0.1 Diff. ekvationer

Vi kommer att titta på (LTIC-)system som beskrivs med $Q(D)y = P(D)x$ eller $Q[E]y = P[E]x$ i det diskreta fallet där $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ och $Ef[k] = f[k+1]$. Systemen är kausala, d.v.s. alltid $= 0$ för $t < 0$ eller $k < 0$. Alltså har vi ett begynnelsetillstånd. Den allmänna lösningen är $y = y_0 + y_i$ där y_0 är zerostate och y_i är zeroinput. Vanligtvis är $y_0 = h * x$, d.v.s. någon slags faltning.

Notation: $Q(D) = D^m + a_{m-1}D^{m-1} + \cdots + a_1 D + a_0$ där $m = ord(Q)$

0.1.1 Kontinuerliga fallet

$Q(D)y = P(d)x$ och $y^{(k)}(0)$ är givna för $k = 0, \ldots, \mathrm{ord}(Q) - 1$.

Först löser vi $Q(D)y_0 = P(D)f$ för $y^{(k)}(0) = 0$. Sedan löser vi $Q(D)y_i = 0$ givet $y_i^{(k)}(0) = y^{(k)}(0)$. Detta är partikulär- och homogenlösningar i "vanliga" termer. $y_0 = h * x$ där h är impulssvaret.
Ex. 1. Anta $y' + ay = x$, $y(0) = b$, $Q(D) = D + a$ och $P(D) = 1$.

Eftersom systemet är tidsinvariant är a en konstant. Först löser vi $y_0' + ay_0 = x$ givet $y_0(0) = 0$. Sedan komemr vi att lösa $y_i' + ay_i = 0$ givet $y_i(0) = b$. Vi använder integrerande faktor, d.v.s. $(e^g y)' = (y' + g'y)e^g$ men eftersom vi veta har vi $g' = a \implies g = at$. Alltså är $e^{at}(y_0' + ay_0) = (e^{at}y_0)'$ och därmed

$$(e^{at}y_0)' = xe^{at} \implies e^{at}y_0(t) = e^{a0}y_0(0) + \int_0^t x(s)e^{as}\mathrm{d}s = \int_0^t x(s)e^{as}\mathrm{d}s \implies$$

$$y_0(t) = \int_0^t x(s)e^{a(s-t)}\mathrm{d}s = \int_0^t x(s)e^{-a(t-s)}\mathrm{d}s = x * h_{-a}(t) \text{ där } h_{-a}(t) = e^{at}u(t).$$

Alltså $y_0 = x * h_{-a}(t)$. Nu kollar vi om y_0 är en lösning vårt inledande problem. Först kollar vi om $y_0(0) = 0$ och det är fine eftersom det då blir en integral från 0 till 0, vilket är 0. Nu kollar vi om $y_0' + ay_0 = x$. $y_0' = x(t)e^{-a(t-t)} - a\int_0^t x(s)e^{-a(t-s)}\mathrm{d}s = x(t) - ay_0(t)$

Nu löser vi för y_i. $y_i' + ay_i = 0 \iff (e^{at}y_i) = 0 \iff e^{at}y_i(t) = y_i(0) = b \iff y_i(t) = be^{-at}$.

Alltså är $y(t) = be^{-at} + x * h_{-a}(t)$

"Det verkar trivialt att $t - t = 0$ men det är det som räddar oss."

– Mattesnubben

0.1.2 Stabilitet i kausala fall

Om $\int\limits_0^\infty |h(t)|\mathrm{d}t < \infty$. $h(t) = h_{-a}(t) = e^{-at}u(t)$. $\int\limits_0^\infty |h(t)|\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\{a\}t}$ vilket är ändligt om $\operatorname{Re}\{a\} > 0$ och oändligt annars.

Ex. 2. Lös $y'' + a_1y' + a_0y = x$ där $y(0)$ och $y'(0)$ givna. Vi vet att $P(D) = 1$ och $Q(D) = D^2 + a_1D + a_0$.

Vi börjar med att lösa ekvationen $Q(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Lösningarna till $Q(\lambda) = 0$ är $\lambda_\pm = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \implies Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-)$.

Några exempel, om $a_1 = 0$ får vi $\lambda_\pm = \pm\sqrt{-a_0} \implies \lambda^2 + a_0 = (\lambda - \sqrt{-a_0})(\lambda + \sqrt{-a_0})$, om $a_0 = 0$ får vi $\lambda_\pm = 0$ eller $-a_1 \implies \lambda(\lambda 2 + a_1)$.

