0.1 Transformer i allmänhet

Kom ihåg att Fourierkoefficienterna för en Fourierserie ges av

$$c_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t.$$

Kom också ihåg att för periodiska y, h och x som har sambandet $y(t) = h * x(t)$ är $c_k(y) = c_k(h) \cdot c_k(x)$ för alla k.

Kom utöver det också ihåg att $c_k(x') = ikc_k(x)$.

En transform är något som tar en signal f till en ny beskrivning för f.

0.2 z-transform

Låt $x[k]$ vara en diskret signal. Den ska vi ”skicka på en funktion” av en komplex variabel $X(z) \coloneqq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$.

Om f är en T-periodisk kontinuerlig signal och $x[k] = c_k(f)$ så är $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)z^{-k}$. Om vi väljer $z = e^{-i\frac{2\pi}{T}t}$ så är $X(e^{-i\frac{2\pi}{T}t}) = f(t)$. Därav är z-transformen i någon mån en inverstransform till Fourierserier.

Påstående 1. Låt $x[k]$ vara en diskret signal. Anta att det finns tal $0 < c_0 < c_1 < \infty$ så att $|x[k]| \le c_0^k$ för $k >> 0$ och $|x[k]| \le c_1^k$ för $k << 0$. Då är $X(z)$ väldefinierad och absolutkonvergent för $c_0 < |z| < c_1$.

Bevis. Idén för beviset är att visa att $|X(z)| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]||z|^k$ konvergerar. □

Vi kommer att anta att $x[k] = 0$ för $k < 0$, d.v.s. det kausala fallet.

Då är $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}$. Om $|x[k]| \le c^k$ för $k >> 0$ gäller att $X(z)$ finns för $|z| > c$.

Exempel 1. Låt $x[k] = \delta(k - l)$ där $l \ge 0$.

Då är $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-l)z^{-n} = z^{-l}$.

Exempel 2. Låt $x_\gamma[k] = \gamma^k u[k]$ där $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Då är $X_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{\gamma}{z}}$ vilket bara konvergerar om $\frac{\gamma}{z} < 1$ enligt påminnelsen nedan, vilket ger att den konvergerar om $|z| > |\gamma|$. Då får vi $\frac{1}{1-\frac{\gamma}{z}} = \frac{z}{z-\gamma}$.

Påminnelse 1. $\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k$ och $\sum_{k=0}^{N} w^k = \frac{1-w^{N+1}}{1-w}$. Den första konvergerar för $|w| < 1$.

Exempel 3. Finn en diskret och kausal signal h_γ med $X(z) = \frac{1}{z-\gamma}$.

Om vi tar x_γ från exemplet ovan får vi att $X_\gamma(z) = \frac{z-\gamma+\gamma}{z-\gamma} = 1 + \frac{\gamma}{z-\gamma}$ vilket ger att $h_\gamma = \frac{1}{\gamma}(x_\gamma - \delta_0)$, d.v.s. $h_\gamma[k] = \begin{cases} \gamma^{k-1} & k > 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases} = x_\gamma[k-1]u[k]$.

0.3 Syntes för z-transform

Sats 1 (Syntes för z-transformen)**.**

$$x[k] = r^k \int_0^1 X(re^{2\pi it})e^{2\pi ikt}\mathrm{d}t$$

där r är något tal s.a. $X(z)$ är definierat för $|z| \geq r$.

$$\begin{aligned} x[k] &= \int_0^1 X(re^{2\pi it})e^{2\pi ikt}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-2\pi int}e^{2\pi ikt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]r^{-n} \int_0^1 e^{2\pi ikt} \\ &= x[k]r^{-k} \end{aligned}$$

eftersom integralen är 0 för $k \neq n$ och 1 för $k = n$. $\square$

0.4 Viktiga egenskaper för z-transformen

Z-transformen är linjär, d.v.s. $x_1 + \lambda x_2 \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1 + \lambda X_2$.

För ett vänsterskifte, d.v.s. om vi låter $x_s[k] = x[k+1]u[k]$ så har vi transformparet $x_s[k] = x[k+1]u[k] \overset{z}{\longleftrightarrow} z(X(z) - x[0])$.

