0.1 Kort repetition

Kom ihåg att för ett LTI-system gäller att för ett system med insignal $x(t) = \sin(\omega t)$ och frekvenssvar (FT av impulssvaret) $G(i\omega)$ får vi utsignalen $y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega))$ i stationärtillstånd. Om man vill ha hela förloppet kan man Laplacetransformera och räkna som vanligt.

0.2 Bodediagram/Bode plots

En grafisk presentation av frekvenssvaret:

Innehåller två delar:

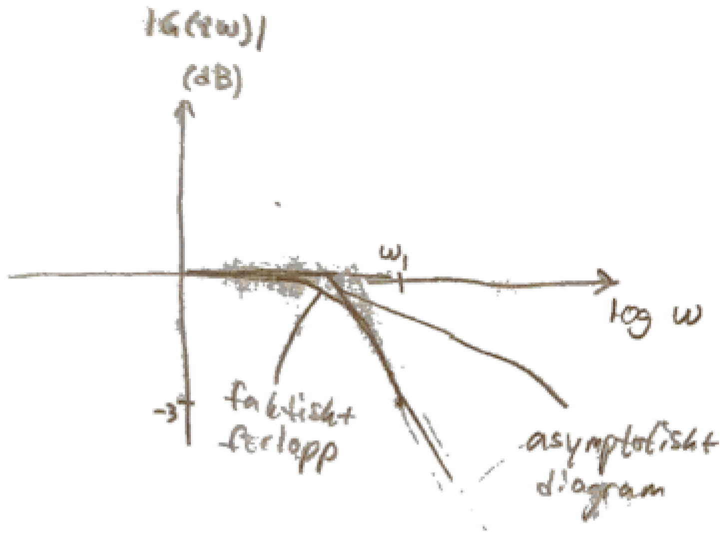
- Amplituddiagram, ofta med logaritmisk frekvens- och amplitudskala (i dB). $|G(i\omega)| = 20 \cdot \log_{10}(|G(i\omega)|)$
- Fasdiagram, ofta med logaritmisk frekvensskala men linjär fasskala (d.v.s. plottar mot $\arg G(i\omega)$)

För att konstruera dessa diagram utgår vi ifrån en överföringsfunktion $G(s)$ och sätter $s = i\omega$ så att vi får $G(i\omega)$. Sedan faktoriserar vi överföringsfunktionen $G(s)$ så att $G(s) = \frac{C_1(s)C_2(s)\cdots C_M(s)}{D_1(s)D_2(s)\cdots C_N(s)}$. Faktorerna $C_k(s)$ och $D_k(s)$ är antingen k (en konstant), s (derivering i täljaren, integrering i nämnaren), $1 + \frac{s}{\omega_1}$ (förstagradsfaktor p.g.a. en reell rot) eller $1 + s\frac{2a}{\omega_2} + \frac{s^2}{\omega_2^2}$ (andragradsfaktor p.g.a. komplexa rötter).

