

*”Det är ju helg snart, man får roa sig med något”*

– Mattesrubben om ingenstans deriverbara funktioner

*”Då övergår vi till saltgruvorna då.”*

– Mattesrubben

## 0.1 Exponentiella Fourierserier

Låt  $f$  vara en  $T$ -periodisk signal.

Vi kan skriva  $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\omega_0 t}$  eftersom

$$\begin{aligned} f &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \\ &= \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \right) e^{jk\omega_0 t} + \left( \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right) e^{-jk\omega_0 t} \\ &= c_0 \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ik\omega_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\omega_0 t} \end{aligned}$$

där  $c_k = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} = \dots$  (se andras anteckningar)  $= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ .

**Anmärkning 1.** Går lätt att visa med definitionen av faltning att om en av insignalerna är periodiska är också utsignalen det.

**Definition 1** (Laplace-/Fouriertransform).

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-su} du$$

givet att  $h$  är stabil.

Om  $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$  är  $h*x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k h* e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$ .

## 0.2 Faltningsekvationer (periodiska fallet)

Vi vill lösa  $y = h * x$ .

Anta att  $y, h$  är kända och att  $y$  är periodisk. Då kan vi skriva  $y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{jk\omega_0 t}$ .

Vi vet då att  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$  vilket ger att  $\forall k$ :

$$c_k(y) = c_k(x) H(jk\omega_0) \iff \forall k : c_k(x) = c_k(y) \cdot \frac{1}{H(jk\omega_0)}$$

## 0.3 Faltning på kompakt form

$$H = |H| e^{i\angle H}$$

Om vi då har signalen  $x = \sum c_k(x) \cos(k\omega_0 t + \theta_k(x))$  är  $h * x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h * \left( \frac{e^{j(k\omega_0 t + \theta_k(x))} + e^{-j(k\omega_0 t + \theta_k(x))}}{2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left( H(jk\omega_0) \frac{e^{j(k\omega_0 t + \theta_k(x))}}{2} + H(-jk\omega_0) \frac{e^{-j(k\omega_0 t + \theta_k(x))}}{2} \right)$

**Påstående 1.** Om  $h$  är reell är  $H(\bar{s}) = \overline{H(s)}$ .

*Bevis.*

$$\begin{aligned} H(\bar{s}) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-\bar{s}u} du \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-su} du} \\ &= \overline{H(s)} \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left( H(jk\omega_0) \frac{e^{j(k\omega_0 t + \theta_k(x))}}{2} + H(-jk\omega_0) \frac{e^{-j(k\omega_0 t + \theta_k(x))}}{2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left( H(jk\omega_0) \frac{e^{j(k\omega_0 t + \theta_k(x))}}{2} + \overline{H(jk\omega_0)} \frac{e^{-j(k\omega_0 t + \theta_k(x))}}{2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{|H(jk\omega_0)|}{2} \left( e^{j\angle H(jk\omega_0)} e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)} + e^{-j\angle H(jk\omega_0)} e^{-j(k\omega_0 t + \theta_k)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k |H(jk\omega_0)| \cos(k\omega_0 t + \theta_k + \angle H(jk\omega_0)) \end{aligned}$$

## 0.4 Derivata

Låt  $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \cos(k\omega_0 t) + b_k(x) \sin(k\omega_0 t)$ . Då är  $x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)(-k\omega_0) \sin(k\omega_0 t) + b_k(x)(k\omega_0) \cos(k\omega_0 t)$ .  $a_0(x') = 0$ ,  $a_k(x') = k\omega_0 b_k(x)$ ,  $b_k(x') = -k\omega_0 a_k(x)$  för  $k > 0$ .

**Exempel 1.** Låt  $h = ue^{at}$  (enhetssteg), d.v.s.  $h(t) = e^{at}$  för  $t \geq 0$  och 0 annars.

Låt också  $x(t) = \cos(t) + \sin(2t) + \cos(3t - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} + \frac{1}{2}e^{3it}e^{-\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}e^{-3it}e^{\frac{\pi}{3}} = c_{-3}e^{-3it} + c_{-2}e^{-2it} + c_{-1}e^{-it} + c_1e^{it} + c_2e^{it} + c_3e^{3it}$ .

Då är  $c_{-3} = \frac{e^{\frac{\pi i}{3}}}{2}$ ,  $c_{-2} = -\frac{1}{2i}c_{-1} = \frac{1}{2}$ ,  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{1}{2i}$  och  $c_3 = \frac{e^{-\frac{\pi i}{3}}}{2}$ .

Då är  $h * x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(jk\omega_0) e^{ik\omega_0 t}$ .  $H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a}$  när  $\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{a\}$  och odef. annars.  $H$  är definierad, givet att  $s = ik\omega_0$  när  $\text{Re}\{a\} < 0$ , d.v.s. att  $h$  är stabil.

$H(jk\omega_0) = \frac{1}{ik\omega_0 - a}$  vilket säger att  $h * x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{ik\omega_0 - a} e^{ik\omega_0 t}$ .

Med  $x$  som ovan blir  $h * x(t) = \sum_{k=-3}^3 \frac{c_k}{ik\omega_0 - a} e^{ik\omega_0 t} = \frac{e^{\frac{\pi i}{3}}}{2} \frac{1}{-3i\omega_0 - a} e^{-3it} + \frac{1}{2i} \frac{1}{-2i\omega_0 - a} e^{-2it} + \dots$

$D(h * x) = \sum c_k \cdot \frac{ik\omega_0}{ik\omega_0 - a} e^{ik\omega_0 t} = \sum c_k e^{ik\omega_0 t} + \sum c_k \cdot \frac{a}{ik\omega_0 - a} e^{ik\omega_0 t} = x + a(h * x)$ , d.v.s.  $y = h * x$  löser  $(D - a)y = x$ .

”Riktigt jävla konkret.”

– Mattesrubben

## 0.5 Parsevals sats

Satsen säger saker om  $\int_0^T |x(t)|^2 dt$ .

**Påminnelse 1.**  $P_x = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R |x(t)|^2 dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2mT} \int_{-mT}^{mT} |x(t)|^2 dt =$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2mT} \left( 2m \int_0^T |x(t)|^2 dt \right) = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \implies \int_0^T |x(t)|^2 dt = |x|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}, \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{il\omega_0 t} \right\rangle =$$

$$\sum_{k,l} \overline{c_k} c_l \langle e^{ik\omega_0 t}, e^{il\omega_0 t} \rangle = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \int_0^T e^{-ik\omega_0 t} e^{il\omega_0 t} dt \text{ vilket är } 0 \text{ för } k \neq l$$

och 1 annars. Sammanfattningsvis är satsen

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = |c_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$