Föreläsningsanteckningar
Transformer, signaler och system
SSY080

Hugo Simonsson

25 september 2019

Innehåll

List of Theorems

1 Föreläsning 19-09-03

I kursen studerar vi tekniska/fysikaliska system och deras egenskaper. Vi kan till exempel vara intresserade av hur de reagerar på olika exciteringar (insignaler). Vi begränsar oss till system med en in- och en utsignal. In- och utsignaler kan vara ex. kraft, tryck, spänning, ström o.s.v. Vi använder oss av matematiska modeller för att beskriva signaler (funktioner) och system (ekvationer).

1.1 Klassificering av signaler

1.1.1 Diskret/Kontinuerlig signal

Kontinuerlig (tid) signal $x(t)$ där $t \in \mathbb{R}$

Diskret (tid/oberoende variabel) signal $x[n]$ där $n \in \mathbb{Z}$

Kontinuerlig amplitud $x(t), x[n] \in \mathbb{R}$

Diskret amplitud $x(t), x[n]$ kvantiserad

Digital signal betecknar vanligen en signal som är diskret både i tid och amplitud.

1.1.2 Jämn/Udda signal

Jämn signal $\forall t, x(t) = x(-t)$ kallas vanligtvis $x_e(t)$

Udda signal $\forall t, x(t) = -x(-t)$ kallas vanligtvis $x_o(t)$

Sats 1. En godtycklig signal $x(t)$ kan alltid delas upp i en jämn signal $x_e(t)$ och en udda signal $x_o(t)$. Den jämna delen $x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$ och den udda delen $x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$

Bevis. $x_e(-t) = \frac{1}{2}(x(-t) + x(t)) = x_e(t)$ och $x_o(-t) = \frac{1}{2}(x(-t) - x(t)) = -\frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) = -x_o(t)$. Summan $x_e(t) + x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t) + x(t) - x(-t)) = x(t)$. □

1.1.3 Periodisk signal

Periodisk signal $\forall t, x(t) = x(t + T)$ där T är en konstant period för signalen.

Exempelvis sinusformad signal, fyrkantsvåg, triangelvåg o.s.v.

Periodisk diskret signal $\forall n, x[n] = x[n + N]$ där $N \in \mathbb{Z}^+$ och konstant.

1.1.4 Deterministisk (Känd, förutsägbar)/Slumpmässig (Stokastisk) signal

En signal kallas slumpmässig om den inte kan förutsägas helt.

Definition 1 (Energisignal)**.** Låt den totala energin vara $E = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$ alt. $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$. Om $0 < E < \infty$ är x en energisignal.

Definition 2 (Effektsignal)**.** Låt medeleffekten $P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$ alt. $P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-\infty}^{N} |x[n]|^2$. Om $0 < P < \infty$ är x en effektsignal.

Notera att för en energisignal gäller $P \to 0$ eftersom $E < \infty$ och på samma sätt gäller att för en effektsignal går $E \to \infty$.

1.2 Signalmanipulering

1.2.1 Amplitudskalning

$y[n] = ax[n] + b$ där vi exempelvis kan kalla a för förstärkning och b inom elektronik för DC-skift. a, b är konstanter. På samma sätt för kontinuerliga signaler $y(t) = ax(t) + b$.

1.2.2 Ändra tidsskala

$y(t) = x(at), a \in \mathbb{R}$ och $y[n] = x[kn], k \in \mathbb{Z}$

1.2.3 Spegling

$\forall t, y(t) = x(-t)$ och $\forall n, y[n] = x[-n]$

1.2.4 (Tids)skift

$y(t) = x(t - t_0)$ och $y[n] = x[n - n_0]$

1.2.5 Samtida operationer

Låt $x(t)$ vara en signal.

Ändra tidsskala så att $t \to at \implies x(at)$ sen en tidsskift $t \to t - t_0' \implies x(a(t - t_0')) = x(at - at_0')$. Nu ändrar vi först tidsskift $t \to t - t_0 \implies x(t - t_0)$ och sen tidsskalan $t \to at \implies x(at - t_0)$. Notera att det är blir olika beroende på i vilken ordning det tas i. För att det ska vara lika måste $at_0' = t_0$.

1.3 Signalmodeller

1.3.1 Komplex exponential (kontinuerlig)

$x(t) = Ce^{at}$ där $C, a, x \in \mathbb{C}$. Komplexa tal förekommer oftast inte i fysikaliska system men är mycket användbara som matematiska modeller. Den fysikaliska signalen kan fås ur $\mathrm{Re}\{x(t)\}$ eller $\mathrm{Im}\{x(t)\}$. Jämför $j\omega$-metoden (phasors) för beräkning av stationära växelströmskretsar.

1.4 Lite repetition av komplexa tal

$\cos(\theta) = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2}$ och $\sin(\theta) = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$.

Tidsvariation $\theta = \omega t$

1.5 Några olika fall

1.5.1 Fall 1

Anta $C, a \in realn$. Då är $x(t) = Ce^{at}$. För $a < 0$ och $C > 0$ beskriver x ett exponentiellt avtagande förlopp. För $a > 0$ beskriver x ett exponentiellt stigande förlopp. Om $a = 0$ är $x(t) = C$.

1.5.2 Fall 2

$a, C \in \mathbb{C}$ och $\mathrm{Re}\{a\} = 0$. Låt $a = j\omega_0$ och $C = Ae^{j\Phi}(= A\angle\Phi)$. $x(t) = Ae^{j\Phi}e^{j\omega_0 t} = Ae^{j(\omega_0 t + \Phi)} = A\cos(\omega_0 t + \Phi) + jA\sin(\omega_0 t + \Phi)$. $\mathrm{Re}\{x(t)\}$ är sinusformad med amplitud A och fasförskjutning Φ. Det är en odämpad sinusformad signal.

1.5.3 Fall 3

$C, a \in \mathbb{C}$. Låt $C = Ae^{j\Phi}$ och $a = \sigma_0 + j\omega$. Då är $x(t) = Ae^{j\Phi}e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}e^{j(\omega_0 t + \Phi)} = Ae^{\sigma_0 t}\cos(\omega_0 t + \Phi) + jAe^{\sigma_0 t}\sin(\omega_0 t + \Phi)$. Om $\sigma_0 < 0$ blir signalen en dämpad sinusformad signal. Om $\sigma_0 > 0$ blir signalen en anti-dämpad sinusformad signal. Om $\sigma_0 = 0$ är det bara fall 2 igen.

1.6 Diskret exponential

Låt $x[n] = Ca^n$. Allmänt är $C, a, x \in \mathbb{C}$ och $n \in \mathbb{Z}$.

1.6.1 Fall 1

$C, a \in \mathbb{R}$. Då gäller $x[n] = Ca^n$. För olika intervall ser graferna ut precis som man kan tänka sig. $a < 0$ gör att tecknet på $x[n]$ växlar och är negativt för udda n.

