## 0.1 Diskret Fouriertransform

Idén för att göra den diskret är sampling. Det innebär att man väljer en upplösning $N$ så att man tar värdet på funktionen i punkterna $0, \epsilon, 2\epsilon, \ldots$ där $\epsilon = \dfrac{T}{N}$. Alltså approximerar vi $f$ m.h.a. $f(\dfrac{kT}{N})$ där $N$ går från 0 till $N-1$.

**Ansats 1.** $D[n] = \dfrac{1}{T} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{kT}{N}}^{\frac{k+1}{T}N} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-i\omega_0 n \frac{kT}{N}} \mathrm{d}t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$

$D_x[n] = \frac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$

### 0.1.1 Syntes

$x[k] = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} D_x[n] e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$

*"Ni fnissar på tok för lite"*

– Mattesnubben om den k:te punkten

*"Jag har approximerat allt med en konstant, så det är ganska grovt."*

– Mattesnubben

Anledning till att det här gäller är följande:

**Steg 1** $1 - z^N = (1-z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1} - z - z^2 - \cdots - z^{N-1} - z^N$

**Steg 2** $z_k = e^{\frac{2\pi i}{N}k}$ uppfyller $z_k^N = 1$

**Steg 3** $1 + z_k + z_k^2 + \cdots \ z_k^{N-1}$ är antingen $N$ när $k = 0$ och 0 annars.

$HL = \displaystyle\sum_{n=0} N - 1 D_x[n] z_k^n = \frac{1}{N} \sum_{n,l=0}^{N-1} x[l] z_{-l}^n z_k^n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x[l] z_{k-l}^n \right) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x[k] = x[k]$

## 0.2 Fouriertransformen

Här kollar vi på signaler $f(t), -\infty < t < \infty$.

För $T >> t$ kan vi skriva $f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) e^{-i\frac{2\pi k}{T}u} \mathrm{d}u \right) e^{i\frac{2\pi k}{T}t}$

$\omega = \dfrac{2\pi k}{T}$

**Definition 1** (Fouriertransformen)**.** $F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{j\omega u} \mathrm{d}u$

**Sats 1** (Rekonstruktion av signal från Fourierserie)**.** $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} F(i\omega) e^{ij\omega t}$

Låt $y = h * x$ vara ett LTI-system. Då är $H(i\omega)$ överföringsfunktionen och om vi tar $x(t) = e^{i\omega t}$ så är $y(t) = h*x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{i\omega(t-a)} \mathrm{d}u = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-i\omega u} \mathrm{d}u = e^{i\omega t} H(i\omega)$.

När man tar $h * \cos(\omega t + \theta) = |H(i\omega)| \cos(\omega t + \theta + \angle H(i\omega))$

*"Keepin' it real"*

– Mattesnubben om cosinus-funktioner

**Exempel 1.** Låt $f_1(t) = e^{-at} u(t)$ där $a > 0$. Räkna ut $F_1(i\omega)$.

$F_1(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} \mathrm{d}t = \left[ \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega}.$

**Exempel 2.** Låt $f_2(t) = e^{-a|t|}$. Räkna ut $F_2$.

Notera att $f_2 = f_1(t) + f_1(-t)$ där $f_1$ kommer från förra exemplet.

Låt $f_{op}(t) = f(-t)$. $F_{op}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = (u = -t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(-\omega u)} = F(-i\omega)$. Alltså är $F_2(i\omega) = F_1(i\omega) + F_1(i\omega) = \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$

**Sats 2** (Linearitet av Fouriertransformer)**.** Fouriertransformen är linjär, d.v.s. om $f = f_1 + \lambda \cdot f_2$ är $F = F_1 + \lambda \cdot F_2$.

*Bevis.* Visas lätt från definitionen av Fouriertransformen och faktumet att integrering är linjärt. $\square$

## 0.3 $\delta(t)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)x(t)\mathrm{d}t = x(a)$$

Fouriertransformen av $\delta(t)$ är då $F(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = e^{-i\omega a}$.

## 0.4 Transformpar

Ett transformpar är paret $(f(t), F(i\omega))$, d.v.s. $f(t)$ svarar mot $F(i\omega)$. Exempelvis svarar $e^{-at}u(t)$ mot $\frac{1}{a+i\omega}$.

**Exempel 3.** Låt $f(t) = \dfrac{2a}{a^2+t^2}$. $F(t)$ är då

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+t^2}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+t^2}e^{j(-\omega)t}\mathrm{d}t \\
&= \text{ (via syntesformeln)} \\
&= 2\pi e^{-a|-\omega|} \\
&= 2\pi e^{-a|\omega|}.
\end{aligned}$$

*"Lägg inte in någon magi i detta, bara lite fantasi."*

– Mattesnubben

**Påstående 1.** $(f(t), F(i\omega))$ är ett transformpar $\iff$ $(F(-it), 2\pi f(\omega))$ är ett transformpar.

**Exempel 4.** $(\delta(t-a), e^{-i\omega a})$ är ett transformpar.

Alltså är $(e^{ita}, 2\pi \cdot \delta(\omega - a))$ ett transformpar.

En ren frekvens $a$ ger en Fouriertransform som är $\delta(t-a)$.

Följande gäller:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{i\omega(u-t)}\mathrm{d}u\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)2\pi\delta(t-u)\mathrm{d}u \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

## 0.5 Periodisk återblick

Låt $x$ vara en $T$-periodisk signal. Då vet vi att vi kan skriva $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_0 kt}$.

Lineariteten av Fouriertransformen ger då $X(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0)$.

## 0.6 Faltning

Låt $x_1, x_2$ vara signaler. Då är $x_1 * x_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(t-u)\mathrm{d}u$.

**Påstående 2.** $x_1 * x_2$ är ett transformpar med $X_1X_2$.

**Exempel 5.** Låt $x_1 = \delta(t-b), x_2 = \delta(t-a)$.

Då är $x_1 * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u-b)\delta(t-u-a)\mathrm{d}u = \delta(t-b-a)$.

Fouriertransformen av $x_1 * x_2 = e^{-i(a+b)t} = e^{-iat}e^{ibt} = X_1(i\omega)X_2(i\omega)$.

*Bevis.*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x_1 * x_2 e^{-i\omega t}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(t-u)e^{-i\omega t}\mathrm{d}u\mathrm{d}t \\
&= \text{(Variabelbyte där } v = t-u\text{)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(v)e^{-i\omega(v+u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)e^{-i\omega u}x_2(v)e^{-i\omega v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)e^{-i\omega u}\mathrm{d}u \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2(v)e^{-i\omega v}\mathrm{d}v \\
&= X_1(i\omega)\cdot X_2(i\omega)
\end{aligned}$$

$\square$

**Påstående 3.** $x_1(t)x_2(t)$ är ett transformpar med $2\pi X_1 * X_2(-i\omega)$.

$x(t)\delta(t-a) = x(a)\delta(t-a)$ ger att $H(i\omega)X(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(i\omega_0 k)\delta(\omega - k\omega_0)$.