Föreläsningsanteckningar
Transformer, signaler och system
SSY080

Hugo Simonsson

12 september 2019

Innehåll

1 Föreläsning 19-09-03

I kursen studerar vi tekniska/fysikaliska system och deras egenskaper. Vi kan till exempel vara intresserade av hur de reagerar på olika exciteringar (insignaler). Vi begränsar oss till system med en in- och en utsignal. In- och utsignaler kan vara ex. kraft, tryck, spänning, ström o.s.v. Vi använder oss av matematiska modeller för att beskriva signaler (funktioner) och system (ekvationer).

1.1 Klassificering av signaler

1.1.1 Diskret/Kontinuerlig signal

Kontinuerlig (tid) signal $x(t)$ där $t \in \mathbb{R}$

Diskret (tid/oberoende variabel) signal $x[n]$ där $n \in \mathbb{Z}$

Kontinuerlig amplitud $x(t), x[n] \in \mathbb{R}$

Diskret amplitud $x(t), x[n]$ kvantiserad

Digital signal betecknar vanligen en signal som är diskret både i tid och amplitud.

1.1.2 Jämn/Udda signal

Jämn signal $\forall t, x(t) = x(-t)$ kallas vanligtvis $x_e(t)$

Udda signal $\forall t, x(t) = -x(-t)$ kallas vanligtvis $x_o(t)$

Sats 1. En godtycklig signal $x(t)$ kan alltid delas upp i en jämn signal $x_e(t)$ och en udda signal $x_o(t)$. Den jämna delen $x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$ och den udda delen $x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$

Bevis. $x_e(-t) = \frac{1}{2}(x(-t) + x(t)) = x_e(t)$ och $x_o(-t) = \frac{1}{2}(x(-t) - x(t)) = -\frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) = -x_o(t)$. Summan $x_e(t) + x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t) + x(t) - x(-t)) = x(t)$. $\square$

1.1.3 Periodisk signal

Periodisk signal $\forall t, x(t) = x(t+T)$ där T är en konstant period för signalen.

Exempelvis sinusformad signal, fyrkantsvåg, triangelvåg o.s.v.

Periodisk diskret signal $\forall n, x[n] = x[n+N]$ där $N \in \mathbb{Z}^+$ och konstant.

1.1.4 Deterministisk (Känd, förutsägbar)/Slumpmässig (Stokastisk) signal

En signal kallas slumpmässig om den inte kan förutsägas helt.

Def. 1 (Energisignal)**.** Låt den totala energin vara $E = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$ alt. $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$. Om $0 < E < \infty$ är x en energisignal.

Def. 2 (Effektsignal)**.** Låt medeleffekten $P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$ alt. $P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-\infty}^{N} |x[n]|^2$. Om $0 < P < \infty$ är x en effektsignal.

Notera att för en energisignal gäller $P \to 0$ eftersom $E < \infty$ och på samma sätt gäller att för en effektsignal går $E \to \infty$.

1.2 Signalmanipulering

1.2.1 Amplitudskalning

$y[n] = ax[n] + b$ där vi exempelvis kan kalla a för förstärkning och b inom elektronik för DC-skift. a, b är konstanter. På samma sätt för kontinuerliga signaler $y(t) = ax(t) + b$.

1.2.2 Ändra tidsskala

$y(t) = x(at), a \in \mathbb{R}$ och $y[n] = x[kn], k \in \mathbb{Z}$

1.2.3 Spegling

$\forall t, y(t) = x(-t)$ och $\forall n, y[n] = x[-n]$

1.2.4 (Tids)skift

$y(t) = x(t - t_0)$ och $y[n] = x[n - n_0]$

1.2.5 Samtida operationer

Låt $x(t)$ vara en signal.