1.6.2 Fall 2

$C, a \in \mathbb{C}$ men $|a| = 1$. Låt $a = e^{j\Omega_0}$ och $C = Ae^{j\Phi}$. Då är $Ae^{j\Phi}e^{j\Omega_0 n} = Ae^{j(\Omega_0 n+\Phi)} = A\cos(\Omega_0 n + \Phi) + jA\sin(\Omega_0 n + \Phi)$. $x[n]$ är då en diskret odämpad sinusformad signal.

1.6.3 Fall 3

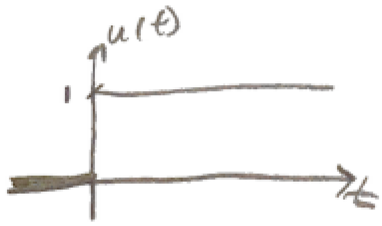
$C, a \in \mathbb{C}$. Låt $C = Ae^{j\Phi}$ och $a = e^{\Sigma_0}e^{j\Omega_0} = e^{\Sigma_0+j\Omega_0}$. Då är $x[n] = Ae^{j\Phi}e^{(\Sigma_0+j\Omega_0)n} = Ae^{\Sigma_0 n}e^{j(\Sigma_0 n+\Phi)}$. Σ_0 bestämmer om signalen blir dämpad eller anti-dämpad.

2 Föreläsning 19-09-05

2.1 Fler signaler

2.1.1 Enhetssteg (kontinuerligt)

Betecknas $u(t) = 1$ om $t \geq 0, 0$ annars.



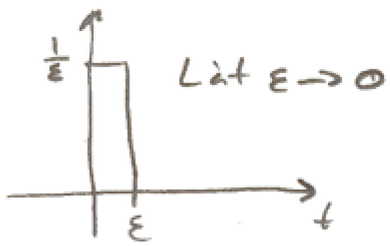
Den används oftast ihop med en generell signal $x(t) \cdot u(t)$ så att den får signalvärden 0 när $t < 0$.

2.1.2 Enhetsimpuls

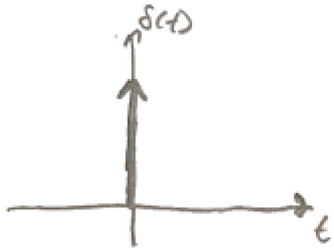
Tekniskt sett inte en ”vanlig” funktion, det är snarare en distribution eftersom den inte har väldefinierade amplitudvärden för alla invärden.

Definition 3. $\delta(t) = 0$ för $t \neq 0$ men $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$

Möjlig grafisk beskrivning:



Det är en ”oändligt kort” signal med en ”oändligt hög” amplitud. Amplituden vid $t = 0$ är inte begränsad. Vår grafiska notation är följande:



Enhetsimpulsen definieras utifrån sina egenskaper.

Låt $f(t)$ vara en godtycklig funktion (signal) som är kontinuerlig vid $t = t_0$. Då är $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$. Vidare gäller

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\mathrm{d}t\\ =&\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0)\mathrm{d}t\\ =&f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\mathrm{d}t\\ =&f(t_0).\end{aligned}$$

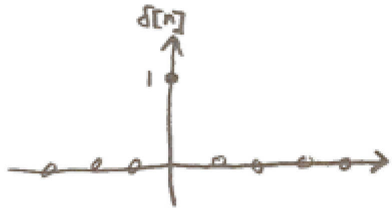
2.1.3 Samband mellan enhetssteg och enhetsimpuls

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau \text{ och } \delta(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}.$$

2.1.4 Diskreta varianter

Motsvarande gäller för diskreta varianter av enhetssteg och enhetsimpuls.

Definition 4. Den diskreta enhetsimpulsen $\delta[n] = 1$ om $n = 0, 0$ annars.



2.1.5 Samband mellan diskreta varianter

$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$ och $u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$

2.2 System

En process där det finns en relation mellan orsak (insignal) och verkan (utsignal). Kan symboliseras som ett vanligt blockschema med en låda och pilar. En matematisk ekvation kan användas för att beskriva systemet, ex. elektriska kretsar och mekaniska system. Oftast differentialekvationer.

2.3 Systemegenskaper

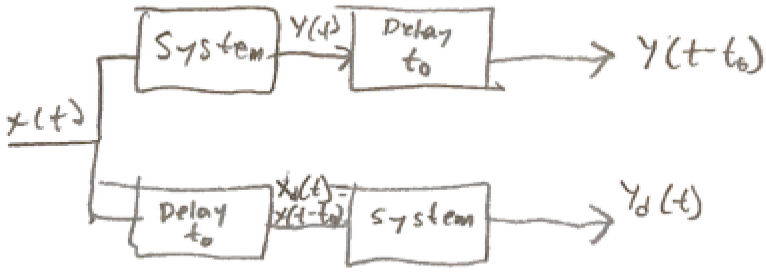
2.3.1 Tidsinvarians

För ett tidsinvariant system gäller

$$\begin{aligned} \text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\ x(t) &\implies y(t) \\ x(t-t_0) &\implies y(t-t_0) \end{aligned}$$

"Nu är det så att jag använder språket svenska."

– Ants Silberberg



Ett system är då tidsinvariant om $y(t-t_0) = y_d(t)$ och samma gäller för ett diskret system.

2.3.2 Linearitet

För ett linjärt system gäller

$$\begin{aligned}
\text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\
x(t) &\implies y(t) \\
a \cdot x(t) &\implies a \cdot y(t), a \text{ konstant (Systemet homogent)} \\
x_1(t) &\implies y_1(t) \\
x_2(t) &\implies y_2(t) \\
x_1(t) + x_2(t) &\implies y_1(t) + y_2(t), \text{ (Systemet additivt)} \\
a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \ldots &\implies a_1y_1(t) + a_2y_2(t) + \ldots \text{ (Kallas superposition)}
\end{aligned}$$

Om ett system är homogent och additivt är det linjärt.

2.3.3 Stabilitet

Ett system är stabilt om en begränsad insignal ger en begränsad utsignal. På engelska BIBO (Bounded input bounded output).

$\forall t |x(t)| < M_x < \infty \implies |y(t)| < M_y < \infty$

2.3.4 Kausalitet

Ett system är kausalt om utsignalen $y(t)$ endast beror på samtida och/eller tidigare värden på insignalen $x(t)$. Alla fysikaliska system är kausala om t är tid.

2.3.5 Minne/Dynamiskt system

Ett system har minne om dess utsignal vid tidpunkten $t_0, y(t_0)$, beror på fler insignaler än bara $x(t_0)$.

Exempel 1 (Spänning över en kondensator)**.** Insignalen är strömmen genom kondensatorn $i(t)$ och utsignalen är spänningen $v(t)$. Då är $v(t) = \frac{1}{(}C) \int\limits_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau + v(0)$. $v(t)$ beror på tidigare värden, alltså är systemet dynamiskt/har minne.

