$$
\begin{array}{lclclclcl}
X(i\omega) & \xleftrightarrow{\text{FT}} & x(t) & \xrightarrow{\text{Sampling}} & X[n] & \xleftrightarrow{\text{DTFT}} & X(e^{i\Omega}) & \overset{\Omega=\Omega_k=\frac{2\pi}{N}k}{\dashrightarrow} & X[k] \\
\text{Kont.} & & \text{Kont.} & & \text{Diskret} & & \text{Kont.} & & \text{Diskret} \\
\text{Icke-per.} & & \text{Icke-per.} & & \text{Icke-per.} & & \text{Per.} & & \text{Per.} \\
 & & & & & & & & \text{DFT/FFT}
\end{array}
$$

0.1 Sammanfattning

Den kontinuerliga signalens Fouriertransform kan erhållas ur den samplade signalens Fouriertransform med $|\Omega| < \pi$ om effekten av aliasing kan göras tillräckligt liten.

0.2 Mer om DFT: Samband mellan k, ω och Ω

$x(t) = \sin(\omega t)$ samplas vid $t = nT \implies x[n] = \sin(\omega T n) = \sin(\Omega n)$.

0.2.1 DFT:s frekvensaxel

Kan vara mot $\Omega = \frac{2\pi}{N}k$, k, $\omega =$ (Om $\Omega = 2\pi$) $\implies \omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_s$ eller $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi}$ i Hz, beror lite på.

Figur 1

Notera uppbyggnaden av syntesekvationen för DFT som ger $x[n]$ utifrån $X[k]$. Den är ju $x[n] = \frac{1}{[}N]\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$, vilket är en superposition av basfunktionen $e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$ vilket vi kallar för $\phi_k[n]$ med viktfunktionen $X[k]$. Några egenskaper för $\phi_k[n]$, där k,$n \in \mathbb{Z}$, är att

- $\phi_k[n+N] = e^{i\frac{2\pi}{N}k(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kN} = \phi_k[n] \cdot 1 = \phi_k[n]$, alltså är den periodisk i n med perioden N.
- $\phi_{k+N}[n] = e^{i\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nN} = \phi_k[n] \cdot 1 = \phi_k[n]$, alltså är den också periodisk i k med perioden N.

Det finns alltså bara N stycken unika bassignaler, d.v.s. $\phi_0[n] = \phi_N[n]$, $\phi_1[n] = \phi_{N+1}[n]$ o.s.v.

Om det är ett heltal antal perioder i samplingen ger det exakt vilket k som ensamt bidrar. Både k och $-k = N - k$ finns med.

"Det ser regelbundet ut, vilket jag är tacksam för."

– Ants om sin EKG

0.3 Introduktion till z-transformen

Låt z vara en komplex variabel, alltså är $z = a + bi = re^{i\Omega}$. Kom också ihåg att $z^n = (re^{i\Omega})^n = r^n e^{i\Omega \cdot n} = r^n(\cos(\Omega n) + i\sin(\Omega n))$. Låt z^n utgöra insignal till ett diskret LTI-system med impulssvar $h[n]$. Faltningssumman ger att $y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^n z^{-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k} := z^n \cdot H(z) = \ddagger\{h[n]\}$ där $H(z)$ är z-transformen av $h[n]$.

Definition 1 (z-transformen)**.** z-transformen av den diskreta signalen $x[n]$ är $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$.