Ändra tidsskala så att $t \to at \implies x(at)$ sen en tidsskift $t \to t - t_0' \implies x(a(t - t_0')) = x(at - at_0')$. Nu ändrar vi först tidsskift $t \to t - t_0 \implies x(t - t_0)$ och sen tidsskalan $t \to at \implies x(at - t_0)$. Notera att det är blir olika beroende på i vilken ordning det tas i. För att det ska vara lika måste $at_0' = t_0$.

1.3 Signalmodeller

1.3.1 Komplex exponential (kontinuerlig)

$x(t) = Ce^{at}$ där $C, a, x \in \mathbb{C}$. Komplexa tal förekommer oftast inte i fysikaliska system men är mycket användbara som matematiska modeller. Den fysikaliska signalen kan fås ur $\mathrm{Re}\{x(t)\}$ eller $\mathrm{Im}\{x(t)\}$. Jämför $j\omega$-metoden (phasors) för beräkning av stationära växelströmskretsar.

1.4 Lite repetition av komplexa tal

$\cos(\theta) = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2}$ och $\sin(\theta) = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$.

Tidsvariation $\theta = \omega t$

1.5 Några olika fall

1.5.1 Fall 1

Anta $C, a \in realn$. Då är $x(t) = Ce^{at}$. För $a < 0$ och $C > 0$ beskriver x ett exponentiellt avtagande förlopp. För $a > 0$ beskriver x ett exponentiellt stigande förlopp. Om $a = 0$ är $x(t) = C$.

1.5.2 Fall 2

$a, C \in \mathbb{C}$ och $\mathrm{Re}\{a\} = 0$. Låt $a = j\omega_0$ och $C = Ae^{j\Phi} (= A\angle\Phi)$. $x(t) = Ae^{j\Phi}e^{j\omega_0 t} = Ae^{j(\omega_0 t + \Phi)} = A\cos(\omega_0 t + \Phi) + jA\sin(\omega_0 t + \Phi)$. $\mathrm{Re}\{x(t)\}$ är sinusformad med amplitud A och fasförskjutning Φ. Det är en odämpad sinusformad signal.

1.5.3 Fall 3

$C, a \in \mathbb{C}$. Låt $C = Ae^{j\Phi}$ och $a = \sigma_0 + j\omega$. Då är $x(t) = Ae^{j\Phi}e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}e^{j(\omega_0 t + \Phi)} = Ae^{\sigma_0 t}\cos(\omega_0 t + \Phi) + jAe^{\sigma_0 t}\sin(\omega_0 t + \Phi)$. Om $\sigma_0 < 0$ blir signalen en dämpad sinusformad signal. Om $\sigma_0 > 0$ blir signalen en anti-dämpad sinusformad signal. Om $\sigma_0 = 0$ är det bara fall 2 igen.

1.6 Diskret exponential

Låt $x[n] = Ca^n$. Allmänt är $C, a, x \in \mathbb{C}$ och $n \in \mathbb{Z}$.

1.6.1 Fall 1

$C, a \in \mathbb{R}$. Då gäller $x[n] = Ca^n$. För olika intervall ser graferna ut precis som man kan tänka sig. $a < 0$ gör att tecknet på $x[n]$ växlar och är negativt för udda n.

1.6.2 Fall 2

$C, a \in \mathbb{C}$ men $|a| = 1$. Låt $a = e^{j\Omega_0}$ och $C = Ae^{j\Phi}$. Då är $Ae^{j\Phi}e^{j\Omega_0 n} = Ae^{j(\Omega_0 n + \Phi)} = A\cos(\Omega_0 n + \Phi) + jA\sin(\Omega_0 n + \Phi)$. $x[n]$ är då en diskret odämpad sinusformad signal.

1.6.3 Fall 3

$C, a \in \mathbb{C}$. Låt $C = Ae^{j\Phi}$ och $a = e^{\Sigma_0}e^{j\Omega_0} = e^{\Sigma_0 + j\Omega_0}$. Då är $x[n] = Ae^{j\Phi}e^{(\Sigma_0 + j\Omega_0)n} = Ae^{\Sigma_0 n}e^{j(\Sigma_0 n + \Phi)}$. Σ_0 bestämmer om signalen blir dämpad eller anti-dämpad.