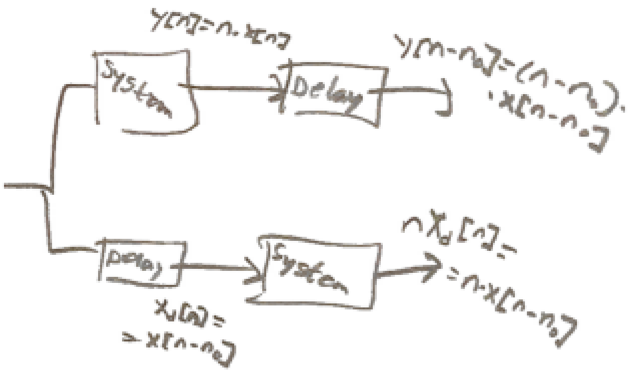
2.3.6 Minneslöshet/Statiskt system

Exempel 2 (Spänning över en resistans)**.** In- och utsignaler som förra exemplet, då är $v(t) = R \cdot i(t)$. Eftersom det bara beror på $i(t)$ och inga andra i är systemet minneslöst/statiskt.

Alla dessa egenskaper gäller även för diskreta system.
Exempel 3 (Diskret exempel)**.**

$$y[n] = n \cdot x[n]$$

Vi ser om det är tidsinvariant.



Inte tidsinvariant eftersom $y_d[n] \neq y[n - n_0]$.

Kollar om det är linjärt:

$$\begin{aligned}
\text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\
x_1[n] &\implies y_1[n] = n \cdot x_1[n] \\
x_2[n] &\implies y_2[n] = n \cdot x_2[n] \\
x_3[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n] &\implies y_3[n] = n \cdot x_3[n] = n(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) = a_1nx_1[n] + a_2nx_2[n] = a_1y_1[n] + a
\end{aligned}$$

Alltså är det linjärt.

Det är inte stabilt eftersom $y[n] = n \cdot x[n]$ inte är begränsat ty n inte är begränsat.
Det är dock kausalt, vilket inses lätt.

3 Föreläsning 19-09-06

3.1 LTI-system

Ett vanligt sätt att karakterisera ett system är att ange dess utsignal för en given och känd insignal. För insignalen $x(t) = \delta(t)$ blir utsignalen $y(t) = h(t)$. Det kallas för systemets *impulssvar*. Motsvarande samband gäller för ett diskret system. Andra vanliga insignaler för att beskriva system är

$$\begin{aligned} \text{In} &\implies \text{ut} \\ \text{Enhetssteg} &\implies \text{Stegsvar} \\ \text{Sinusformad signal med } \omega = \omega_0 &\implies \text{Frekvenssvar} \end{aligned}$$

3.2 Samband mellan insignal, utsignal och LTI-system (i tidsdomänen)

3.2.1 Diskret fall

Anta att vi känner impulssvaret $h[n]$ till ett diskret LTI-system.

Låt $x[n]$ vara en godtycklig diskret signal.

Bilda $x[n]\cdot\delta[n] = x[0]\dot{\delta}[n]$ och därefter bilda $x[n]\cdot\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$. Tydligen kan vi teckna $x[n]$ som en summa av viktade och skiftade enhetsimpulser. Alltså är $x[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$.

För ett LTI-system gäller

$$\begin{aligned} \text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\ \delta[n] &\implies h[n] \\ \delta[n-k] &\implies h[n-k] \\ x[k] \cdot \delta[n-k] &\implies x[k]h[n-k] \\ x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] &\implies y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] \end{aligned}$$

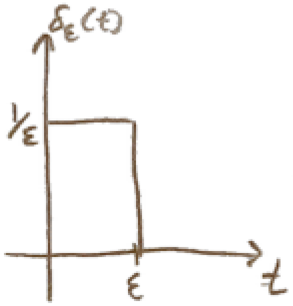
$y[n]$ ovan kallas för Faltningssumman. Förenklat skrivs $y[n] = x[n] * h[n]$. Med en variabelsubstitution kan man visa att $x[n]*h[n] = h[n]*x[n] \implies \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$.

3.2.2 Kontinuerligt fall

Anta att vi känner impulssvaret $h(n)$ till ett kontinuerligt LTI-system. Låt också $x(t)$ vara en godtycklig (in)signal och låt $\hat{x}(t)$ vara en approximation av $x(t)$ där

$\hat{x}(t)$ är summan av pulserna $x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ o.s.v.

Vi definierar en enhetspuls som $\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}$ när $0 \leq t < \epsilon$ och 0 annars.



Våra pulser kan vi nu teckna som $\ldots, x_{-1} = \delta_\epsilon(t+\epsilon)x(-\epsilon)\epsilon, x_0 = \delta_\epsilon(t)x(0)\epsilon, x_1 = \delta_\epsilon(t-\epsilon)x(\epsilon)\epsilon, \ldots$ och $\hat{x}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon$. Låt $h_\epsilon(t)$ vara systemets utsignal för insignalen $\delta_\epsilon(t)$ (pulssvar). För ett LTI-system gäller då

$$\begin{aligned}
\text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\
\delta_\epsilon(t) &\implies h_\epsilon(t) \\
\delta_\epsilon(t-k\epsilon) &\implies h_\epsilon(t-k\epsilon) \\
\delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon &\implies h_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon = \hat{x}(t) &\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon = \hat{y}(t)
\end{aligned}$$

Låt $\epsilon \to 0$, då gäller

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon(t) &\to \delta(t) \\
h_\epsilon(t) &\to h(t) \\
k\epsilon &\to \tau \text{ (En kontinuerlig variabel)}\epsilon \qquad\qquad \to \mathrm{d}\tau \\
\sum &\to \int \\
\hat{x}(t) &\to x(t) \\
\hat{y}(t) &\to y(t)
\end{aligned}$$

Vi får då

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

vilket kallas faltningsintegralen. Förenklat skrivsätt är $y(t) = h(t) * x(t)$. Genom en variabelsubstitution kan man visa $h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$, alltså att $\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau$

"Det är backe upp här och backe ner där."

– Ants Silberberg

3.3 Systemegenskaper kopplade till impulssvar

3.3.1 Kausalt LTI-system

Diskret: $h[k] = 0$ för $k < 0$ och därmed $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$. Motsvarande gäller för kontinuerliga system: $y(n) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

3.3.2 Stabilt LTI-system

Diskret: Anta $\forall n : |x[n]| \leq M_x < \infty$ d.v.s. att insignalen är begränsad. Utifrån det kan vi resonera att $|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right|$ och eftersom $|a+b| \leq |a| + |b|$ gäller $|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]|$ och än en gång, eftersom $|ab| = |a| \cdot |b|$ får vi $|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$ men eftersom $|x[k]| \leq M_x$ vet vi att $|y[n]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$. Med kravet på stabila system att $\forall n : |y[n]| < \infty$ följer villkoret $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$. Det kallar man att impulssvaret är absolutsummerbart. Samma gäller för kontinuerliga system, då får man villkoret $\int_{\infty}^{\infty} |h(\tau)|\mathrm{d}\tau < \infty$ och det kallas för att impulssvaret är absolutintegrerbart.

4 Föreläsning 19-09-10

4.1 Diff. ekvationer

Vi kommer att titta på (LTIC-)system som beskrivs med $Q(D)y = P(D)x$ eller $Q[E]y = P[E]x$ i det diskreta fallet där $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ och $Ef[k] = f[k+1]$. Systemen är kausala, d.v.s. alltid $= 0$ för $t < 0$ eller $k < 0$. Alltså har vi ett begynnelsetillstånd. Den allmänna lösningen är $y = y_0 + y_i$ där y_0 är zerostate och y_i är zeroinput. Vanligtvis är $y_0 = h * x$, d.v.s. någon slags faltning.

