Föreläsningsanteckningar Transformer, signaler och system SSY080

Hugo Simonsson

17 oktober 2019

Innehåll

List of Theorems

1 Föreläsning 19-09-03

I kursen studerar vi tekniska/fysikaliska system och deras egenskaper. Vi kan till exempel vara intresserade av hur de reagerar på olika exciteringar (insignaler). Vi begränsar oss till system med en in- och en utsignal. In- och utsignaler kan vara ex. kraft, tryck, spänning, ström o.s.v. Vi använder oss av matematiska modeller för att beskriva signaler (funktioner) och system (ekvationer).

1.1 Klassificering av signaler

1.1.1 Diskret/Kontinuerlig signal

Kontinuerlig (tid) signal $x(t)$ där $t \in \mathbb{R}$

Diskret (tid/oberoende variabel) signal $x[n]$ där $n \in \mathbb{Z}$

Kontinuerlig amplitud $x(t), x[n] \in \mathbb{R}$

Diskret amplitud $x(t), x[n]$ kvantiserad

Digital signal betecknar vanligen en signal som är diskret både i tid och amplitud.

1.1.2 Jämn/Udda signal

Jämn signal $\forall t, x(t) = x(-t)$ kallas vanligtvis $x_e(t)$

Udda signal $\forall t, x(t) = -x(-t)$ kallas vanligtvis $x_o(t)$

Sats 1. En godtycklig signal $x(t)$ kan alltid delas upp i en jämn signal $x_e(t)$ och en udda signal $x_o(t)$. Den jämna delen $x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$ och den udda delen $x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$

Bevis. $x_e(-t) = \frac{1}{2}(x(-t) + x(t)) = x_e(t)$ och $x_o(-t) = \frac{1}{2}(x(-t) - x(t)) = -\frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) = -x_o(t)$. Summan $x_e(t) + x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t) + x(t) - x(-t)) = x(t)$. $\square$

1.1.3 Periodisk signal

Periodisk signal $\forall t, x(t) = x(t + T)$ där T är en konstant period för signalen.

Exempelvis sinusformad signal, fyrkantsvåg, triangelvåg o.s.v.

Periodisk diskret signal $\forall n, x[n] = x[n + N]$ där $N \in \mathbb{Z}^+$ och konstant.

1.1.4 Deterministisk (Känd, förutsägbar)/Slumpmässig (Stokastisk) signal

En signal kallas slumpmässig om den inte kan förutsägas helt.

Definition 1 (Energisignal)**.** Låt den totala energin vara $E = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$ alt. $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$. Om $0 < E < \infty$ är x en energisignal.

Definition 2 (Effektsignal)**.** Låt medeleffekten $P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$ alt. $P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-\infty}^{N} |x[n]|^2$. Om $0 < P < \infty$ är x en effektsignal.

Notera att för en energisignal gäller $P \to 0$ eftersom $E < \infty$ och på samma sätt gäller att för en effektsignal går $E \to \infty$.

1.2 Signalmanipulering

1.2.1 Amplitudskalning

$y[n] = ax[n] + b$ där vi exempelvis kan kalla a för förstärkning och b inom elektronik för DC-skift. a, b är konstanter. På samma sätt för kontinuerliga signaler $y(t) = ax(t) + b$.

1.2.2 Ändra tidsskala

$y(t) = x(at), a \in \mathbb{R}$ och $y[n] = x[kn], k \in \mathbb{Z}$

1.2.3 Spegling

$\forall t, y(t) = x(-t)$ och $\forall n, y[n] = x[-n]$

1.2.4 (Tids)skift

$y(t) = x(t - t_0)$ och $y[n] = x[n - n_0]$

1.2.5 Samtida operationer

Låt $x(t)$ vara en signal.

Ändra tidsskala så att $t \to at \implies x(at)$ sen en tidsskift $t \to t - t_0' \implies x(a(t - t_0')) = x(at - at_0')$. Nu ändrar vi först tidsskift $t \to t - t_0 \implies x(t - t_0)$ och sen tidsskalan $t \to at \implies x(at - t_0)$. Notera att det är blir olika beroende på i vilken ordning det tas i. För att det ska vara lika måste $at_0' = t_0$.

1.3 Signalmodeller

1.3.1 Komplex exponential (kontinuerlig)

$x(t) = Ce^{at}$ där $C, a, x \in \mathbb{C}$. Komplexa tal förekommer oftast inte i fysikaliska system men är mycket användbara som matematiska modeller. Den fysikaliska signalen kan fås ur $\text{Re}\{x(t)\}$ eller $\text{Im}\{x(t)\}$. Jämför $j\omega$-metoden (phasors) för beräkning av stationära växelströmskretsar.

1.4 Lite repetition av komplexa tal

$\cos(\theta) = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2}$ och $\sin(\theta) = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$.

Tidsvariation $\theta = \omega t$

1.5 Några olika fall

1.5.1 Fall 1

Anta $C, a \in realn$. Då är $x(t) = Ce^{at}$. För $a < 0$ och $C > 0$ beskriver x ett exponentiellt avtagande förlopp. För $a > 0$ beskriver x ett exponentiellt stigande förlopp. Om $a = 0$ är $x(t) = C$.

1.5.2 Fall 2

$a, C \in \mathbb{C}$ och $\text{Re}\{a\} = 0$. Låt $a = j\omega_0$ och $C = Ae^{j\Phi} (= A\angle\Phi)$. $x(t) = Ae^{j\Phi}e^{j\omega_0 t} = Ae^{j(\omega_0 t + \Phi)} = A\cos(\omega_0 t + \Phi) + jA\sin(\omega_0 t + \Phi)$. $\text{Re}\{x(t)\}$ är sinusformad med amplitud A och fasförskjutning Φ. Det är en odämpad sinusformad signal.

1.5.3 Fall 3

$C, a \in \mathbb{C}$. Låt $C = Ae^{j\Phi}$ och $a = \sigma_0 + j\omega$. Då är $x(t) = Ae^{j\Phi}e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}e^{j(\omega_0 t + \Phi)} = Ae^{\sigma_0 t}\cos(\omega_0 t + \Phi) + jAe^{\sigma_0 t}\sin(\omega_0 t + \Phi)$. Om $\sigma_0 < 0$ blir signalen en dämpad sinusformad signal. Om $\sigma_0 > 0$ blir signalen en anti-dämpad sinusformad signal. Om $\sigma_0 = 0$ är det bara fall 2 igen.

1.6 Diskret exponential

Låt $x[n] = Ca^n$. Allmänt är $C, a, x \in \mathbb{C}$ och $n \in \mathbb{Z}$.

1.6.1 Fall 1

$C, a \in \mathbb{R}$. Då gäller $x[n] = Ca^n$. För olika intervall ser graferna ut precis som man kan tänka sig. $a < 0$ gör att tecknet på $x[n]$ växlar och är negativt för udda n.

1.6.2 Fall 2

$C, a \in \mathbb{C}$ men $|a| = 1$. Låt $a = e^{j\Omega_0}$ och $C = Ae^{j\Phi}$. Då är $Ae^{j\Phi}e^{j\Omega_0 n} = Ae^{j(\Omega_0 n+\Phi)} = A\cos(\Omega_0 n + \Phi) + jA\sin(\Omega_0 n + \Phi)$. $x[n]$ är då en diskret odämpad sinusformad signal.

1.6.3 Fall 3

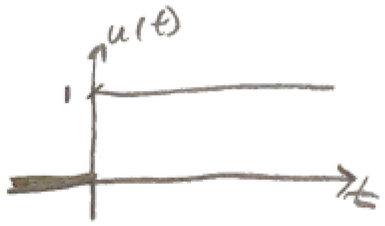
$C, a \in \mathbb{C}$. Låt $C = Ae^{j\Phi}$ och $a = e^{\Sigma_0}e^{j\Omega_0} = e^{\Sigma_0 + j\Omega_0}$. Då är $x[n] = Ae^{j\Phi}e^{(\Sigma_0+j\Omega_0)n} = Ae^{\Sigma_0 n}e^{j(\Sigma_0 n+\Phi)}$. Σ_0 bestämmer om signalen blir dämpad eller anti-dämpad.

2 Föreläsning 19-09-05

2.1 Fler signaler

2.1.1 Enhetssteg (kontinuerligt)

Betecknas $u(t) = 1$ om $t \geq 0, 0$ annars.



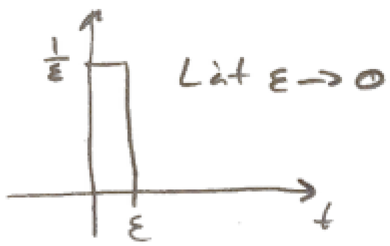
Den används oftast ihop med en generell signal $x(t) \cdot u(t)$ så att den får signalvärden 0 när $t < 0$.

2.1.2 Enhetsimpuls

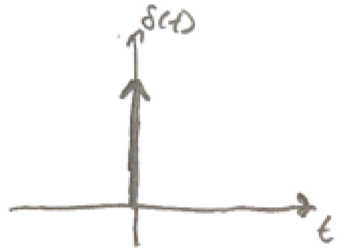
Tekniskt sett inte en "vanlig" funktion, det är snarare en distribution eftersom den inte har väldefinierade amplitudvärden för alla invärden.

Definition 3. $\delta(t) = 0$ för $t \neq 0$ men $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$

Möjlig grafisk beskrivning:



Det är en ”oändligt kort” signal med en ”oändligt hög” amplitud. Amplituden vid $t = 0$ är inte begränsad. Vår grafiska notation är följande:



Enhetsimpulsen definieras utifrån sina egenskaper.

Låt $f(t)$ vara en godtycklig funktion (signal) som är kontinuerlig vid $t = t_0$. Då är $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$. Vidare gäller

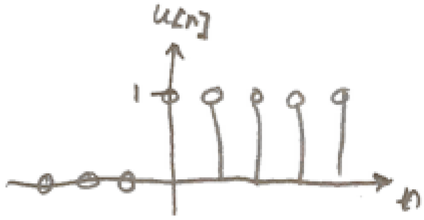
$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t \\ =&\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t \\ =&f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t \\ =&f(t_0).\end{aligned}$$

2.1.3 Samband mellan enhetssteg och enhetsimpuls

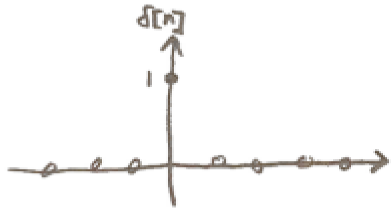
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau \text{ och } \delta(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}.$$

2.1.4 Diskreta varianter

Motsvarande gäller för diskreta varianter av enhetssteg och enhetsimpuls.



Definition 4. Den diskreta enhetsimpulsen $\delta[n] = 1$ om $n = 0, 0$ annars.



2.1.5 Samband mellan diskreta varianter

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \text{ och } u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

2.2 System

En process där det finns en relation mellan orsak (insignal) och verkan (utsignal). Kan symboliseras som ett vanligt blockschema med en låda och pilar. En matematisk ekvation kan användas för att beskriva systemet, ex. elektriska kretsar och mekaniska system. Oftast differentialekvationer.

2.3 Systemegenskaper

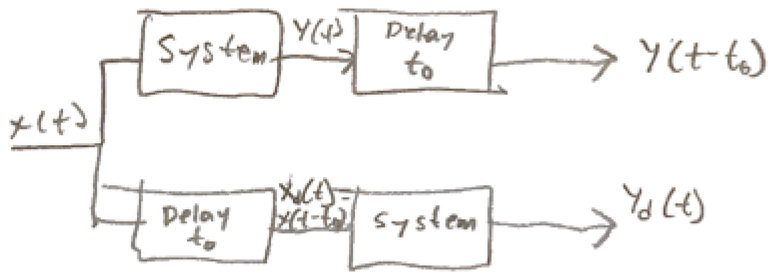
2.3.1 Tidsinvarians

För ett tidsinvariant system gäller

$$\begin{aligned} \text{Insignal} &\Longrightarrow \text{Utsignal} \\ x(t) &\Longrightarrow y(t) \\ x(t-t_0) &\Longrightarrow y(t-t_0) \end{aligned}$$

"Nu är det så att jag använder språket svenska."

– Ants Silberberg



Ett system är då tidsinvariant om $y(t - t_0) = y_d(t)$ och samma gäller för ett diskret system.

2.3.2 Linearitet

För ett linjärt system gäller

$$\begin{aligned}
\text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\
x(t) &\implies y(t) \\
a \cdot x(t) &\implies a \cdot y(t), a \text{ konstant (Systemet homogent)} \\
x_1(t) &\implies y_1(t) \\
x_2(t) &\implies y_2(t) \\
x_1(t) + x_2(t) &\implies y_1(t) + y_2(t), \text{ (Systemet additivt)} \\
a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \dots &\implies a_1y_1(t) + a_2y_2(t) + \dots \text{ (Kallas superposition)}
\end{aligned}$$

Om ett system är homogent och additivt är det linjärt.

2.3.3 Stabilitet

Ett system är stabilt om en begränsad insignal ger en begränsad utsignal. På engelska BIBO (Bounded input bounded output).

$\forall t |x(t)| < M_x < \infty \implies |y(t)| < M_y < \infty$

2.3.4 Kausalitet

Ett system är kausalt om utsignalen $y(t)$ endast beror på samtida och/eller tidigare värden på insignalen $x(t)$. Alla fysikaliska system är kausala om t är tid.

2.3.5 Minne/Dynamiskt system

Ett system har minne om dess utsignal vid tidpunkten $t_0, y(t_0)$, beror på fler insignaler än bara $x(t_0)$.

Exempel 1 (Spänning över en kondensator)**.** Insignalen är strömmen genom kondensatorn $i(t)$ och utsignalen är spänningen $v(t)$. Då är $v(t) = \frac{1}{(}C) \int\limits_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau + v(0)$. $v(t)$ beror på tidigare värden, alltså är systemet dynamiskt/har minne.

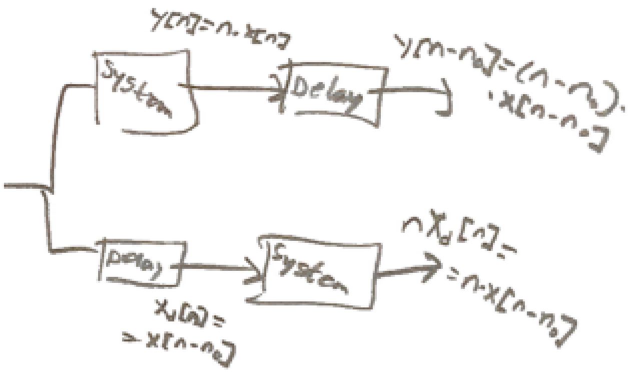
2.3.6 Minneslöshet/Statiskt system

Exempel 2 (Spänning över en resistans)**.** In- och utsignaler som förra exemplet, då är $v(t) = R \cdot i(t)$. Eftersom det bara beror på $i(t)$ och inga andra i är systemet minneslöst/statiskt.

Alla dessa egenskaper gäller även för diskreta system.
Exempel 3 (Diskret exempel)**.**

$$y[n] = n \cdot x[n]$$

Vi ser om det är tidsinvariant.



Inte tidsinvariant eftersom $y_d[n] \neq y[n - n_0]$.

Kollar om det är linjärt:

$$\begin{aligned} \text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\ x_1[n] &\implies y_1[n] = n \cdot x_1[n] \\ x_2[n] &\implies y_2[n] = n \cdot x_2[n] \\ x_3[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n] &\implies y_3[n] = n \cdot x_3[n] = n(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) = a_1nx_1[n] + a_2nx_2[n] = a_1y_1[n] + a \end{aligned}$$

Alltså är det linjärt.

Det är inte stabilt eftersom $y[n] = n \cdot x[n]$ inte är begränsat ty n inte är begränsat.
Det är dock kausalt, vilket inses lätt.

