

0.1 Approximation av signaler

Låt f vara en signal och x vara en modellsignal som vi förstår. Vi vill modellera f m.h.a. x , så ungefär $f \approx cx \implies$ Ett fel $e = f - cx$.

Kom ihåg linalgens "inre produktrum":

V är ett vektorrum över \mathbb{R} eller \mathbb{C} , $\langle \cdot, \cdot \rangle$, en inre/skalär produkt på V . Den uppfyller $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle x, x \rangle \geq 0 (= 0 \iff x = 0)$ och $\langle x, \lambda y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle \lambda + \langle x, y_2 \rangle$.

$$f_1, f_2 \text{ är signaler, då är här } \langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(t) f_2(t) dt.$$

$$\text{I det periodiska fallet är } \langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^T f_1^*(t) f_2(t) dt.$$

Mellan två signaler f_1, f_2 har vi en vinkel θ som definieras genom $\cos(\theta) = \frac{\langle f_1, f_2 \rangle}{|f_1| \cdot |f_2|}$ där $|f| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Felet e är litet om $|e|$ är litet. När är då $|e|$ som minst? D.v.s. vad är min $|f - cx|$ över \mathbb{C} ? Går att härleda att det uppnås för $c = \frac{\langle x, f \rangle}{|x|^2}$. Det betyder att $f \approx \frac{\langle x, f \rangle}{|x|^2} x$.

"Jag växte också upp på Lindholmen."

– Mattesnubben

Om f är en signal definierad för $-\infty < t < \infty$ är dess energi $E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = |f|^2$.

Om f_1, f_2 är signaler definierade för $-\infty < t < \infty$ är $\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt}{\sqrt{E_{f_1} E_{f_2}}} = \frac{\langle f_1, f_2 \rangle}{|f_1| |f_2|}$ korrelationen mellan signalerna. Den är $1 \iff f_1 = f_2$ och $-1 \iff f_1 = -f_2$.

Anta att vi har flera modellsignaler x_1, x_2, \dots, x_N så att $f \approx c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N$. Vi vill då minimera $e = f - \sum_{n=1}^N c_n x_n$. Det uppnås för $c_k = \frac{\langle x_k, f \rangle}{|x_k|^2}$.

OM x_1, x_2, \dots, x_n inte är korrelerade, d.v.s. de är ortogonala eller den inre/skalärprodukten är 0.

0.2 Fourierserier

Fourierserier appliceras på periodiska signaler. Låt f vara en signal med period T .

Vi tittar på följande modellsignaler: $\{1, \cos(\omega_0 t), \dots, \cos(N\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \dots, \sin(N\omega_0 t)\}$.

$$\langle \cos(k\omega_0 t), \cos(l\omega_0 t) \rangle = \int_0^T \cos(k\omega_0 t) \cos(l\omega_0 t) dt = \int_0^T \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} \frac{e^{jl\omega_0 t} + e^{-jl\omega_0 t}}{2} dt =$$

$$\frac{1}{4} \int_0^T e^{j(k+l)\omega_0 t} + e^{j(k-l)\omega_0 t} + e^{j(-k+l)\omega_0 t} + e^{-j(k+l)\omega_0 t} dt = T \text{ om } k = l = 0, \frac{T}{2} \text{ om } k =$$

$$l > 0, 0 \text{ annars. På samma sätt är } \int_0^T \cos(k\omega_0 t) \sin(l\omega_0 t) dt = 0 \text{ och } \int_0^T \sin(k\omega_0 t) \sin(l\omega_0 t) dt =$$

$$\frac{T}{2} \text{ om } k = l \text{ och } 0 \text{ annars.}$$

Alltså är den bästa approximationen

$$f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$$

$$\text{där } a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{\langle \cos(k\omega_0 t), f \rangle}{|\cos(k\omega_0 t)|^2} \text{ och } b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{\langle \sin(k\omega_0 t), f \rangle}{|\sin(k\omega_0 t)|^2}.$$

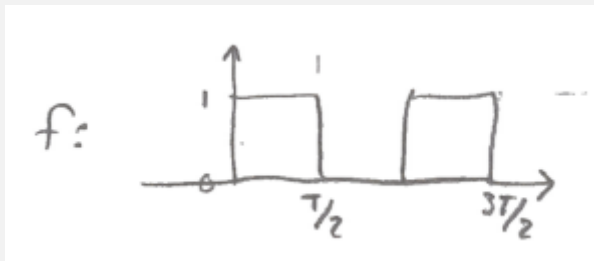
Sats 1. Om f är T -periodisk och $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$ existerar a_k och b_k .