Notation: $Q(D) = D^m + a_{m-1}D^{m-1} + \cdots + a_1 D + a_0$ där $m = ord(Q)$

4.1.1 Kontinuerliga fallet

$Q(D)y = P(d)x$ och $y^{(k)}(0)$ är givna för $k = 0, \ldots, \mathrm{ord}(Q) - 1$.

Först löser vi $Q(D)y_0 = P(D)f$ för $y^{(k)}(0) = 0$. Sedan löser vi $Q(D)y_i = 0$ givet $y_i^{(k)}(0) = y^{(k)}(0)$. Detta är partikulär- och homogenlösningar i "vanliga" termer. $y_0 = h * x$ där h är impulssvaret.

Exempel 4. Anta $y' + ay = x$, $y(0) = b$, $Q(D) = D + a$ och $P(D) = 1$.

Eftersom systemet är tidsinvariant är a en konstant. Först löser vi $y_0' + ay_0 = x$ givet $y_0(0) = 0$. Sedan komemr vi att lösa $y_i' + ay_i = 0$ givet $y_i(0) = b$. Vi använder integrerande faktor, d.v.s. $(e^g y)' = (y' + g'y)e^g$ men eftersom vi veta har vi $g' = a \implies g = at$. Alltså är $e^{at}(y_0' + ay_0) = (e^{at}y_0)'$ och därmed

$$(e^{at}y_0)' = xe^{at} \implies e^{at}y_0(t) = e^{a0}y_0(0) + \int_0^t x(s)e^{as}\mathrm{d}s = \int_0^t x(s)e^{as}\mathrm{d}s \implies$$

$$y_0(t) = \int_0^t x(s)e^{a(s-t)}\mathrm{d}s = \int_0^t x(s)e^{-a(t-s)}\mathrm{d}s = x * h_{-a}(t) \text{ där } h_{-a}(t) = e^{at}u(t).$$

Alltså $y_0 = x * h_{-a}(t)$. Nu kollar vi om y_0 är en lösning vårt inledande problem. Först kollar vi om $y_0(0) = 0$ och det är fine eftersom det då blir en integral från 0 till 0, vilket är 0. Nu kollar vi om $y_0' + ay_0 = x$. $y_0' = x(t)e^{-a(t-t)} - a\int_0^t x(s)e^{-a(t-s)}\mathrm{d}s = x(t) - ay_0(t)$

Nu löser vi för y_i. $y_i' + ay_i = 0 \iff (e^{at}y_i) = 0 \iff e^{at}y_i(t) = y_i(0) = b \iff y_i(t) = be^{-at}$.

Alltså är $y(t) = be^{-at} + x * h_{-a}(t)$

"Det verkar trivialt att $t - t = 0$ men det är det som räddar oss."

– Mattesnubben

4.1.2 Stabilitet i kausala fall

Om $\int_0^\infty |h(t)|\mathrm{d}t < \infty$. $h(t) = h_{-a}(t) = e^{-at}u(t)$. $\int_0^\infty |h(t)|\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\{a\}t}$ vilket är ändligt om $\operatorname{Re}\{a\} > 0$ och oändligt annars.

Exempel 5. Lös $y'' + a_1y' + a_0y = x$ där $y(0)$ och $y'(0)$ givna. Vi vet att $P(D) = 1$ och $Q(D) = D^2 + a_1D + a_0$.

Vi börjar med att lösa ekvationen $Q(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Lösningarna till $Q(\lambda) = 0$ är $\lambda_\pm = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \implies Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-)$.

Några exempel, om $a_1 = 0$ får vi $\lambda_\pm = \pm\sqrt{-a_0} \implies \lambda^2 + a_0 = (\lambda - \sqrt{-a_0})(\lambda + \sqrt{-a_0})$, om $a_0 = 0$ får vi $\lambda_\pm = 0$ eller $-a_1 \implies \lambda(\lambda 2 + a_1)$.

Vi börjar med att lösa zeroinput-lösningen. Observera att $D^n(e^{\lambda t}) = \lambda^n e^{\lambda t} \implies Q(D)e^{\lambda t} = Q(\lambda)e^{\lambda t} \implies Q(D)(\mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 e^{\lambda_- t}) = 0$. Om $\lambda_+ \neq \lambda_-$ hittar vi y_i genom ansatsen $y_i(t) = \mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 e^{\lambda_- t}$ så att $y_i(0) = \mu_1 + \mu_2$ och $y_i'(0) = \mu_1\lambda_+ + \mu_2\lambda_-$.

Observera nu också att $Q(D)(te^{\lambda t}) = Q'(\lambda)e^{\lambda t} + Q(\lambda)te^{\lambda t}$. Om $\lambda_+ = \lambda_-$, d.v.s. att $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)^2$ gäller $Q(D)(\mu_1 e^{\lambda_+ t} + \mu_2 te^{\lambda_+ t}) = 0$. Ansätt $y_i(t) = \mu_1 e^{\lambda_+ t} +$

$\mu_2 te^{\lambda_- t}$ och finn μ_1 och μ_2 från $y_i(0) = \mu_1$ och $y_i'(0) = \lambda_+\mu_+ + \mu_2$.

Nu löser vi zerostate: $Q(D) = (D - \lambda_+)(D - \lambda_-)$. Notera att $D^n(h * f) = (D^n h) * f$, vilket går att bevisa relativt lätt. Eftersom faltning är kommutativt kan vi även derivera f.

$Q(D)(h * f) = (Q(D)h) * f$. Ansätt $h = h_{\lambda_+} * h_{\lambda_-}$.

Ansätt också $y_0 = h * f$, då är $(D - \lambda_-)y_0 = h_{\lambda_+} * f$ och $h_{\lambda_+} * f(0) = 0$.

Jag orkade inte anteckna här, massa steg typ. Det blir enklare med Laplace.

"Vad kom μ ifrån?"
"Från ovan!"

– Person som frågade och mattesnubben

"Om vi nu delar den här skiten."

– Mattesnubben

4.2 Diskreta fallet

I det diskreta fallet har vi ekvationen $Q(E)y = P(E)x$ där $E(f[k]) = f[k+1]$ och har $y[-k]$ givna för $k = 0, \dots, ord(Q) - 1$. Funkar annars på samma sätt förutom att D ersätts med E och $y(0)$ med $y[-k]$.

I kontinuerliga fall har vi $D(e^{\lambda} t) = \lambda e^{\lambda t}$ som genom $e_a[k] = a^k$ motsvaras av $E(e_a[k]) = e_a[k+1] = a^{k+1} = a \cdot a^k = ae_a$.
Exempel 6. Vi löser $y[k+1] + ay[k] = x[k]$ där $y[0]$ är given.