3 Föreläsning 19-09-06

3.1 LTI-system

Ett vanligt sätt att karakterisera ett system är att ange dess utsignal för en given och känd insignal. För insignalen $x(t) = \delta(t)$ blir utsignalen $y(t) = h(t)$. Det kallas för systemets *impulssvar*. Motsvarande samband gäller för ett diskret system. Andra vanliga insignaler för att beskriva system är

$$\begin{aligned} \text{In} &\implies \text{ut} \\ \text{Enhetssteg} &\implies \text{Stegsvar} \\ \text{Sinusformad signal med } \omega = \omega_0 &\implies \text{Frekvenssvar} \end{aligned}$$

3.2 Samband mellan insignal, utsignal och LTI-system (i tidsdomänen)

3.2.1 Diskret fall

Anta att vi känner impulssvaret $h[n]$ till ett diskret LTI-system.

Låt $x[n]$ vara en godtycklig diskret signal.

Bilda $x[n]\cdot\delta[n] = x[0]\dot{\delta}[n]$ och därefter bilda $x[n]\cdot\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$. Tydligen kan vi teckna $x[n]$ som en summa av viktade och skiftade enhetsimpulser. Alltså är $x[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$.

För ett LTI-system gäller

$$\begin{aligned} \text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\ \delta[n] &\implies h[n] \\ \delta[n-k] &\implies h[n-k] \\ x[k]\cdot\delta[n-k] &\implies x[k]h[n-k] \\ x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k] &\implies y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k] \end{aligned}$$

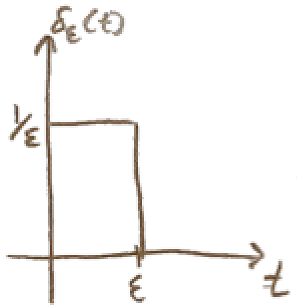
$y[n]$ ovan kallas för Faltningssumman. Förenklat skrivs $y[n] = x[n] * h[n]$. Med en variabelsubstitution kan man visa att $x[n]*h[n] = h[n]*x[n] \implies \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\cdot x[n-k]$.

3.2.2 Kontinuerligt fall

Anta att vi känner impulssvaret $h(n)$ till ett kontinuerligt LTI-system. Låt också $x(t)$ vara en godtycklig (in)signal och låt $\hat{x}(t)$ vara en approximation av $x(t)$ där

$\hat{x}(t)$ är summan av pulserna $x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ o.s.v.

Vi definierar en enhetspuls som $\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}$ när $0 \leq t < \epsilon$ och 0 annars.



Våra pulser kan vi nu teckna som $\ldots, x_{-1} = \delta_\epsilon(t+\epsilon)x(-\epsilon)\epsilon, x_0 = \delta_\epsilon(t)x(0)\epsilon, x_1 = \delta_\epsilon(t-\epsilon)x(\epsilon)\epsilon, \ldots$ och $\hat{x}(t) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon$. Låt $h_\epsilon(t)$ vara systemets utsignal för insignalen $\delta_\epsilon(t)$ (pulssvar). För ett LTI-system gäller då

$$\begin{aligned}
\text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\
\delta_\epsilon(t) &\implies h_\epsilon(t) \\
\delta_\epsilon(t-k\epsilon) &\implies h_\epsilon(t-k\epsilon) \\
\delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon &\implies h_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon = \hat{x}(t) &\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon = \hat{y}(t)
\end{aligned}$$

Låt $\epsilon \to 0$, då gäller

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon(t) &\to \delta(t) \\
h_\epsilon(t) &\to h(t) \\
k\epsilon &\to \tau \text{ (En kontinuerlig variabel)}\epsilon && \to \mathrm{d}\tau \\
\sum &\to \int \\
\hat{x}(t) &\to x(t) \\
\hat{y}(t) &\to y(t)
\end{aligned}$$

Vi får då

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

vilket kallas faltningsintegralen. Förenklat skrivsätt är $y(t) = h(t) * x(t)$. Genom en variabelsubstitution kan man visa $h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$, alltså att $\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau$

"Det är backe upp här och backe ner där."

– Ants Silberberg

3.3 Systemegenskaper kopplade till impulssvar

3.3.1 Kausalt LTI-system

Diskret: $h[k] = 0$ för $k < 0$ och därmed $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$. Motsvarande gäller för kontinuerliga system: $y(n) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

3.3.2 Stabilt LTI-system

Diskret: Anta $\forall n : |x[n]| \leq M_x < \infty$ d.v.s. att insignalen är begränsad. Utifrån det kan vi resonera att $|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right|$ och eftersom $|a+b| \leq |a| + |b|$ gäller $|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]|$ och än en gång, eftersom $|ab| = |a| \cdot |b|$ får vi $|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$ men eftersom $|x[k]| \leq M_x$ vet vi att $|y[n]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$. Med kravet på stabila system att $\forall n : |y[n]| < \infty$ följer villkoret $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$. Det kallar man att impulssvaret är absolutsummerbart. Samma gäller för kontinuerliga system, då får man villkoret $\int_{\infty}^{\infty} |h(\tau)|\mathrm{d}\tau < \infty$ och det kallas för att impulssvaret är absolutintegrerbart.

4 Föreläsning 19-09-10

4.1 Diff. ekvationer

Vi kommer att titta på (LTIC-)system som beskrivs med $Q(D)y = P(D)x$ eller $Q[E]y = P[E]x$ i det diskreta fallet där $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ och $Ef[k] = f[k+1]$. Systemen är kausala, d.v.s. alltid $= 0$ för $t < 0$ eller $k < 0$. Alltså har vi ett begynnelsetillstånd. Den allmänna lösningen är $y = y_0 + y_i$ där y_0 är zerostate och y_i är zeroinput. Vanligtvis är $y_0 = h * x$, d.v.s. någon slags faltning.

Notation: $Q(D) = D^m + a_{m-1}D^{m-1} + \cdots + a_1 D + a_0$ där $m = ord(Q)$

4.1.1 Kontinuerliga fallet

$Q(D)y = P(d)x$ och $y^{(k)}(0)$ är givna för $k = 0, \ldots, \mathrm{ord}(Q) - 1$.

Först löser vi $Q(D)y_0 = P(D)f$ för $y^{(k)}(0) = 0$. Sedan löser vi $Q(D)y_i = 0$ givet $y_i^{(k)}(0) = y^{(k)}(0)$. Detta är partikulär- och homogenlösningar i ”vanliga” termer. $y_0 = h * x$ där h är impulssvaret.

Exempel 4. Anta $y' + ay = x$, $y(0) = b$, $Q(D) = D + a$ och $P(D) = 1$.

Eftersom systemet är tidsinvariant är a en konstant. Först löser vi $y_0' + ay_0 = x$ givet $y_0(0) = 0$. Sedan komemr vi att lösa $y_i' + ay_i = 0$ givet $y_i(0) = b$. Vi använder integrerande faktor, d.v.s. $(e^g y)' = (y' + g'y)e^g$ men eftersom vi vet$a$ har vi $g' = a \implies g = at$. Alltså är $e^{at}(y_0' + ay_0) = (e^{at}y_0)'$ och därmed

$$(e^{at}y_0)' = xe^{at} \implies e^{at}y_0(t) = e^{a0}y_0(0) + \int_0^t x(s)e^{as}\mathrm{d}s = \int_0^t x(s)e^{as}\mathrm{d}s \implies$$

$$y_0(t) = \int_0^t x(s)e^{a(s-t)}\mathrm{d}s = \int_0^t x(s)e^{-a(t-s)}\mathrm{d}s = x * h_{-a}(t) \text{ där } h_{-a}(t) = e^{at}u(t).$$

Alltså $y_0 = x * h_{-a}(t)$. Nu kollar vi om y_0 är en lösning vårt inledande problem. Först kollar vi om $y_0(0) = 0$ och det är fine eftersom det då blir en integral från 0 till 0, vilket är 0. Nu kollar vi om $y_0' + ay_0 = x$. $y_0' = x(t)e^{-a(t-t)} - a\int_0^t x(s)e^{-a(t-s)}\mathrm{d}s = x(t) - ay_0(t)$

Nu löser vi för y_i. $y_i' + ay_i = 0 \iff (e^{at}y_i) = 0 \iff e^{at}y_i(t) = y_i(0) = b \iff y_i(t) = be^{-at}$.

Alltså är $y(t) = be^{-at} + x * h_{-a}(t)$

"Det verkar trivialt att $t - t = 0$ *men det är det som räddar oss."*

– Mattesnubben

4.1.2 Stabilitet i kausala fall

Om $\int_0^\infty |h(t)|\mathrm{d}t < \infty$. $h(t) = h_{-a}(t) = e^{-at}u(t)$. $\int_0^\infty |h(t)|\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\{a\}t}$ vilket är ändligt om $\operatorname{Re}\{a\} > 0$ och oändligt annars.

Exempel 5. Lös $y'' + a_1y' + a_0y = x$ där $y(0)$ och $y'(0)$ givna. Vi vet att $P(D) = 1$ och $Q(D) = D^2 + a_1D + a_0$.

Vi börjar med att lösa ekvationen $Q(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Lösningarna till $Q(\lambda) = 0$ är $\lambda_\pm = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \implies Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-)$.

Några exempel, om $a_1 = 0$ får vi $\lambda_\pm = \pm\sqrt{-a_0} \implies \lambda^2 + a_0 = (\lambda - \sqrt{-a_0})(\lambda + \sqrt{-a_0})$, om $a_0 = 0$ får vi $\lambda_\pm = 0$ eller $-a_1 \implies \lambda(\lambda 2 + a_1)$.

Vi börjar med att lösa zeroinput-lösningen. Observera att $D^n(e^{\lambda t}) = \lambda^n e^{\lambda t} \implies Q(D)e^{\lambda t} = Q(\lambda)e^{\lambda t} \implies Q(D)(\mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 e^{\lambda_- t}) = 0$. Om $\lambda_+ \neq \lambda_-$ hittar vi y_i genom ansatsen $y_i(t) = \mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 e^{\lambda_- t}$ så att $y_i(0) = \mu_1 + \mu_2$ och $y_i'(0) = \mu_1\lambda_+ + \mu_2\lambda_-$.

Observera nu också att $Q(D)(te^{\lambda t}) = Q'(\lambda)e^{\lambda t} + Q(\lambda)te^{\lambda t}$. Om $\lambda_+ = \lambda_-$, d.v.s. att $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)^2$ gäller $Q(D)(\mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 te^{\lambda_+ t}) = 0$. Ansätt $y_i(t) = \mu_1 e^{\lambda_+ t} +$

$\mu_2 te^{\lambda_- t}$ och finn μ_1 och μ_2 från $y_i(0) = \mu_1$ och $y_i'(0) = \lambda_+\mu_+ + \mu_2$.

Nu löser vi zerostate: $Q(D) = (D - \lambda_+)(D - \lambda_-)$. Notera att $D^n(h * f) = (D^n h) * f$, vilket går att bevisa relativt lätt. Eftersom faltning är kommutativt kan vi även derivera f.

$Q(D)(h * f) = (Q(D)h) * f$. Ansätt $h = h_{\lambda_+} * h_{\lambda_-}$.

Ansätt också $y_0 = h * f$, då är $(D - \lambda_-)y_0 = h_{\lambda_+} * f$ och $h_{\lambda_+} * f(0) = 0$.

Jag orkade inte anteckna här, massa steg typ. Det blir enklare med Laplace.

"Vad kom μ ifrån?"
"Från ovan!"

– Person som frågade och mattesnubben

"Om vi nu delar den här skiten."

– Mattesnubben

4.2 Diskreta fallet

I det diskreta fallet har vi ekvationen $Q(E)y = P(E)x$ där $E(f[k]) = f[k + 1]$ och har $y[-k]$ givna för $k = 0, \ldots, ord(Q) - 1$. Funkar annars på samma sätt förutom att D ersätts med E och $y(0)$ med $y[-k]$.

I kontinuerliga fall har vi $D(e^\lambda t) = \lambda e^{\lambda t}$ som genom $e_a[k] = a^k$ motsvaras av $E(e_a[k]) = e_a[k + 1] = a^{k+1} = a \cdot a^k = ae_a$.
Exempel 6. Vi löser $y[k + 1] + ay[k] = x[k]$ där $y[0]$ är given.

Vi har $Q(E) = E + a$. Vi börjar med att lösa y_i, d.v.s. $Q(E)y_i = 0$ och $y_i[0] = y[0]$. Ansätt $y_i = ce_{-a}$ så att $(E+a)e_{-a} = 0$. Då har vi $y_i[0] = ce_{-a}[0] = c = y[0]$ och därmed $y_i[k] = y_i[0]a^k$.

Nu löser vi för y_0, då börjar vi med att ansätta $h[k] = h_{-a}[k] = e_a[k]u[k]$ och $y_0 = h * x$.

$E(h * x[m]) = \displaystyle\sum_{l=1}^{m+1} h[l]x[m + 1 - l] = \sum_{l=1}^{m} h[l + 1]x[m - l] + h[1]x[m]$ eftersom $h * x = \text{ (om båda är kausala) } = \displaystyle\sum_{l=0}^{m} h[l]x[m - l] = \sum_{l=1}^{m} h[l]x[m - l]$. Allt som allt gäller $E(h * x) = ah * x + ax$. Alltså $y_0 = \frac{1}{a} h * x$ vilket löser det ville innan.

"Det kommer bara bli blodsspillan om vi har k där"

– Mattesnubben

"Vad gör vi nu, vad gör vi här, vem är jag?"

– Mattesnubben

"Nu börjar det lukta fågel"

– Mattesnubben

"När jag var i Tyskland var jag tvungen att dra bajsskämt för att det skulle gå, men här verkar det funka ändå."

– Mattesnubben

"Fourier-serier är något extremt vackert, tårar kommer att fällas."

– Mattesnubben

5 Föreläsning 19-09-12

5.1 Approximation av signaler

Låt f vara en signal och x vara en modellsignal som vi förstår. Vi vill modellera f m.h.a. x, så ungefär $f \approx cx \implies$ Ett fel $e = f - cx$.

Kom ihåg linalgens "inre produktrum":

V är ett vektorrum över $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, en inre/skalär produkt på V. Den uppfyller $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\langle x, x\rangle \geq 0 (= 0 \iff x = 0)$ och $\langle x, \lambda y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle \lambda + \langle x, y_2\rangle$.

f_1, f_2 är signaler, då är här $\langle f_1, f_2\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1\bar{(}t) f_2(t) \mathrm{d}t$.

I det periodiska fallet är $\langle f_1, f_2\rangle = \int\limits_{0}^{T} f_1\bar{(}t) f_2(t) \mathrm{d}t$.

Mellan två signaler f_1, f_2 har vi en vinkel θ som definieras genom $\cos(\theta) = \dfrac{\langle f_1, f_2\rangle}{|f_1| \cdot |f_2|}$ där $|f| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

Felet e är litet om $|e|$ är litet. När är då $|e|$ som minst? D.v.s. vad är min $|f - cx|$ över $\mathbb{C}$? Går att härleda att det uppnås för $c = \dfrac{\langle x, f\rangle}{|x|^2}$. Det betyder att $f \approx \dfrac{\langle x, f\rangle}{|x|^2} x$.

"Jag växte också upp på Lindholmen."

– Mattesnubben

Om f är en signal definierad för $-\infty < t < \infty$ är dess energi $E_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = |f|^2$.

Om f_1, f_2 är signaler definierade för $-\infty < t < \infty$ är $\dfrac{\int\limits_{-\infty} \infty f_1(t) f_2(t) \mathrm{d}t}{\sqrt{E_{f_1} E_{f_2}}} = \dfrac{\langle f_1, f_2 \rangle}{|f_2||f_2|}$ korrelationen mellan signalerna. Den är 1 $\iff$ $f_1 = f_2$ och -1 $\iff$ $f_1 = -f_2$.

Anta att vi har flera modellsignaler $x_1, x_2, \ldots, x_N$ så att $f \approx c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_N x_N$. Vi vill då minimera $e = f - \sum\limits_{n=1}^{N} c_k e_k$. Det uppnås för $c_k = \dfrac{\langle x_n, f \rangle}{|x_n|^2}$ **OM** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ inte är korrelerade, d.v.s. de är ortogonala eller den inre/skalärprodukten är 0.

5.2 Fourierserier

Fourierserier appliceras på periodiska signaler. Låt f vara en signal med period T.

