

0.1 Diskret Fouriertransform

Idén för att göra den diskret är sampling. Det innebär att man väljer en upplösning N så att man tar värdet på funktionen i punkterna $0, \epsilon, 2\epsilon, \dots$ där $\epsilon = \frac{T}{N}$.

Alltså approximerar vi f m.h.a. $f(\frac{kT}{N})$ där N går från 0 till $N-1$.

$$\textbf{Ansats 1. } D[n] = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{kT}{N}}^{\frac{k+1}{T}N} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-i\omega_0 n \frac{kT}{N}} dt = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$D_x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

0.1.1 Syntes

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} D_x[n] e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

"Ni fnissar på tok för lite"

– Mattesnubben om den k:te punkten

"Jag har approximerat allt med en konstant, så det är ganska grovt."

– Mattesnubben

Anledning till att det här gäller är följande:

Steg 1 $1 - z^N = (1 - z)(1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1}) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1} - z - z^2 - \dots - z^{N-1} - z^N$

Steg 2 $z_k = e^{\frac{2\pi i}{N}k}$ uppfyller $z_k^N = 1$

Steg 3 $1 + z_k + z_k^2 + \dots + z_k^{N-1}$ är antingen N när $k = 0$ och 0 annars.

$$HL = \sum_{n=0}^{N-1} N - 1 D_x[n] z_k^n = \frac{1}{N} \sum_{n,l=0}^{N-1} x[l] z_{-l}^n z_k^n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[l] z_{k-l}^n \right) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x[k] = x[k]$$

0.2 Fouriertransformen

Här kollar vi på signaler $f(t)$, $-\infty < t < \infty$.

För $T \gg t$ kan vi skriva $f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) e^{-i\frac{2\pi k}{T}u} du \right) e^{i\frac{2\pi k}{T}t}$

$$\omega = \frac{2\pi k}{T}$$

Definition 1 (Fouriertransformen). $F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{j\omega u} du$

Sats 1 (Rekonstruktion av signal från Fourierserie). $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} F(i\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Låt $y = h * x$ vara ett LTI-system. Då är $H(i\omega)$ överföringsfunktionen och om vi tar $x(t) = e^{i\omega t}$ så är $y(t) = h * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{i\omega(t-u)} du = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-i\omega u} du = e^{i\omega t} H(i\omega)$.

När man tar $h * \cos(\omega t + \theta) = |H(i\omega)| \cos(\omega t + \theta + \angle H(i\omega))$

"Keepin' it real"

– Mattesnubben om cosinus-funktioner

Exempel 1. Låt $f_1(t) = e^{-at}u(t)$ där $a > 0$. Räkna ut $F_1(i\omega)$.

$$F_1(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}dt = \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega}.$$

Exempel 2. Låt $f_2(t) = e^{-a|t|}$. Räkna ut F_2 .

Notera att $f_2 = f_1(t) + f_1(-t)$ där f_1 kommer från förra exemplet.

$$\begin{aligned} \text{Låt } f_{op}(t) = f(-t). F_{op}(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-i\omega t}dt = (u = -t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i(-\omega)u}du = \\ &F(-i\omega). \text{ Alltså är } F_2(i\omega) = F_1(i\omega) + F_1(i\omega) = \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Sats 2 (Linearitet av Fouriertransformer). Fouriertransformen är linjär, d.v.s. om $f = f_1 + \lambda \cdot f_2$ är $F = F_1 + \lambda \cdot F_2$.

Bevis. Visas lätt från definitionen av Fouriertransformen och faktumet att integrering är linjärt. \square

0.3 $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)x(t)dt = x(a)$$

Fouriertransformen av $\delta(t)$ är då $F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega a}$.

0.4 Transformpar

Ett transformpar är paret $(f(t), F(i\omega))$, d.v.s. $f(t)$ svarar mot $F(i\omega)$. Exempelvis svarar $e^{-at}u(t)$ mot $\frac{1}{a+i\omega}$.

Exempel 3. Låt $f(t) = \frac{2a}{a^2 + t^2}$. $F(t)$ är då

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + t^2} e^{j(-\omega)t} dt \\ &= (\text{via syntesformeln}) \\ &= 2\pi e^{-a|-\omega|} \\ &= 2\pi e^{-a|\omega|}. \end{aligned}$$

"Lägg inte in någon magi i detta, bara lite fantasi."

– Mattesnubben

Påstående 1. $(f(t), F(i\omega))$ är ett transformpar $\iff (F(-it), 2\pi f(\omega))$ är ett transformpar.

Exempel 4. $(\delta(t-a), e^{-i\omega a})$ är ett transformpar.

Alltså är $(e^{ita}, 2\pi \cdot \delta(\omega - a))$ ett transformpar.

En ren frekvens a ger en Fouriertransform som är $\delta(t-a)$.

Följande gäller:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{i\omega(u-t)} du d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} e^{i\omega t} d\omega du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) 2\pi \delta(t-u) du \\ &= f(t).\end{aligned}$$

0.5 Periodisk återblick

Låt x vara en T -periodisk signal. Då vet vi att vi kan skriva $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_0 k t}$.

Lineariteten av Fouriertransformen ger då $X(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0)$.

0.6 Faltning

Låt x_1, x_2 vara signaler. Då är $x_1 * x_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) x_2(t-u) du$.

Påstående 2. $x_1 * x_2$ är ett transformpar med $X_1 X_2$.

Exempel 5. Låt $x_1 = \delta(t-b)$, $x_2 = \delta(t-a)$.

$$\text{Då är } x_1 * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u-b) \delta(t-u-a) du = \delta(t-b-a).$$

$$\text{Fouriertransformen av } x_1 * x_2 = e^{-i(a+b)t} = e^{-iat} e^{ibt} = X_1(i\omega) X_2(i\omega).$$

Bevis.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 * x_2 e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) x_2(t-u) e^{-i\omega t} du dt \\ &= (\text{Variabelbyte där } v = t - u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) x_2(v) e^{-i\omega(v+u)} du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) e^{-i\omega u} x_2(v) e^{-i\omega v} du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) e^{-i\omega u} du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2(v) e^{-i\omega v} dv \\ &= X_1(i\omega) \cdot X_2(i\omega)\end{aligned}$$

□

Påstående 3. $x_1(t)x_2(t)$ är ett transformpar med $2\pi X_1 * X_2(-i\omega)$.

$$x(t)\delta(t-a) = x(a)\delta(t-a) \text{ ger att } H(i\omega)X(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(i\omega_0 k) \delta(\omega - k\omega_0).$$