Vi har $Q(E) = E + a$. Vi börjar med att lösa y_i, d.v.s. $Q(E)y_i = 0$ och $y_i[0] = y[0]$. Ansätt $y_i = ce_{-a}$ så att $(E+a)e_{-a} = 0$. Då har vi $y_i[0] = ce_{-a}[0] = c = y[0]$ och därmed $y_i[k] = y_i[0]a^k$.

Nu löser vi för y_0, då börjar vi med att ansätta $h[k] = h_{-a}[k] = e_a[k]u[k]$ och $y_0 = h * x$.

$E(h * x[m]) = \displaystyle\sum_{l=1}^{m+1} h[l]x[m+1-l] = \sum_{l=1}^{m} h[l+1]x[m-l] + h[1]x[m]$ eftersom $h * x = \text{ (om båda är kausala) } = \displaystyle\sum_{l=0}^{m} h[l]x[m-l] = \sum_{l=1}^{m} h[l]x[m-l]$. Allt som allt gäller $E(h * x) = ah * x + ax$. Alltså $y_0 = \frac{1}{a} h * x$ vilket löser det ville innan.

"Det kommer bara bli blodsspillan om vi har k där"

– Mattesnubben

"Vad gör vi nu, vad gör vi här, vem är jag?"

– Mattesnubben

"Nu börjar det lukta fågel"

– Mattesnubben

"När jag var i Tyskland var jag tvungen att dra bajsskämt för att det skulle gå, men här verkar det funka ändå."

– Mattesnubben

"Fourier-serier är något extremt vackert, tårar kommer att fällas."

– Mattesnubben

5 Föreläsning 19-09-12

5.1 Approximation av signaler

Låt f vara en signal och x vara en modellsignal som vi förstår. Vi vill modellera f m.h.a. x, så ungefär $f \approx cx \implies$ Ett fel $e = f - cx$.

Kom ihåg linalgens "inre produktrum":

V är ett vektorrum över $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, en inre/skalär produkt på V. Den uppfyller $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle x, x \rangle \geq 0 (= 0 \iff x = 0)$ och $\langle x, \lambda y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle \lambda + \langle x, y_2 \rangle$.

f_1, f_2 är signaler, då är här $\langle f_1, f_2 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{f_1}(t) f_2(t) \mathrm{d}t$.

I det periodiska fallet är $\langle f_1, f_2 \rangle = \int\limits_{0}^{T} \bar{f_1}(t) f_2(t) \mathrm{d}t$.

Mellan två signaler f_1, f_2 har vi en vinkel θ som definieras genom $\cos(\theta) = \dfrac{\langle f_1, f_2 \rangle}{|f_1| \cdot |f_2|}$ där $|f| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Felet e är litet om $|e|$ är litet. När är då $|e|$ som minst? D.v.s. vad är min $|f - cx|$ över $\mathbb{C}$? Går att härleda att det uppnås för $c = \dfrac{\langle x, f \rangle}{|x|^2}$. Det betyder att $f \approx \dfrac{\langle x, f \rangle}{|x|^2} x$.

"Jag växte också upp på Lindholmen."

– Mattesnubben

Om f är en signal definierad för $-\infty < t < \infty$ är dess energi $E_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = |f|^2$.

Om f_1, f_2 är signaler definierade för $-\infty < t < \infty$ är $\frac{\int\limits_{-\infty} \infty f_1(t) f_2(t) \mathrm{d}t}{\sqrt{E_{f_1} E_{f_2}}} = \frac{\langle f_1, f_2 \rangle}{|f_2||f_2|}$ korrelationen mellan signalerna. Den är 1 $\iff f_1 = f_2$ och $-1 \iff f_1 = -f_2$.

Anta att vi har flera modellsignaler $x_1, x_2, \ldots, x_N$ så att $f \approx c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_N x_N$. Vi vill då minimera $e = f - \sum\limits_{n=1}^{N} c_k e_k$. Det uppnås för $c_k = \frac{\langle x_n, f \rangle}{|x_n|^2}$ **OM** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ inte är korrelerade, d.v.s. de är ortogonala eller den inre/skalärprodukten är 0.

5.2 Fourierserier

Fourierserier appliceras på periodiska signaler. Låt f vara en signal med period T.

Vi tittar på följande modellsignaler: $\{1, \cos(\omega_0 t), \ldots, \cos(N\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \ldots, \sin(N\omega_0 t)\}$.

$\langle \cos(k\omega_0 t), \cos(l\omega_0 t) \rangle = \int\limits_0^T \cos(k\omega_0 t) \cos(l\omega_0 t) \mathrm{d}t = \int\limits_0^T \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} \frac{e^{jl\omega_0 t} + e^{-jl\omega_0 t}}{2} \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \int\limits_0^T e^{j(k+l)\omega_0 t} + e^{j(k-l)\omega_0 t} + e^{j(-k+l)\omega_0 t} + e^{-j(k+l)\omega_0 t} \mathrm{d}t = T$ om $k = l = 0$, $\frac{T}{2}$ om $k = l > 0, 0$ annars. På samma sätt är $\int\limits_0^T \cos(k\omega_0 t) \sin(l\omega_0 t) \mathrm{d}t = 0$ och $\int\limits_0^T \sin(k\omega_0 t) \sin(l\omega_0 t) \mathrm{d}t = \frac{T}{2}$ om $k = l$ och 0 annars.

Alltså är den bästa approximationen

$$f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$$

där $a_k = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(t) \cos(k\omega_0 t) \mathrm{d}t = \frac{\langle \cos(k\omega_0 t), f \rangle}{|\cos(k\omega_0 t)|^2}$ och $b_k = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(t) \sin(k\omega_0 t) \mathrm{d}t =$

$\dfrac{\langle \sin(k\omega_0 t), f\rangle}{|\sin(k\omega_0 t)|^2}$.

Sats 2. Om f är T-periodisk och $\int\limits_0^T |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ existerar a_k och b_k.

Sats 3. Om f dessutom är kontinuerlig på intervallet på $0 \leq t \leq T$ utom i ändligt många punkter och $f(t+) = \lim\limits_{h\to 0} f(t+h)$ och $f(t-) = \lim\limits_{h\to 0} f(t-h)$ existerar för alla t så är $\dfrac{f(t+)+f(t-)}{2} = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t)$.

"Det här är högst icke-trivialt."

– Mattesnubben

"Om man stoppar in något i datorn som inte konvergerar kommer det gå åt röven."

– Mattesnubben

Exempel 7.

Vi har ju $f = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t)$, för $k \geq 0$ har vi $a_k = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} \cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t = 1$ för $k = 0$, $\dfrac{2}{Tk\omega_0}[\sin(k\omega_0 t)]_0^{\frac{T}{2}} =$ 1 för $k = 0, 0$ annars. och för $k > 0$ har vi $b_k = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin(k\omega_0 t)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} \sin(k\omega_0 t)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{Tk\omega_0}[-\cos(k\omega_0 t)]_0^{\frac{T}{2}} = \dfrac{1}{\pi k}(-\cos(k\pi)+1) = \dfrac{1}{\pi k}(-(-1)^k+1) = 0$ för $k = 2m$ och $\dfrac{2}{\pi(2m+1)}$ annars.