Sats 2. Om f dessutom är kontinuerlig på intervallet på $0 \leq t \leq T$ utom i ändligt många punkter och $f(t+) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t+h)$ och $f(t-) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t-h)$ existerar för alla t så är $\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$.

"Det här är högst icke-trivialt."

– Mattesnubben

"Om man stoppar in något i datorn som inte konvergerar kommer det gå åt röven."



Exempel 1.

Vi har ju $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t)$, för $k \geq 0$ har vi $a_k =$

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \cos(k\omega_0 t) dt = 1 \text{ för } k = 0, \frac{2}{T k \omega_0} [\sin(k\omega_0 t)]_0^{T/2} =$$

$$1 \text{ för } k = 0, 0 \text{ annars. och för } k > 0 \text{ har vi } b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_0 t) dt =$$

$$\frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T k \omega_0} [-\cos(k\omega_0 t)]_0^{T/2} = \frac{1}{\pi k} (-\cos(k\pi) + 1) = \frac{1}{\pi k} (-(-1)^k +$$

$$1) = 0 \text{ för } k = 2m \text{ och } \frac{2}{\pi(2m+1)} \text{ annars.}$$

$$f = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)\omega_0 t)}{\pi(2m+1)}$$

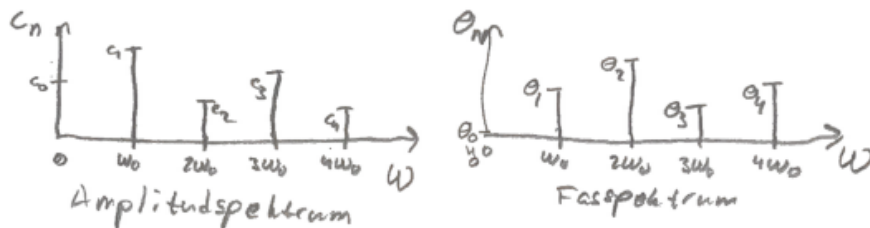
0.2.1 Kompakt form

$$\begin{aligned} f &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(k\omega_0 t + \theta_n) \end{aligned}$$

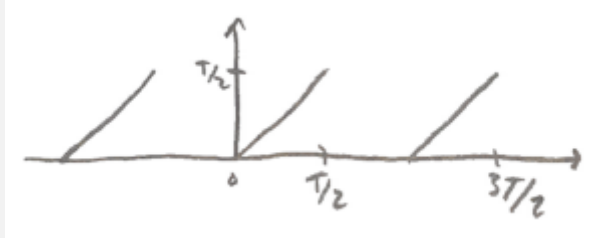
$$c_n \cos(k\omega_0 t + \theta_n) = c_n \cos(\theta_n) \cos(k\omega_0 t) - c_n \sin(\theta_n) \sin(k\omega_0 t)$$

$$\tan(\theta_n) = \frac{-b_n}{a_n} \text{ och } c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

0.3 Frekvensspektrum



Används för att visualisera fourierserier.



Exempel 2.

$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t)$, och vi börjar med fallet där

$k > 0$. Då är $a_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} t \cos(k\omega_0 t) dt$ och med partiell integrering får

$$\text{vi } a_n = \frac{2}{T} \left[t \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0} dt = 0 + \frac{2}{T\omega_0^2 k^2} [\cos(k\omega_0 t)]_0^{\frac{T}{2}} =$$

0 när $k = 2m$, $\frac{-2}{\pi\omega_0(2m+1)^2}$ annars. Vi har också $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt =$

$$\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} t dt = \frac{T}{2}.$$

Om man räknar på b_n blir det likt, men till slut får vi $f = \frac{T}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-\cos((2m+1)\omega_0 t)}{\omega_0(2m+1)^2} +$

$\frac{\sin((2m+1)\omega_0 t)}{2m+1}$ eller i kompakt form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos((2n+1)\omega_0 t + \theta_n)$ där $\theta_n =$

$$\arctan\left(\frac{-b_{2n+1}}{a_{2n+1}}\right) = \arctan(\omega_0(2n+1)).$$