0.1 Egenskaper hos Fouriertransformen

"Det är naturligtvis lite mer delikat än så."

– Pokèmon #109

Om $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ är alltid $F(i\omega)$ kontinuerlig och $\lim_{|\omega|\to\infty} F(i\omega) = 0$.

Exempel 1. Om $f = \delta$ saknar $\int |f|\mathrm{d}t$ mening. Trots det är $F(i\omega) = 1$ kontinuerlig, men $\lim_{|\omega|\to\infty} = 1 \neq 0$.

Exempel 2. $f(t) = e^{-|a|t}$ bildar transformpar med $F(i\omega) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$.

$f(t) = e^{-at}u(t)$ bildar transformpar med $F(i\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$.

0.2 Räkneregler för Fouriertransformen

Sats 1 (Linearitet av Fouriertransformen)**.** Om $Af_1(t) + Bf_2(t)$ är dess Fouriertransform $AF_1(i\omega) + BF_2(i\omega)$.

Sats 2 (Tidsskalning Fouriertransform)**.** Om $f(at)$ när $a \neq 0$ är dess Fouriertransform $\frac{1}{|a|}F(\frac{i\omega}{a})$.

Bevis. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \{u = at \implies \mathrm{d}u = a\mathrm{d}t\} = \frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u}\mathrm{d}u.$$ □

Sats 3 (Tidsskifte Fouriertransform)**.** Om $f(t+a)$ är dess Fouriertransform $e^{i\omega a}F(i\omega)$.

Bevis. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t+a)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \{u = t+a\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\omega a}e^{-i\omega u}\mathrm{d}u = e^{i\omega a}F(i\omega).$$ □

Exempel 3. Låt $f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, |t| \leq a \\ 0, \text{ annars} \end{cases}$.

Då är $F_1(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2a} = \left[\dfrac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{t=-a}^{a} =$ $\dfrac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{2i}\dfrac{1}{\omega a} = \dfrac{\sin(\omega a)}{\omega a}$.

Låt x vara en signal. Då är $f_1 * x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(s)x(t-s)\mathrm{d}s = \dfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x(t-s)\mathrm{d}s$ vilket är medelvärdet av $x(t)$ i punkten t när man går a steg till både höger och vänster. Inses rätt lätt om man ritar upp det.

$f_1 * x$ bildat transformpar med $\frac{\sin(\omega a)}{\omega a}X(i\omega)$.

Sats 4 (Derivata och Fouriertransform)**.** Om $f(t)$ är en signal bildar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$ ett transformpar med $i\omega F(i\omega)$.

Bevis. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t =$ (med partiell integration och antagandet att f går mot 0 i oändligheten) $= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t}\right)\mathrm{d}t = i\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$ $\square$

Exempel 4. Tillbaka till förra exemplet, vad är f_1'?

Jo, f_1' kan definieras av att $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(t)x(t)\mathrm{d}t = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t)x'(t)\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x'(t)\mathrm{d}t =$ $\dfrac{1}{2a}(x(-a) - x(a)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{2a}(\delta(t+a) - \delta(t-a))x(t)\mathrm{d}t$. Alltså är $f_1' =$ $\frac{1}{2a}(\delta(t+a) - \delta(t-a))$.

Om man tittar på grafen för f_1 kan man, om man tänker på vad derivatan måste vara i varje punkt, se att detta är rimligt.

Vi vill kolla att detta stämmer. $f_1' = \frac{1}{2a}(\delta(t+a) - \delta(t-a))$ bildar transformpar med $\frac{1}{2a}(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = i\omega\frac{1}{2ia\omega}(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = i\omega\frac{1}{a\omega}\sin(a\omega) =$ $i\omega F_1(i\omega)$, vilket är rimligt med tanke på tidigare räkneregler.

Sats 5 (Fouriertransform för $t \cdot f(t)$)**.** Om vi har en signal $t \cdot f(t)$ bildar det ett transformpar med $i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(i\omega)$.