Vi tittar på följande modellsignaler: $\{1, \cos(\omega_0 t), \ldots, \cos(N\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \ldots, \sin(N\omega_0 t)\}$.

$\langle \cos(k\omega_0 t), \cos(l\omega_0 t) \rangle = \int\limits_0^T \cos(k\omega_0 t)\cos(l\omega_0 t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^T \dfrac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} \dfrac{e^{jl\omega_0 t} + e^{-jl\omega_0 t}}{2} \mathrm{d}t = \dfrac{1}{4} \int\limits_0^T e^{j(k+l)\omega_0 t} + e^{j(k-l)\omega_0 t} + e^{j(-k+l)\omega_0 t} + e^{-j(k+l)\omega_0 t} \mathrm{d}t = T$ om $k = l = 0$, $\dfrac{T}{2}$ om $k = l > 0$, 0 annars. På samma sätt är $\int\limits_0^T \cos(k\omega_0 t)\sin(l\omega_0 t)\mathrm{d}t = 0$ och $\int\limits_0^T \sin(k\omega_0 t)\sin(l\omega_0 t)\mathrm{d}t = \dfrac{T}{2}$ om $k = l$ och 0 annars.

Alltså är den bästa approximationen

$$f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$$

där $a_k = \dfrac{2}{T} \int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t = \dfrac{\langle \cos(k\omega_0 t), f \rangle}{|\cos(k\omega_0 t)|^2}$ och $b_k = \dfrac{2}{T} \int\limits_0^T f(t)\sin(k\omega_0 t)\mathrm{d}t =$

$\dfrac{\langle \sin(k\omega_0 t), f\rangle}{|\sin(k\omega_0 t)|^2}$.

Sats 2. Om f är T-periodisk och $\int\limits_0^T |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ existerar a_k och b_k.

Sats 3. Om f dessutom är kontinuerlig på intervallet på $0 \leq t \leq T$ utom i ändligt många punkter och $f(t+) = \lim\limits_{h\to 0} f(t+h)$ och $f(t-) = \lim\limits_{h\to 0} f(t-h)$ existerar för alla t så är $\dfrac{f(t+)+f(t-)}{2} = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t)$.

"Det här är högst icke-trivialt."

– Mattesnubben

"Om man stoppar in något i datorn som inte konvergerar kommer det gå åt röven."

– Mattesnubben

Exempel 7.

Vi har ju $f = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t)$, för $k \geq 0$ har vi $a_k = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} \cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t = 1$ för $k = 0$, $\dfrac{2}{Tk\omega_0}[\sin(k\omega_0 t)]_0^{\frac{T}{2}} = 1$ för $k = 0, 0$ annars. och för $k > 0$ har vi $b_k = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin(k\omega_0 t)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} \sin(k\omega_0 t)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{Tk\omega_0}[-\cos(k\omega_0 t)]_0^{\frac{T}{2}} = \dfrac{1}{\pi k}(-\cos(k\pi)+1) = \dfrac{1}{\pi k}(-(-1)^k + 1) = 0$ för $k = 2m$ och $\dfrac{2}{\pi(2m+1)}$ annars.

$f = \frac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{\sin((2m+1)\omega_0 t)}{\pi(2m+1)}$

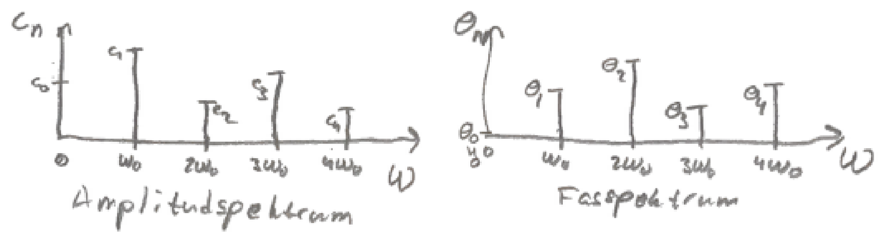
5.2.1 Kompakt form

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(k\omega_0 t + \theta_n)
\end{aligned}
$$

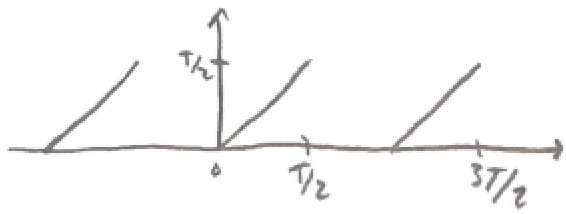
$c_n \cos(k\omega_0 t + \theta_n) = c_n \cos(\theta_n)\cos(k\omega_0 t) - c_n \sin(\theta_n)\sin(k\omega_0 t)$

$\tan(\theta_n) = \dfrac{-b_n}{a_n}$ och $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$

5.3 Frekvensspektrum



Används för att visualisera fourierserier.



Exempel 8.

$f = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t)$, och vi börjar med fallet där $k > 0$. Då är $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t$ och med partiell integrering får vi $a_n = \dfrac{2}{T}\left[t\dfrac{\sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} \dfrac{\sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\mathrm{d}t = 0 + \dfrac{2}{T\omega_0^2 k^2}\left[\cos(k\omega_0 t)\right]_0^{\frac{T}{2}} = 0$ när $k = 2m$, $\dfrac{-2}{\pi\omega_0(2m+1)^2}$ annars. Vi har också $a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} t\mathrm{d}t = \dfrac{T}{2}$.

Om man räknar på b_n blir det likt, men till slut får vi $f = \frac{T}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{-\cos((2m+1)\omega_0 t)}{\omega_0(2m+1)^2} + \frac{\sin((2m+1)\omega_0 t)}{2m+1}$ eller i kompakt form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos((2n+1)\omega_0 t + \theta_n)$ där $\theta_n = \arctan\left(\frac{-b_{2n+1}}{a_{2n+1}}\right) = \arctan(\omega_0(2n+1))$.

6 Föreläsning 19-09-17

6.1 Diskret Fouriertransform

Idén för att göra den diskret är sampling. Det innebär att man väljer en upplösning N så att man tar värdet på funktionen i punkterna $0, \epsilon, 2\epsilon, \ldots$ där $\epsilon = \frac{T}{N}$. Alltså approximerar vi f m.h.a. $f(\frac{kT}{N})$ där N går från 0 till $N-1$.

Ansats 1. $D[n] = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{kT}{N}}^{\frac{k+1}{T}N} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-i\omega_0 n \frac{kT}{N}} \mathrm{d}t = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$

$D_x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$

6.1.1 Syntes

$x[k] = \sum_{k=0}^{N-1} D_x[n] e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$

"Ni fnissar på tok för lite"

– Mattesnubben om den k:te punkten

"Jag har approximerat allt med en konstant, så det är ganska grovt."

– Mattesnubben

Anledning till att det här gäller är följande:

Steg 1 $1 - z^N = (1-z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1} - z - z^2 - \cdots - z^{N-1} - z^N$

Steg 2 $z_k = e^{\frac{2\pi i}{N}k}$ uppfyller $z_k^N = 1$

Steg 3 $1 + z_k + z_k^2 + \cdots\ z_k^{N-1}$ är antingen N när $k = 0$ och 0 annars.

$HL = \sum_{n=0} N - 1 D_x[n] z_k^n = \frac{1}{N} \sum_{n,l=0}^{N-1} x[l] z_{-l}^n z_k^n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[l] z_{k-l}^n \right) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x[k] =$ $x[k]$

6.2 Fouriertransformen

Här kollar vi på signaler $f(t), -\infty < t < \infty$.

För $T >> t$ kan vi skriva $f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) e^{-i\frac{2\pi k}{T}u} \mathrm{d}u \right) e^{i\frac{2\pi k}{T}t}$

$\omega = \dfrac{2\pi k}{T}$

Definition 5 (Fouriertransformen)**.** $F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{j\omega u} \mathrm{d}u$

Sats 4 (Rekonstruktion av signal från Fourierserie)**.** $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} F(i\omega) e^{ij\omega t}$

Låt $y = h * x$ vara ett LTI-system. Då är $H(i\omega)$ överföringsfunktionen och om vi tar $x(t) = e^{i\omega t}$ så är $y(t) = h*x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{i\omega(t-a)} \mathrm{d}u = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-i\omega u} \mathrm{d}u =$ $e^{i\omega t} H(i\omega)$.

När man tar $h * \cos(\omega t + \theta) = |H(i\omega)| \cos(\omega t + \theta + \angle H(i\omega))$

"Keepin' it real"

– Mattesnubben om cosinus-funktioner

Exempel 9. Låt $f_1(t) = e^{-at} u(t)$ där $a > 0$. Räkna ut $F_1(i\omega)$.

$F_1(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega}.$

Exempel 10. Låt $f_2(t) = e^{-a|t|}$. Räkna ut F_2.

Notera att $f_2 = f_1(t) + f_1(-t)$ där f_1 kommer från förra exemplet.

Låt $f_{op}(t) = f(-t)$. $F_{op}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = (u = -t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(-\omega u)} =$ $F(-i\omega)$. Alltså är $F_2(i\omega) = F_1(i\omega) + F_1(i\omega) = \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Sats 5 (Linearitet av Fouriertransformer)**.** Fouriertransformen är linjär, d.v.s. om $f = f_1 + \lambda \cdot f_2$ är $F = F_1 + \lambda \cdot F_2$.

Bevis. Visas lätt från definitionen av Fouriertransformen och faktumet att integrering är linjärt. $\square$

6.3 $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)x(t)\mathrm{d}t = x(a)$$

Fouriertransformen av $\delta(t-a)$ är då $F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = e^{-i\omega a}$.

6.4 Transformpar

Ett transformpar är paret $(f(t), F(i\omega))$, d.v.s. $f(t)$ svarar mot $F(i\omega)$. Exempelvis svarar $e^{-at}u(t)$ mot $\frac{1}{a+i\omega}$.

Exempel 11. Låt $f(t) = \dfrac{2a}{a^2+t^2}$. $F(t)$ är då

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+t^2}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+t^2}e^{j(-\omega)t}\mathrm{d}t \\
&= \text{ (via syntesformeln)} \\
&= 2\pi e^{-a|-\omega|} \\
&= 2\pi e^{-a|\omega|}.
\end{aligned}$$

"Lägg inte in någon magi i detta, bara lite fantasi."

– Mattesnubben

Påstående 1. $(f(t), F(i\omega))$ är ett transformpar $\iff$ $(F(-it), 2\pi f(\omega))$ är ett transformpar.

Exempel 12. $(\delta(t-a), e^{-i\omega a})$ är ett transformpar.

Alltså är $(e^{ita}, 2\pi \cdot \delta(\omega - a))$ ett transformpar.

En ren frekvens a ger en Fouriertransform som är $\delta(t-a)$.

Följande gäller:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{i\omega(u-t)}\mathrm{d}u\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)2\pi\delta(t-u)\mathrm{d}u \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

6.5 Periodisk återblick

Låt x vara en T-periodisk signal. Då vet vi att vi kan skriva $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_0 kt}$.

Lineariteten av Fouriertransformen ger då $X(i\omega) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k\delta(\omega - k\omega_0)$.

6.6 Faltning

Låt x_1, x_2 vara signaler. Då är $x_1 * x_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(t-u)\mathrm{d}u$.

Påstående 2. $x_1 * x_2$ är ett transformpar med X_1X_2.
Exempel 13. Låt $x_1 = \delta(t-b), x_2 = \delta(t-a)$.

Då är $x_1 * x_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(u-b)\delta(t-u-a)\mathrm{d}u = \delta(t-b-a)$.

Fouriertransformen av $x_1 * x_2 = e^{-i(a+b)t} = e^{-iat}e^{ibt} = X_1(i\omega)X_2(i\omega)$.

Bevis.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x_1 * x_2 e^{-i\omega t}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(t-u)e^{-i\omega t}\mathrm{d}u\mathrm{d}t \\
&= \text{(Variabelbyte där } v = t-u) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(v)e^{-i\omega(v+u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)e^{-i\omega u}x_2(v)e^{-i\omega v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)e^{-i\omega u}\mathrm{d}u \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2(v)e^{-i\omega v}\mathrm{d}v \\
&= X_1(i\omega)\cdot X_2(i\omega)
\end{aligned}
$$

□

Påstående 3. $x_1(t)x_2(t)$ är ett transformpar med $2\pi X_1 * X_2(-i\omega)$.

$x(t)\delta(t-a) = x(a)\delta(t-a)$ ger att $H(i\omega)X(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(i\omega_0 k)\delta(\omega - k\omega_0)$.

7 Föreläsning 19-09-18

7.1 Egenskaper hos Fouriertransformen

"Det är naturligtvis lite mer delikat än så."

– Pokèmon #109

Om $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ är alltid $F(i\omega)$ kontinuerlig och $\lim_{|\omega|\to\infty} F(i\omega) = 0$.

Exempel 14. Om $f = \delta$ saknar $\int |f|\mathrm{d}t$ mening. Trots det är $F(i\omega) = 1$ kontinuerlig, men $\lim_{|\omega|\to\infty} = 1 \neq 0$.

Exempel 15. $f(t) = e^{-|a|t}$ bildar transformpar med $F(i\omega) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$.

$f(t) = e^{-at}u(t)$ bildar transformpar med $F(i\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$.

7.2 Räkneregler för Fouriertransformen

Sats 6 (Linearitet av Fouriertransformen)**.** Om $Af_1(t) + Bf_2(t)$ är dess Fouriertransform $AF_1(i\omega) + BF_2(i\omega)$.

Sats 7 (Tidsskalning Fouriertransform)**.** Om $f(at)$ när $a \neq 0$ är dess Fouriertransform $\frac{1}{|a|}F(\frac{i\omega}{a})$.

Bevis. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \{u = at \implies \mathrm{d}u = a\mathrm{d}t\} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u}\mathrm{d}u. \qquad \square$$

Sats 8 (Tidsskifte Fouriertransform)**.** Om $f(t+a)$ är dess Fouriertransform $e^{i\omega a}F(i\omega)$.

Bevis. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \{u = t+a\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\omega a}e^{-i\omega u}\mathrm{d}u = e^{i\omega a}F(i\omega).$$

$\square$

Exempel 16. Låt $f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, |t| \leq a \\ 0, \text{ annars} \end{cases}$.

Då är $F_1(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2a} = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{t=-a}^{a} = \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{2i}\frac{1}{\omega a} = \frac{\sin(\omega a)}{\omega a}$.

Låt x vara en signal. Då är $f_1 * x = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)x(t-s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x(t-s)\mathrm{d}s$ vilket är medelvärdet av $x(t)$ i punkten t när man går a steg till både höger och vänster. Inses rätt lätt om man ritar upp det.

$f_1 * x$ bildat transformpar med $\frac{\sin(\omega a)}{\omega a}X(i\omega)$.

Sats 9 (Derivata och Fouriertransform)**.** Om $f(t)$ är en signal bildar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$ ett transformpar med $i\omega F(i\omega)$.

Bevis. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t =$ (med partiell integration och antagandet att f går mot 0 i oändligheten) $= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t}\right)\mathrm{d}t = i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$ $\square$

Exempel 17. Tillbaka till förra exemplet, vad är f_1'?

Jo, f_1' kan definieras av att $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)x(t)\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)x'(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}(x(-a) - x(a)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a}(\delta(t+a) - \delta(t-a))x(t)\mathrm{d}t$. Alltså är $f_1' = \frac{1}{2a}(\delta(t+a) - \delta(t-a))$.

Om man tittar på grafen för f_1 kan man, om man tänker på vad derivatan måste vara i varje punkt, se att detta är rimligt.

Vi vill kolla att detta stämmer. $f_1' = \frac{1}{2a}(\delta(t+a) - \delta(t-a))$ bildar transformpar med $\frac{1}{2a}(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = i\omega\frac{1}{2ia\omega}(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = i\omega\frac{1}{a\omega}\sin(a\omega) = i\omega F_1(i\omega)$, vilket är rimligt med tanke på tidigare räkneregler.

Sats 10 (Fouriertransform för $t \cdot f(t)$)**.** Om vi har en signal $t \cdot f(t)$ bildar det ett transformpar med $i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(i\omega)$.