2 Föreläsning 19-09-05

2.1 Fler signaler

2.1.1 Enhetssteg (kontinuerligt)

Betecknas $u(t) = 1$ om $t \geq 0, 0$ annars.

Figur 1

Den används oftast ihop med en generell signal $x(t) \cdot u(t)$ så att den får signalvärden 0 när $t < 0$.

2.1.2 Enhetsimpuls

Tekniskt sett inte en ”vanlig” funktion, det är snarare en distribution eftersom den inte har väldefinierade amplitudvärden för alla invärden.

Def. 3. $\delta(t) = 0$ för $t \neq 0$ men $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$

Möjlig grafisk beskrivning:

Figur 2

Det är en ”oändligt kort” signal med en ”oändligt hög” amplitud. Amplituden vid $t = 0$ är inte begränsad. Vår grafiska notation är följande:

Figur 3

Enhetsimpulsen definieras utifrån sina egenskaper.

Låt $f(t)$ vara en godtycklig funktion (signal) som är kontinuerlig vid $t = t_0$. Då är $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$. Vidare gäller

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\mathrm{d}t \\
=&\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0)\mathrm{d}t \\
=&f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\mathrm{d}t \\
=&f(t_0).
\end{aligned}$$

2.1.3 Samband mellan enhetssteg och enhetsimpuls

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau \text{ och } \delta(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}.$$

2.1.4 Diskreta varianter

Motsvarande gäller för diskreta varianter av enhetssteg och enhetsimpuls.

Figur 4

Def. 4. Den diskreta enhetsimpulsen $\delta[n] = 1$ om $n = 0, 0$ annars.

Figur 5

2.1.5 Samband mellan diskreta varianter

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \text{ och } u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

2.2 System

En process där det finns en relation mellan orsak (insignal) och verkan (utsignal). Kan symboliseras som ett vanligt blockschema med en låda och pilar. En matematisk ekvation kan användas för att beskriva systemet, ex. elektriska kretsar och mekaniska system. Oftast differentialekvationer.

2.3 Systemegenskaper

2.3.1 Tidsinvarians

För ett tidsinvariant system gäller

$$\begin{aligned} \text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\ x(t) &\implies y(t) \\ x(t-t_0) &\implies y(t-t_0) \end{aligned}$$

"Nu är det så att jag använder språket svenska."

– Ants Silberberg

Figur 6

Ett system är då tidsinvariant om $y(t-t_0) = y_d(t)$ och samma gäller för ett diskret system.

2.3.2 Linearitet

För ett linjärt system gäller

$$\begin{aligned} \text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\ x(t) &\implies y(t) \\ a \cdot x(t) &\implies a \cdot y(t), a \text{ konstant (Systemet homogent)} \\ x_1(t) &\implies y_1(t) \\ x_2(t) &\implies y_2(t) \\ x_1(t) + x_2(t) &\implies y_1(t) + y_2(t), \text{ (Systemet additivt)} \\ a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \dots &\implies a_1y_1(t) + a_2y_2(t) + \dots \text{ (Kallas superposition)} \end{aligned}$$

Om ett system är homogent och additivt är det linjärt.

2.3.3 Stabilitet

Ett system är stabilt om en begränsad insignal ger en begränsad utsignal. På engelska BIBO (Bounded input bounded output).

$\forall t |x(t)| < M_x < \infty \implies |y(t)| < M_y < \infty$

2.3.4 Kausalitet

Ett system är kausalt om utsignalen $y(t)$ endast beror på samtida och/eller tidigare värden på insignalen $x(t)$. Alla fysikaliska system är kausala om t är tid.

