0.1 Mer DTFT och DFT

Exempel 1. Beräkna DTFT för signalen $x[n] = \alpha^n u[n]$ för något $0 < \alpha < 1$.

$$\begin{aligned} X(e^{i\Omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-i\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-i\Omega}\right)^n \\ &= \{\text{Geometrisk summa}\} \\ &= \frac{1}{1-\alpha e^{-i\Omega}} \\ &= \frac{1}{1-\alpha(\cos(\Omega) - i\sin(\Omega))} \\ &= \frac{1}{1-\alpha\cos(\Omega) + i\alpha\sin(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|X(e^{i\Omega})\right| &= \frac{1}{\sqrt{|1-\alpha\cos\Omega|^2 + |\alpha\sin\Omega|^2}} \\ &= \frac{1}{(1-2\alpha\cos\Omega + \alpha^2\cos^2(\Omega) + \alpha^2\sin\Omega)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\Omega}} \end{aligned}$$

$$\arg X(e^{i\Omega}) = -\arctan\left(\frac{\alpha\sin\Omega}{1-\alpha\cos\Omega}\right)$$

För motsvarade kontinuerliga signal $x(t) = e^{-iat}u(t)$ har vi Fouriertransformen $X(i\omega) = \frac{1}{a-i\omega}$, med $|X(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ och $\arg X(i\omega) = -\arctan\frac{\omega}{a}$. Vi ser att $|X(i\omega)|$ upprepas periodiskt i $X(e^{i\Omega})$.

Genom att välja lämplig samplingsfrekvens kan effekten av aliassing minskas och $X(e^{i\Omega})$ återfinns, i princip, i $X(e^{i\Omega})$ på intervallet $\pi < \Omega < \pi$.

För numeriska beräkningar är det opraktiskt med kontinuerliga funktioner såsåom $X(e^{i\Omega})$. Vad gör vi? Beräkna $X(e^{i\Omega})$ endast för vissa frekvenser i intervallet $0 \leq \Omega \leq 2\pi$. Vi väljer ett $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ där $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Vi landar nu i det som kallas DFT (Diskret Fouriertransform). Den används flitigt och har stor praktisk betydelse. Ytterligare en viktig aspekt är att vi inte kan summera till oändligheten och därmed inte ha hur långa signaler som helst. Vi måste välja ut en representativ del. $x[n]$ där $n = 0, 1, \ldots, N_{\max} - 1$.

0.2 Diskret Fouriertransform (DFT)

En godtycklig icke-periodisk och diskret signal $x[n]$ har Fouriertransformen $X(e^{i\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n}$. $X(e^{i\Omega})$ är kontinuerlig i Ω och 2π-periodisk i Ω.

0.2.1 Syntesekvation/Invers DTFT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{i\Omega}) e^{i\Omega n} \mathrm{d}\Omega$$

Det är en superposition av bassignaler $e^{i\Omega n} = \cos(\Omega n) + i\sin(\Omega n)$ med vikter $X(e^{i\Omega})$. Rent praktiskt kan vi bara hantera signaler $x[n]$ med ändlig längd. Dessutom är det najs om även transformen X är diskret vilket skulle göra det rimligt för datorer att beräkna DTFT.

En alternativ Fouerirerepresentation har därför utvecklats, DFT. Det som är viktigt med den är att $DFT\{x[n]\}$ är diskret och att DFT motsvarar ”samplade” värden av $X(e^{i\Omega})$ på intervallet $0 \leq \Omega < 2\pi$.

Effektiva beräkningsalgoritmer för att beräkna DFT kallas FFT (Fast Fourier Transform).

Nu till DFT! Vi har tillgång till (eller väljer) L stycken värden (sampel) i vår signal $x[n]$ där $n = 0, 1, \ldots, L-1$, men ofta har vi ju bara samplat en kontinuerlig signal $x(nT)$. Signalens DTFT är då $X(e^{i\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-i\Omega n}$. Det är en ändlig summa, vilket är bra, men det finns fortfarande oändligt många Ω vilket är dumt. Låt oss ta N stycket avläsningar/sampel av $X(e^{i\Omega})$ och gör beräkningar för $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ där $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Beteckna dessa sampel med $X[k] = X(e^{i\Omega})$ där $\Omega = \frac{2\pi}{N}k$ vilket ger att

$$X[k] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Man kan visa att $x[n]$ kan återskapas ur $X[k]$ om $N \geq L$. Då får man

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

Vi har då ett transformpar $x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k]$.

Det är vanligt att vi låter $L = N$ och att de är en jämn tvåpotens, för det behöver FFT för att funka.

0.2.2 Frekvenser hos en samplad signal

Kom ihåg att T är vårt sampelintervall, att $\Omega = \omega \cdot T$, att ω är den kontinuerliga signalens vinkelfrekvens i rad/s. Då har Ω enheten rad. $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ där $k =$

$0, 1, \ldots, N-1$ vilket med $\omega = \frac{\Omega}{T}$ ger att $\omega_k = \frac{\Omega_k}{T} = \frac{2\pi}{N}\frac{1}{T}k = \frac{2\pi}{T}\frac{k}{N} = \frac{\omega_s}{N}k$ där ω_s är samplingsvinkelfrekvensen. Om vi uttrycker samplingsfrekvensen i Hz som F_s är $\omega_s = 2\pi F_s$ vilket ger att $\omega_k = \frac{2\pi F_s}{N}k$ vilket återkommer i labben.