Bevis. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)te^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$ □

"Låt oss vara lite casual"

– Pokémon #109 om räkneregler

VARNING: I boken skrivs $F(\omega)$ för Fouriertransformen i kapitel < 6 men $F(i\omega)$ i kapitel ≥ 6.

Exempel 18. Låt $f_2(t) = e^{-at^2}, a > 0$. Vad är Fouriertransformen F_2?

Vi ska ta en systemapproach istället för att göra jobbiga integraler.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t) = -2te^{-at^2} = -2atf_2(t)$, d.v.s. $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2at)f_2(t) = 0 \iff (i\omega + 2ai\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega})F_2 = 0 \iff (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} + \frac{1}{2a}\omega)F_2 = 0 \iff F_2(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4a}} \implies C = F_2(\omega = 0) \cdot e^{\frac{0^2}{4a}} = F_2(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Alltså bildar e^{-at^2} transformpar med $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

Anmärkning 1. f_2 avtar superexponentiellt när $t \to \pm\infty$, d.v.s. f_2 inte en lösning till en stabil LTI.

"Den går snabbare än örnen mot noll."

– Pokèmon #109

Vad betyder egentligen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$?

Jo, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h * x) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} * x = h * \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ är också tidsinvariant, vilket betyder att det måste ges av någon faltning. Vad för h uppfyller att $h * x ? \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x$?

$x(t) = \int x(u)\delta(t-u)\mathrm{d}u = x * \delta(t) = \delta * x(t)$. Då är $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta * x) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta) * x$. δ definieras av att $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)\mathrm{d}t = x(0)$, alltså måste $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x'(t)\mathrm{d}t$ så att δ' definieras av $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)\mathrm{d}t = -x'(0)$. Då är $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \delta' * x$.

Sats 11 (Sambandet mellan $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ och δ')**.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \delta' * x$

Bevis. Se ovan. □

Exempel 19. Vad är Fouriertransformen av δ'?

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \{e^{-i\omega t} = x(t)\} = -x'(0) = -i\omega$$

Exempel 20. Skriv $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a^2)y = x$ som en LTI på formen $y = h * x$.

$(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a^2)y$ bildar transformpar med $(-(i\omega)^2 + a^2)Y = (\omega^2 + a^2)Y$.

$(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a^2)y = x \iff (\omega^2 + a^2)Y = X \iff Y = \frac{1}{\omega^2+a^2}X \iff y = h * x$ för ett h s.a. $H(i\omega) = \frac{1}{\omega^2+a^2}$.

e^{-at} har en Fouriertransform $\frac{2a}{a^2+\omega^2}$, då har $h(t) = \frac{1}{2a}e^{-at}$ överföringsfunktion $H(i\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$.

Då får vi från ursprungliga problemet $h * x(t) = y(t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t-u|}x(u)\mathrm{d}u$.

"En pil säger mer än två ord i det här fallet"

– Pokèmon #109

Sats 12. Låt f vara en signal. Då har $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$ Fouriertransform $\frac{F(i\omega)}{i\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$.

Bevis. Idén bakom beviset är att $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f * u$.

Eftersom $f * u$ bildar transformpar med FU vill vi visa att det är lika med $F(i\omega)\left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right)$. Vi vill alltså att $U(i\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$.

Eftersom $u' = \delta$ får vi att det bildar transformpar med $i\omega U(i\omega) = 1 \implies U(i\omega) = \frac{1}{i\omega}$.

Man får i någon mån halva bidraget från den konstanta funktionen 1, vilket är $2\pi\delta(\omega)$, alltså får vi en faktor $\pi\delta(\omega)$ i lösningen. □

Om $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$ måste $F(0) = 0$.

7.3 Plancherels sats

Sats 13. Låt $L^2(-\infty,\infty) = \{$ signaler f med ändlig energi $\}$ Kom ihåg att energin $E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$. Kom också ihåg $\langle f_1, f_2\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t)\mathrm{d}t$. Då är, för $f_1, f_2 \in L^2(-\infty,\infty)$, både F_1 och $F_2 \in L^2(-\infty,\infty)$. Vidare är $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t)\mathrm{d}t$.

8 Föreläsning 19-09-19

8.1 Fourierserier och -transformer

Påminnelse 1. Kom ihåg Eulers formel: $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Kom också ihåg den allmänna formeln: $x(t) = A\cos(\omega t + \theta) = \frac{A}{2}\left(e^{i(\omega t+\theta)} + e^{-i(\omega t+\theta)}\right) = \frac{A}{2}e^{i\theta}e^{i\omega t} + \frac{A}{2}e^{-i\theta}e^{-i\omega t}$. Om $\omega = k\omega_0$ kan vi skriva $x(t) = \frac{A}{2}e^{i\theta}e^{ik\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-i\theta}e^{-ik\omega_0 t}$ där vi ger namnen $c_k = \frac{A}{2}e^{i\theta}$ och $c_{-k} = \frac{A}{2}e^{-i\theta}$. Allmännt för en periodisk signal med flera sinsuformade signaler med $\omega = t\omega_0$ får vi $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\omega_0 t}$ vilket är Fourierserien på komplex form. c_k anger amplitud hos varje komplex exponential i formeln ovan.

c_k och $X(i\omega)$ ger information om en signals frekvensinnehåll. Signalens amplitud fördelad över de olika frekvenserna är $|c_k|$ eller $|X(i\omega)|$ i det periodiska och icke-periodiska fallet. Vi kan från detta skapa amplitudspektrum. Signalens fas fördelad över de olika frekvenserna är $\arg c_k$ och $\arg X(i\omega)$ för de två huvudfallen.

Från Parsevals formel fås för en periodisk signal (effektsignal) den totala medeleffekten $\overline{P} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 \mathrm{d}t = c_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k|^2$ vilket kan kallas effekttäthetsspektrat. Den kan delas upp efter frekvens om man vill. För en kontinuerlig signal (energisignal) definierar vi den totala energin $E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(i\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$. Det är ett energi(täthets)spektrum och kan delas upp per frekvens.

8.2 Systemanalys

$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$. Låt $x(t) = e^{i\omega t}$. Då är $y(t) = h(t)*x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\omega t}e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau = e^{i\omega t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau = e^{i\omega t}H(i\omega)$.

I vår Fourierserie ingår frekvenserna $k\omega_0, k \in \mathbb{Z}$.

$x_k(t) = e^{ik\omega_0 t} \to y_k(t) = e^{ik\omega_0 t}H(ik\omega_0)$

$x_{-k}(t) = e^{-ik\omega_0 t} \to y_{-k}(t) = e^{-ik\omega_0 t}H(-ik\omega_0)$

$x(t) = \frac{1}{2}(x_k(t)+x_{-k}(t)) = \cos(k\omega_0 t) \to y(t) = \frac{1}{2}y_k(t)+\frac{1}{2}y_{-k}(t)$. Låt $H(ik\omega_0) = H_k = |H_k|e^{i\theta_k} \in \mathbb{C}$. Då är $H(-ik\omega_0) = H_{-k} = |H_k|e^{-i\theta_k} \in \mathbb{C}$. Om man summerar (använder superposition) får man då $y(t) = \frac{1}{2}|H_k|\left(e^{ik\omega_0 t}e^{i\theta_k} + e^{-ik\omega_0 t}e^{i\theta_k}\right) = |H_k|\cos(k\omega_0 t + \theta_k)$ vilket är den ursprungliga signalen med en amplitudpåverkan och en faspåverkan.

$H_k = H(ik\omega_0)$ är systemets *frekvenssvar* ($H(i\omega)$). Den ändrar amplitud och fas på varje sinusformad med frekvensen ω.

9 Föreläsning 19-09-24

Missade en föreläsning :(

10 Föreläsning 19-09-25

"När ni lyssnar på Spotify är det ju inte ettor och nollor som strömmar in i örat på er."

– Antman

10.1 Rekonstruktion

Sats 14 (Samplingsteoremet)**.** Låt $x(t)$ ha Fouriertransformen $X(i\omega)$ och vara en bandbegränsad signal, d.v.s. $X(i\omega) = 0$ för något $|\omega| > \omega_M$.

Då, om samplingsfrekvensen $\omega_s > 2\omega_M$ kan $x(t)$ återskapas utifrån sina sampelvärden $x[n] = x(nT), n \in \mathbb{Z}$ där $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

Definition 6 (Nyquistfrekvens)**.** Halva samplingsfrekvensen $\frac{\omega_s}{2}$ kallas *Nyquistfrekvensen*. Den jämförs med ω_M.

Om $x(t)$ inte är bandbegränsad kan man använda ett *antivikningsfilter/anti aliasing filter*, d.v.s. ett kontinuerligt lågpassfilter. Det reducerar bandbredden hos en signal $x(t)$ och appliceras innan sampling. Tanken är att det ska ta bort frekvenser som är större än $\frac{\omega_s}{2}$ och därmed minska effekten av vikning/aliasing.

10.1.1 Ideal rekonstruktion

Handlar om att återskapa $x(t)$ utifrån sina sampelvärden $x[n] \coloneqq x(nT)$.

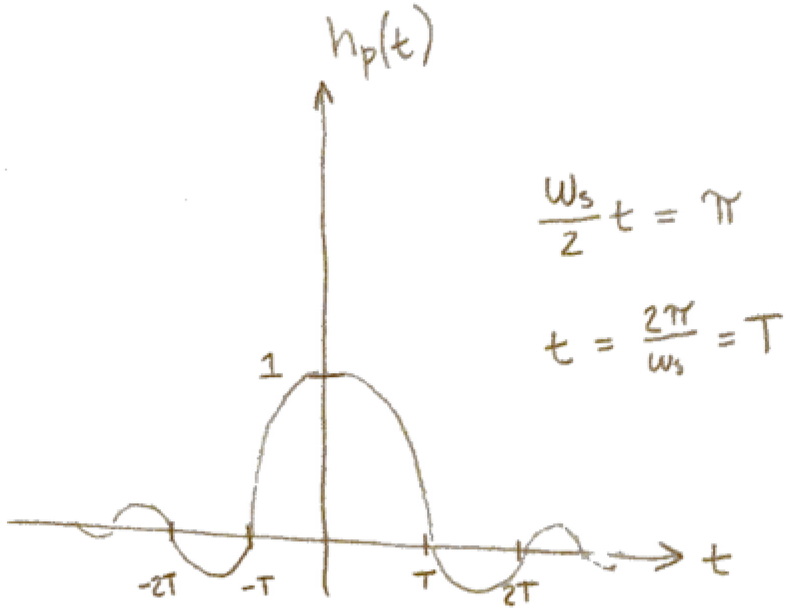
$x(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X(i\omega)$ och $x_p(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X_p(i\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(i(\omega - k\omega_s))$. Applicera ett idealt rekontruktionsfilter/-system

$$H_r(i\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Vi får då $Y(i\omega) = H_r(i\omega)X_p(i\omega)$ och i tidsdomänen $y(t) = h_r(t) * x_p(t) = h_r(t) * (\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t-nT)$. $y(t)$ är då en summa av viktade och skiftade impulssvar $h_r(t)$. Nu vill vi beräkna de impulssvaren.

$$\begin{aligned}
h_r(t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_r(i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_2}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{T}{2\pi}\left[\frac{e^{i\omega t}}{it}\right]_{-\frac{\omega_2}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \\
&= \frac{T}{\pi t}\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{\omega_s}{2}t} - e^{-i\frac{\omega_s}{2}t}\right) \\
&= \frac{T}{\pi t}\sin\left(\frac{\omega_s}{2}t\right) \\
&= \{T = \frac{2\pi}{\omega_2}\} \\
&= \frac{2\pi}{\omega_s \pi t}\sin\left(\frac{\omega_s}{2}t\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)}{\frac{\omega_s}{2}t} \\
&= \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2}t\right).
\end{aligned}$$

Definition 7 (sinc)**.** $\operatorname{sinc}(x) \coloneqq \frac{\sin(x)}{x}$

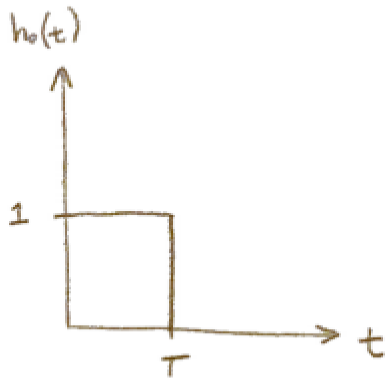


Ett praktiskt problem med detta är att $h_r(t)$ inte är kausalt och har oändlig utsträckning.

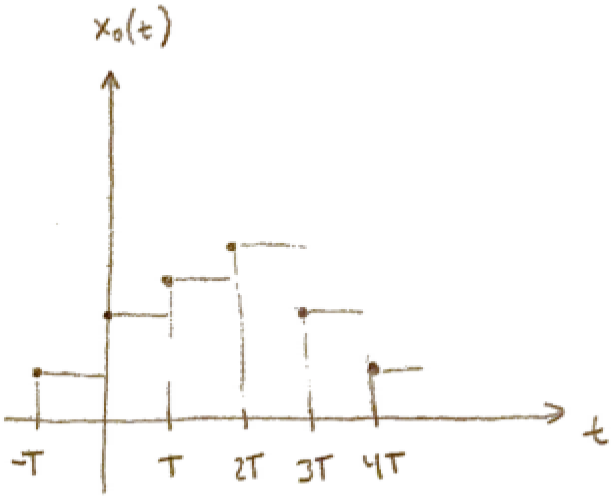
10.1.2 Praktisk rekonstruktion

För att göra det praktiskt att rekonstruera måste systemet vara kausalt. Vi gör det genom att arbeta med hållkretsar, och vi börjar med nollte ordningens hållkrets. Det är ett system där $x_p(t)$ ger en utsignal $x_0(t)$ med impulssvaret

$$h_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Sampelvärdet hålls kvar på sin nivå tills nästa sampelvärde kommer.

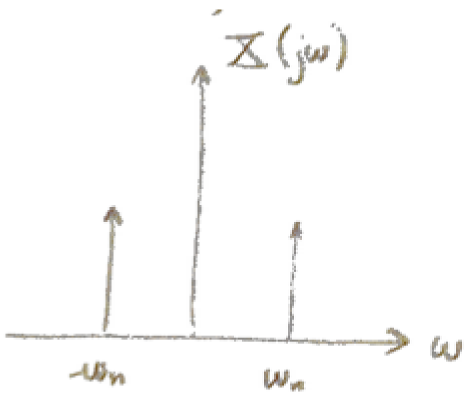


$x_0(t) = h_0(t) * x_p(t) = \{x[n] = x(nT)\} = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT)$. Nu analyserar vi med Fouriertransformen/i frekvensdomänen: $X_0(i\omega) = H_0(i\omega)X_p(i\omega)$. Då är $h_0(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} 2e^{-i\frac{\omega T}{2}} \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega}$ vilket i princip är en sinc-funktion.

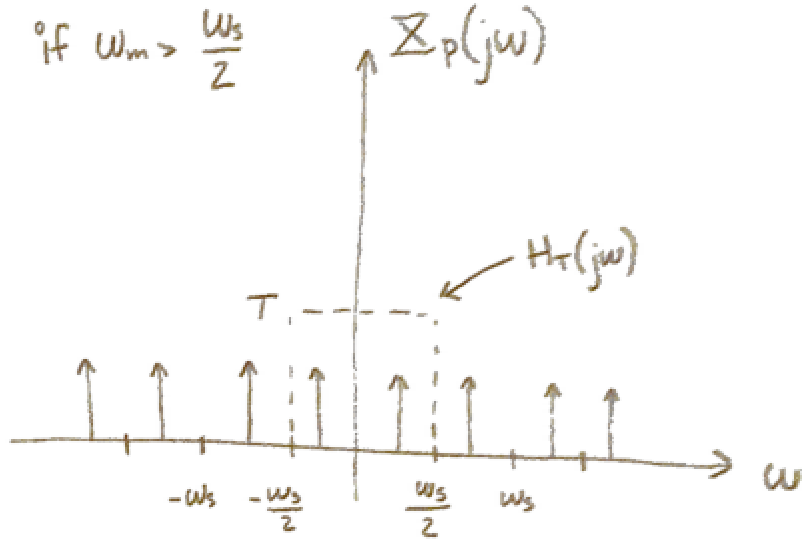
10.1.3 Aliasing/vikning

Exempel 21. Låt $x(t) = A\cos(\omega_M t) = \frac{A}{2}(e^{i\omega_M t} + e^{-i\omega_M t}$.

