0.1 LTI-system

Ett vanligt sätt att karakterisera ett system är att ange dess utsignal för en given och känd insignal. För insignalen $x(t) = \delta(t)$ blir utsignalen $y(t) = h(t)$. Det kallas för systemets *impulssvar*. Motsvarande samband gäller för ett diskret system. Andra vanliga insignaler för att beskriva system är

$$\begin{aligned} \text{In} &\implies \text{ut} \\ \text{Enhetssteg} &\implies \text{Stegsvar} \\ \text{Sinusformad signal med } \omega = \omega_0 &\implies \text{Frekvenssvar} \end{aligned}$$

0.2 Samband mellan insignal, utsignal och LTI-system (i tidsdomänen)

0.2.1 Diskret fall

Anta att vi känner impulssvaret $h[n]$ till ett diskret LTI-system.

Låt $x[n]$ vara en godtycklig diskret signal.

Bilda $x[n]\cdot\delta[n] = x[0]\dot{\delta}[n]$ och därefter bilda $x[n]\cdot\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$. Tydligen kan vi teckna $x[n]$ som en summa av viktade och skiftade enhetsimpulser. Alltså är $x[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k]$.

För ett LTI-system gäller

$$\begin{aligned} \text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\ \delta[n] &\implies h[n] \\ \delta[n-k] &\implies h[n-k] \\ x[k]\cdot\delta[n-k] &\implies x[k]h[n-k] \\ x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k] &\implies y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k] \end{aligned}$$

$y[n]$ ovan kallas för Faltningssumman. Förenklat skrivs $y[n] = x[n] * h[n]$. Med en variabelsubstitution kan man visa att $x[n]*h[n] = h[n]*x[n] \implies \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\cdot x[n-k]$.

0.2.2 Kontinuerligt fall

Anta att vi känner impulssvaret $h(n)$ till ett kontinuerligt LTI-system. Låt också $x(t)$ vara en godtycklig (in)signal och låt $\hat{x}(t)$ vara en approximation av $x(t)$ där $\hat{x}(t)$ är summan av pulserna $x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ o.s.v.

Vi definierar en enhetspuls som $\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}$ när $0 \leq t < \epsilon$ och 0 annars.

Figur 1

Våra pulser kan vi nu teckna som $\ldots, x_{-1} = \delta_\epsilon(t+\epsilon)x(-\epsilon)\epsilon, x_0 = \delta_\epsilon(t)x(0)\epsilon, x_1 = \delta_\epsilon(t-\epsilon)x(\epsilon)\epsilon, \ldots$ och $\hat{x}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon$. Låt $h_\epsilon(t)$ vara systemets utsignal för insignalen $\delta_\epsilon(t)$ (pulssvar). För ett LTI-system gäller då

$$\begin{aligned}
\text{Insignal} &\implies \text{Utsignal} \\
\delta_\epsilon(t) &\implies h_\epsilon(t) \\
\delta_\epsilon(t-k\epsilon) &\implies h_\epsilon(t-k\epsilon) \\
\delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon &\implies h_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon = \hat{x}(t) &\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon = \hat{y}(t)
\end{aligned}$$

Låt $\epsilon \to 0$, då gäller

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon(t) &\to \delta(t) \\
h_\epsilon(t) &\to h(t) \\
k\epsilon &\to \tau \text{ (En kontinuerlig variabel)}\epsilon \qquad\qquad \to \mathrm{d}\tau \\
\sum &\to \int \\
\hat{x}(t) &\to x(t) \\
\hat{y}(t) &\to y(t)
\end{aligned}$$

Vi får då

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

vilket kallas faltningsintegralen. Förenklat skrivsätt är $y(t) = h(t) * x(t)$. Genom en variabelsubstitution kan man visa $h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$, alltså att $\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau$

"Det är backe upp här och backe ner där."

– Ants Silberberg

0.3 Systemegenskaper kopplade till impulssvar

0.3.1 Kausalt LTI-system

Diskret: $h[k] = 0$ för $k < 0$ och därmed $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$. Motsvarande gäller för kontinuerliga system: $y(n) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

0.3.2 Stabilt LTI-system

Diskret: Anta $\forall n : |x[n]| \leq M_x < \infty$ d.v.s. att insignalen är begränsad. Utifrån det kan vi resonera att $|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right|$ och eftersom $|a+b| \leq |a| + |b|$ gäller $|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]|$ och än en gång, eftersom $|ab| = |a| \cdot |b|$ får vi $|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$ men eftersom $|x[k]| \leq M_x$ vet vi att $|y[n]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$. Med kravet på stabila system att $\forall n : |y[n]| < \infty$ följer villkoret $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$. Det kallar man att impulssvaret är absolutsummerbart. Samma gäller för kontinuerliga system, då får man villkoret $\int_{\infty}^{\infty} |h(\tau)| \mathrm{d}\tau < \infty$ och det kallas för att impulssvaret är absolutintegrerbart.