0.1 z-transformen för en generell sekvens

Låt $x[n]$ vara en diskret signal. Då är $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$. Vi vet att vi kan skriva $z = re^{i\Omega}$. Då är $X(z) = X(re^{i\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{i\Omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(x[n]r^{-n})e^{i\Omega n} = \text{DTFT}\{x[n]r^{-n}\}$. Det konvergerar om $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$, d.v.s. om det är absolutsummerbart. Notera att konvergensen bara beror på $|z| = r$ och $x[n]$. De värden på z för vilka $X(z)$ konvergerar kallas för ”konvergensområde” (ROC).

För en kausal signal gäller att om $\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$ för något $r = r_0$ måste den även konvergera för $r > r_0$. Konvergensområdet är alltså alla tal utanför en viss cirkel i det komplexa talplanet.

0.1.1 Några egenskaper för konvergensområdet

- Inga poler får ligga i ROC
- Om DTFT existerar för signalen ligger enhetscirkeln i ROC ($r = 1$)
- Om $x[n]$ är kausal och dess $X(z)$ har poler svarar det minsta värdet på r för vilket $X(z)$ konvergerar mot det största beloppet av $X(z)$:s poler.

0.2 Digitala filter

Ett filter går att realisera med en differensekvation som beskrivs av en kvot $\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}$.

0.2.1 Några slags filter

- FIR (Finite Impulse Response)
  - Ändligt långt impulssvar (längd $M < \infty$)
  - $a_1, a_2, \ldots, a_n = 0$
  - Kan ges linjär fas
  - Alltid stabila ($M < \infty$, $b_n < \infty$)
  - Icke-rekursivt
- IIR (Infinite Impulse Response)
  - Oändligt långt impulssvar
  - Rekursivt (Några $a_k \neq 0$, $k = 1,2,\ldots,N$)
  - Kan göras instabila
  - För jämförbar amplitudkaraktäristik har lägre filterordning än ett FIR-filter (snabbare att räkna ut och modellera eftersom det har färre multiplikationer att utföra)

0.3 Diskret system (filter)

Låt $H(z)$ vara en överföringsfunktion till något system. Då är $H(z)\big|_{z=e^{i\Omega}} = H(e^{i\Omega})$ dess frekvenssvar. Det är också bara $H(z)$ på enhetscirkeln och $H(e^{i\Omega})$ är ju bara DTFT som är kontinuerlig i Ω och periodisk med period 2π.

Då är $\left|H(e^{i\Omega})\right| = b_0 \cdot \frac{\prod_{k=1}^{M} \left|(e^{i\Omega}-c_k)\right|}{\prod_{k=1}^{N} \left|(e^{i\Omega}-d_k)\right|}$.

Låt $\phi = \arg\{e^{i\Omega} - d_k\}$.

Exempel 1. Vi har ett FIR-filter som beskrivs av differensekvationen $y[n] = x[n] + x[n-2]$.

z-transformen ger $Y(z) = X(z)z^{-2} + X(z) = X(z)(1+z^{-2})$ och därmed är $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-2} = \frac{z^2+1}{z^2}$. Nollställen här är de z som uppfyller $z^2 + 1 = 0$, d.v.s. $z = \pm i = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$. Polerna är $z^2 = 0$.

Frekvenssvaret fås av att sätta z i z-transformen till $e^{i\Omega}$. Då får vi $H(e^{i\Omega}) = 1 + e^{-2i\Omega} = e^{-i\Omega}(e^{i\Omega} + e^{-i\Omega}) = 2e^{-i\Omega}\cos\Omega$.

$\left|H(e^{i\Omega})\right|$ är då $2|\cos\Omega|$.