Fouriertransformen av det är $X(i\omega) = A\pi(\delta(\omega - \omega_M) + \delta(\omega + \omega_M))$.

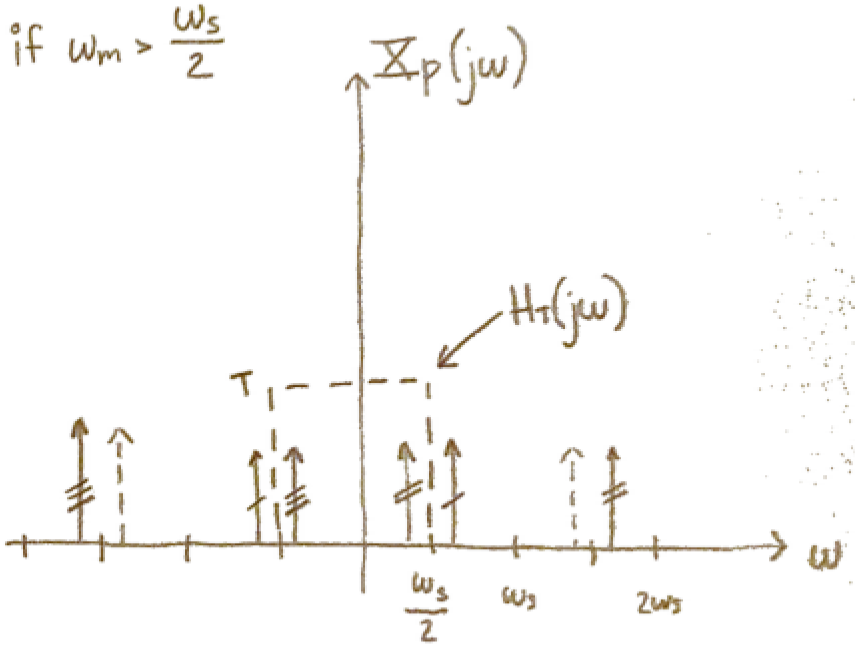


Sen samplar vi vilket ger $X_p(i\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(i(\omega - k\omega_s))$. Om $\omega_M < \frac{\omega_s}{2}$ får vi



Med ett idealt rekonstruktionsfilter $H_r(i\omega)$ får vi $H_r(i\omega)X_p(i\omega) = T\frac{A\pi}{T}(\delta(\omega - \omega_M) + \delta(\omega + \omega_M))$. Vi får alltså tillbaka $x(t) = A\cos(\omega_M t)$

Annars, om $\omega_M > \frac{\omega_s}{2}$ får vi



Med det ideala rekonstruktionsfiltret får vi då $X_p(i\omega)H_r(i\omega) = A\pi(\delta(\omega - (\omega_s - \omega_M)) + \delta(\omega + (\omega_s - \omega_M)))$ vilket svarar mot $x_1(t) = A\cos((\omega_s - \omega_M)t)$.

Med ett numeriskt exempel med konstanterna

$$\begin{aligned}\omega_s &= 200\,\text{rad/s}\\ \omega_M &= 120\,\text{rad/s}\end{aligned}$$

Den rekonstruerade signalen har då vinkelfrekvensen $\omega_s - \omega_M = 200 - 120 = 80\,\text{rad/s}$. Det är en ”falsk” frekvens, d.v.s. aliasing/vikning.

11 Föreläsning 19-09-26

11.1 Laplacetransformen

Man brukar prata om en- och tvåsidiga Laplacetransformer.

11.1.1 Tvåsidig

Definition 8 (Tvåsidig Laplacetransform)**.** Låt $f(t), -\infty < t < \infty$ vara en signal. Då är Laplacetransformen $F(s) = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ där $s \in \mathbb{C}$, vilket typ är $FT(f)$.

Följande är det kausala fallet av den tvåsidiga transformen.

Definition 9 (Ensidig Laplacetransform)**.** Låt $f(t)$ vara en kausal signal, d.v.s. $f(t) = 0$ för $t < 0$.

Då är $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ där $s \in \mathbb{C}$.

Definition 10 (Exponentiellt begränsad)**.** f är exponentiellt begränsad om efter något t_0 beter den sig som en exponentiell funktion.

Matematiskt säger vi att $\exists\, c \in \mathbb{R}, t_0 > 0 : |f(t)| \leq e^{ct} \forall t > t_0$.

Exempel 22. $f(t) = \delta(t-a)$. Om $a \geq 0$ är den kausal.

För alla $t_0 > a$ är $f(t) = 0 \forall t > t_0$ och därmed $|f(t)| \leq e^{ct} \forall c \in \mathbb{R}$. Alltså är den exponentiellt begränsad.

Påstående 4 (När Laplace är definierat)**.** Om f är exponentiellt begränsad för något $c \in \mathbb{R}$ så är Laplacetransformen $F(s)$ väldefinierad för $\mathrm{Re}\{s\} > c$.

Bevis. Tanken är att man visar att andra termen i $F(s) = \int_0^{t_0} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_0^{t_0} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ är begränsad. □

Exempel 23. Låt $f(t) = \delta(t-a)$ för något $a > 0$.

Då är $F(s) = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}\mathrm{d}t = e^{-sa}$.

Exempel 24. Låt $f(t) = u(t)$.

Då är $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s}$.

Exempel 25. Låt $f(t) = tu(t)$.

Då är $F(s) = \int_0^\infty te^{-st}\mathrm{d}t = \{\text{Partiell integrering}\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Exempel 26. Låt $f(t) = \delta'(t-a)$ för något $a > 0$.

Då är $F(s) = \int_0^\infty \delta'(t-a)e^{-st}\mathrm{d}t = se^{-sa}$.
Exempel 27. Låt $f(t) = e^{at}u(t)$.

Då är $F(s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s-a}$ om $\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{a\}$.
Påstående 5 (Laplace av faltning)**.** Om x_1, x_2 är ensidiga gäller att Laplacetransformen av $x_1 * x_2 = X_1X_2$.

Bevis. Laplace av $x_1 * x_2 = \int_0^\infty (x_1 * x_2)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t = \{v = t-\tau\} = \int_0^\infty \int_0^\infty x_1(\tau)x_2(v)e^{-s(\tau+v)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}v = X_1(s)X_2(s)$. $\square$

För en kausal LTI gäller att $y = h * x \iff Y = HX$. För att visa det här måste vi veta att Laplacetransformen av en signal är unik.

11.1.2 Egenskaper för Laplace

Vi skriver $\mathcal{L}\, f(s) \coloneqq F(s)$.

1. $\mathcal{L}$ är linjär, d.v.s. $\mathcal{L}(f_1 + \lambda f_2) = \mathcal{L}\, f_1 + \lambda\, \mathcal{L}(f_2)$.
2. $f(t-a) \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} e^{-as}F(s)$
3. $e^{-zt}f(t) \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F(s+z)$
4. $f'(t) \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s\,\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$ eftersom $\mathcal{L}(f'(s)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t = [f(t)e^{-st}]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty f(t)\cdot(-s)e^{-st}\mathrm{d}t = f(\infty)e^{-s\infty} - f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = sF(s) - f(0)$

Om f är en signal med $c < 0$ är $F(s)$ definierad för $\mathrm{Re}(s) = 0$. Då kan vi definiera $F(i\omega) = \mathrm{FT}$ för f.

Laplace kan definieras i vissa fall när FT inte existerar, ex. $f(t) = e^t u(t)$. Då är $\mathrm{FT} \approx \int_0^\infty e^t e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$. $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-1}, \mathrm{Re}\{s\} > 1$.

För en kausal LTI $y = h * x$, om vi stoppar in $x(t) = e^{st}$, ger $y(t) = h * e^{st} = \int_0^\infty h(\tau)e^{s(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = e^{st}\int_0^\infty h(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau = \mathcal{L}(H)(s)x(t)$.

Låt $y' + ay = x$ där $y(0)$ är given.

Genom Laplace får vi $\mathcal{L}(y' + ay) = sY(s) - y(0) + aY = X \implies Y(0) = \frac{X + y(0)}{s+a} = \mathcal{L}(e^{-at}u(t)) \cdot (X + y(0)) = \mathcal{L}(e^{-at}u(t) * (x + y(0)\delta(t)))$ vilket om $\mathcal{L}$ är inverterbar ger att $y(t) = e^{-at}u(t) * (x(t) + y(0)\delta(t)) = y(0)e^{-at}u(t) + \int_0^t e^{-a\tau}x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$.
Exempel 28. Låt $f(t) = \cos(at)u(t)$ där $a \in \mathbb{R}$.

$f(t) = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}u(t)$. Då är $F(s) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}(e^{iat}u(t)) + \mathcal{L}(e^{-iat}u(t))) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}) = \frac{s}{s^2+a^2}$.
Exempel 29. Låt $f(t) = \sin(at), a \in \mathbb{R}$.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(at) = a\cos(at) \implies s\,\mathcal{L}(\sin(at))(s) - \sin(a\cdot 0) = a\cdot\frac{s}{s^2+a^2} \implies s\,\mathcal{L}(\sin(at))(s) = \frac{as}{a^2+s^2} \implies \mathcal{L}(\sin(at))(s) = \frac{a}{a^2+s^2}$

Om $|f(t)| \leq e^{ct}$ och $\sigma > c$ är $\int_0^\infty |f(t)e^{-\sigma t}|\mathrm{d}t < \infty$ vilket ger att FT för $f(t)e^{-\sigma t}$ är väldefinierad. Utöver det bildar $f(t)e^{-\sigma t}$ ett Fouriertransformpar med $F(i\omega + \sigma)$.

Alltså är $f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(i\omega + \sigma)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \implies f(t) = \dfrac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(i\omega + \sigma)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = \{s = i\omega + \sigma\} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} F(s)e^{st}\mathrm{d}s$ vilket kallas för *Bromwichintegralen.*

Sats 15 (Likhet av två signaler och dess två Laplacetransformer)**.** Om f_1 och f_2 är två kausala signaler med $F_1 = F_2$ är $f_1 = f_2$.

Exempel 30. Vi vill finna den signal $f(t)$ så att $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s+1}{s^2+2} = \frac{s}{s^2} + \frac{1}{s^2+2} = \frac{s}{s^2+\sqrt{2}^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}^2} = \mathcal{L}(\cos(\sqrt{2}t)) + \mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)) \implies f(t) = \cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)$.

Exempel 31. Anta att insignalen x uppfyller $x(0) = 0$. Vi ska skriva om $\begin{cases} y'' + 2y = x' + x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ på formen $y = h * x$.

Laplacetransform ger $s^2Y + 2Y = sX + X \iff Y = \frac{s+1}{s^2+2}X \iff y = (\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)) * x$.

Sats 16 (Slutvärdessatsen)**.** Låt f vara en kausal och begränsad signal, d.v.s. $\exists c > 0$ s.a. $|f(t)| \leq c$.

Satsen är att $f(0+) = \lim_{\epsilon \to 0+} f(\epsilon) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$ och $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$.

Bevis. Om $s > 0$ är $sF(s) = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \{u = st\} = \int_0^\infty f(\frac{u}{s})e^{-u}\mathrm{d}u \implies sF(s) = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty f(\frac{u}{s})e^{-u}\mathrm{d}u = \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} f(t)e^{-u}\mathrm{d}u = \lim_{t\to\infty} f(t)\int_0^\infty e^{-u}\mathrm{d}u = \lim_{t\to\infty} f(t)$. □

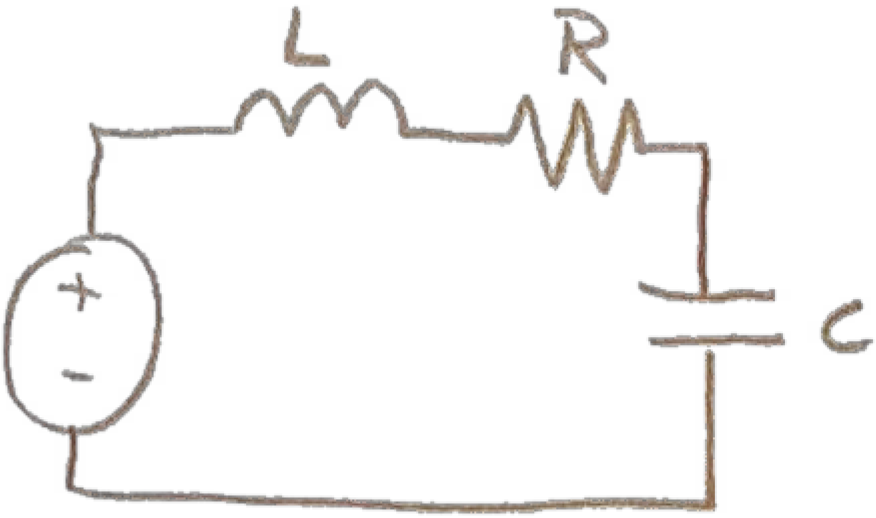
12 Föreläsning 19-10-01

"Bupp bupp bupp"

– Mattemannen

12.1 Laplace och differentialekvationer

Exempel 32. Vi har en RLC-krets:



Vi är intresserade av strömmen $y(t)$ som går genom kretsen.

Kirchoff ger att $V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = x(t)$. Vi vet också att $V_L(t) = L \cdot y'(t)$, $V_R(t) = R \cdot y(t)$ och $V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} y(\tau) \mathrm{d}\tau$.

Därmed har vi $Ly' + Ry + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau = x(t)$ eller genom att derivera en gång till $Ly'' + Ry' + \frac{1}{C} y = x' \iff Q(D)y = P(D)x$ där $Q(D) = D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}$ och $P(D) = \frac{1}{L}D$. Detta är en andra ordningens differentialekvation.

Vi kommer tillbaka till hur vi löser detta, men först tittar vi på hur vi löser enklare fall.

Om $P(D) = 1$ kan vi använda $y = y_0 + y_{\text{in}}$ där zerostate y_0 löser $\begin{cases} Q(D)y_0 = x \\ y_0^{(j)}(0) = 0 \ \forall\, j \end{cases}$ och zeroinput y_{in} löser $\begin{cases} Q(D)y_{\text{in}} = 0 \\ y_{\text{in}}^{(j)}(0) = y^{(j)}(0) \ \forall\, j \end{cases}$.

Vi börjar med att lösa zerostate. Vi vet att $\mathcal{L}(Q(D)y_0) = X(s)$ och $\mathcal{L}(D^2 y_0) = s^2\, \mathcal{L}(y)(s)$. Därmed har vi att $Y_0(s) = \frac{1}{Q(s)} X(s) \iff y_0(t) = h * x(t)$ där h uppfyller att $H(s) = \frac{1}{Q(s)}$.

Exempel 33. $Q(D) = D + a$, d.v.s. vi tittar på $y' + ay = x$. Då är $Q(s) = s + a$ så att $H(s) = \frac{1}{s+a} = \mathcal{L}(e^{-at}u(t))(s)$ och därmed är $h(t) = e^{-at}u(t)$ och $y_0(t) = h * x(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} x(\tau)\mathrm{d}\tau$.

Exempel 34. Låt $Q(D) = D^2 + aD + b$. Då är $Q(s) = s^2 + as + b$ och därmed $H(s) = \frac{1}{s^2+as+b}$. Viktigt här (men även generellt) är partialbråksuppdelning.

I det här fallet vill vi hitta $\lambda_\pm$ som löser $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Då är $s^2 + as + b = (s - \lambda_+)(s - \lambda_-)$.

Vi vill förenkla $\frac{1}{(s-\lambda_+)(s-\lambda_-)}$ och använder partialbråksuppdelning för det. Då får vi att det är lika med $\frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left(\frac{1}{s-\lambda_+} - \frac{1}{s-\lambda_-} \right)$.

