"Bupp bupp bupp"

– Mattemannen

0.1 Laplace och differentialekvationer

Exempel 1. Vi har en RLC-krets:

Figur 1

Vi är intresserade av strömmen $y(t)$ som går genom kretsen.

Kirchoff ger att $V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = x(t)$. Vi vet också att $V_L(t) = L \cdot y'(t)$, $V_R(t) = R \cdot y(t)$ och $V_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau$.

Därmed har vi $Ly' + Ry + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau = x(t)$ eller genom att derivera en gång till $Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = x' \iff Q(D)y = P(D)x$ där $Q(D) = D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}$ och $P(D) = \frac{1}{L}D$. Detta är en andra ordningens differentialekvation.

Vi kommer tillbaka till hur vi löser detta, men först tittar vi på hur vi löser enklare fall.

Om $P(D) = 1$ kan vi använda $y = y_0 + y_{\text{in}}$ där zerostate y_0 löser $\begin{cases} Q(D)y_0 = x \\ y_0^{(j)}(0) = 0 \ \forall\ j \end{cases}$ och zeroinput y_{in} löser $\begin{cases} Q(D)y_{\text{in}} = 0 \\ y_{\text{in}}^{(j)}(0) = y^{(j)}(0) \ \forall\ j \end{cases}$.

Vi börjar med att lösa zerostate. Vi vet att $\mathcal{L}(Q(D)y_0) = X(s)$ och $\mathcal{L}(D^2 y_0) = s^2\,\mathcal{L}(y)(s)$. Därmed har vi att $Y_0(s) = \frac{1}{Q(s)}X(s) \iff y_0(t) = h * x(t)$ där h uppfyller att $H(s) = \frac{1}{Q(s)}$.

Exempel 2. $Q(D) = D + a$, d.v.s. vi tittar på $y' + ay = x$. Då är $Q(s) = s + a$ så att $H(s) = \frac{1}{s+a} = \mathcal{L}(e^{-at}u(t))(s)$ och därmed är $h(t) = e^{-at}u(t)$ och $y_0(t) = h * x(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)}x(\tau)\mathrm{d}\tau$.

Exempel 3. Låt $Q(D) = D^2 + aD + b$. Då är $Q(s) = s^2 + as + b$ och därmed $H(s) = \frac{1}{s^2+as+b}$. Viktigt här (men även generellt) är partialbråksuppdelning.

I det här fallet vill vi hitta $\lambda_\pm$ som löser $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Då är $s^2 + as + b = (s - \lambda_+)(s - \lambda_-)$.

Vi vill förenkla $\frac{1}{(s-\lambda_+)(s-\lambda_-)}$ och använder partialbråksuppdelning för det. Då får vi att det är lika med $\frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\left(\frac{1}{s-\lambda_+} - \frac{1}{s-\lambda_-}\right)$.

Då är $\frac{1}{s^2+as+b} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_+-\lambda_-}\left(\frac{1}{s-\lambda_+} - \frac{1}{s-\lambda_-}\right) & \lambda_+ \neq \lambda_- \\ \frac{1}{(2-\lambda_+)^2} & \lambda_+ = \lambda_- \end{cases}$ vilket då när vi använder Laplace ger att det är lika med $\begin{cases} \frac{u(t)}{\lambda_+-\lambda_-}\left(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}\right) & \lambda_+ \neq \lambda_- \\ te^{\lambda_+ t}u(t) & \lambda_+ = \lambda_- \end{cases}$.

Vi går sedan vidare till att lösa zeroinput: Då vill vi lösa $\begin{cases} Q(D)y_{\text{in}} = 0 \\ y_{\text{in}}^{(j)}(0) = y^{(j)}(0)\ \forall\ j \end{cases}$.

Exempel 4. Låt $Q(D) = D^2 + aD + b$. Då är $\mathcal{L}(Q(D)y_{\text{in}}) = \mathcal{L}(D^2 y_{\text{in}}) + a\,\mathcal{L}(Dy_{\text{in}}) + b\,\mathcal{L}(y_{\text{in}}) = \mathcal{L}(y_{\text{in}}) - sy(0) - y'(0) + as\,\mathcal{L}(y_{\text{in}}) - ay(0) + b\,\mathcal{L}(y_{\text{in}}) = (s^2 + as + b)\,\mathcal{L}(y_{\text{in}}) - y'(0) - (s+a)y(0)$ vilket med antaganden som gjordes för zeroinput ger att $\mathcal{L}(y_{\text{in}})(s) = \frac{y'(0)+(s+a)y(0)}{Q(s)}$. Det löses på ett liknande sätt som det andra, med partialbråksuppdelning.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y_{\text{in}})(s) &= \frac{y'(0) + (s+a)y(0)}{Q(s)} \\
&= \frac{y'(0) + (\lambda_+ + a)y(0) + (s - \lambda_+)y(0)}{(s-\lambda_+)(s-\lambda_-)} \\
&= (y'(0) + (\lambda_+ + a)y(0))H(s) + \frac{y(0)}{s-\lambda_-} \\
&= \mathcal{L}((y'(0) + (\lambda_+ + a)y(0))h(t) + y(0)e^{\lambda_- t}u(t)) \quad \iff \quad y_{\text{in}}(t) = (y'(0) + (\lambda_+ + a)y(0))h(t) + y(0
\end{aligned}$$

Allmänt, om $Q(D)y_{\text{in}} = 0$ är $Q(s)y_{\text{in}}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g_{Q,k}(s)y^{(k)}(0)$ där $g_{Q,k}$ ges av att $g_{Q,n-1}(s) = 1$, $g_{Q,n-2}(s) = s + a_{n-1}$, $g_{Q,n-3}(s) = s^2 + a_{n-1}s + a_{n-2}$, …, $g_{Q,0}(s) = s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_2 s + a_1$.

