0.1 Mer z-transform

Låt $x[k]$ vara en diskret signal. Då är $X(z) \coloneqq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$.

Exempel 1. $\delta(k-l) \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} z^{-l}$

Exempel 2. $\gamma^k u[k] \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\gamma}$ om $|z| > |\gamma|$

Exempel 3. $\gamma^{k-1} \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z-\gamma}$

0.1.1 Räkneregler

$x[k+1]u[k] \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} z(X(z) - x[0])$

$x[k-1] \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z}X(z)$

$\gamma^k x[k] \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} X(\frac{z}{\gamma})$

$x_1 * x_2 \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} X_1X_2$

Vi börjar med lite kontext. Om $f(t)$ är en kontinuerlig signal och $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Då är $Df(t) \approx \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ för små h. Vi definierar $x[k] \coloneqq f(hk)$. Då är $D \approx \frac{1}{h}(E-1)$ där $Ex[k] = x[k+1]$. En differentialekvation är på formen $Q(D)f = P(D)g$ vilket genom approximering som ovan ger en differensekvation $Q\big(\frac{E-1}{h}\big)x_f = P\big(\frac{E-1}{h}\big)x_g$.

0.2 Frekvenssvar

Låt $y = h * x$ vara ett LTI-system. Förra gången såg vi att $h * z^k = H(z) \cdot z^k$. Om vi tar $z = e^{i\Omega}$ och $x[k] = e^{i\Omega k}$ får vi $h * x[k] = H(e^{i\Omega k})x[k]$. Vi brukar kalla H i den ekvationen för frekvenssvar.

0.2.1 Reell form

Låt $x[k] = \cos(\Omega k + \beta)$ där $\Omega, \beta \in \mathbb{R}$. Då är $h * x[k] = \frac{1}{2}h * e^{i(\Omega k+\beta)} + \frac{1}{2}h * e^{-i(\Omega k+\beta)} = \frac{1}{2}\big(H(e^{i\Omega})e^{j(\Omega k+\beta)} + H(e^{-i\Omega})e^{-j(\Omega k+\beta)}\big) = \{$om h reell är $H(\overline{z}) = \overline{H(z)}\} = \frac{1}{2}\Big(H(e^{i\Omega})e^{j(\Omega k+\beta)} + \overline{H(e^{-i\Omega})e^{-j(\Omega k+\beta)}}\Big) = \mathrm{Re}\big(\big|H(e^{i\Omega})\big|e^{i(\Omega k+\beta)+i\angle H(e^{i\Omega})}\big) = \big|H(e^{i\Omega})\big|\cos\big(\Omega k + \beta + \angle H(e^{i\Omega})\big)$.

0.2.2 Koppling till DFT

Om $x[k]$ är en N-periodisk och kausal signal, d.v.s. $x[k+N] = x[k]\ \forall\ k \geq 0$ och $x[k] = 0$ för $k < 0$.

Då är $Fx[k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-i\frac{2\pi}{N}kl}$.

$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} = \{k = nN + m\} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]z^{-nN-m} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-nN}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]z^{-m} = \{\text{Geometrisk summa}\} = \frac{1}{1-z^{-N}}\cdot\sum_{m=0}^{N-1} x[m]z^{-m}$.
Alltså är $Fx[l] = (1-z^{-N})X(z)$ för $z = e^{i\frac{2\pi}{N}l}$.

0.3 Differensekvationer

Låt $Q = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$, $P = b^nz^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1z + b_0$ och $Ey[k] = y[k+1]$.

Differensekvationer kan i allmänhet skrivas $\begin{cases} Q(E)y[k] = P(E)x[k] & k \geq 0 \\ x \text{ given och } y[k] \text{ givna för } k = -n, -n+1, \ldots, -2, -1 \end{cases}$.

$Q(E)y = P(E)x \iff y[k] + a_{n-1}y[k-1] + \cdots + a_1y[k-n+1] + a_0y[k-n] = b_nx[k] + b_{n-1}x[k-1] + \cdots + b_1x[k-n+1] + b_0x[k-n]$ vilken vi delar upp i två ekvationer, zero-state (partikulärlösning) ($Q(E)y_0[k] = P(E)x[k]$ där $y_0[k] = 0$) och zero-input (homogenlösning) ($Q(E)y_{in}[k] = 0$ där $y_{in}[k] = y[k]$).

Exempel 4. Vi börjar med att lösa ett exempel på zero-input.

Låt $Q(z) = z^2 + a_1z + a_0$, d.v.s. vi vill lösa $y[k] + a_1y[k-1] + a_0y[k-2] = 0$ och vi har $y[-2], y[-1]$ givna.