$f = \frac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{\sin((2m+1)\omega_0 t)}{\pi(2m+1)}$

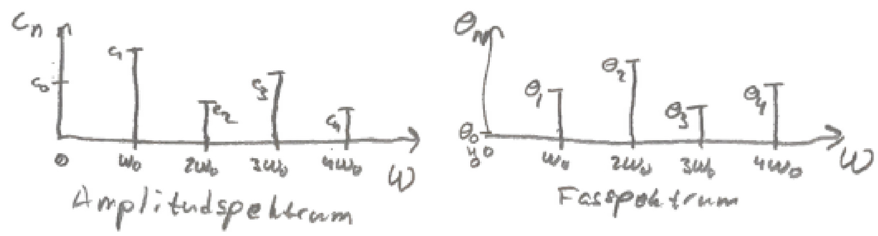
5.2.1 Kompakt form

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(k\omega_0 t + \theta_n)
\end{aligned}
$$

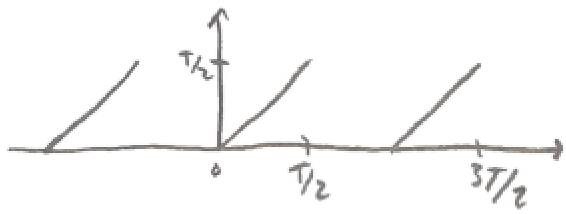
$c_n \cos(k\omega_0 t + \theta_n) = c_n \cos(\theta_n)\cos(k\omega_0 t) - c_n \sin(\theta_n)\sin(k\omega_0 t)$

$\tan(\theta_n) = \dfrac{-b_n}{a_n}$ och $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$

5.3 Frekvensspektrum



Används för att visualisera fourierserier.



Exempel 8.

$f = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t)$, och vi börjar med fallet där $k > 0$. Då är $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t$ och med partiell integrering får vi $a_n = \dfrac{2}{T}\left[t\dfrac{\sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} \dfrac{\sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\mathrm{d}t = 0 + \dfrac{2}{T\omega_0^2 k^2}\left[\cos(k\omega_0 t)\right]_0^{\frac{T}{2}} = 0$ när $k = 2m$, $\dfrac{-2}{\pi\omega_0(2m+1)^2}$ annars. Vi har också $a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} t\mathrm{d}t = \dfrac{T}{2}$.

Om man räknar på b_n blir det likt, men till slut får vi $f = \frac{T}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-\cos((2m+1)\omega_0 t)}{\omega_0 (2m+1)^2} + \frac{\sin((2m+1)\omega_0 t)}{2m+1}$ eller i kompakt form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos((2n+1)\omega_0 t + \theta_n)$ där $\theta_n = \arctan\left(\frac{-b_{2n+1}}{a_{2n+1}}\right) = \arctan(\omega_0(2n+1))$.

6 Föreläsning 19-09-17

6.1 Diskret Fouriertransform

Idén för att göra den diskret är sampling. Det innebär att man väljer en upplösning N så att man tar värdet på funktionen i punkterna $0, \epsilon, 2\epsilon, \ldots$ där $\epsilon = \frac{T}{N}$. Alltså approximerar vi f m.h.a. $f(\frac{kT}{N})$ där N går från 0 till $N-1$.

Ansats 1. $D[n] = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{kT}{N}}^{\frac{k+1}{T}N} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-i\omega_0 n \frac{kT}{N}} \mathrm{d}t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$

$D_x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$

6.1.1 Syntes

$x[k] = \sum_{k=0}^{N-1} D_x[n] e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$

"Ni fnissar på tok för lite"

– Mattesnubben om den k:te punkten

"Jag har approximerat allt med en konstant, så det är ganska grovt."

– Mattesnubben

Anledning till att det här gäller är följande:

Steg 1 $1 - z^N = (1-z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1} - z - z^2 - \cdots - z^{N-1} - z^N$

Steg 2 $z_k = e^{\frac{2\pi i}{N}k}$ uppfyller $z_k^N = 1$

Steg 3 $1 + z_k + z_k^2 + \cdots \ z_k^{N-1}$ är antingen N när $k = 0$ och 0 annars.

$HL = \sum_{n=0} N - 1 D_x[n] z_k^n = \frac{1}{N} \sum_{n,l=0}^{N-1} x[l] z_{-l}^n z_k^n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[l] z_{k-l}^n \right) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x[k] =$ $x[k]$

6.2 Fouriertransformen

Här kollar vi på signaler $f(t), -\infty < t < \infty$.

För $T >> t$ kan vi skriva $f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) e^{-i\frac{2\pi k}{T}u} \mathrm{d}u \right) e^{i\frac{2\pi k}{T}t}$

$\omega = \dfrac{2\pi k}{T}$

Definition 5 (Fouriertransformen)**.** $F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{j\omega u} \mathrm{d}u$

Sats 4 (Rekonstruktion av signal från Fourierserie)**.** $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} F(i\omega) e^{ij\omega t}$

Låt $y = h * x$ vara ett LTI-system. Då är $H(i\omega)$ överföringsfunktionen och om vi tar $x(t) = e^{i\omega t}$ så är $y(t) = h * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{i\omega(t-a)} \mathrm{d}u = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-i\omega u} \mathrm{d}u =$ $e^{i\omega t} H(i\omega)$.

När man tar $h * \cos(\omega t + \theta) = |H(i\omega)| \cos(\omega t + \theta + \angle H(i\omega))$

"Keepin' it real"

– Mattesnubben om cosinus-funktioner

Exempel 9. Låt $f_1(t) = e^{-at} u(t)$ där $a > 0$. Räkna ut $F_1(i\omega)$.

$F_1(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega}.$

Exempel 10. Låt $f_2(t) = e^{-a|t|}$. Räkna ut F_2.

Notera att $f_2 = f_1(t) + f_1(-t)$ där f_1 kommer från förra exemplet.

Låt $f_{op}(t) = f(-t)$. $F_{op}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = (u = -t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(-\omega u)} =$ $F(-i\omega)$. Alltså är $F_2(i\omega) = F_1(i\omega) + F_1(i\omega) = \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Sats 5 (Linearitet av Fouriertransformer)**.** Fouriertransformen är linjär, d.v.s. om $f = f_1 + \lambda \cdot f_2$ är $F = F_1 + \lambda \cdot F_2$.

Bevis. Visas lätt från definitionen av Fouriertransformen och faktumet att integrering är linjärt. $\square$

6.3 $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)x(t)\mathrm{d}t = x(a)$$

Fouriertransformen av $\delta(t)$ är då $F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = e^{-i\omega a}$.

6.4 Transformpar

Ett transformpar är paret $(f(t), F(i\omega))$, d.v.s. $f(t)$ svarar mot $F(i\omega)$. Exempelvis svarar $e^{-at}u(t)$ mot $\frac{1}{a+i\omega}$.

Exempel 11. Låt $f(t) = \dfrac{2a}{a^2+t^2}$. $F(t)$ är då

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+t^2} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+t^2} e^{j(-\omega)t}\mathrm{d}t \\
&= \text{ (via syntesformeln)} \\
&= 2\pi e^{-a|-\omega|} \\
&= 2\pi e^{-a|\omega|}.
\end{aligned}$$

"Lägg inte in någon magi i detta, bara lite fantasi."