Då är $\frac{1}{s^2+as+b} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_+-\lambda_-}\left(\frac{1}{s-\lambda_+} - \frac{1}{s-\lambda_-}\right) & \lambda_+ \neq \lambda_- \\ \frac{1}{(2-\lambda_+)^2} & \lambda_+ = \lambda_- \end{cases}$ vilket då när vi använder Laplace ger att det är lika med $\begin{cases} \frac{u(t)}{\lambda_+-\lambda_-}\left(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}\right) & \lambda_+ \neq \lambda_- \\ te^{\lambda_+ t}u(t) & \lambda_+ = \lambda_- \end{cases}$.

Vi går sedan vidare till att lösa zeroinput: Då vill vi lösa $\begin{cases} Q(D)y_{\text{in}} = 0 \\ y_{\text{in}}^{(j)}(0) = y^{(j)}(0)\ \forall\ j \end{cases}$.

Exempel 35. Låt $Q(D) = D^2 + aD + b$. Då är $\mathcal{L}(Q(D)y_{\text{in}}) = \mathcal{L}(D^2 y_{\text{in}}) + a\,\mathcal{L}(Dy_{\text{in}}) + b\,\mathcal{L}(y_{\text{in}}) = \mathcal{L}(y_{\text{in}}) - sy(0) - y'(0) + as\,\mathcal{L}(y_{\text{in}}) - ay(0) + b\,\mathcal{L}(y_{\text{in}}) = (s^2 + as + b)\,\mathcal{L}(y_{\text{in}}) - y'(0) - (s+a)y(0)$ vilket med antaganden som gjordes för zeroinput ger att $\mathcal{L}(y_{\text{in}})(s) = \frac{y'(0)+(s+a)y(0)}{Q(s)}$. Det löses på ett liknande sätt som det andra, med partialbråksuppdelning.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y_{\text{in}})(s) &= \frac{y'(0) + (s+a)y(0)}{Q(s)} \\
&= \frac{y'(0) + (\lambda_+ + a)y(0) + (s - \lambda_+)y(0)}{(s-\lambda_+)(s-\lambda_-)} \\
&= (y'(0) + (\lambda_+ + a)y(0))H(s) + \frac{y(0)}{s-\lambda_-} \\
&= \mathcal{L}((y'(0) + (\lambda_+ + a)y(0))h(t) + y(0)e^{\lambda_- t}u(t)) \quad \Longleftrightarrow \quad y_{\text{in}}(t) = (y'(0) + (\lambda_+ + a)y(0))h(t) + y(0)e^{\lambda
\end{aligned}$$

Allmänt, om $Q(D)y_{\text{in}} = 0$ är $Q(s)y_{\text{in}}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g_{Q,k}(s)y^{(k)}(0)$ där $g_{Q,k}$ ges av att $g_{Q,n-1}(s) = 1$, $g_{Q,n-2}(s) = s + a_{n-1}$, $g_{Q,n-3}(s) = s^2 + a_{n-1}s + a_{n-2}$, …, $g_{Q,0}(s) = s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_2 s + a_1$.

Då är $Y_m(s) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} g_{Q,k}(s)y^{(k)}(0)}{Q(s)}$.

"Låt oss ta ett ruggigt konkret exempel."

– Goffeng

"Förr, när det var bättre."

– Goffeng

12.1.1 Mer allmänt

För en differentialekvation $Q(D)y = P(D)x$ med givet x och $y^{(j)}(0)$ givna för relevanta j får vi av Laplace $Q(s)Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} g_{Q,k}(s)y^{(k)}(0) = P(s)X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} g_{P,k}(s)x^{(k)}(0)$ och därmed $Y(s) = H(s)X(s) + \frac{1}{Q(s)}\sum_{k=0}^{n-1}\left(g_{Q,k}(s)y^{(k)}(0) - g_{P,k}(s)x^{(k)}(0)\right)$ där $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ är överföringsfunktionen. Detta ger att $y(t) = h * x(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha_{Q,k}(t)y^{(k)}(0) - \beta_{P,k}(t)x^{(k)}(0)\right)$ där $h = \mathcal{L}^{-1}(H)$, $\alpha_{Q,k} = \mathcal{L}^{-1}(\frac{g_{Q,k}}{Q})$ och $\beta_{P,k} = \mathcal{L}^{-1}(\frac{g_{P,k}}{Q})$.

Hur hittar vi h, $\alpha_{Q,k}$ och $\beta_{P,k}$?

Båda handlar om att inverstransformera uttryck på formen $\frac{s^m}{Q(s)}$ där $m \leq n$.

Påstående 6. Om vi kan faktorisera $Q(s) = (s-\lambda_1)^{\gamma_1}(s-\lambda_2)^{\gamma_2}\cdots(s-\lambda_p)^{\gamma_p}$ så är $\frac{s^m}{Q(s)}$ en summa av termer på formen $\frac{s^l}{(s-\lambda_j)^{\gamma_j}}$ där $l < \gamma_p$ eller $l = 1$.

Påstående 7. För $h = \mathcal{L}^{-1}(\frac{P}{Q})$ gäller att för några konstanter l_k och $c_{j,k}$ är $\sum_{k=1}^{P}\sum_{i=1}^{l_k}\left(c_{i,k}t^i e^{\lambda_k t}u(t)\right) + b_n\delta(t)$.

Som följd av dessa påståenden får vi att h är stabil ($\int |h(t)|\mathrm{d}t < \infty$) om och endast om $Q(\lambda) = 0$ saknar lösningar med $\mathrm{Re}\{\lambda\} \geq 0$.

Påstående 8. Om h är stabil gäller att

1. Om y löser $y = h * x$ följer att x begränsad $\implies$ y begränsad.
2. Om y löser $y = h * x$ följer att $\int_0^\infty |x(t)|\mathrm{d}t < \infty \implies \int_0^\infty |y(t)|\mathrm{d}t < \infty$.

Bevis.

1. Om $|x(t)| \leq C\ \forall\ t$ gäller att $|y(t)| = \left|\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau\right| \leq \int_0^t |h(t-\tau)||x(\tau)|\mathrm{d}\tau \leq C\int_0^t |t-\tau|\mathrm{d}\tau \leq C\int_0^\infty |h(\tau)|\mathrm{d}\tau$.
2. Bevisas inte här, finns i boken.

$\square$

Exempel 36. Lös $y''(t)+ay'(t)+by(t) = cx'(t)+dx(t)$ där $y(0)$, $y'(0)$ och $x(t)$ är givna.

Då har vi att $\mathcal{L}(y''+ay'+by) = (s^2+as+b)Y - y'(0) - (s+a)y(0)$ och $\mathcal{L}(cx'+dx) = (cs+d)X - cx(0)$. Därmed är $(s^2+as+c)Y(s) - y'(0) - (s+a)y(0) = (cs+d)X - cx(0) \implies Y(s) = \frac{cs+d}{s^2+as+b}X(s) + \frac{y'(0)+(s+a)y(0)-cx(0)}{s^2+as+b}$.

Vi vet att $H(s) = \frac{cs+d}{s^2+as+b}$. Vad är då h? Vi skriver $s^2+as+b = (s+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}$. Då är $H(s) = \frac{cs+d}{(s+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}} = \frac{c(s+\frac{a}{2}-\frac{ac}{2}+d)}{(s+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}} = c\frac{s+\frac{a}{2}}{(s+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}} + \frac{d-\frac{ac}{2})}{(s+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}} = \mathcal{L}\left(ce^{-\frac{a}{2}t}\cos\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}t\right)\right) + \mathcal{L}\left(\frac{d-\frac{ac}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}e^{-\frac{a}{2}t}\sin\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}t\right)\right)$.

13 Föreläsning 19-10-02

13.1 Laplacetransformen tillämpad på LTI-system

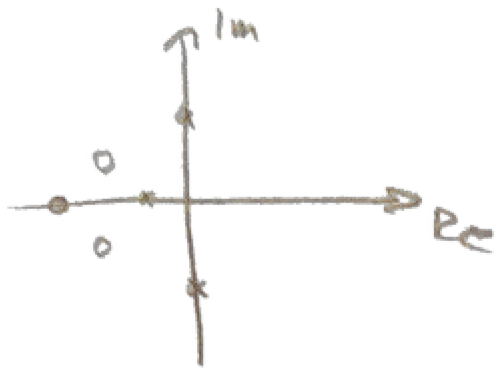
Anta att vi har ett kontinuerligt LTI-system där sambandet mellan in- och utsignal beskrivs av en differentialekvation

$$a_N\frac{\mathrm{d}^N y}{\mathrm{d}t^N}+a_{N-1}\frac{\mathrm{d}^{N-1}y}{\mathrm{d}t^{N-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_0 y = b_M\frac{\mathrm{d}^M x}{\mathrm{d}t^M}+b_{M-1}\frac{\mathrm{d}^{M-1}x}{\mathrm{d}t^{M-1}}+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+b_0 x$$

alternativt som

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}.$$

Anta nu att systemet är i vila, d.v.s. alla begynnelsevärden är 0. När vi Laplacetransformerar får vi då $\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$ och därmed $Y(s) \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^{M} b_k s^k \implies \frac{Y(s)}{X(s)} := H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} = b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0 a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \frac{B(s)}{A(s)}$. Detta är en kvot mellan två polynom beroende på s, d.v.s. en rationell funktion. Den formen fås väldigt ofta från Laplacetransformen i ingenjörstillämpningar. Notera att $B(s) \neq Y(s)$ och $A(s) \neq X(s)$, även om det ser ut så. Polynomen kan även skrivas på faktoriserad form enligt $H(s) = \frac{b_M \prod_{k=1}^{M}(s-c_k)}{a_N \prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} = \frac{b_M (s-c_1)(s-c_2)\cdots(s-c_M)}{a_N (s-d_1)(s-d_2)\cdots(s-d_N)}$ där c_k är nollställen till $H(s)$ och rötter till täljaren med symbolen $\circ$. d_k är poler till $H(s)$ och är rätter till nämnarpolynomet har symbolen $\times$. En graf för ett $H(s)$ kan se ut som följer:



Det innehållet all information om $H(s)$ förutom konstanten $\frac{b_M}{a_N}$. Allmänt kan c_k och d_k vara antingen reella eller komplexa. Om det finns något komplext c_k eller d_k måste dess konjugat också vara ett nollställe så länge koefficienterna i polynomen är reella. Det kommer allt som oftast vara fallet för vanliga fysikaliska system.

Låt följande beskriva ett LTI-system: $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$, $\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s)$ och $h(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} H(s)$.

I tidsdomänen har vi för systemet $y(t) = h(t) * x(t)$, i frekvensdomänen $Y(s) = H(s)X(s)$. Då skapar vi kvoten $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ vilket vi även fick när vi Laplacetransformerade den generella differentialekvationen tidigare. Vi kallar $H(s)$ för systemets överföringsfunktion. $\mathcal{L}^{-1}(H(s)) = h(t)$ är systemets impulssvar. För kausala system använder vi den enkelsidiga Laplacetransformen. Det räcker i den här kursen.

13.2 Invers Laplacetransform

Utgå från en kvot mellan våra polynom, exempelvis $H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$. Anta att grad$(B(s)) = M$ och grad$(A(s)) = N$. För fysikaliska system är alltid $M \leq N$. Om $M = N$ vet vi att $H(s) = c_0 + \frac{\widetilde{B}(s)}{A(s)}$ där grad$(\widetilde{B}(s)) = M - 1$. Sen partialbråksuppdelar vi $\frac{\widetilde{B}(s)}{A(s)}$ om $M = N$ och $\frac{B(s)}{A(s)}$ direkt om $M < N$. Resultatet av partialbråksuppdelningen ger en summa av två typer av termer beroende på om rötterna är komplexa eller reella. Varje term kan sedan inverstransformeras.

Man kan skriva partialbråksuppdelningsansatsen $\frac{As+B}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ som $\frac{A(s+\alpha)+B-A\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} = A\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} + \frac{B-A\alpha}{\omega} \cdot \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ vilket ger inverstransformen $A\left(e^{-\alpha t}\cos(\omega t) + \frac{B-A\alpha}{\omega}e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\right)u(t)$. För att den ska vara konvergera måste $\mathrm{Re}\{s_1\} = \mathrm{Re}\{s_2\} < 0$.

För att ett kausalt system ska vara stabilt måste alla poler till $H(s)$ ligga i vänstra halvplanet.

14 Föreläsning 19-10-03

14.1 Kort repetition

Kom ihåg att för ett LTI-system gäller att för ett system med insignal $x(t) = \sin(\omega t)$ och frekvenssvar (FT av impulssvaret) $G(i\omega)$ får vi utsignalen $y(t) = |G(i\omega)|\sin(\omega t + \arg G(i\omega))$ i stationärtillstånd. Om man vill ha hela förloppet kan man Laplacetransformera och räkna som vanligt.

14.2 Bodediagram/Bode plots

En grafisk presentation av frekvenssvaret:

Innehåller två delar:

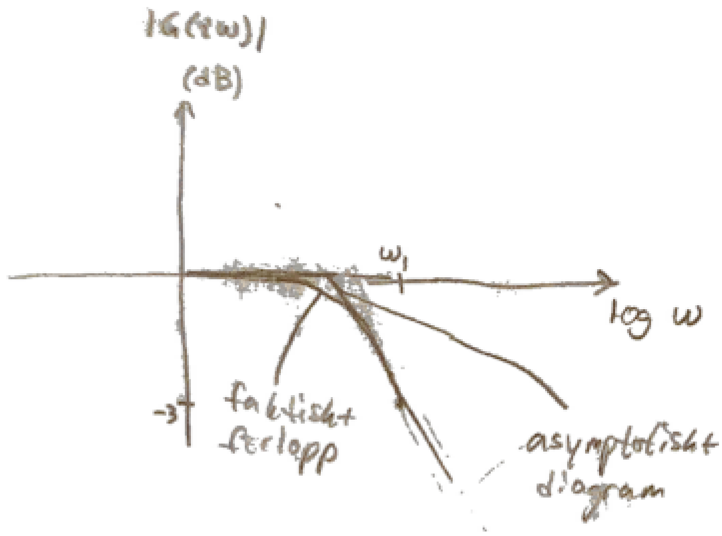
- Amplituddiagram, ofta med logaritmisk frekvens- och amplitudskala (i dB). $|G(i\omega)| = 20 \cdot \log_{10}(|G(i\omega)|)$
- Fasdiagram, ofta med logaritmisk frekvensskala men linjär fasskala (d.v.s. plottar mot $\arg G(i\omega)$)

För att konstruera dessa diagram utgår vi ifrån en överföringsfunktion $G(s)$ och sätter $s = i\omega$ så att vi får $G(i\omega)$. Sedan faktoriserar vi överföringsfunktionen $G(s)$ så att $G(s) = \frac{C_1(s)C_2(s)\cdots C_M(s)}{D_1(s)D_2(s)\cdots C_N(s)}$. Faktorerna $C_k(s)$ och $D_k(s)$ är antingen k (en konstant), s (derivering i täljaren, integrering i nämnaren), $1 + \frac{s}{\omega_1}$ (förstagradsfaktor p.g.a. en reell rot) eller $1 + s\frac{2a}{\omega_2} + \frac{s^2}{\omega_2^2}$ (andragradsfaktor p.g.a. komplexa rötter).