Vi börjar med att lösa zeroinput-lösningen. Observera att $D^n(e^{\lambda t}) = \lambda^n e^{\lambda t} \implies Q(D)e^{\lambda t} = Q(\lambda)e^{\lambda t} \implies Q(D)(\mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 e^{\lambda_- t}) = 0$. Om $\lambda_+ \neq \lambda_-$ hittar vi y_i genom ansatsen $y_i(t) = \mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 e^{\lambda_- t}$ så att $y_i(0) = \mu_1 + \mu_2$ och $y_i'(0) = \mu_1\lambda_+ + \mu_2\lambda_-$.

Observera nu också att $Q(D)(te^{\lambda t}) = Q'(\lambda)e^{\lambda t} + Q(\lambda)te^{\lambda t}$. Om $\lambda_+ = \lambda_-$, d.v.s. att $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)^2$ gäller $Q(D)(\mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 te^{\lambda_+ t}) = 0$. Ansätt $y_i(t) = \mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 te^{\lambda_- t}$ och finn μ_1 och μ_2 från $y_i(0) = \mu_1$ och $y_i'(0) = \lambda_+\mu_+ + \mu_2$.

Nu löser vi zerostate: $Q(D) = (D - \lambda_+)(D - \lambda_-)$. Notera att $D^n(h * f) = (D^n h) * f$, vilket går att bevisa relativt lätt. Eftersom faltning är kommutativt kan vi även derivera f.

$Q(D)(h * f) = (Q(D)h) * f$. Ansätt $h = h_{\lambda_+} * h_{\lambda_-}$.

Ansätt också $y_0 = h * f$, då är $(D - \lambda_-)y_0 = h_{\lambda_+} * f$ och $h_{\lambda_+} * f(0) = 0$.

Jag orkade inte anteckna här, massa steg typ. Det blir enklare med Laplace.

"Vad kom μ ifrån?"
"Från ovan!"

– Person som frågade och mattesnubben

"Om vi nu delar den här skiten."

– Mattesnubben

0.2 Diskreta fallet

I det diskreta fallet har vi ekvationen $Q(E)y = P(E)x$ där $E(f[k]) = f[k+1]$ och har $y[-k]$ givna för $k = 0, \dots, ord(Q) - 1$. Funkar annars på samma sätt förutom att D ersätts med E och $y(0)$ med $y[-k]$.

I kontinuerliga fall har vi $D(e^\lambda t) = \lambda e^{\lambda t}$ som genom $e_a[k] = a^k$ motsvaras av $E(e_a[k]) = e_a[k+1] = a^{k+1} = a \cdot a^k = ae_a$.

Ex. 3. Vi löser $y[k+1] + ay[k] = x[k]$ där $y[0]$ är given.

Vi har $Q(E) = E + a$. Vi börjar med att lösa y_i, d.v.s. $Q(E)y_i = 0$ och $y_i[0] = y[0]$. Ansätt $y_i = ce_{-a}$ så att $(E+a)e_{-a} = 0$. Då har vi $y_i[0] = ce_{-a}[0] = c = y[0]$ och därmed $y_i[k] = y_i[0]a^k$.

Nu löser vi för y_0, då börjar vi med att ansätta $h[k] = h_{-a}[k] = e_a[k]u[k]$ och $y_0 = h * x$.

$E(h * x[m]) = \sum_{l=1}^{m+1} h[l]x[m+1-l] = \sum_{l=1}^{m} h[l+1]x[m-l] + h[1]x[m]$ eftersom $h * x = \text{ (om båda är kausala) } = \sum_{l=0}^{m} h[l]x[m-l] = \sum_{l=1}^{m} h[l]x[m-l]$. Allt som allt gäller $E(h*x) = ah * x + ax$. Alltså $y_0 = \frac{1}{a} h * x$ vilket löser det ville innan.

"Det kommer bara bli blodsspillan om vi har k där"

– Mattesnubben

"Vad gör vi nu, vad gör vi här, vem är jag?"

– Mattesnubben

"Nu börjar det lukta fågel"

– Mattesnubben

"När jag var i Tyskland var jag tvungen att dra bajsskämt för att det skulle gå, men här verkar det funka ändå."

– Mattesnubben

"Fourier-serier är något extremt vackert, tårar kommer att fällas."

– Mattesnubben