– Mattesnubben

Påstående 1. $(f(t), F(i\omega))$ är ett transformpar $\iff$ $(F(-it), 2\pi f(\omega))$ är ett transformpar.

Exempel 12. $(\delta(t-a), e^{-i\omega a})$ är ett transformpar.

Alltså är $(e^{ita}, 2\pi \cdot \delta(\omega - a))$ ett transformpar.

En ren frekvens a ger en Fouriertransform som är $\delta(t-a)$.

Följande gäller:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{i\omega(u-t)}\mathrm{d}u\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)2\pi\delta(t-u)\mathrm{d}u \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

6.5 Periodisk återblick

Låt x vara en T-periodisk signal. Då vet vi att vi kan skriva $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_0 kt}$.

Lineariteten av Fouriertransformen ger då $X(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\delta(\omega - k\omega_0)$.

6.6 Faltning

Låt x_1, x_2 vara signaler. Då är $x_1 * x_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(t-u)\mathrm{d}u$.

Påstående 2. $x_1 * x_2$ är ett transformpar med X_1X_2.
Exempel 13. Låt $x_1 = \delta(t-b), x_2 = \delta(t-a)$.

Då är $x_1 * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u-b)\delta(t-u-a)\mathrm{d}u = \delta(t-b-a)$.

Fouriertransformen av $x_1 * x_2 = e^{-i(a+b)t} = e^{-iat}e^{ibt} = X_1(i\omega)X_2(i\omega)$.

Bevis.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x_1 * x_2 e^{-i\omega t}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(t-u)e^{-i\omega t}\mathrm{d}u\mathrm{d}t \\
&= \text{(Variabelbyte där } v = t-u\text{)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(v)e^{-i\omega(v+u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)e^{-i\omega u}x_2(v)e^{-i\omega v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)e^{-i\omega u}\mathrm{d}u \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2(v)e^{-i\omega v}\mathrm{d}v \\
&= X_1(i\omega)\cdot X_2(i\omega)
\end{aligned}$$

□

Påstående 3. $x_1(t)x_2(t)$ är ett transformpar med $2\pi X_1 * X_2(-i\omega)$.

$x(t)\delta(t-a) = x(a)\delta(t-a)$ ger att $H(i\omega)X(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(i\omega_0 k)\delta(\omega - k\omega_0)$.

7 Föreläsning 19-09-18

7.1 Egenskaper hos Fouriertransformen

"Det är naturligtvis lite mer delikat än så."

– Pokèmon #109

Om $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ är alltid $F(i\omega)$ kontinuerlig och $\lim_{|\omega|\to\infty} F(i\omega) = 0$.

Exempel 14. Om $f = \delta$ saknar $\int |f|\mathrm{d}t$ mening. Trots det är $F(i\omega) = 1$ kontinuerlig, men $\lim_{|\omega|\to\infty} = 1 \neq 0$.

Exempel 15. $f(t) = e^{-|a|t}$ bildar transformpar med $F(i\omega) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$.

$f(t) = e^{-at}u(t)$ bildar transformpar med $F(i\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$.

7.2 Räkneregler för Fouriertransformen

Sats 6 (Linearitet av Fouriertransformen)**.** Om $Af_1(t) + Bf_2(t)$ är dess Fouriertransform $AF_1(i\omega) + BF_2(i\omega)$.

Sats 7 (Tidsskalning Fouriertransform)**.** Om $f(at)$ när $a \neq 0$ är dess Fouriertransform $\frac{1}{|a|}F(\frac{i\omega}{a})$.

Bevis. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \{u = at \implies \mathrm{d}u = a\mathrm{d}t\} = \frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u}\mathrm{d}u.$ □

Sats 8 (Tidsskifte Fouriertransform)**.** Om $f(t+a)$ är dess Fouriertransform $e^{i\omega a}F(i\omega)$.

Bevis. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t+a)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \{u = t+a\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\omega a}e^{-i\omega u}\mathrm{d}u = e^{i\omega a}F(i\omega).$

□

Exempel 16. Låt $f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, |t| \leq a \\ 0, \text{ annars} \end{cases}$.

Då är $\displaystyle F_1(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2a} = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{t=-a}^{a} =$ $\displaystyle\frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{2i}\frac{1}{\omega a} = \frac{\sin(\omega a)}{\omega a}.$

Låt x vara en signal. Då är $\displaystyle f_1 * x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(s)x(t-s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x(t-s)\mathrm{d}s$ vilket är medelvärdet av $x(t)$ i punkten t när man går a steg till både höger och vänster. Inses rätt lätt om man ritar upp det.

$f_1 * x$ bildat transformpar med $\frac{\sin(\omega a)}{\omega a}X(i\omega)$.

Sats 9 (Derivata och Fouriertransform)**.** Om $f(t)$ är en signal bildar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$ ett transformpar med $i\omega F(i\omega)$.

Bevis. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t =$ (med partiell integration och antagandet att f går mot 0 i oändligheten) $\displaystyle= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t}\right)\mathrm{d}t = i\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$ □

Exempel 17. Tillbaka till förra exemplet, vad är f_1'?

Jo, f_1' kan definieras av att $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(t)x(t)\mathrm{d}t = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t)x'(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x'(t)\mathrm{d}t =$ $\displaystyle\frac{1}{2a}(x(-a) - x(a)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a}(\delta(t+a) - \delta(t-a))x(t)\mathrm{d}t$. Alltså är $f_1' = \frac{1}{2a}(\delta(t+a) - \delta(t-a))$.

Om man tittar på grafen för f_1 kan man, om man tänker på vad derivatan måste vara i varje punkt, se att detta är rimligt.

Vi vill kolla att detta stämmer. $f_1' = \frac{1}{2a}(\delta(t+a) - \delta(t-a))$ bildar transformpar med $\frac{1}{2a}(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = i\omega\frac{1}{2ia\omega}(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = i\omega\frac{1}{a\omega}\sin(a\omega) = i\omega F_1(i\omega)$, vilket är rimligt med tanke på tidigare räkneregler.

Sats 10 (Fouriertransform för $t \cdot f(t)$)**.** Om vi har en signal $t \cdot f(t)$ bildar det ett transformpar med $i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(i\omega)$.

Bevis. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)te^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t =$ $\displaystyle i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$ □

"Låt oss vara lite casual"

– Pokémon #109 om räkneregler

VARNING: I boken skrivs $F(\omega)$ för Fouriertransformen i kapitel < 6 men $F(i\omega)$ i kapitel ≥ 6.

Exempel 18. Låt $f_2(t) = e^{-at^2}, a > 0$. Vad är Fouriertransformen F_2?

