eller $\left\langle -\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \right\rangle$ är $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ så att $\text{area}(D) = \iint_D 1 = \int_C -y \mathrm{d}x = \int_C x \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_C -y \mathrm{d}x + x \mathrm{d}y$.