"Det är ju helg snart, man får roa sig med något"

– Mattesnubben om ingenstans deriverbara funktioner

"Då övergår vi till saltgruvorna då."

– Mattesnubben

0.1 Exponentiella Fourierserier

Låt f vara en T-periodisk signal.

Vi kan skriva $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ik\omega_0 t}$ eftersom

$$\begin{aligned} f &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \\ &= \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right) e^{jk\omega_0 t} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}\right) e^{-jk\omega_0 t} \\ &= c_0 \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ik\omega_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ik\omega_0 t} \end{aligned}$$

där $c_k = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} = \ldots$ (se andras anteckningar) $= \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t$.

Anm. 1. Går lätt att visa med definitionen av faltning att om en av insignalerna är periodiska är också utsignalen det.

Def. 1 (Laplace-/Fouriertransform)**.**

$$H(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-su}\mathrm{d}u$$

givet att h är stabil.

Om $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ är $h{*}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k h{*}e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$.

0.2 Faltningsekvationer (periodiska fallet)

Vi vill lösa $y = h * x$.

Anta att y, h är kända och att y är periodisk. Då kan vi skriva $y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y)e^{jk\omega_0 t}$.

Vi vet då att $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y)e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$ vilket ger att $\forall k :$ $c_k(y) = c_k(x)H(jk\omega_0) \iff \forall k : c_k(x) = c_k(y) \cdot \frac{1}{H(jk\omega_0)}$

0.3 Faltning på kompakt form

$$H = |H|e^{i\angle H}$$

Om vi då har signalen $x = \sum c_k(x)\cos(k\omega_0 t + \theta_k(x))$ är $h * x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h * \left(\frac{e^{j(k\omega_0 t+\theta_k(x))} + e^{-j(k\omega_0 t+\theta_k(x))}}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(H(jk\omega_0)\frac{e^{j(k\omega_0 t+\theta_k(x))}}{2} + H(-jk\omega_0)\frac{e^{-j(k\omega_0 t+\theta_k(x))}}{2}\right)$

Påst. 1. Om h är reell är $H(\overline{s}) = \overline{H(s)}$.

Bevis.

$$\begin{aligned} H(\overline{s}) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-\overline{s}u}\mathrm{d}u \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-su}\mathrm{d}u} \\ &= \overline{(}H(s)) \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(H(jk\omega_0)\frac{e^{j(k\omega_0 t+\theta_k(x))}}{2} + H(-jk\omega_0)\frac{e^{-j(k\omega_0 t+\theta_k(x))}}{2}\right) \\ =&\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(H(jk\omega_0)\frac{e^{j(k\omega_0 t+\theta_k(x))}}{2} + \overline{H(jk\omega_0)}\frac{e^{-j(k\omega_0 t+\theta_k(x))}}{2}\right) \\ =&\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{|H(jk\omega_0)|}{2}\left(e^{j\angle H(jk\omega_0)}e^{j(k\omega_0 t+\theta_k)} + e^{-j\angle H(jk\omega_0)}e^{-j(k\omega_0 t+\theta_k)}\right) \\ =&\sum_{k=0}^{\infty} c_k|H(jk\omega_0)|\cos(k\omega_0 t + \theta_k + \angle H(jk\omega_0)) \end{aligned}$$

0.4 Derivata

Låt $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\cos(k\omega_0 t) + b_k(x)\sin(k\omega_0 t)$. Då är $x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)(-k\omega_0)\sin(k\omega_0 t) + b_k(x)(k\omega_0)\cos(k\omega_0 t)$. $a_0(x') = 0, a_k(x') = k\omega_0 b_k(x), b_k(x') = -k\omega_0 a_k(x)$ för $k > 0$.

Ex. 1. Låt $h = ue^{at}$ (enhetssteg), d.v.s. $h(t) = e^{at}$ för $t \geq 0$ och 0 annars.

Låt också $x(t) = \cos(t) + \sin(2t) + \cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} + \frac{1}{2}e^{3it}e^{-\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}e^{-3it}e^{\frac{\pi}{3}} = c_{-3}e^{-3it} + c_{-2}e^{-2it} + c_{-1}e^{-it} + c_1 e^{it} + c_2 e^{it} + c_3 e^{3it}$.

Då är $c_{-3} = \frac{e^{\frac{\pi i}{3}}}{2}, c_{-2} = -\frac{1}{2i}c_{-1} = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2i}$ och $c_3 = \frac{e^{-\frac{\pi i}{3}}}{2}$.

Då är $h * x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(jk\omega_0)e^{ik\omega_0 t}$. $H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{s-a}$ när $\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{a\}$ och odef. annars. H är definierad, givet att $s = ik\omega_0$ när $\mathrm{Re}\{a\} < 0$, d.v.s. att h är stabil.

$H(jk\omega_0) = \frac{1}{ik\omega_0 - a}$ vilket säger att $h * x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{ik\omega_0 - a}e^{ik\omega_0 t}$.

Med x som ovan blir $h * x(t) = \sum_{k=-3}^{3} \frac{c_k}{ik\omega_0 - a}e^{ik\omega_0 t} = \frac{e^{\frac{\pi i}{3}}}{2}\frac{1}{-3i\omega_0 - a}e^{-3it} + \frac{1}{2i}\frac{1}{-2i\omega_0 - a}e^{-2it} + \cdots$.

$D(h * x) = \sum c_k \cdot \frac{ik\omega_0}{ik\omega_0 - a}e^{ik\omega_0 t} = \sum c_k e^{ik\omega_0 t} + \sum c_k \cdot \frac{a}{ik\omega_0 - a}e^{ik\omega_0 t} = x + a(h * x)$, d.v.s. $y = h * x$ löser $(D - a)y = x$.

"Riktigt jävla konkret."

– Mattesnubben

0.5 Parsevals sats

Satsen säger saker om $\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t$.

Påminnelse 1. $P_x = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2mT}\int_{-mT}^{mT} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2mT}\left(2m\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t$

$$x=\sum_{k=\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \implies \int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t = |x|^2 = \langle x, x, \rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}, \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{il\omega_0 t} \right\rangle =$$

$\sum_{k,l} \overline{c_k} c_l \left\langle e^{ik\omega_0 t}, e^{il\omega_0 t} \right\rangle = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \int_0^T e^{-ik\omega_0 t} e^{il\omega_0 t} \mathrm{d}t$ vilket är 0 för $k \neq l$ och 1 annars. Sammanfattningsvis är satsen

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{|a_o|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = |c_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$