Bevis. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)te^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$ □

"Låt oss vara lite casual"

– Pokémon #109 om räkneregler

VARNING: I boken skrivs $F(\omega)$ för Fouriertransformen i kapitel < 6 men $F(i\omega)$ i kapitel ≥ 6.

Exempel 5. Låt $f_2(t) = e^{-at^2}, a > 0$. Vad är Fouriertransformen F_2?

Vi ska ta en systemapproach istället för att göra jobbiga integraler.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t) = -2te^{-at^2} = -2atf_2(t)$, d.v.s. $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2at)f_2(t) = 0 \iff (i\omega + 2ai\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega})F_2 = 0 \iff (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} + \frac{1}{2a}\omega)F_2 = 0 \iff F_2(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4a}} \implies C = F_2(\omega = 0) \cdot e^{\frac{0^2}{4a}} = F_2(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Alltså bildar e^{-at^2} transformpar med $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

Anmärkning 1. f_2 avtar superexponentiellt när $t \to \pm\infty$, d.v.s. f_2 inte en lösning till en stabil LTI.

"Den går snabbare än örnen mot noll."

– Pokèmon #109

Vad betyder egentligen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$?

Jo, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h * x) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} * x = h * \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ är också tidsinvariant, vilket betyder att det måste ges av någon faltning. Vad för h uppfyller att $h * x?\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x$?

$x(t) = \int x(u)\delta(t-u)\mathrm{d}u = x * \delta(t) = \delta * x(t)$. Då är $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta * x) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta) * x$. δ definieras av att $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)\mathrm{d}t = x(0)$, alltså måste $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)\mathrm{d}t = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x'(t)\mathrm{d}t$ så att δ' definieras av $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)\mathrm{d}t = -x'(0)$. Då är $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \delta' * x$.

Sats 6 (Sambandet mellan $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ och δ')**.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \delta' * x$

Bevis. Se ovan. □

Exempel 6. Vad är Fouriertransformen av δ'?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \{e^{-i\omega t} = x(t)\} = -x'(0) = -i\omega$$

Exempel 7. Skriv $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a^2)y = x$ som en LTI på formen $y = h * x$.

$(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a^2)y$ bildar transformpar med $(-(i\omega)^2 + a^2)Y = (\omega^2 + a^2)Y$.

$(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a^2)y = x \iff (\omega^2 + a^2)Y = X \iff Y = \frac{1}{\omega^2+a^2}X \iff y = h*x$ för ett h s.a. $H(i\omega) = \frac{1}{\omega^2+a^2}$.

e^{-at} har en Fouriertransform $\frac{2a}{a^2+\omega^2}$, då har $h(t) = \frac{1}{2a}e^{-at}$ överföringsfunktion $H(i\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$.

Då får vi från ursprungliga problemet $h*x(t) = y(t) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t-u|}x(u)\mathrm{d}u$.

"En pil säger mer än två ord i det här fallet"

– Pokèmon #109

Sats 7. Låt f vara en signal. Då har $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$ Fouriertransform $\frac{F(i\omega)}{i\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$.

Bevis. Idén bakom beviset är att $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f * u$.

Eftersom $f * u$ bildar transformpar med FU vill vi visa att det är lika med $F(i\omega)\left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right)$. Vi vill alltså att $U(i\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$.

Eftersom $u' = \delta$ får vi att det bildar transformpar med $i\omega U(i\omega) = 1 \implies U(i\omega) = \frac{1}{i\omega}$.

Man får i någon mån halva bidraget från den konstanta funktionen 1, vilket är $2\pi\delta(\omega)$, alltså får vi en faktor $\pi\delta(\omega)$ i lösningen. □

Om $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$ måste $F(0) = 0$.

0.3 Plancherels sats

Sats 8. Låt $L^2(-\infty, \infty) = \{$ signaler f med ändlig energi $\}$ Kom ihåg att energin $E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$. Kom också ihåg $\langle f_1, f_2 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t)\mathrm{d}t$. Då är, för $f_1, f_2 \in L^2(-\infty, \infty)$, både F_1 och $F_2 \in L^2(-\infty, \infty)$. Vidare är $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t)\mathrm{d}t$.