0.1 Laplacetransformen

Man brukar prata om en- och tvåsidiga Laplacetransformer.

0.1.1 Tvåsidig

Definition 1 (Tvåsidig Laplacetransform)**.** Låt $f(t), -\infty < t < \infty$ vara en signal. Då är Laplacetransformen $F(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ där $s \in \mathbb{C}$, vilket typ är $FT(f)$.

Följande är det kausala fallet av den tvåsidiga transformen.

Definition 2 (Ensidig Laplacetransform)**.** Låt $f(t)$ vara en kausal signal, d.v.s. $f(t) = 0$ för $t < 0$.

Då är $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ där $s \in \mathbb{C}$.

Definition 3 (Exponentiellt begränsad)**.** f är exponentiellt begränsad om efter något t_0 beter den sig som en exponentiell funktion.

Matematiskt säger vi att $\exists\ c \in \mathbb{R}, t_0 > 0 : |f(t)| \le e^{ct} \forall t > t_0$.

Exempel 1. $f(t) = \delta(t - a)$. Om $a \ge 0$ är den kausal.

För alla $t_0 > a$ är $f(t) = 0 \forall t > t_0$ och därmed $|f(t)| \le e^{ct} \forall c \in \mathbb{R}$. Alltså är den exponentiellt begränsad.

Påstående 1 (När Laplace är definierat)**.** Om f är exponentiellt begränsad för något $c \in \mathbb{R}$ så är Laplacetransformen $F(s)$ väldefinierad för $\mathrm{Re}\{s\} > c$.

Bevis. Tanken är att man visar att andra termen i $F(s) = \int_0^{t_0} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_0^{t_0} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ är begränsad. □

Exempel 2. Låt $f(t) = \delta(t - a)$ för något $a > 0$.

Då är $F(s) = \int_0^\infty \delta(t - a)e^{-st}\mathrm{d}t = e^{-sa}$.

Exempel 3. Låt $f(t) = u(t)$.

Då är $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s}$.

Exempel 4. Låt $f(t) = tu(t)$.

Då är $F(s) = \int_0^\infty te^{-st}\mathrm{d}t = \{\text{Partiell integrering}\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Exempel 5. Låt $f(t) = \delta'(t-a)$ för något $a > 0$.

Då är $F(s) = \int_0^\infty \delta'(t-a)e^{-st}\mathrm{d}t = se^{-sa}$.

Exempel 6. Låt $f(t) = e^{at}u(t)$.

Då är $F(s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s-a}$ om $\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{a\}$.

Påstående 2 (Laplace av faltning)**.** Om x_1, x_2 är ensidiga gäller att Laplacetransformen av $x_1 * x_2 = X_1X_2$.

Bevis. Laplace av $x_1 * x_2 = \int_0^\infty (x_1 * x_2)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t = \{v = t-\tau\} = \int_0^\infty \int_0^\infty x_1(\tau)x_2(v)e^{-s(\tau+v)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}v = X_1(s)X_2(s)$. □

För en kausal LTI gäller att $y = h * x \iff Y = HX$. För att visa det här måste vi veta att Laplacetransformen av en signal är unik.

0.1.2 Egenskaper för Laplace

Vi skriver $\mathcal{L}\, f(s) \coloneqq F(s)$.

1. $\mathcal{L}$ är linjär, d.v.s. $\mathcal{L}(f_1 + \lambda f_2) = \mathcal{L}\, f_1 + \lambda\, \mathcal{L}(f_2)$.
2. $f(t-a) \overset{\mathcal{L}}{\longmapsto} e^{-as}F(s)$
3. $e^{-zt}f(t) \overset{\mathcal{L}}{\longmapsto} F(s+z)$
4. $f'(t) \overset{\mathcal{L}}{\longmapsto} s\,\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$ eftersom $\mathcal{L}(f'(s)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t = [f(t)e^{-st}]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty f(t)\cdot(-s)e^{-st}\mathrm{d}t = f(\infty)e^{-s\infty} - f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = sF(s) - f(0)$

Om f är en signal med $c < 0$ är $F(s)$ definierad för $\mathrm{Re}(s) = 0$. Då kan vi definiera $F(i\omega) = \mathrm{FT}$ för f.

