0.1 Laplacetransformen tillämpad på LTI-system

Anta att vi har ett kontinuerligt LTI-system där sambandet mellan in- och utsignal beskrivs av en differentialekvation

$$a_N \frac{\mathrm{d}^N y}{\mathrm{d}t^N} + a_{N-1} \frac{\mathrm{d}^{N-1} y}{\mathrm{d}t^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_M \frac{\mathrm{d}^M x}{\mathrm{d}t^M} + b_{M-1} \frac{\mathrm{d}^{M-1} x}{\mathrm{d}t^{M-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + b_0 x$$

alternativt som

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}.$$

Anta nu att systemet är i vila, d.v.s. alla begynnelsevärden är 0. När vi Laplacetransformerar får vi då $\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$ och därmed $Y(s) \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^{M} b_k s^k \implies \frac{Y(s)}{X(s)} := H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} = b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0 a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \frac{B(s)}{A(s)}$. Detta är en kvot mellan två polynom beroende på s, d.v.s. en rationell funktion. Den formen fås väldigt ofta från Laplacetransformen i ingenjörstillämpningar. Notera att $B(s) \neq Y(s)$ och $A(s) \neq X(s)$, även om det ser ut så. Polynomen kan även skrivas på faktoriserad form enligt $H(s) = \frac{b_M \prod_{k=1}^{M} (s - c_k)}{a_N \prod_{k=1}^{N} (s - d_k)} = \frac{b_M (s-c_1)(s-c_2)\cdots(s-c_M)}{a_N (s-d_1)(s-d_2)\cdots(s-d_N)}$ där c_k är nollställen till $H(s)$ och rötter till täljaren med symbolen $\circ$. d_k är poler till $H(s)$ och är rätter till nämnarpolynomet har symbolen $\times$. En graf för ett $H(s)$ kan se ut som följer:

Figur 1

Det innehållet all information om $H(s)$ förutom konstanten $\frac{b_M}{a_N}$. Allmänt kan c_k och d_k vara antingen reella eller komplexa. Om det finns något komplext c_k eller d_k måste dess konjugat också vara ett nollställe så länge koefficienterna i polynomen är reella. Det kommer allt som oftast vara fallet för vanliga fysikaliska system.

Låt följande beskriva ett LTI-system: $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$, $\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s)$ och $h(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} H(s)$.

I tidsdomänen har vi för systemet $y(t) = h(t) * x(t)$, i frekvensdomänen $Y(s) = H(s)X(s)$. Då skapar vi kvoten $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ vilket vi även fick när vi Laplacetransformerade den generella differentialekvationen tidigare. Vi kallar $H(s)$ för systemets överföringsfunktion. $\mathcal{L}^{-1}(H(s)) = h(t)$ är systemets impulssvar. För kausala system använder vi den enkelsidiga Laplacetransformen. Det räcker i den här kursen.

0.2 Invers Laplacetransform

Utgå från en kvot mellan våra polynom, exempelvis $H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$. Anta att $\mathrm{grad}(B(s)) = M$ och $\mathrm{grad}(A(s)) = N$. För fysikaliska system är alltid $M \leq N$. Om $M = N$ vet vi att $H(s) = c_0 + \frac{\widetilde{B}(s)}{A(s)}$ där $\mathrm{grad}(\widetilde{B}(s)) = M - 1$. Sen partialbråksuppdelar vi $\frac{\widetilde{B}(s)}{A(s)}$ om $M = N$ och $\frac{B(s)}{A(s)}$ direkt om $M < N$. Resultatet av partialbråksuppdelningen ger en summa av två typer av termer beroende på om rötterna är komplexa eller reella. Varje term kan sedan inverstransformeras.

Man kan skriva partialbråksuppdelningsansatsen $\frac{As+B}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ som $\frac{A(s+\alpha)+B-A\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} = A\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} + \frac{B-A\alpha}{\omega} \cdot \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ vilket ger inverstransformen $A\left(e^{-\alpha t}\cos(\omega t) + \frac{B-A\alpha}{\omega}e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\right)u(t)$. För att den ska vara konvergera måste $\mathrm{Re}\{s_1\} = \mathrm{Re}\{s_2\} < 0$.

För att ett kausalt system ska vara stabilt måste alla poler till $H(s)$ ligga i vänstra halvplanet.