Vi ska ta en systemapproach istället för att göra jobbiga integraler.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t) = -2te^{-at^2} = -2atf_2(t)$, d.v.s. $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2at)f_2(t) = 0 \iff (i\omega + 2ai\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega})F_2 = 0 \iff (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} + \frac{1}{2a}\omega)F_2 = 0 \iff F_2(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4a}} \implies C = F_2(\omega = 0) \cdot e^{\frac{0^2}{4a}} = F_2(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Alltså bildar e^{-at^2} transformpar med $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

Anmärkning 1. f_2 avtar superexponentiellt när $t \to \pm\infty$, d.v.s. f_2 inte en lösning till en stabil LTI.

"Den går snabbare än örnen mot noll."

– Pokèmon #109

Vad betyder egentligen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$?

Jo, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h * x) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} * x = h * \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ är också tidsinvariant, vilket betyder att det måste ges av någon faltning. Vad för h uppfyller att $h * x?\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x$?

$x(t) = \int x(u)\delta(t-u)\mathrm{d}u = x * \delta(t) = \delta * x(t)$. Då är $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta * x) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta) * x$. δ definieras av att $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)\mathrm{d}t = x(0)$, alltså måste $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x'(t)\mathrm{d}t$ så att δ' definieras av $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)\mathrm{d}t = -x'(0)$. Då är $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \delta' * x$.

Sats 11 (Sambandet mellan $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ och δ')**.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \delta' * x$

Bevis. Se ovan. $\square$

Exempel 19. Vad är Fouriertransformen av δ'?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \{e^{-i\omega t} = x(t)\} = -x'(0) = -i\omega$$

Exempel 20. Skriv $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a^2)y = x$ som en LTI på formen $y = h * x$.

$(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a^2)y$ bildar transformpar med $(-(i\omega)^2 + a^2)Y = (\omega^2 + a^2)Y$.

$(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a^2)y = x \iff (\omega^2 + a^2)Y = X \iff Y = \frac{1}{\omega^2+a^2}X \iff y = h * x$ för ett h s.a. $H(i\omega) = \frac{1}{\omega^2+a^2}$.

e^{-at} har en Fouriertransform $\frac{2a}{a^2+\omega^2}$, då har $h(t) = \frac{1}{2a}e^{-at}$ överföringsfunktion $H(i\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$.

Då får vi från ursprungliga problemet $h * x(t) = y(t) = \frac{1}{2a}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t-u|}x(u)\mathrm{d}u$.

"En pil säger mer än två ord i det här fallet"

– Pokèmon #109

Sats 12. Låt f vara en signal. Då har $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$ Fouriertransform $\frac{F(i\omega)}{i\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$.

Bevis. Idén bakom beviset är att $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f * u$.

Eftersom $f * u$ bildar transformpar med FU vill vi visa att det är lika med $F(i\omega)\left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right)$. Vi vill alltså att $U(i\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$.

Eftersom $u' = \delta$ får vi att det bildar transformpar med $i\omega U(i\omega) = 1 \implies U(i\omega) = \frac{1}{i\omega}$.

Man får i någon mån halva bidraget från den konstanta funktionen 1, vilket är $2\pi\delta(\omega)$, alltså får vi en faktor $\pi\delta(\omega)$ i lösningen. $\square$

Om $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$ måste $F(0) = 0$.

7.3 Plancherels sats

Sats 13. Låt $L^2(-\infty,\infty) = \{$ signaler f med ändlig energi $\}$ Kom ihåg att energin $E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$. Kom också ihåg $\langle f_1, f_2\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t)\mathrm{d}t$. Då är, för $f_1, f_2 \in L^2(-\infty,\infty)$, både F_1 och $F_2 \in L^2(-\infty,\infty)$. Vidare är $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t)\mathrm{d}t$.

8 Föreläsning 19-09-19

8.1 Fourierserier och -transformer

Påminnelse 1. Kom ihåg Eulers formel: $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Kom också ihåg den allmänna formeln: $x(t) = A\cos(\omega t + \theta) = \frac{A}{2}\left(e^{i(\omega t+\theta)} + e^{-i(\omega t+\theta)}\right) = \frac{A}{2}e^{i\theta}e^{i\omega t} + \frac{A}{2}e^{-i\theta}e^{-i\omega t}$. Om $\omega = k\omega_0$ kan vi skriva $x(t) = \frac{A}{2}e^{i\theta}e^{ik\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-i\theta}e^{-ik\omega_0 t}$ där vi ger namnen $c_k = \frac{A}{2}e^{i\theta}$ och $c_{-k} = \frac{A}{2}e^{-i\theta}$. Allmännt för en periodisk signal med flera sinsuformade signaler med $\omega = t\omega_0$ får vi $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\omega_0 t}$ vilket är Fourierserien på komplex form. c_k anger amplitud hos varje komplex exponential i formeln ovan.

c_k och $X(i\omega)$ ger information om en signals frekvensinnehåll. Signalens amplitud fördelad över de olika frekvenserna är $|c_k|$ eller $|X(i\omega)|$ i det periodiska och icke-periodiska fallet. Vi kan från detta skapa amplitudspektrum. Signalens fas fördelad över de olika frekvenserna är $\arg c_k$ och $\arg X(i\omega)$ för de två huvudfallen.

Från Parsevals formel fås för en periodisk signal (effektsignal) den totala medeleffekten $\overline{P} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 \mathrm{d}t = c_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k|^2$ vilket kan kallas effekttäthetsspektrat. Den kan delas upp efter frekvens om man vill. För en kontinuerlig signal (energisignal) definierar vi den totala energin $E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(i\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$. Det är ett energi(täthets)spektrum och kan delas upp per frekvens.

8.2 Systemanalys

$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$. Låt $x(t) = e^{i\omega t}$. Då är $y(t) = h(t)*x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\omega t}e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau = e^{i\omega t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau = e^{i\omega t}H(i\omega)$.

I vår Fourierserie ingår frekvenserna $k\omega_0, k \in \mathbb{Z}$.

$x_k(t) = e^{ik\omega_0 t} \to y_k(t) = e^{ik\omega_0 t}H(ik\omega_0)$

$x_{-k}(t) = e^{-ik\omega_0 t} \to y_{-k}(t) = e^{-ik\omega_0 t}H(-ik\omega_0)$

$x(t) = \frac{1}{2}(x_k(t)+x_{-k}(t)) = \cos(k\omega_0 t) \to y(t) = \frac{1}{2}y_k(t)+\frac{1}{2}y_{-k}(t)$. Låt $H(ik\omega_0) = H_k = |H_k|e^{i\theta_k} \in \mathbb{C}$. Då är $H(-ik\omega_0) = H_{-k} = |H_k|e^{-i\theta_k} \in \mathbb{C}$. Om man summerar (använder superposition) får man då $y(t) = \frac{1}{2}|H_k|\left(e^{ik\omega_0 t}e^{i\theta_k} + e^{-ik\omega_0 t}e^{i\theta_k}\right) = |H_k|\cos(k\omega_0 t + \theta_k)$ vilket är den ursprungliga signalen med en amplitudpåverkan och en faspåverkan.

$H_k = H(ik\omega_0)$ är systemets *frekvenssvar* $(H(i\omega))$. Den ändrar amplitud och fas på varje sinusformad med frekvensen ω.

9 Föreläsning 19-09-25

9.1 Approximation av signaler