

0.1 Egenskaper hos Fouriertransformen

”Det är naturligtvis lite mer delikat än så.”

– Pokèmon #109

Om $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ är alltid $F(i\omega)$ kontinuerlig och $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} F(i\omega) = 0$.

Exempel 1. Om $f = \delta$ saknar $\int |f| dt$ mening. Trots det är $F(i\omega) = 1$ kontinuerlig, men $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} 1 \neq 0$.

Exempel 2. $f(t) = e^{-|a|t}$ bildar transformpar med $F(i\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$.
 $f(t) = e^{-at}u(t)$ bildar transformpar med $F(i\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$.

0.2 Räkne regler för Fouriertransformen

Sats 1 (Linearitet av Fouriertransformen). Om $Af_1(t) + Bf_2(t)$ är dess Fouriertransform $AF_1(i\omega) + BF_2(i\omega)$.

Sats 2 (Tidsskalning Fouriertransform). Om $f(at)$ när $a \neq 0$ är dess Fouriertransform $\frac{1}{|a|}F\left(\frac{i\omega}{a}\right)$.

Bevis. $\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt = \{u = at \implies du = a dt\} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u} du.$

□

Sats 3 (Tidsskifte Fouriertransform). Om $f(t+a)$ är dess Fouriertransform $e^{i\omega a}F(i\omega)$.

Bevis. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)e^{-i\omega t} dt = \{u = t+a\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\omega a}e^{-i\omega u} du = e^{i\omega a}F(i\omega).$

□

Exempel 3. Låt $f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |t| \leq a \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$.

Då är $F_1(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2a} = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{t=-a}^a =$

$$\frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{2i} \frac{1}{\omega a} = \frac{\sin(\omega a)}{\omega a}.$$

Låt x vara en signal. Då är $f_1 * x = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)x(t-s)ds = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a x(t-s)ds$

vilket är medelvärdet av $x(t)$ i punkten t när man går a steg till både höger och vänster. Inses rätt lätt om man ritar upp det.

$f_1 * x$ bildat transformpar med $\frac{\sin(\omega a)}{\omega a} X(i\omega)$.

Sats 4 (Derivata och Fouriertransform). Om $f(t)$ är en signal bildar $\frac{d}{dt}f(t)$ ett transformpar med $i\omega F(i\omega)$.

Bevis. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}f(t)e^{-i\omega t}dt =$ (med partiell integration och antagandet att f
går mot 0 i oändligheten) $= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{d}{dt}e^{-i\omega t} \right) dt = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

□

Exempel 4. Tillbaka till förra exemplet, vad är f_1' ?

Jo, f_1' kan definieras av att $\int_{-\infty}^{\infty} f_1'(t)x(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)x'(t)dt = -\frac{1}{2a} \int_{-a}^a x'(t)dt =$

$$\frac{1}{2a}(x(-a) - x(a)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a}(\delta(t+a) - \delta(t-a))x(t)dt.$$
 Alltså är $f_1' =$

$$\frac{1}{2a}(\delta(t+a) - \delta(t-a)).$$

Om man tittar på grafen för f_1 kan man, om man tänker på vad derivatan måste vara i varje punkt, se att detta är rimligt.

Vi vill kolla att detta stämmer. $f_1' = \frac{1}{2a}(\delta(t+a) - \delta(t-a))$ bildar transformpar med $\frac{1}{2a}(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = i\omega \frac{1}{2i\omega a}(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = i\omega \frac{1}{a\omega} \sin(a\omega) = i\omega F_1(i\omega)$, vilket är rimligt med tanke på tidigare räkneregler.

Sats 5 (Fouriertransform för $t \cdot f(t)$). Om vi har en signal $t \cdot f(t)$ bildar det ett transformpar med $i \frac{d}{d\omega} F(i\omega)$.

$$\begin{aligned} \text{Bevis. } \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) t e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) i \frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t} dt = i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t} dt = \\ &= i \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad \square \end{aligned}$$

”Låt oss vara lite casual”

– Pokémon #109 om räkneregler

VARNING: I boken skrivs $F(\omega)$ för Fouriertransformen i kapitel < 6 men $F(i\omega)$ i kapitel ≥ 6 .

Exempel 5. Låt $f_2(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$. Vad är Fouriertransformen F_2 ?