Idén är att använda z-transformen.

differensekvationen ovan ger $0 = \sum_{k=0}^{\infty}(y[k] + a_1y[k-1] + a_0y[k-2])z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y[k]z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_1y[k-1]z^{-k} + \sum_{k=2}^{\infty} a_0y[k-2]z^{-k} + a_1y[-1]z^0 + a_0y[-2]z^0 + a_0y[-1]z^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} y[k]z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_1y[k]z^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_0y[k]z^{-k-2} + a_1y[-1]z^0 + a_0y[-2]z^0 + a_0y[-1]z^{-1} = Y(z) + a_1\frac{1}{z}Y(z) + a_0\frac{1}{z^2}Y(z) = \frac{1}{z^2}\big(Q(z)Y(z) + (a_1y[-1] + a_0y[-2])z^2 + a_0y[-1]z\big)$ vilket ger att $Y(z) = \frac{1}{Q(z)}((a_1y[-1] + a_0y[-2])z^2 + a_0y[-1]z) = \frac{\alpha z^2+\beta z}{Q(z)}$ (Där $\alpha = a_1y[-1] + a_0y[-2]$ och $\beta = a_0y[-1]) = \frac{\alpha z^2+\beta z}{(z-z_+)(z-z_-)}$. Lösningen fås genom att ansätta $y[k] = \begin{cases} Az_+^k + Bz_-^k & \text{om } z_+ \neq z_- \\ Az_+^k + Bkz_+^k & \text{om } z_+ = z_- \end{cases}$. A och B hittas genom $Az_+^{-1} + Bz_-^{-1} = y[-1]$ och $Az_+^{-2} + Bz_-^{-2} = y[-2]$.

(z_+ och z_- är lösningar till $Q(z) = 0$)

Nu löser vi zeroinput för $Q(z) = z^2 + a_1z + a_0$. För att få fram lösningen utvidgar vi x och y_0 till kausala signaler så att $Q(E)y = P(E)x \implies Y_0(z)\big(1 + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{2} + \cdots + \frac{a_0}{2}\big) = X(z)\Big(b_n + \frac{b_{n-1}}{2} + \frac{b_{n-2}}{2} + \cdots + \frac{b_0}{2}\Big)$ vilket om vi multiplicerar med z^n ger $Q(z)Y_0(z) = P(z)X(z)$, d.v.s. $Y_0(z) = H(z)X(z)$ där $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \iff y_0[k] = h * x[k]$ där h har z-transform H.

$H(z)$ är en rationell funktion, d.v.s. kvoten av två polynom, vilket ger att man får partialbråksuppdela och algebra-a sig till termer vi vet hur man invers-z-transformerar.

Påstående 1. Om $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ där $\deg(P) \leq \deg(Q) = n$ så är $h[k] = b_n\delta[k] + \sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{N_m} c_{l,m}k^l z_m^k$ där $z_1, z_2, \dots, z_m$ är nollställen till Q och $c_{l,m}$, M och N_m är godtyckliga tal.

Sats 1 (Differensekvationer och stabilitet)**.** Som en följd av det är differensekvationen $Q(E)y[k] = P(E)x[k]$ där $k \geq 0$ och $y[k]$ kända då stabil, d.v.s. $y[k] \xrightarrow{k\to\infty} 0$ när $x[k] \xrightarrow{k\to\infty} 0$ om och endast om $Q(z) = 0$ saknar lösning med $|z| \geq 1$.

Sats 2 (Stabilitet och väldefinierade system)**.** Ett diskret system är stabilt $\iff$ $H(z)$ väldefinierat för $|z| \geq 1$. Det är samma sak som att H saknar poler i $|z| \geq 1$.

0.4 Poler till överföringsfunktioner

Definition 1 (Poler)**.** Låt $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ vara en rationell funktion på reducerad form, d.v.s. P och Q saknar gemensamma nollställen.

$z_0 \in \mathbb{C}$ sägs vara en pol till H om $Q(z_0) = 0$.

Exempel 5. Låt $P(z) = b_1z + b_0$ och $Q(z) = z^2 + a_1z + a_0$. Anta också att $Q(\frac{-b_0}{b_1}) \neq 0$ och att $a_0 \neq \frac{a_1^2}{4}$ vilket ser till att P och Q inte är noll samtidigt och att $z_- \neq z_+$.

Då är $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_1z+b_0}{(z-z_+)(z-z_-)}$ där polerna till H är z_- och z_+. Vad är då h, d.v.s. vad är $z^{-1}(H)$?

Vi skriver $H(z) = \frac{b_1(z-z_+)+b_1z+b_0}{(z-z_+)(z-z_-)} = \frac{b_1}{z-z_-} + \frac{b_1z_++b_0}{(z-z_+)(z-z_-)} = \{\text{Partialbråksuppdelning}\}$ så att $h[k] = \left(\frac{b_1z_-+b_0}{z_--z_+}z_-^{k-1} + \frac{b_1z_++b_0}{z_+-z_-}z_+^{k-1}\right)u[k-1]$.

Vi får alltså att zerostate-lösningen för $y[k+2] + a_1y[k+1] + a_0y[k] = b_1x[k+1] + b_0x[k]$ där $y[-2] = y[-1] = 0$ ges av $y = h * x$ där h är som ovan.

Stabilitet $\iff$ $|z_+|, |z_-| < 1$.