2.3.5 Minne/Dynamiskt system

Ett system har minne om dess utsignal vid tidpunkten $t_0, y(t_0)$, beror på fler insignaler än bara $x(t_0)$.
Ex. 1 (Spänning över en kondensator)**.** Insignalen är strömmen genom kondensatorn $i(t)$ och utsignalen är spänningen $v(t)$. Då är $v(t) = \frac{1}{(}C) \int\limits_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau + v(0)$.
$v(t)$ beror på tidigare värden, alltså är systemet dynamiskt/har minne.

2.3.6 Minneslöshet/Statiskt system

Ex. 2 (Spänning över en resistans)**.** In- och utsignaler som förra exemplet, då är $v(t) = R \cdot i(t)$. Eftersom det bara beror på $i(t)$ och inga andra i är systemet minneslöst/statiskt.

Alla dessa egenskaper gäller även för diskreta system.
Ex. 3 (Diskret exempel)**.**

$$y[n] = n \cdot x[n]$$

Vi ser om det är tidsinvariant.

Figur 7

Inte tidsinvariant eftersom $y_d[n] \neq y[n - n_0]$.

Kollar om det är linjärt:

$$\begin{aligned} \text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\ x_1[n] &\implies y_1[n] = n \cdot x_1[n] \\ x_2[n] &\implies y_2[n] = n \cdot x_2[n] \\ x_3[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n] &\implies y_3[n] = n \cdot x_3[n] = n(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) = a_1nx_1[n] + a_2nx_2[n] = a_1y_1[n] + a \end{aligned}$$

Alltså är det linjärt.

Det är inte stabilt eftersom $y[n] = n \cdot x[n]$ inte är begränsat ty n inte är begränsat. Det är dock kausalt, vilket inses lätt.

3 Föreläsning 19-09-06

3.1 LTI-system

Ett vanligt sätt att karakterisera ett system är att ange dess utsignal för en given och känd insignal. För insignalen $x(t) = \delta(t)$ blir utsignalen $y(t) = h(t)$. Det kallas för systemets *impulssvar*. Motsvarande samband gäller för ett diskret system. Andra vanliga insignaler för att beskriva system är

$$\begin{aligned} \text{In} &\implies \text{ut} \\ \text{Enhetssteg} &\implies \text{Stegsvar} \\ \text{Sinusformad signal med } \omega = \omega_0 &\implies \text{Frekvenssvar} \end{aligned}$$

3.2 Samband mellan insignal, utsignal och LTI-system (i tidsdomänen)

3.2.1 Diskret fall

Anta att vi känner impulssvaret $h[n]$ till ett diskret LTI-system.

Låt $x[n]$ vara en godtycklig diskret signal.

Bilda $x[n]\cdot\delta[n] = x[0]\dot{\delta}[n]$ och därefter bilda $x[n]\cdot\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$. Tydligen kan vi teckna $x[n]$ som en summa av viktade och skiftade enhetsimpulser. Alltså är $x[n] = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k]$.

För ett LTI-system gäller

$$
\begin{aligned}
\text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\
\delta[n] &\implies h[n] \\
\delta[n-k] &\implies h[n-k] \\
x[k]\cdot\delta[n-k] &\implies x[k]h[n-k] \\
x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k] &\implies y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k]
\end{aligned}
$$

$y[n]$ ovan kallas för Faltningssumman. Förenklat skrivs $y[n] = x[n] * h[n]$. Med en variabelsubstitution kan man visa att $x[n]*h[n] = h[n]*x[n] \implies \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k] = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\cdot x[n-k]$.

3.2.2 Kontinuerligt fall

Anta att vi känner impulssvaret $h(n)$ till ett kontinuerligt LTI-system. Låt också $x(t)$ vara en godtycklig (in)signal och låt $\hat{x}(t)$ vara en approximation av $x(t)$ där $\hat{x}(t)$ är summan av pulserna $x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ o.s.v.

Vi definierar en enhetspuls som $\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}$ när $0 \leq t < \epsilon$ och 0 annars.