Vi ska ta en systemapproach istället för att göra jobbiga integraler.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_2(t) &= -2te^{-at^2} = -2at f_2(t), \text{ d.v.s. } \left(\frac{d}{dt} + 2at\right) f_2(t) = 0 \iff (i\omega + 2ai \frac{d}{d\omega}) F_2 = 0 \iff \left(\frac{d}{d\omega} + \frac{1}{2a}\omega\right) F_2 = 0 \iff F_2(\omega) = C e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \implies \\ C &= F_2(\omega = 0) \cdot e^{\frac{0^2}{4a}} = F_2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \text{ Alltså bildar } e^{-at^2} \end{aligned}$$

transformpar med $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

Anmärkning 1. f_2 avtar superexponentiellt när $t \rightarrow \pm\infty$, d.v.s. f_2 inte en lösning till en stabil LTI.

”Den går snabbare än örnen mot noll.”

– Pokémon #109

Vad betyder egentligen $\frac{d}{dt}$?

Jo, $\frac{d}{dt}(h * x) = \frac{dh}{dt} * x = h * \frac{dx}{dt}$. $\frac{d}{dt}$ är också tidsinvariant, vilket betyder att det måste ges av någon faltning. Vad för h uppfyller att $h * x = \frac{d}{dt}x$?

$$\begin{aligned} x(t) &= \int x(u) \delta(t - u) du = x * \delta(t) = \delta * x(t). \text{ Då är } \frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}(\delta * x) = \\ &= \left(\frac{d}{dt}\delta\right) * x. \delta \text{ definieras av att } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) x(t) dt = x(0), \text{ alltså måste } \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) x(t) dt = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) x'(t) dt \text{ så att } \delta' \text{ definieras av } \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) x(t) dt = -x'(0). \text{ Då är } \frac{d}{dt}x = \\ &= \delta' * x. \end{aligned}$$

Sats 6 (Sambandet mellan $\frac{d}{dt}$ och δ'). $\frac{d}{dt}x = \delta' * x$

Bevis. Se ovan. □

Exempel 6. Vad är Fouriertransformen av δ' ?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)e^{-i\omega t} dt = \{e^{-i\omega t} = x(t)\} = -x'(0) = -i\omega$$

Exempel 7. Skriv $(-\frac{d^2}{dt^2} + a^2)y = x$ som en LTI på formen $y = h * x$.

$(-\frac{d^2}{dt^2} + a^2)y$ bildar transformpar med $(-i\omega)^2 + a^2)Y = (\omega^2 + a^2)Y$.

$(-\frac{d^2}{dt^2} + a^2)y = x \iff (\omega^2 + a^2)Y = X \iff Y = \frac{1}{\omega^2 + a^2}X \iff y = h * x$
för ett h s.a. $H(i\omega) = \frac{1}{\omega^2 + a^2}$.

e^{-at} har en Fouriertransform $\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$, då har $h(t) = \frac{1}{2a}e^{-at}$ överföringsfunktion $H(i\omega) = \frac{1}{a^2 + \omega^2}$.

Då får vi från ursprungliga problemet $h * x(t) = y(t) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t-u|} x(u) du$.

"En pil säger mer än två ord i det här fallet"

– Pokémon #109

Sats 7. Låt f vara en signal. Då har $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ Fouriertransform $\frac{F(i\omega)}{i\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$.

Bevis. Idén bakom beviset är att $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t-\tau) d\tau = f * u$.

Eftersom $f * u$ bildar transformpar med FU vill vi visa att det är lika med $F(i\omega) (\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega))$. Vi vill alltså att $U(i\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$.

Eftersom $u' = \delta$ får vi att det bildar transformpar med $i\omega U(i\omega) = 1 \implies U(i\omega) = \frac{1}{i\omega}$.

Man får i någon mån halva bidraget från den konstanta funktionen 1, vilket är $2\pi\delta(\omega)$, alltså får vi en faktor $\pi\delta(\omega)$ i lösningen. □

Om $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau = 0$ måste $F(0) = 0$.

0.3 Plancherels sats

Sats 8. Låt $L^2(-\infty, \infty) = \{ \text{signaler } f \text{ med ändlig energi} \}$ Kom ihåg att energin $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$. Kom också ihåg $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t) dt$. Då är, för $f_1, f_2 \in L^2(-\infty, \infty)$, både F_1 och $F_2 \in L^2(-\infty, \infty)$. Vidare är $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(\omega)} f_2(\omega) d\omega$.