0.1 Fourierserier och -transformer

Påminnelse 1. Kom ihåg Eulers formel: $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$. Kom också ihåg den allmänna formeln: $x(t) = A\cos(\omega t + \theta) = \frac{A}{2}\left(e^{i(\omega t+\theta)} + e^{-i(\omega t+\theta)}\right) = \frac{A}{2}e^{i\theta}e^{i\omega t} + \frac{A}{2}e^{-i\theta}e^{-i\omega t}$. Om $\omega = k\omega_0$ kan vi skriva $x(t) = \frac{A}{2}e^{i\theta}e^{ik\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-i\theta}e^{-ik\omega_0 t}$ där vi ger namnen $c_k = \frac{A}{2}e^{i\theta}$ och $c_{-k} = \frac{A}{2}e^{-i\theta}$. Allmännt för en periodisk signal med flera sinsuformade signaler med $\omega = t\omega_0$ får vi $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\omega_0 t}$ vilket är Fourierserien på komplex form. c_k anger amplitud hos varje komplex exponential i formeln ovan.

c_k och $X(i\omega)$ ger information om en signals frekvensinnehåll. Signalens amplitud fördelad över de olika frekvenserna är $|c_k|$ eller $|X(i\omega)|$ i det periodiska och icke-periodiska fallet. Vi kan från detta skapa amplitudspektrum. Signalens fas fördelad över de olika frekvenserna är $\arg c_k$ och $\arg X(i\omega)$ för de två huvudfallen.

Från Parsevals formel fås för en periodisk signal (effektsignal) den totala medeleffekten $\overline{P} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 \mathrm{d}t = c_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k|^2$ vilket kan kallas effekttäthetsspektrat. Den kan delas upp efter frekvens om man vill. För en kontinuerlig signal (energisignal) definierar vi den totala energin $E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(i\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$. Det är ett energi(täthets)spektrum och kan delas upp per frekvens.

0.2 Systemanalys

$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$. Låt $x(t) = e^{i\omega t}$. Då är $y(t) = h(t)*x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\omega t}e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau = e^{i\omega t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau = e^{i\omega t}H(i\omega)$.

I vår Fourierserie ingår frekvenserna $k\omega_0, k \in \mathbb{Z}$.

$x_k(t) = e^{ik\omega_0 t} \to y_k(t) = e^{ik\omega_0 t}H(ik\omega_0)$

$x_{-k}(t) = e^{-ik\omega_0 t} \to y_{-k}(t) = e^{-ik\omega_0 t}H(-ik\omega_0)$

$x(t) = \frac{1}{2}(x_k(t)+x_{-k}(t)) = \cos(k\omega_0 t) \to y(t) = \frac{1}{2}y_k(t)+\frac{1}{2}y_{-k}(t)$. Låt $H(ik\omega_0) = H_k = |H_k|e^{i\theta_k} \in \mathbb{C}$. Då är $H(-ik\omega_0) = H_{-k} = |H_k|e^{-i\theta_k} \in \mathbb{C}$. Om man summerar (använder superposition) får man då $y(t) = \frac{1}{2}|H_k|\left(e^{ik\omega_0 t}e^{i\theta_k} + e^{-ik\omega_0 t}e^{i\theta_k}\right) = |H_k|\cos(k\omega_0 t + \theta_k)$ vilket är den ursprungliga signalen med en amplitudpåverkan och en faspåverkan.

$H_k = H(ik\omega_0)$ är systemets *frekvenssvar* ($H(i\omega)$). Den ändrar amplitud och fas på varje sinusformad med frekvensen ω.