Figur 1

Våra pulser kan vi nu teckna som $\ldots, x_{-1} = \delta_\epsilon(t+\epsilon)x(-\epsilon)\epsilon, x_0 = \delta_\epsilon(t)x(0)\epsilon, x_1 = \delta_\epsilon(t-\epsilon)x(\epsilon)\epsilon, \ldots$ och $\hat{x}(t) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon$. Låt $h_\epsilon(t)$ vara systemets utsignal för insignalen $\delta_\epsilon(t)$ (pulssvar). För ett LTI-system gäller då

$$\begin{aligned}
\text{Insignal} &\implies \text{Utsignal}\\
\delta_\epsilon(t) &\implies h_\epsilon(t)\\
\delta_\epsilon(t-k\epsilon) &\implies h_\epsilon(t-k\epsilon)\\
\delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon &\implies h_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon\\
\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon = \hat{x}(t) &\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty}h_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon = \hat{y}(t)
\end{aligned}$$

Låt $\epsilon \to 0$, då gäller

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon(t) &\to \delta(t)\\
h_\epsilon(t) &\to h(t)\\
k\epsilon &\to \tau \text{ (En kontinuerlig variabel)}\epsilon && \to \mathrm{d}\tau\\
\sum &\to \int\\
\hat{x}(t) &\to x(t)\\
\hat{y}(t) &\to y(t)
\end{aligned}$$

Vi får då

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

vilket kallas faltningsintegralen. Förenklat skrivsätt är $y(t) = h(t) * x(t)$. Genom en variabelsubstitution kan man visa $h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$, alltså att $\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau$

"Det är backe upp här och backe ner där."

– Ants Silberberg

3.3 Systemegenskaper kopplade till impulssvar

3.3.1 Kausalt LTI-system

Diskret: $h[k] = 0$ för $k < 0$ och därmed $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$. Motsvarande gäller för kontinuerliga system: $y(n) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

3.3.2 Stabilt LTI-system

Diskret: Anta $\forall n : |x[n]| \leq M_x < \infty$ d.v.s. att insignalen är begränsad. Utifrån det kan vi resonera att $|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right|$ och eftersom $|a+b| \leq$

$|a| + |b|$ gäller $|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]|$ och än en gång, eftersom $|ab| = |a| \cdot |b|$ får vi $|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$ men eftersom $|x[k]| \leq M_x$ vet vi att $|y[n]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$. Med kravet på stabila system att $\forall n : |y[n]| < \infty$ följer villkoret $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$. Det kallar man att impulssvaret är absolutsummerbart.

Samma gäller för kontinuerliga system, då får man villkoret $\int_{\infty}^{\infty} |h(\tau)| \mathrm{d}\tau < \infty$ och det kallas för att impulssvaret är absolutintegrerbart.

4 Föreläsning 19-09-10

4.1 Diff. ekvationer

Vi kommer att titta på (LTIC-)system som beskrivs med $Q(D)y = P(D)x$ eller $Q[E]y = P[E]x$ i det diskreta fallet där $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ och $Ef[k] = f[k+1]$. Systemen är kausala, d.v.s. alltid $= 0$ för $t < 0$ eller $k < 0$. Alltså har vi ett begynnelsetillstånd. Den allmänna lösningen är $y = y_0 + y_i$ där y_0 är zerostate och y_i är zeroinput. Vanligtvis är $y_0 = h * x$, d.v.s. någon slags faltning.

Notation: $Q(D) = D^m + a_{m-1}D^{m-1} + \cdots + a_1 D + a_0$ där $m = ord(Q)$

4.1.1 Kontinuerliga fallet

$Q(D)y = P(d)x$ och $y^{(k)}(0)$ är givna för $k = 0, \ldots, \mathrm{ord}(Q) - 1$.