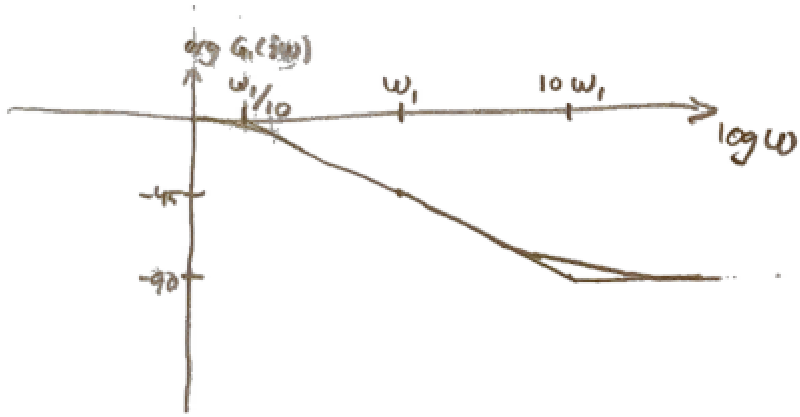
14.2.1 Frekvenssvarets belopp

$|G(i\omega)| = \frac{|C_1(s)||C_2(s)|\cdots|C_M(s)|}{|D_1(s)||D_2(s)|\cdots|C_N(s)|}$. I dB är det $|G(i\omega)|_{\text{dB}} = |C_1(i\omega)|_{\text{dB}} + |C_2(i\omega)|_{\text{dB}} + \cdots + |C_M(i\omega)|_{\text{dB}} - |D_1(i\omega)|_{\text{dB}} - |D_2(i\omega)|_{\text{dB}} - \cdots - |D_N(i\omega)|_{\text{dB}}$ och deras fasbidrag fås som $\arg G(i\omega) == \arg C_1(i\omega) + \arg C_2(i\omega) + \cdots + \arg C_M(i\omega) - \arg D_1(i\omega) - \arg D_2(i\omega) - \cdots - \arg D_N(i\omega)$. Notera att superpositionen av bidragen från varje delfaktor ger både $|G(i\omega)|_{\text{dB}}$ och $\arg G(i\omega)$.

Studera $\left.\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_1}}\right|_{s=i\omega} = \frac{1}{1+i\frac{\omega}{\omega_1}}$. Dess belopp är $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega}{\omega_1}^2}} = |G_1(i\omega)|$. Bodediagrammet blir då



Argumentet för den är $\arg G_1(i\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$. Bodediagrammet blir



Lutningen på amplituddiagrammet är $-20\ \frac{\text{dB}}{\text{dekad}}$.

14.3 Fourierrepresentationer

Ordlista: CT – Continuous time, DT – Discrete time, FS – Fourier series, FT – Fourier transform

En tabell som beskriver vad vi använder i olika fall:

Signal	Periodisk	Ickeperiodisk
CT	CTFS (c_k eller a_k och b_k)	CTFT ($X(i\omega)$)
DT	Vi väntar med denna.	DTFT

Påminnelse 2 (Kort repetition av sampling)**.** För $x_p(t) = p(t) \cdot x(t)$ är $X_p(i\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(i(\omega - k\omega_s))$ där $\omega_2 = \frac{2\pi}{T}$ och $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$.

Om vi Fouriertransformerar $x_p(t)$ direkt får vi

$$
\begin{aligned}
X_p(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT)\right) e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \{\text{Får endast bidrag} \quad \neq 0 \quad \text{vid impuls, d.v.s. vid} \quad t = nT\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-i\omega nT} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\mathrm{d}T \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-i\omega nT} \\
&= \{\text{Låt} \quad x(nT) = x[n] \quad \text{och} \quad \omega T = \Omega\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n}
\end{aligned}
$$

vilket är Fouriertransformen för en ickeperiodisk diskret signal och vi skriver den som $X(e^{i\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n}$. Kallas Diskret Tid FourierTransform och förkortas DTFT. Kursboken använder beteckningen $X(\Omega)$ men det är ”bättre” med konventionen ovan eftersom det matchar bättre mot z-transformen senare i kursen.

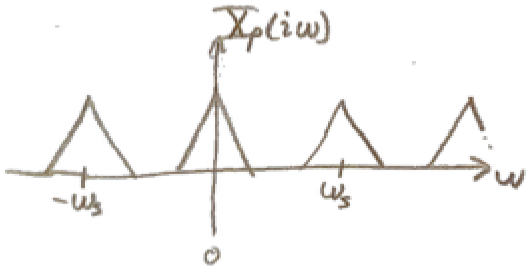
14.3.1 Egenskaper

$X(e^{i\Omega})$ är…

- kontinuerlig i Ω.
- periodisk i Ω eftersom $X(e^{i(\Omega+2\pi k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i(\Omega+2\pi k)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n} \cdot e^{-i2\pi kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n} = X(e^{i\Omega})$

Alltså är $x[n]$ innan DTFT både diskret och icke-periodisk, men $X(e^{i\Omega})$ är både kontinuerlig och periodisk.

Kom ihåg hur Fouriertransformen för vårt viktade impulståg $x_p(t)$ såg ut:



Den är också periodisk, men i ω och med "perioden" $\omega = \omega_s$. Men $\Omega = \omega T$ vilket vid $\Omega = 2\pi$ ger $\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_s$ eftersom T är samplingsintervallet. $\Omega = 2\pi$ motsvarar samplingsvinkelfrekvensen. $e^{i\Omega n} = \cos(\Omega n) + i\sin(\Omega n)$. Enheten för Ω är då rad alt $\frac{\text{rad}}{\text{sampel}}$.

14.4 Syntesekvation/Invers DTFT

$x[n] = \int_{2\pi} X(e^{i\Omega})e^{i\Omega n}\mathrm{d}\Omega$.

15 Föreläsning 19-10-08

15.1 Mer DTFT och DFT

Exempel 37. Beräkna DTFT för signalen $x[n] = \alpha^n u[n]$ för något $0 < \alpha < 1$.

$$
\begin{aligned}
X(e^{i\Omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-i\Omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-i\Omega}\right)^n \\
&= \{\text{Geometrisk summa}\} \\
&= \frac{1}{1 - \alpha e^{-i\Omega}} \\
&= \frac{1}{1 - \alpha(\cos(\Omega) - i\sin(\Omega))} \\
&= \frac{1}{1 - \alpha\cos(\Omega) + i\alpha\sin(\Omega)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|X(e^{i\Omega})\right| &= \frac{1}{\sqrt{\left|1-\alpha\cos\Omega\right|^2 + \left|\alpha\sin\Omega\right|^2}} \\
&= \frac{1}{\left(1-2\alpha\cos\Omega+\alpha^2\cos^2(\Omega)+\alpha^2\sin\Omega\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\Omega}}
\end{aligned}
$$

$$
\arg X(e^{i\Omega}) = -\arctan\left(\frac{\alpha\sin\Omega}{1-\alpha\cos\Omega}\right)
$$

För motsvarade kontinuerliga signal $x(t) = e^{-iat}u(t)$ har vi Fouriertransformen $X(i\omega) = \frac{1}{a-i\omega}$, med $|X(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ och $\arg X(i\omega) = -\arctan\frac{\omega}{a}$. Vi ser att $|X(i\omega)|$ upprepas periodiskt i $X(e^{i\Omega})$.

Genom att välja lämplig samplingsfrekvens kan effekten av aliassing minskas och $X(e^{i\Omega})$ återfinns, i princip, i $X(e^{i\Omega})$ på intervallet $\pi < \Omega < \pi$.

För numeriska beräkningar är det opraktiskt med kontinuerliga funktioner såsåom $X(e^{i\Omega})$. Vad gör vi? Beräkna $X(e^{i\Omega})$ endast för vissa frekvenser i intervallet $0 \leq \Omega \leq 2\pi$. Vi väljer ett $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ där $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Vi landar nu i det som kallas DFT (Diskret Fouriertransform). Den används flitigt och har stor praktisk betydelse. Ytterligare en viktig aspekt är att vi inte kan summera till oändligheten och därmed inte ha hur långa signaler som helst. Vi måste välja ut en representativ del. $x[n]$ där $n = 0, 1, \ldots, N_{\max} - 1$.

15.2 Diskret Fouriertransform (DFT)

En godtycklig icke-periodisk och diskret signal $x[n]$ har Fouriertransformen $X(e^{i\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n}$. $X(e^{i\Omega})$ är kontinuerlig i Ω och 2π-periodisk i Ω.

15.2.1 Syntesekvation/Invers DTFT

$$
x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{i\Omega})e^{i\Omega n}\mathrm{d}\Omega
$$

Det är en superposition av bassignaler $e^{i\Omega n} = \cos(\Omega n) + i\sin(\Omega n)$ med vikter $X(e^{i\Omega})$. Rent praktiskt kan vi bara hantera signaler $x[n]$ med ändlig längd. Dessutom är det najs om även transformen X är diskret vilket skulle göra det rimligt för datorer att beräkna DTFT.

En alternativ Fouerirerepresentation har därför utvecklats, DFT. Det som är viktigt med den är att $DFT\{x[n]\}$ är diskret och att DFT motsvarar "samplade" värden av $X(e^{i\Omega})$ på intervallet $0 \leq \Omega < 2\pi$.

$$
\begin{array}{lllllllll}
X(i\omega) & \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} & x(t) & \xrightarrow{\text{Sampling}} & X[n] & \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} & X(e^{i\Omega}) & \xrightarrow{\Omega=\Omega_k=\frac{2\pi}{N}k} & X[k] \\
\text{Kont.} & & \text{Kont.} & & \text{Diskret} & & \text{Kont.} & & \text{Diskret} \\
\text{Icke-per.} & & \text{Icke-per.} & & \text{Icke-per.} & & \text{Per.} & & \text{Per.} \\
 & & & & & & & & \text{DFT/FFT}
\end{array}
$$

Effektiva beräkningsalgoritmer för att beräkna DFT kallas FFT (Fast Fourier Transform).

Nu till DFT! Vi har tillgång till (eller väljer) L stycken värden (sampel) i vår signal $x[n]$ där $n = 0, 1, \ldots, L-1$, men ofta har vi ju bara samplat en kontinuerlig signal $x(nT)$. Signalens DTFT är då $X(e^{i\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-i\Omega n}$. Det är en ändlig summa, vilket är bra, men det finns fortfarande oändligt många Ω vilket är dumt. Låt oss ta N stycket avläsningar/sampel av $X(e^{i\Omega})$ och gör beräkningar för $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ där $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Beteckna dessa sampel med $X[k] = X(e^{i\Omega})$ där $\Omega = \frac{2\pi}{N}k$ vilket ger att

$$X[k] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Man kan visa att $x[n]$ kan återskapas ur $X[k]$ om $N \geq L$. Då får man

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

Vi har då ett transformpar $x[n] \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X[k]$.

Det är vanligt att vi låter $L = N$ och att de är en jämn tvåpotens, för det behöver FFT för att funka.

15.2.2 Frekvenser hos en samplad signal

Kom ihåg att T är vårt sampelintervall, att $\Omega = \omega \cdot T$, att ω är den kontinuerliga signalens vinkelfrekvens i rad/s. Då har Ω enheten rad. $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ där $k = 0, 1, \ldots, N-1$ vilket med $\omega = \frac{\Omega}{T}$ ger att $\omega_k = \frac{\Omega_k}{T} = \frac{2\pi}{N}\frac{1}{T}k = \frac{2\pi}{T}\frac{k}{N} = \frac{\omega_s}{N}k$ där ω_s är samplingsvinkelfrekvensen. Om vi uttrycker samplingsfrekvensen i Hz som F_s är $\omega_s = 2\pi F_s$ vilket ger att $\omega_k = \frac{2\pi F_s}{N}k$ vilket återkommer i labben.

16 Föreläsning 19-10-09

16.1 Sammanfattning

Den kontinuerliga signalens Fouriertransform kan erhållas ur den samplade signalens Fouriertransform med $|\Omega| < \pi$ om effekten av aliasing kan göras tillräckligt liten.

16.2 Mer om DFT: Samband mellan k, ω och Ω

$x(t) = \sin(\omega t)$ samplas vid $t = nT \implies x[n] = \sin(\omega T n) = \sin(\Omega n)$.

16.2.1 DFT:s frekvensaxel

Kan vara mot $\Omega = \frac{2\pi}{N}k$, k, $\omega = $ (Om $\Omega = 2\pi$) $\implies \omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_s$ eller $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi}$ i Hz, beror lite på.

Figur 1

Notera uppbyggnaden av syntesekvationen för DFT som ger $x[n]$ utifrån $X[k]$. Den är ju $x[n] = \frac{1}{[}N] \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$, vilket är en superposition av basfunktionen $e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$ vilket vi kallar för $\phi_k[n]$ med viktfunktionen $X[k]$. Några egenskaper för $\phi_k[n]$, där k,$n \in \mathbb{Z}$, är att

- $\phi_k[n+N] = e^{i\frac{2\pi}{N}k(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kN} = \phi_k[n] \cdot 1 = \phi_k[n]$, alltså är den periodisk i n med perioden N.
- $\phi_{k+N}[n] = e^{i\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nN} = \phi_k[n] \cdot 1 = \phi_k[n]$, alltså är den också periodisk i k med perioden N.

Det finns alltså bara N stycken unika bassignaler, d.v.s. $\phi_0[n] = \phi_N[n]$, $\phi_1[n] = \phi_{N+1}[n]$ o.s.v.

Om det är ett heltal antal perioder i samplingen ger det exakt vilket k som ensamt bidrar. Både k och $-k = N - k$ finns med.

"Det ser regelbundet ut, vilket jag är tacksam för."

– Ants om sin EKG

16.3 Introduktion till z-transformen

Låt z vara en komplex variabel, alltså är $z = a + bi = re^{i\Omega}$. Kom också ihåg att $z^n = (re^{i\Omega})^n = r^n e^{i\Omega \cdot n} = r^n(\cos(\Omega n) + i\sin(\Omega n))$. Låt z^n utgöra insignal till ett diskret LTI-system med impulssvar $h[n]$. Faltningssumman ger att $y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^n z^{-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k} := z^n \cdot H(z) = \ddagger\{h[n]\}$ där $H(z)$ är z-transformen av $h[n]$.
Definition 11 (z-transformen)**.** z-transformen av den diskreta signalen $x[n]$ är $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$.

17 Föreläsning 19-10-10

17.1 Transformer i allmänhet

Kom ihåg att Fourierkoefficienterna för en Fourierserie ges av

$$c_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t.$$

Kom också ihåg att för periodiska y, h och x som har sambandet $y(t) = h * x(t)$ är $c_k(y) = c_k(h) \cdot c_k(x)$ för alla k.

Kom utöver det också ihåg att $c_k(x') = ikc_k(x)$.

En transform är något som tar en signal f till en ny beskrivning för f.

17.2 z-transform

Låt $x[k]$ vara en diskret signal. Den ska vi ”skicka på en funktion” av en komplex variabel $X(z) \coloneqq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$.

Om f är en T-periodisk kontinuerlig signal och $x[k] = c_k(f)$ så är $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)z^{-k}$. Om vi väljer $z = e^{-i\frac{2\pi}{T}t}$ så är $X(e^{-i\frac{2\pi}{T}t}) = f(t)$. Därav är z-transformen i någon mån en inverstransform till Fourierserier.

Påstående 9. Låt $x[k]$ vara en diskret signal. Anta att det finns tal $0 < c_0 < c_1 < \infty$ så att $|x[k]| \leq c_0^k$ för $k >> 0$ och $|x[k]| \leq c_1^k$ för $k << 0$. Då är $X(z)$ väldefinierad och absolutkonvergent för $c_0 < |z| < c_1$.

Bevis. Idén för beviset är att visa att $|X(z)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]||z|^k$ konvergerar. □

Vi kommer att anta att $x[k] = 0$ för $k < 0$, d.v.s. det kausala fallet.

Då är $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}$. Om $|x[k]| \leq c^k$ för $k >> 0$ gäller att $X(z)$ finns för $|z| > c$.

Exempel 38. Låt $x[k] = \delta(k - l)$ där $l \geq 0$.

Då är $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n - l)z^{-n} = z^{-l}$.

Exempel 39. Låt $x_\gamma[k] = \gamma^k u[k]$ där $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Då är $X_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{\gamma}{z}}$ vilket bara konvergerar om $\frac{\gamma}{z} < 1$ enligt påminnelsen nedan, vilket ger att den konvergerar om $|z| > |\gamma|$. Då får vi $\frac{1}{1-\frac{\gamma}{z}} = \frac{z}{z-\gamma}$.

Påminnelse 3. $\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k$ och $\sum_{k=0}^{N} w^k = \frac{1-w^{N+1}}{1-w}$. Den första konvergerar för $|w| < 1$.

Exempel 40. Finn en diskret och kausal signal h_γ med $X(z) = \frac{1}{z-\gamma}$.