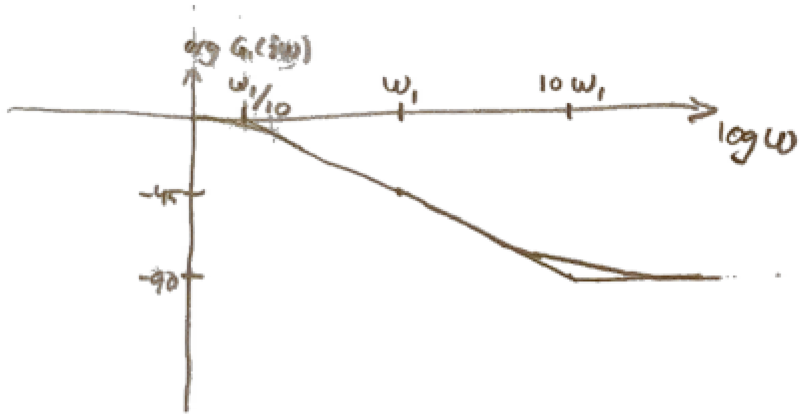
0.2.1 Frekvenssvarets belopp

$|G(i\omega)| = \frac{|C_1(s)||C_2(s)|\cdots|C_M(s)|}{|D_1(s)||D_2(s)|\cdots|C_N(s)|}$. I dB är det $|G(i\omega)|_{\text{dB}} = |C_1(i\omega)|_{\text{dB}} + |C_2(i\omega)|_{\text{dB}} + \cdots + |C_M(i\omega)|_{\text{dB}} - |D_1(i\omega)|_{\text{dB}} - |D_2(i\omega)|_{\text{dB}} - \cdots - |D_N(i\omega)|_{\text{dB}}$ och deras fasbidrag fås som $\arg G(i\omega) == \arg C_1(i\omega) + \arg C_2(i\omega) + \cdots + \arg C_M(i\omega) - \arg D_1(i\omega) - \arg D_2(i\omega) - \cdots - \arg D_N(i\omega)$. Notera att superpositionen av bidragen från varje delfaktor ger både $|G(i\omega)|_{\text{dB}}$ och $\arg G(i\omega)$.

Studera $\left.\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_1}}\right|_{s=i\omega} = \frac{1}{1+i\frac{\omega}{\omega_1}}$. Dess belopp är $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega}{\omega_1}^2}} = |G_1(i\omega)|$. Bodediagrammet blir då



Argumentet för den är $\arg G_1(i\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$. Bodediagrammet blir



Lutningen på amplituddiagrammet är $-20\ \frac{\text{dB}}{\text{dekad}}$.

0.3 Fourierrepresentationer

Ordlista: CT – Continuous time, DT – Discrete time, FS – Fourier series, FT – Fourier transform

En tabell som beskriver vad vi använder i olika fall:

Signal	Periodisk	Ickeperiodisk
CT	CTFS (c_k eller a_k och b_k)	CTFT ($X(i\omega)$)
DT	Vi väntar med denna.	DTFT

Påminnelse 1 (Kort repetition av sampling)**.** För $x_p(t) = p(t) \cdot x(t)$ är $X_p(i\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(i(\omega - k\omega_s))$ där $\omega_2 = \frac{2\pi}{T}$ och $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$.

Om vi Fouriertransformerar $x_p(t)$ direkt får vi

$$
\begin{aligned}
X_p(t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_p(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-nT) \right) e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-nT)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \{\text{Får endast bidrag} \quad \neq 0 \quad \text{vid impuls, d.v.s. vid} \quad t = nT\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-i\omega nT} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\mathrm{d}T \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-i\omega nT} \\
&= \{\text{Låt} \quad x(nT) = x[n] \quad \text{och} \quad \omega T = \Omega\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n}
\end{aligned}
$$

vilket är Fouriertransformen för en ickeperiodisk diskret signal och vi skriver den som $X(e^{i\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n}$. Kallas Diskret Tid FourierTransform och förkortas DTFT. Kursboken använder beteckningen $X(\Omega)$ men det är ”bättre” med konventionen ovan eftersom det matchar bättre mot z-transformen senare i kursen.

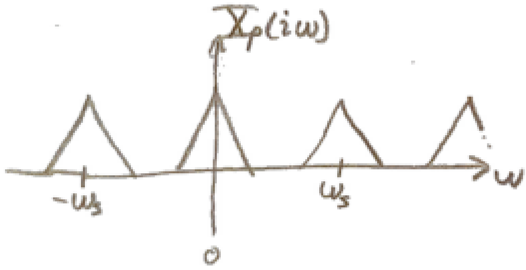
0.3.1 Egenskaper

$X(e^{i\Omega})$ är…

- kontinuerlig i Ω.
- periodisk i Ω eftersom $X(e^{i(\Omega+2\pi k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i(\Omega+2\pi k)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n}\cdot e^{-i2\pi kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n} = X(e^{i\Omega})$

Alltså är $x[n]$ innan DTFT både diskret och icke-periodisk, men $X(e^{i\Omega})$ är både kontinuerlig och periodisk.

Kom ihåg hur Fouriertransformen för vårt viktade impulståg $x_p(t)$ såg ut:



Den är också periodisk, men i ω och med ”perioden” $\omega = \omega_s$. Men $\Omega = \omega T$ vilket vid $\Omega = 2\pi$ ger $\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_s$ eftersom T är samplingsintervallet. $\Omega = 2\pi$ motsvarar samplingsvinkelfrekvensen. $e^{i\Omega n} = \cos(\Omega n) + i \sin(\Omega n)$. Enheten för Ω är då rad alt $\frac{\text{rad}}{\text{sampel}}$.

0.4 Syntesekvation/Invers DTFT

$x[n] = \int_{2\pi} X(e^{i\Omega})e^{i\Omega n} \mathrm{d}\Omega$.