0.1 Approximation av signaler

Låt f vara en signal och x vara en modellsignal som vi förstår. Vi vill modellera f m.h.a. x, så ungefär $f \approx cx \implies$ Ett fel $e = f - cx$.

Kom ihåg linalgens "inre produktrum":

V är ett vektorrum över $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, en inre/skalär produkt på V. Den uppfyller $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle x, x \rangle \geq 0 (= 0 \iff x = 0)$ och $\langle x, \lambda y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle \lambda + \langle x, y_2 \rangle$.

f_1, f_2 är signaler, då är här $\langle f_1, f_2 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1\bar{(t)} f_2(t) \mathrm{d}t$.

I det periodiska fallet är $\langle f_1, f_2 \rangle = \int\limits_{0}^{T} f_1\bar{(t)} f_2(t) \mathrm{d}t$.

Mellan två signaler f_1, f_2 har vi en vinkel θ som definieras genom $\cos(\theta) = \dfrac{\langle f_1, f_2 \rangle}{|f_1| \cdot |f_2|}$ där $|f| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Felet e är litet om $|e|$ är litet. När är då $|e|$ som minst? D.v.s. vad är min $|f - cx|$ över $\mathbb{C}$? Går att härleda att det uppnås för $c = \dfrac{\langle x, f \rangle}{|x|^2}$. Det betyder att $f \approx \dfrac{\langle x, f \rangle}{|x|^2} x$.

"Jag växte också upp på Lindholmen."

– Mattesnubben

Om f är en signal definierad för $-\infty < t < \infty$ är dess energi $E_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = |f|^2$.

Om f_1, f_2 är signaler definierade för $-\infty < t < \infty$ är $\dfrac{\int_{-\infty} \infty f_1(t) f_2(t) \mathrm{d}t}{\sqrt{E_{f_1} E_{f_2}}} = \dfrac{\langle f_1, f_2 \rangle}{|f_2||f_2|}$ korrelationen mellan signalerna. Den är 1 $\iff$ $f_1 = f_2$ och $-1 \iff f_1 = -f_2$.

Anta att vi har flera modellsignaler $x_1, x_2, \ldots, x_N$ så att $f \approx c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_N x_N$. Vi vill då minimera $e = f - \sum\limits_{n=1}^{N} c_k e_k$. Det uppnås för $c_k = \dfrac{\langle x_n, f \rangle}{|x_n|^2}$ **OM** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ inte är korrelerade, d.v.s. de är ortogonala eller den inre/skalärprodukten är 0.

0.2 Fourierserier

Fourierserier appliceras på periodiska signaler. Låt f vara en signal med period T.

Vi tittar på följande modellsignaler: $\{1, \cos(\omega_0 t), \ldots, \cos(N\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \ldots, \sin(N\omega_0 t)\}$.

$\langle \cos(k\omega_0 t), \cos(l\omega_0 t)\rangle = \int\limits_0^T \cos(k\omega_0 t)\cos(l\omega_0 t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^T \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2}\frac{e^{jl\omega_0 t} + e^{-jl\omega_0 t}}{2}\mathrm{d}t =$
$\frac{1}{4}\int\limits_0^T e^{j(k+l)\omega_0 t} + e^{j(k-l)\omega_0 t} + e^{j(-k+l)\omega_0 t} + e^{-j(k+l)\omega_0 t}\mathrm{d}t = T$ om $k = l = 0$, $\frac{T}{2}$ om $k = l > 0, 0$ annars. På samma sätt är $\int\limits_0^T \cos(k\omega_0 t)\sin(l\omega_0 t)\mathrm{d}t = 0$ och $\int\limits_0^T \sin(k\omega_0 t)\sin(l\omega_0 t)\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$ om $k = l$ och 0 annars.

Alltså är den bästa approximationen

$$f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$$

där $a_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t = \frac{\langle \cos(k\omega_0 t), f\rangle}{|\cos(k\omega_0 t)|^2}$ och $b_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin(k\omega_0 t)\mathrm{d}t = \frac{\langle \sin(k\omega_0 t), f\rangle}{|\sin(k\omega_0 t)|^2}$.

Sats 1. Om f är T-periodisk och $\int\limits_0^T |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ existerar a_k och b_k.

Sats 2. Om f dessutom är kontinuerlig på intervallet på $0 \leq t \leq T$ utom i ändligt många punkter och $f(t+) = \lim\limits_{h\to 0} f(t+h)$ och $f(t-) = \lim\limits_{h\to 0} f(t-h)$ existerar för alla t så är $\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t)$.

"Det här är högst icke-trivialt."

– Mattesnubben

"Om man stoppar in något i datorn som itne konvergerar kommer det gå åt röven."

Exempel 1. Figur 1

Vi har ju $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t)$, för $k \geq 0$ har vi $a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_0 t) \mathrm{d}t = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(k\omega_0 t) \mathrm{d}t = 1$ för $k = 0$, $\frac{2}{Tk\omega_0} [\sin(k\omega_0 t)]_0^{\frac{T}{2}} = 1$ för $k = 0, 0$ annars. och för $k > 0$ har vi $b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_0 t) \mathrm{d}t = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(k\omega_0 t) \mathrm{d}t = \frac{2}{Tk\omega_0} [-\cos(k\omega_0 t)]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{\pi k}(-\cos(k\pi)+1) = \frac{1}{\pi k}(-(-1)^k + 1) = 0$ för $k = 2m$ och $\frac{2}{\pi(2m+1)}$ annars.

$f = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)\omega_0 t)}{\pi(2m+1)}$

0.2.1 Kompakt form

$$\begin{aligned} f &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(k\omega_0 t + \theta_n) \end{aligned}$$

$c_n \cos(k\omega_0 t + \theta_n) = c_n \cos(\theta_n) \cos(k\omega_0 t) - c_n \sin(\theta_n) \sin(k\omega_0 t)$

$\tan(\theta_n) = \frac{-b_n}{a_n}$ och $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$

0.3 Frekvensspektrum

Figur 2

Används för att visualisera fourierserier.

Exempel 2. Figur 3

$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t)$, och vi börjar med fallet där

$k > 0$. Då är $a_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t$ och med partiell integrering får vi $a_n = \frac{2}{T}\left[t\frac{\sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\mathrm{d}t = 0 + \frac{2}{T\omega_0^2 k^2}\left[\cos(k\omega_0 t)\right]_0^{\frac{T}{2}} =$ 0 när $k = 2m$, $\frac{-2}{\pi\omega_0(2m+1)^2}$ annars. Vi har också $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$.

Om man räknar på b_n blir det likt, men till slut får vi $f = \frac{T}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{-\cos((2m+1)\omega_0 t)}{\omega_0(2m+1)^2} + \frac{\sin((2m+1)\omega_0 t)}{2m+1}$ eller i kompakt form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos((2n+1)\omega_0 t + \theta_n)$ där $\theta_n = \arctan\left(\frac{-b_{2n+1}}{a_{2n+1}}\right) = \arctan(\omega_0(2n+1))$.