Laplace kan definieras i vissa fall när FT inte existerar, ex. $f(t) = e^t u(t)$. Då är $\mathrm{FT} \approx \int_0^\infty e^t e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$. $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-1}, \mathrm{Re}\{s\} > 1$.

För en kausal LTI $y = h * x$, om vi stoppar in $x(t) = e^{st}$, ger $y(t) = h * e^{st} = \int_0^\infty h(\tau)e^{s(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = e^{st}\int_0^\infty h(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau = \mathcal{L}(H)(s)x(t)$.

Låt $y' + ay = x$ där $y(0)$ är given.

Genom Laplace får vi $\mathcal{L}(y' + ay) = sY(s) - y(0) + aY = X \implies Y(0) = \frac{X + y(0)}{s+a} = \mathcal{L}(e^{-at}u(t)) \cdot (X + y(0)) = \mathcal{L}(e^{-at}u(t) * (x + y(0)\delta(t)))$ vilket om

$\mathcal{L}$ är inverterbar ger att $y(t) = e^{-at}u(t) * (x(t) + y(0)\delta(t)) = y(0)e^{-at}u(t) + \int_0^t e^{-a\tau}x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$.

Exempel 7. Låt $f(t) = \cos(at)u(t)$ där $a \in \mathbb{R}$.

$f(t) = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}u(t)$. Då är $F(s) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}(e^{iat}u(t))+\mathcal{L}(e^{-iat}u(t))) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-ia}+\frac{1}{s+ia}) = \frac{s}{s^2+a^2}$.

Exempel 8. Låt $f(t) = \sin(at), a \in \mathbb{R}$.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(at) = a\cos(at) \implies s\,\mathcal{L}(\sin(at))(s) - \sin(a\cdot 0) = a \cdot \frac{s}{s^2+a^2} \implies s\,\mathcal{L}(\sin(at))(s) = \frac{as}{a^2+s^2} \implies \mathcal{L}(\sin(at))(s) = \frac{a}{a^2+s^2}$

Om $|f(t)| \leq e^{ct}$ och $\sigma > c$ är $\int_0^\infty |f(t)e^{-\sigma t}|\mathrm{d}t < \infty$ vilket ger att FT för $f(t)e^{-\sigma t}$ är väldefinierad. Utöver det bildar $f(t)e^{-\sigma t}$ ett Fouriertransformpar med $F(i\omega + \sigma)$.

Alltså är $f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(i\omega+\sigma)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \implies f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(i\omega + \sigma)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = \{s = i\omega + \sigma\} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} F(s)e^{st}\mathrm{d}s$ vilket kallas för *Bromwichintegralen.*

Sats 1 (Likhet av två signaler och dess två Laplacetransformer)**.** Om f_1 och f_2 är två kausala signaler med $F_1 = F_2$ är $f_1 = f_2$.

Exempel 9. Vi vill finna den signal $f(t)$ så att $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s+1}{s^2+2} = \frac{s}{s^2} + \frac{1}{s^2+2} = \frac{s}{s^2+\sqrt{2}^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}^2} = \mathcal{L}(\cos(\sqrt{2}t)) + \mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)) \implies f(t) = \cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)$.

Exempel 10. Anta att insignalen x uppfyller $x(0) = 0$. Vi ska skriva om $\begin{cases} y'' + 2y + x' + x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ på formen $y = h * x$.

Laplacetransform ger $s^2Y + 2Y = sX + X \iff Y = \frac{s+1}{s^2+2}X \iff y = (\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)) * x$.

Sats 2 (Slutvärdessatsen)**.** Låt f vara en kausal och begränsad signal, d.v.s. $\exists c > 0$ s.a. $|f(t)| \leq c$.

Satsen är att $f(0+) = \lim_{\epsilon\to 0+} f(\epsilon) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$ och $\lim_{t\to\infty} f(t) =$

$\lim_{s\to 0} sF(s)$.

Bevis. Om $s > 0$ är $sF(s) = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \{u = st\} = \int_0^\infty f(\frac{u}{s})e^{-u}\mathrm{d}u \implies$ $sF(s) = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty f(\frac{u}{s})e^{-u}\mathrm{d}u = \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} f(t)e^{-u}\mathrm{d}u = \lim_{t\to\infty} f(t)\int_0^\infty e^{-u}\mathrm{d}u =$ $\lim_{t\to\infty} f(t)$. $\square$