Först löser vi $Q(D)y_0 = P(D)f$ för $y^{(k)}(0) = 0$. Sedan löser vi $Q(D)y_i = 0$ givet $y_i^{(k)}(0) = y^{(k)}(0)$. Detta är partikulär- och homogenlösningar i ”vanliga” termer. $y_0 = h * x$ där h är impulssvaret.
Ex. 4. Anta $y' + ay = x$, $y(0) = b$, $Q(D) = D + a$ och $P(D) = 1$.

Eftersom systemet är tidsinvariant är a en konstant. Först löser vi $y_0' + ay_0 = x$ givet $y_0(0) = 0$. Sedan komemr vi att lösa $y_i' + ay_i = 0$ givet $y_i(0) = b$. Vi använder integrerande faktor, d.v.s. $(e^g y)' = (y' + g'y)e^g$ men eftersom vi veta har vi $g' = a \implies g = at$. Alltså är $e^{at}(y_0' + ay_0) = (e^{at}y_0)'$ och därmed $(e^{at}y_0)' = xe^{at} \implies e^{at}y_0(t) = e^{a0}y_0(0) + \int_0^t x(s)e^{as}\mathrm{d}s = \int_0^t x(s)e^{as}\mathrm{d}s \implies$ $y_0(t) = \int_0^t x(s)e^{a(s-t)}\mathrm{d}s = \int_0^t x(s)e^{-a(t-s)}\mathrm{d}s = x * h_{-a}(t)$ där $h_{-a}(t) = e^{at}u(t)$.
Alltså $y_0 = x * h_{-a}(t)$. Nu kollar vi om y_0 är en lösning vårt inledande problem. Först kollar vi om $y_0(0) = 0$ och det är fine eftersom det då blir en integral

från 0 till 0, vilket är 0. Nu kollar vi om $y_0' + ay_0 = x$. $y_0' = x(t)e^{-a(t-t)} - a\int\limits_0^t x(s)e^{-a(t-s)}\mathrm{d}s = x(t) - ay_0(t)$

Nu löser vi för y_i. $y_i' + ay_i = 0 \iff (e^{at}y_i) = 0 \iff e^{at}y_i(t) = y_i(0) = b \iff y_i(t) = be^{-at}$.

Alltså är $y(t) = be^{-at} + x * h_{-a}(t)$

"Det verkar trivialt att $t - t = 0$ men det är det som räddar oss."

– Mattesnubben

4.1.2 Stabilitet i kausala fall

Om $\int\limits_0^\infty |h(t)|\mathrm{d}t < \infty$. $h(t) = h_{-a}(t) = e^{-at}u(t)$. $\int\limits_0^\infty |h(t)|\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\{a\}t}$ vilket är ändligt om $\operatorname{Re}\{a\} > 0$ och oändligt annars.

Ex. 5. Lös $y'' + a_1y' + a_0y = x$ där $y(0)$ och $y'(0)$ givna. Vi vet att $P(D) = 1$ och $Q(D) = D^2 + a_1D + a_0$.

Vi börjar med att lösa ekvationen $Q(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Lösningarna till $Q(\lambda) = 0$ är $\lambda_\pm = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \implies Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-)$.

Några exempel, om $a_1 = 0$ får vi $\lambda_\pm = \pm\sqrt{-a_0} \implies \lambda^2 + a_0 = (\lambda - \sqrt{-a_0})(\lambda + \sqrt{-a_0})$, om $a_0 = 0$ får vi $\lambda_\pm = 0$ eller $-a_1 \implies \lambda(\lambda 2 + a_1)$.

Vi börjar med att lösa zeroinput-lösningen. Observera att $D^n(e^{\lambda t}) = \lambda^n e^{\lambda t} \implies Q(D)e^{\lambda t} = Q(\lambda)e^{\lambda t} \implies Q(D)(\mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 e^{\lambda_- t}) = 0$. Om $\lambda_+ \neq \lambda_-$ hittar vi y_i genom ansatsen $y_i(t) = \mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 e^{\lambda_- t}$ så att $y_i(0) = \mu_1 + \mu_2$ och $y_i'(0) = \mu_1\lambda_+ + \mu_2\lambda_-$.