Då är $Y_m(s) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} g_{Q,k}(s)y^{(k)}(0)}{Q(s)}$.

”Låt oss ta ett ruggigt konkret exempel.”

– Goffeng

”Förr, när det var bättre.”

– Goffeng

0.1.1 Mer allmänt

För en differentialekvation $Q(D)y = P(D)x$ med givet x och $y^{(j)}(0)$ givna för relevanta j får vi av Laplace $Q(s)Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} g_{Q,k}(s)y^{(k)}(0) = P(s)X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} g_{P,k}(s)x^{(k)}(0)$ och därmed $Y(s) = H(s)X(s) + \frac{1}{Q(s)} \sum_{k=0}^{n-1} \left(g_{Q,k}(s)y^{(k)}(0) - g_{P,k}(s)x^{(k)}(0)\right)$

där $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ är överföringsfunktionen. Detta ger att $y(t) = h * x(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_{Q,k}(t) y^{(k)}(0) - \beta_{P,k}(t) x^{(k)}(0)\right)$ där $h = \mathcal{L}^{-1}(H)$, $\alpha_{Q,k} = \mathcal{L}^{-1}(\frac{g_{Q,k}}{Q})$ och $\beta_{P,k} = \mathcal{L}^{-1}(\frac{g_{P,k}}{Q})$.

Hur hittar vi h, $\alpha_{Q,k}$ och $\beta_{P,k}$?

Båda handlar om att inverstransformera uttryck på formen $\frac{s^m}{Q(s)}$ där $m \leq n$.

Påstående 1. Om vi kan faktorisera $Q(s) = (s-\lambda_1)^{\gamma_1}(s-\lambda_2)^{\gamma_2}\cdots(s-\lambda_p)^{\gamma_p}$ så är $\frac{s^m}{Q(s)}$ en summa av termer på formen $\frac{s^l}{(s-\lambda_j)^{\gamma_j}}$ där $l < \gamma_p$ eller $l = 1$.

Påstående 2. För $h = \mathcal{L}^{-1}(\frac{P}{Q})$ gäller att för några konstanter l_k och $c_{j,k}$ är $\sum_{k=1}^{P} \sum_{i=1}^{l_k} \left(c_{i,k} t^i e^{\lambda_k t} u(t)\right) + b_n \delta(t)$.

Som följd av dessa påståenden får vi att h är stabil ($\int |h(t)| \mathrm{d}t < \infty$) om och endast om $Q(\lambda) = 0$ saknar lösningar med $\mathrm{Re}\{\lambda\} \geq 0$.

Påstående 3. Om h är stabil gäller att

1. Om y löser $y = h * x$ följer att x begränsad $\implies$ y begränsad.
2. Om y löser $y = h * x$ följer att $\int_0^\infty |x(t)| \mathrm{d}t < \infty \implies \int_0^\infty |y(t)| \mathrm{d}t < \infty$.

Bevis.

1. Om $|x(t)| \leq C \ \forall\, t$ gäller att $|y(t)| = \left|\int_0^t h(t-\tau) x(\tau) \mathrm{d}\tau\right| \leq \int_0^t |h(t-\tau)||x(\tau)| \mathrm{d}\tau \leq C \int_0^t |t-\tau| \mathrm{d}\tau \leq C \int_0^\infty |h(\tau)| \mathrm{d}\tau$.
2. Bevisas inte här, finns i boken.

□

Exempel 5. Lös $y''(t) + ay'(t) + by(t) = cx'(t) + dx(t)$ där $y(0)$, $y'(0)$ och $x(t)$ är givna.

Då har vi att $\mathcal{L}(y'' + ay' + by) = (s^2 + as + b)Y - y'(0) - (s+a)y(0)$ och $\mathcal{L}(cx' + dx) = (cs + d)X - cx(0)$. Därmed är $(s^2 + as + c)Y(s) - y'(0) - (s+a)y(0) = (cs+d)X - cx(0) \implies Y(s) = \frac{cs+d}{s^2+as+b} X(s) + \frac{y'(0)+(s+a)y(0)-cx(0)}{s^2+as+b}$.

Vi vet att $H(s) = \frac{cs+d}{s^2+as+b}$. Vad är då h? Vi skriver $s^2 + as + b = (s + \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4}$. Då är $H(s) = \frac{cs+d}{(s+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}} = \frac{c(s+\frac{a}{2}-\frac{ac}{2}+d)}{(s+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}} = c\frac{s+\frac{a}{2}}{(s+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}} + \frac{d-\frac{ac}{2})}{(s+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}} = \mathcal{L}\left(ce^{-\frac{a}{2}t}\cos\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}t\right)\right) + \mathcal{L}\left(\frac{d-\frac{ac}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}} e^{-\frac{a}{2}t}\sin\left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}t\right)\right)$.