

## 0.1 Mer z-transform

Låt  $x[k]$  vara en diskret signal. Då är  $X(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$ .

**Exempel 1.**  $\delta(k-l) \xleftrightarrow{\dagger} z^{-l}$

**Exempel 2.**  $\gamma^k u[k] \xleftrightarrow{\dagger} \frac{z}{z-\gamma}$  om  $|z| > |\gamma|$

**Exempel 3.**  $\gamma^{k-1} \xleftrightarrow{\dagger} \frac{1}{z-\gamma}$

### 0.1.1 Räkneregler

$$x[k+1]u[k] \xleftrightarrow{\dagger} z(X(z) - x[0])$$

$$x[k-1] \xleftrightarrow{\dagger} \frac{1}{z}X(z)$$

$$\gamma^k x[k] \xleftrightarrow{\dagger} X\left(\frac{z}{\gamma}\right)$$

$$x_1 * x_2 \xleftrightarrow{\dagger} X_1 X_2$$

Vi börjar med lite kontext. Om  $f(t)$  är en kontinuerlig signal och  $D = \frac{d}{dt}$ . Då är  $Df(t) \approx \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$  för små  $h$ . Vi definierar  $x[k] := f(hk)$ . Då är  $D \approx \frac{1}{h}(E-1)$  där  $Ex[k] = x[k+1]$ . En differentialekvation är på formen  $Q(D)f = P(D)g$  vilket genom approximering som ovan ger en differensekvation  $Q\left(\frac{E-1}{h}\right)x_f = P\left(\frac{E-1}{h}\right)x_g$ .

## 0.2 Frekvenssvar

Låt  $y = h * x$  vara ett LTI-system. Förra gången såg vi att  $h * z^k = H(z) \cdot z^k$ . Om vi tar  $z = e^{i\Omega}$  och  $x[k] = e^{i\Omega k}$  får vi  $h * x[k] = H(e^{i\Omega k})x[k]$ . Vi brukar kalla  $H$  i den ekvationen för frekvenssvar.

### 0.2.1 Reell form

Låt  $x[k] = \cos(\Omega k + \beta)$  där  $\Omega, \beta \in \mathbb{R}$ . Då är  $h * x[k] = \frac{1}{2}h * e^{i(\Omega k + \beta)} + \frac{1}{2}h * e^{-i(\Omega k + \beta)} = \frac{1}{2}(H(e^{i\Omega})e^{j(\Omega k + \beta)} + H(e^{-i\Omega})e^{-j(\Omega k + \beta)}) = \{\text{om } h \text{ reell är } H(\bar{z}) = \overline{H(z)}\} = \frac{1}{2}\left(H(e^{i\Omega})e^{j(\Omega k + \beta)} + \overline{H(e^{-i\Omega})e^{-j(\Omega k + \beta)}}\right) = \text{Re}(|H(e^{i\Omega})|e^{i(\Omega k + \beta) + i\angle H(e^{i\Omega})}) = |H(e^{i\Omega})|\cos(\Omega k + \beta + \angle H(e^{i\Omega})).$

### 0.2.2 Koppling till DFT

Om  $x[k]$  är en  $N$ -periodisk och kausal signal, d.v.s.  $x[k+N] = x[k] \forall k \geq 0$  och  $x[k] = 0$  för  $k < 0$ .

Då är  $Fx[k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-i\frac{2\pi}{N}kl}$ .

$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} = \{k = nN + m\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x[m]z^{-nN-m} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-nN} \sum_{m=0}^{N-1} x[m]z^{-m} = \{\text{Geometrisk summa}\} = \frac{1}{1-z^{-N}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} x[m]z^{-m}$ .  
Alltså är  $Fx[l] = (1-z^{-N})X(z)$  för  $z = e^{i\frac{2\pi}{N}l}$ .

### 0.3 Differensekvationer

Låt  $Q = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ ,  $P = b^nz^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0$  och  $Ey[k] = y[k+1]$ .

Differensekvationer kan i allmänhet skrivas  $\begin{cases} Q(E)y[k] = P(E)x[k] \\ x \text{ given och } y[k] \text{ givna för } k = -n, -n+1, \dots, -2, -1 \end{cases} \quad k \geq 0$ .

$Q(E)y = P(E)x \iff y[k] + a_{n-1}y[k-1] + \dots + a_1y[k-n+1] + a_0y[k-n] = b_nx[k] + b_{n-1}x[k-1] + \dots + b_1x[k-n+1] + b_0x[k-n]$  vilken vi delar upp i två ekvationer, zero-state (partikulärlösning) ( $Q(E)y_0[k] = P(E)x[k]$  där  $y_0[k] = 0$ ) och zero-input (homogenlösning) ( $Q(E)y_{in}[k] = 0$  där  $y_{in}[k] = y[k]$ ).

**Exempel 4.** Vi börjar med att lösa ett exempel på zero-input.

Låt  $Q(z) = z^2 + a_1z + a_0$ , d.v.s. vi vill lösa  $y[k] + a_1y[k-1] + a_0y[k-2] = 0$  och vi har  $y[-2], y[-1]$  givna.