Observera nu också att $Q(D)(te^{\lambda t}) = Q'(\lambda)e^{\lambda t} + Q(\lambda)te^{\lambda t}$. Om $\lambda_+ = \lambda_-$, d.v.s. att $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)^2$ gäller $Q(D)(\mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 te^{\lambda_+ t}) = 0$. Ansätt $y_i(t) = \mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 te^{\lambda_- t}$ och finn μ_1 och μ_2 från $y_i(0) = \mu_1$ och $y_i'(0) = \lambda_+\mu_+ + \mu_2$.

Nu löser vi zerostate: $Q(D) = (D - \lambda_+)(D - \lambda_-)$. Notera att $D^n(h * f) = (D^n h) * f$, vilket går att bevisa relativt lätt. Eftersom faltning är kommutativt kan vi även derivera f.

$Q(D)(h * f) = (Q(D)h) * f$. Ansätt $h = h_{\lambda_+} * h_{\lambda_-}$.

Ansätt också $y_0 = h * f$, då är $(D - \lambda_-)y_0 = h_{\lambda_+} * f$ och $h_{\lambda_+} * f(0) = 0$.

Jag orkade inte anteckna här, massa steg typ. Det blir enklare med Laplace.

"Vad kom μ ifrån?"
"Från ovan!"

– Person som frågade och mattesnubben

"Om vi nu delar den här skiten."

– Mattesnubben

4.2 Diskreta fallet

I det diskreta fallet har vi ekvationen $Q(E)y = P(E)x$ där $E(f[k]) = f[k+1]$ och har $y[-k]$ givna för $k = 0, \ldots, ord(Q) - 1$. Funkar annars på samma sätt förutom att D ersätts med E och $y(0)$ med $y[-k]$.

I kontinuerliga fall har vi $D(e^{\lambda}t) = \lambda e^{\lambda t}$ som genom $e_a[k] = a^k$ motsvaras av $E(e_a[k]) = e_a[k+1] = a^{k+1} = a \cdot a^k = ae_a$.
Ex. 6. Vi löser $y[k+1] + ay[k] = x[k]$ där $y[0]$ är given.

Vi har $Q(E) = E + a$. Vi börjar med att lösa y_i, d.v.s. $Q(E)y_i = 0$ och $y_i[0] = y[0]$. Ansätt $y_i = ce_{-a}$ så att $(E+a)e_{-a} = 0$. Då har vi $y_i[0] = ce_{-a}[0] = c = y[0]$ och därmed $y_i[k] = y_i[0]a^k$.

Nu löser vi för y_0, då börjar vi med att ansätta $h[k] = h_{-a}[k] = e_a[k]u[k]$ och $y_0 = h * x$.

$E(h * x[m]) = \displaystyle\sum_{l=1}^{m+1} h[l]x[m+1-l] = \sum_{l=1}^{m} h[l+1]x[m-l] + h[1]x[m]$ eftersom $h * x = $ (om båda är kausala) $= \displaystyle\sum_{l=0}^{m} h[l]x[m-l] = \sum_{l=1}^{m} h[l]x[m-l]$. Allt som allt gäller $E(h * x) = ah * x + ax$. Alltså $y_0 = \frac{1}{a}h * x$ vilket löser det ville innan.

"Det kommer bara bli blodsspillan om vi har k där"

– Mattesnubben

"Vad gör vi nu, vad gör vi här, vem är jag?"

– Mattesnubben

"Nu börjar det lukta fågel"

– Mattesnubben

"När jag var i Tyskland var jag tvungen att dra bajsskämt för att det skulle gå, men här verkar det funka ändå."

– Mattesnubben

"Fourier-serier är något extremt vackert, tårar kommer att fällas."

– Mattesnubben

5 Föreläsning 19-09-12

5.1