Högerskifte, d.v.s. $x_s[k] = x[k-1]$ ger transformparet $x_s[k] = x[k-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z}X(z)$.

Slutvärdessats för z-transformen säger att $x[0] = \lim_{|z|\to\infty} x[z]$.

Motsvarande initialvärdessats säger att, givet att $x[k]$ är begränsad och att $\lim_{k\to\infty} x[k]$ existerar, då är $\lim_{h\to\infty} x[k] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$.

Exempel 4. Låt $x[k] = u[k]$. Det är då transformpar med $\frac{z}{z-1}$. Vi vet då också att $1 = \lim_{k\to\infty} u[k] = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}$.

$\gamma^k x[k]$ bildar transformpar med $X(\frac{z}{\gamma})$ eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k x[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k x[k] \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{-k}$.

$kx[k]$ bildar transformpar med $-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$, idén bakom är att $-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z) = -z \cdot (-kz^{k-1}) = kz^{-k}$.

$x_1 * x_2 \overset{z}{\leftrightarrow} X_1 X_2$ eftersom $\sum_{k=0}^{\infty}(x_1 * x_2)[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} x_1[k-l]x_2[l]z^{-k} = \sum_{m,l=0}^{\infty} x_1[m]x_2[l]z^{-(m+l)} = \sum_{m=0}^{\infty} x_1[m]z^{-m} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} x_1[l]z^{-l}$.

För en diskret och kausal LTI $y = h * x \iff Y = HX$.

Exempel 5. Låt $x[k] = \gamma^k$.

Då är $h * x[l] = \sum_m h[m]\gamma^{l-m} = \gamma^l \sum_m h[m]\gamma^{-m} = \gamma^l H(\gamma) = H(\gamma)x[l]$.

Exempel 6. Låt $x[k] = \gamma^k \cos(\beta k)u[k]$.

Vi börjar med att anta att $\gamma = 1$. Då är $x[k] = \frac{1}{2}\left(e^{i\beta k} + e^{-i\beta k}\right)u[k] = \frac{1}{2}\left(\left(e^{i\beta}\right)^k + \left(e^{-i\beta}\right)^k\right)u[k]$. Då bildar det transformpar med $\frac{1}{z}\left(\frac{z}{z-e^{i\beta k}} + \frac{z}{z-e^{-i\beta k}}\right)$.

Om $\gamma \neq 1$ får vi att $\gamma^k \cos(\beta k)u[k]$ bildar transformpar med $\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{z}{\gamma}}{\frac{z}{\gamma}-e^{i\beta k}} + \frac{\frac{z}{\gamma}}{\frac{z}{\gamma}-e^{-i\beta k}}\right) =$ ... Man kan göra mer algebra för att få något ”finare” om man vill.

0.5 Differensekvationer

Vi vill lösa $y[k+1] + ay[k] = x[k]$ med villkoret att $k \geq 0$ och att $y[0]$ är given.

Notera att det är på formen $Q(E)y = P(E)x$ där E är vänsterskifte och $Q(z) = z + a$ och $P(z) = 1$.

$Ey[k] = y[k+1]u[k] \overset{z}{\leftrightarrow}= zY(z) - zy[0]$ ger att $Q(E)y[k] \overset{z}{\leftrightarrow} zY(z) - zy[0] + aY(z) = (z+a)Y(z) - zy[0] = Q(z)Y(z) - zy[0]$.

$Q(E)y = P(E)x \iff Q(z)Y - zy[0] = X(z) \iff Y(z) = \frac{1}{Q(z)}X(z) + \frac{z}{Q(z)}y[0] = \frac{1}{z+a}X(z) + \frac{z}{z+a}y[0] \iff y[k] = h_a * x[k] + (-a)^k y[0] = \left(\sum_{l=0}^{k}(-a)^{l-1}x[k-l]\right) + (-a)^k y[0]$. Sista $\iff$ -steget görs genom z-transformstabeller. Resten lämnas som övning till läsaren.