Idén är att använda z-transformen.

differensekvationen ovan ger  $0 = \sum_{k=0}^{\infty} (y[k] + a_1y[k-1] + a_0y[k-2])z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y[k]z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_1y[k-1]z^{-k} + \sum_{k=2}^{\infty} a_0y[k-2]z^{-k} + a_1y[-1]z^0 + a_0y[-2]z^0 + a_0y[-1]z^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} y[k]z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_1y[k]z^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_0y[k]z^{-k-2} + a_1y[-1]z^0 + a_0y[-2]z^0 + a_0y[-1]z^{-1} = Y(z) + a_1\frac{1}{z}Y(z) + a_0\frac{1}{z^2}Y(z) = \frac{1}{z^2}(Q(z)Y(z) + (a_1y[-1] + a_0y[-2])z^2 + a_0y[-1]z)$  vilket ger att  $Y(z) = \frac{1}{Q(z)}((a_1y[-1] + a_0y[-2])z^2 + a_0y[-1]z) = \frac{\alpha z^2 + \beta z}{Q(z)}$  (Där  $\alpha = a_1y[-1] + a_0y[-2]$  och  $\beta = a_0y[-1]$ )  $= \frac{\alpha z^2 + \beta z}{(z-z_+)(z-z_-)}$ . Lösningen fås genom att ansätta  $y[k] = \begin{cases} Az_+^k + Bz_-^k & \text{om } z_+ \neq z_- \\ Az_+^k + Bkz_+^k & \text{om } z_+ = z_- \end{cases}$ .  $A$  och  $B$  hittas genom  $Az_+^{-1} + Bz_-^{-1} = y[-1]$  och  $Az_+^{-2} + Bz_-^{-2} = y[-2]$ .

( $z_+$  och  $z_-$  är lösningar till  $Q(z) = 0$ )

Nu löser vi zeroinput för  $Q(z) = z^2 + a_1z + a_0$ . För att få fram lösningen utvidgar vi  $x$  och  $y_0$  till kausala signaler så att  $Q(E)y = P(E)x \implies Y_0(z)(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^n}) = X(z)(b_n + \frac{b_{n-1}}{z} + \frac{b_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{b_0}{z^n})$  vilket om vi multiplicerar med  $z^n$  ger  $Q(z)Y_0(z) = P(z)X(z)$ , d.v.s.  $Y_0(z) = H(z)X(z)$  där  $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \iff y_0[k] = h * x[k]$  där  $h$  har z-transform  $H$ .

$H(z)$  är en rationell funktion, d.v.s. kvoten av två polynom, vilket ger att man får partialbråksuppdelning och algebra-a sig till termer vi vet hur man invers-z-transformerar.

**Påstående 1.** Om  $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  där  $\deg(P) \leq \deg(Q) = n$  så är  $h[k] = b_n \delta[k] + \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^{N_m} c_{l,m} k^l z_m^k$  där  $z_1, z_2, \dots, z_M$  är nollställena till  $Q$  och  $c_{l,m}$ ,  $M$  och  $N_m$  är godtyckliga tal.

**Sats 1** (Differensekvationer och stabilitet). Som en följd av det är differensekvationen  $Q(E)y[k] = P(E)x[k]$  där  $k \geq 0$  och  $y[k]$  kända då stabil, d.v.s.  $y[k] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  när  $x[k] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  om och endast om  $Q(z) = 0$  saknar lösning med  $|z| \geq 1$ .

**Sats 2** (Stabilitet och väldefinierade system). Ett diskret system är stabilt  $\iff H(z)$  väldefinierat för  $|z| \geq 1$ . Det är samma sak som att  $H$  saknar poler i  $|z| \geq 1$ .

## 0.4 Poler till överföringsfunktioner

**Definition 1** (Poler). Låt  $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  vara en rationell funktion på reducerad form, d.v.s.  $P$  och  $Q$  saknar gemensamma nollställena.

$z_0 \in \mathbb{C}$  sägs vara en pol till  $H$  om  $Q(z_0) = 0$ .

**Exempel 5.** Låt  $P(z) = b_1 z + b_0$  och  $Q(z) = z^2 + a_1 z + a_0$ . Anta också att  $Q(-\frac{b_0}{b_1}) \neq 0$  och att  $a_0 \neq \frac{a_1^2}{4}$  vilket ser till att  $P$  och  $Q$  inte är noll samtidigt och att  $z_- \neq z_+$ .

Då är  $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{(z - z_+)(z - z_-)}$  där polerna till  $H$  är  $z_-$  och  $z_+$ . Vad är då  $h$ , d.v.s. vad är  $z^{-1}(H)$ ?

Vi skriver  $H(z) = \frac{b_1(z - z_+) + b_1 z_+ + b_0}{(z - z_+)(z - z_-)} = \frac{b_1}{z - z_-} + \frac{b_1 z_+ + b_0}{(z - z_+)(z - z_-)}$  = {Partialbråksuppdelning}  
så att  $h[k] = \left( \frac{b_1 z_- + b_0}{z_- - z_+} z_-^{k-1} + \frac{b_1 z_+ + b_0}{z_+ - z_-} z_+^{k-1} \right) u[k-1]$ .

Vi får alltså att zerostate-lösningen för  $y[k+2] + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] = b_1 x[k+1] + b_0 x[k]$  där  $y[-2] = y[-1] = 0$  ges av  $y = h * x$  där  $h$  är som ovan.

Stabilitet  $\iff |z_+|, |z_-| < 1$ .