Om vi tar x_γ från exemplet ovan får vi att $X_\gamma(z) = \frac{z-\gamma+\gamma}{z-\gamma} = 1 + \frac{\gamma}{z-\gamma}$ vilket ger att $h_\gamma = \frac{1}{\gamma}(x_\gamma - \delta_0)$, d.v.s. $h_\gamma[k] = \begin{cases} \gamma^{k-1} & k > 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases} = x_\gamma[k-1]u[k]$.

17.3 Syntes för z-transform

Sats 17 (Syntes för z-transformen)**.**

$$x[k] = r^k \int_0^1 X(re^{2\pi it})e^{2\pi ikt}\mathrm{d}t$$

där r är något tal s.a. $X(z)$ är definierat för $|z| \geq r$.

Bevis.

$$\begin{aligned}
x[k] &= \int_0^1 X(re^{2\pi it})e^{2\pi ikt}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-2\pi int}e^{2\pi ikt} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]r^{-n} \int_0^1 e^{2\pi ikt} \\
&= x[k]r^{-k}
\end{aligned}$$

eftersom integralen är 0 för $k \neq n$ och 1 för $k = n$. □

17.4 Viktiga egenskaper för z-transformen

Z-transformen är linjär, d.v.s. $x_1 + \lambda x_2 \overset{z}{\leftrightarrow} X_1 + \lambda X_2$.

För ett vänsterskifte, d.v.s. om vi låter $x_s[k] = x[k+1]u[k]$ så har vi transformparet $x_s[k] = x[k+1]u[k] \overset{z}{\leftrightarrow} z(X(z) - x[0])$.

Högerskifte, d.v.s. $x_s[k] = x[k-1]$ ger transformparet $x_s[k] = x[k-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{z}X(z)$.

Slutvärdessats för z-transformen säger att $x[0] = \lim_{|z|\to\infty} x[z]$.

Motsvarande initialvärdessats säger att, givet att $x[k]$ är begränsad och att $\lim_{k\to\infty} x[k]$ existerar, då är $\lim_{h\to\infty} x[k] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$.
Exempel 41. Låt $x[k] = u[k]$. Det är då transformpar med $\frac{z}{z-1}$. Vi vet då också att $1 = \lim_{k\to\infty} u[k] = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}$.

$\gamma^k x[k]$ bildar transformpar med $X(\frac{z}{\gamma})$ eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k x[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k x[k] \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{-k}$.

$kx[k]$ bildar transformpar med $-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$, idén bakom är att $-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z) = -z \cdot (-kz^{k-1}) = kz^{-k}$.

$x_1 * x_2 \overset{z}{\leftrightarrow} X_1X_2$ eftersom $\sum_{k=0}^{\infty}(x_1 * x_2)[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} x_1[k-l]x_2[l]z^{-k} = \sum_{m,l=0}^{\infty} x_1[m]x_2[l]z^{-(m+l)} = \sum_{m=0}^{\infty} x_1[m]z^{-m} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} x_1[l]z^{-l}$.

För en diskret och kausal LTI $y = h * x \iff Y = HX$.
Exempel 42. Låt $x[k] = \gamma^k$.

Då är $h * x[l] = \sum_m h[m]\gamma^{l-m} = \gamma^l \sum_m h[m]\gamma^{-m} = \gamma^l H(\gamma) = H(\gamma)x[l]$.

Exempel 43. Låt $x[k] = \gamma^k \cos(\beta k)u[k]$.

Vi börjar med att anta att $\gamma = 1$. Då är $x[k] = \frac{1}{2}\left(e^{i\beta k} + e^{-i\beta k}\right)u[k] = \frac{1}{2}\left(\left(e^{i\beta}\right)^k + \left(e^{-i\beta}\right)^k\right)u[k]$. Då bildar det transformpar med $\frac{1}{z}\left(\frac{z}{z-e^{i\beta k}} + \frac{z}{z-e^{-i\beta k}}\right)$.

Om $\gamma \neq 1$ får vi att $\gamma^k \cos(\beta k)u[k]$ bildar transformpar med $\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{z}{\gamma}}{\frac{z}{\gamma}-e^{i\beta k}} + \frac{\frac{z}{\gamma}}{\frac{z}{\gamma}-e^{-i\beta k}}\right) =$ ... Man kan göra mer algebra för att få något "finare" om man vill.

17.5 Differensekvationer

Vi vill lösa $y[k+1] + ay[k] = x[k]$ med villkoret att $k \geq 0$ och att $y[0]$ är given.

Notera att det är på formen $Q(E)y = P(E)x$ där E är vänsterskifte och $Q(z) = z + a$ och $P(z) = 1$.

$Ey[k] = y[k+1]u[k] \overset{z}{\longleftrightarrow}= zY(z) - zy[0]$ ger att $Q(E)y[k] \overset{z}{\longleftrightarrow} zY(z) - zy[0] + aY(z) = (z+a)Y(z) - zy[0] = Q(z)Y(z) - zy[0]$.

$Q(E)y = P(E)x \iff Q(z)Y - zy[0] = X(z) \iff Y(z) = \frac{1}{Q(z)}X(z) + \frac{z}{Q(z)}y[0] = \frac{1}{z+a}X(z) + \frac{z}{z+a}y[0] \iff y[k] = h_a * x[k] + (-a)^k y[0] = \left(\sum_{l=0}^{k}(-a)^{l-1}x[k-l]\right) + (-a)^k y[0]$. Sista $\iff$ -steget görs genom z-transformstabeller. Resten lämnas som övning till läsaren.

18 Föreläsning 19-10-15

18.1 Mer z-transform

Låt $x[k]$ vara en diskret signal. Då är $X(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$.

Exempel 44. $\delta(k-l) \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} z^{-l}$

Exempel 45. $\gamma^k u[k] \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\gamma}$ om $|z| > |\gamma|$

Exempel 46. $\gamma^{k-1} \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z-\gamma}$

18.1.1 Räkneregler

$x[k+1]u[k] \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} z(X(z) - x[0])$

$x[k-1] \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z}X(z)$

$\gamma^k x[k] \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} X(\frac{z}{\gamma})$

$x_1 * x_2 \overset{\ddagger}{\longleftrightarrow} X_1 X_2$

Vi börjar med lite kontext. Om $f(t)$ är en kontinuerlig signal och $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Då är $Df(t) \approx \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ för små h. Vi definierar $x[k] := f(hk)$. Då är $D \approx \frac{1}{h}(E-1)$

där $Ex[k] = x[k+1]$. En differentialekvation är på formen $Q(D)f = P(D)g$ vilket genom approximering som ovan ger en differensekvation $Q\big(\frac{E-1}{h}\big)x_f = P\big(\frac{E-1}{h}\big)x_g$.

18.2 Frekvenssvar

Låt $y = h * x$ vara ett LTI-system. Förra gången såg vi att $h * z^k = H(z) \cdot z^k$. Om vi tar $z = e^{i\Omega}$ och $x[k] = e^{i\Omega k}$ får vi $h * x[k] = H(e^{i\Omega k})x[k]$. Vi brukar kalla H i den ekvationen för frekvenssvar.

18.2.1 Reell form

Låt $x[k] = \cos(\Omega k + \beta)$ där $\Omega, \beta \in \mathbb{R}$. Då är $h * x[k] = \frac{1}{2}h * e^{i(\Omega k+\beta)} + \frac{1}{2}h * e^{-i(\Omega k+\beta)} = \frac{1}{2}\big(H(e^{i\Omega})e^{j(\Omega k+\beta)} + H(e^{-i\Omega})e^{-j(\Omega k+\beta)}\big) = \{\text{om } h \text{ reell är } H(\overline{z}) = \overline{H(z)}\} = \frac{1}{2}\Big(H(e^{i\Omega})e^{j(\Omega k+\beta)} + \overline{H(e^{-i\Omega})e^{-j(\Omega k+\beta)}}\Big) = \mathrm{Re}\big(\big|H(e^{i\Omega})\big|e^{i(\Omega k+\beta)+i\angle H(e^{i\Omega})}\big) = \big|H(e^{i\Omega})\big|\cos\big(\Omega k + \beta + \angle H(e^{i\Omega})\big)$.

18.2.2 Koppling till DFT

Om $x[k]$ är en N-periodisk och kausal signal, d.v.s. $x[k+N] = x[k]\ \forall\ k \geq 0$ och $x[k] = 0$ för $k < 0$.

Då är $Fx[k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-i\frac{2\pi}{N}kl}$.

$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} = \{k = nN + m\} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]z^{-nN-m} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-nN}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]z^{-m} = \{\text{Geometrisk summa}\} = \frac{1}{1-z^{-N}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} x[m]z^{-m}$.
Alltså är $Fx[l] = (1 - z^{-N})X(z)$ för $z = e^{i\frac{2\pi}{N}l}$.

18.3 Differensekvationer

Låt $Q = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $P = b^n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0$ och $Ey[k] = y[k+1]$.

Differensekvationer kan i allmänhet skrivas $\begin{cases} Q(E)y[k] = P(E)x[k] & k \geq 0 \\ x \text{ given och } y[k] \text{ givna för } k = -n, -n+1, \ldots, -2, -1 \end{cases}$.

$Q(E)y = P(E)x \iff y[k] + a_{n-1}y[k-1] + \cdots + a_1 y[k-n+1] + a_0 y[k-n] = b_n x[k] + b_{n-1}x[k-1] + \cdots + b_1 x[k-n+1] + b_0 x[k-n]$ vilken vi delar upp i två ekvationer, zero-state (partikulärlösning) ($Q(E)y_0[k] = P(E)x[k]$ där $y_0[k] = 0$) och zero-input (homogenlösning) ($Q(E)y_{in}[k] = 0$ där $y_{in}[k] = y[k]$).
Exempel 47. Vi börjar med att lösa ett exempel på zero-input.

Låt $Q(z) = z^2 + a_1 z + a_0$, d.v.s. vi vill lösa $y[k] + a_1 y[k-1] + a_0 y[k-2] = 0$ och vi har $y[-2], y[-1]$ givna.

Idén är att använda z-transformen.

differensekvationen ovan ger $0 = \sum_{k=0}^{\infty}(y[k] + a_1 y[k-1] + a_0 y[k-2])z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y[k]z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_1 y[k-1]z^{-k} + \sum_{k=2}^{\infty} a_0 y[k-2]z^{-k} + a_1 y[-1]z^0 + a_0 y[-2]z^0 + a_0 y[-1]z^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} y[k]z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_1 y[k]z^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_0 y[k]z^{-k-2} + a_1 y[-1]z^0 + a_0 y[-2]z^0 + a_0 y[-1]z^{-1} = Y(z) + a_1 \frac{1}{z} Y(z) + a_0 \frac{1}{z^2} Y(z) = \frac{1}{z^2}\big(Q(z)Y(z) + (a_1 y[-1] + a_0 y[-2])z^2 + a_0 y[-1]z\big)$ vilket ger att $Y(z) = \frac{1}{Q(z)}((a_1 y[-1] + a_0 y[-2])z^2 + a_0 y[-1]z) = \frac{\alpha z^2 + \beta z}{Q(z)}$ (Där $\alpha = a_1 y[-1] + a_0 y[-2]$ och $\beta = a_0 y[-1]$) $= \frac{\alpha z^2 + \beta z}{(z-z_+)(z-z_-)}$. Lösningen fås genom att ansätta $y[k] = \begin{cases} Az_+^k + Bz_-^k & \text{om } z_+ \neq z_- \\ Az_+^k + Bkz_+^k & \text{om } z_+ = z_- \end{cases}$. A och B hittas genom $Az_+^{-1} + Bz_-^{-1} = y[-1]$ och $Az_+^{-2} + Bz_-^{-2} = y[-2]$.

(z_+ och z_- är lösningar till $Q(z) = 0$)

Nu löser vi zeroinput för $Q(z) = z^2 + a_1 z + a_0$. För att få fram lösningen utvidgar vi x och y_0 till kausala signaler så att $Q(E)y = P(E)x \implies Y_0(z)\big(1 + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{2} + \cdots + \frac{a_0}{2}\big) = X(z)\Big(b_n + \frac{b_{n-1}}{2} + \frac{b_{n-2}}{2} + \cdots + \frac{b_0}{2}\Big)$ vilket om vi multiplicerar med z^n ger $Q(z)Y_0(z) = P(z)X(z)$, d.v.s. $Y_0(z) = H(z)X(z)$ där $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \iff y_0[k] = h * x[k]$ där h har z-transform H.

$H(z)$ är en rationell funktion, d.v.s. kvoten av två polynom, vilket ger att man får partialbråksuppdela och algebra-a sig till termer vi vet hur man invers-z-transformerar.

Påstående 10. Om $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ där $\deg(P) \leq \deg(Q) = n$ så är $h[k] = b_n\delta[k] + \sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{N_m} c_{l,m} k^l z_m^k$ där $z_1, z_2, \ldots, z_m$ är nollställen till Q och $c_{l,m}$, M och N_m är godtyckliga tal.

Sats 18 (Differensekvationer och stabilitet)**.** Som en följd av det är differensekvationen $Q(E)y[k] = P(E)x[k]$ där $k \geq 0$ och $y[k]$ kända då stabil, d.v.s. $y[k] \xrightarrow{k\to\infty} 0$ när $x[k] \xrightarrow{k\to\infty} 0$ om och endast om $Q(z) = 0$ saknar lösning med $|z| \geq 1$.

Sats 19 (Stabilitet och väldefinierade system)**.** Ett diskret system är stabilt $\iff$ $H(z)$ väldefinierat för $|z| \geq 1$. Det är samma sak som att H saknar poler i $|z| \geq 1$.

18.4 Poler till överföringsfunktioner

Definition 12 (Poler)**.** Låt $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ vara en rationell funktion på reducerad form, d.v.s. P och Q saknar gemensamma nollställen.

$z_0 \in \mathbb{C}$ sägs vara en pol till H om $Q(z_0) = 0$.

Exempel 48. Låt $P(z) = b_1 z + b_0$ och $Q(z) = z^2 + a_1 z + a_0$. Anta också att $Q(\frac{-b_0}{b_1}) \neq 0$ och att $a_0 \neq \frac{a_1^2}{4}$ vilket ser till att P och Q inte är noll samtidigt och att $z_- \neq z_+$.

Då är $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{(z-z_+)(z-z_-)}$ där polerna till H är z_- och z_+. Vad är då h, d.v.s. vad är $z^{-1}(H)$?

Vi skriver $H(z) = \frac{b_1(z-z_+) + b_1 z + b_0}{(z-z_+)(z-z_-)} = \frac{b_1}{z-z_-} + \frac{b_1 z_+ + b_0}{(z-z_+)(z-z_-)} = \{\text{Partialbråksuppdelning}\}$ så att $h[k] = \Big(\frac{b_1 z_- + b_0}{z_- - z_+} z_-^{k-1} + \frac{b_1 z_+ + b_0}{z_+ - z_-} z_+^{k-1}\Big)u[k-1]$.

Vi får alltså att zerostate-lösningen för $y[k+2] + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] = b_1 x[k+1] + b_0 x[k]$ där $y[-2] = y[-1] = 0$ ges av $y = h * x$ där h är som ovan.

Stabilitet $\iff |z_+|, |z_-| < 1$.

19 Föreläsning 19-10-16

19.1 Diskreta LTI-system

De kan beskrivas med differensekvationer. $y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$ vilket om man z-transformerar ger $Y(z) + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) = Y(z)(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}) = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$ vilket vi kallar $Y(z) \cdot A(z) = X(z) \cdot B(z)$. Det ger $Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \cdot X(z)$ där vi kallar kvoten för $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$.

$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ är systemets överföringsfunktion vilket är en kvot mellan två polynom i z^{-1}.

En vanlig form hos z-transformen i våra tillämpningar är som en kvot mellan polynom i z^{-1} eller z, d.v.s. $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$.

Om vi faktoriserar får vi $H(z) = b_0 \cdot \frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$. $z = c_k$ ger nollställen ($\circ$) och $z = d_k$ ger poler ($\times$). Beskrivs grafiskt genom att rita dem med sina tecken i z-planet.

20 Föreläsning 19-10-17

20.1