1) Azeleragailu lineal batean 200 GeV energia duten pioiak (positiboki kargaturikoak) sortzen dira eta sortu ostean 300 m bidaiatu ostean pioi-detektagailu batetik pasatzen dira. Kontuan hartuz, pioiaren masa 140 MeV ingurukoa eta erdibizitza 2,56 $\times 10^{-8}$ s direla, kalkulatu detektagailua kokatuta dagoen tokian zenbat pioi bizirik iraungo duten. Halaber, erkatu erlatibitate Einstendarrak emandako emaitza erlatibitate Galilearrak ematen duenarekin.

Erdibizitza definitzen da hurrengo moduan: $\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$, non

- λ: Desintegrazio konstantea
- N_0: Hasierako partikula kopurua
- $N(t)$: t denboran dauden partikula kopurua.

Orduan τ edo erdibizitza denbora definitzen da:

$\tau = 1/\lambda$ moduan. Beraz, $\boxed{\dfrac{N(t)}{N_0} = e^{-t/\tau}}$ izango da detektagailura ailegatuko diren partikulen proportzioa

Laborategiko S:

Orduan, dakigunez: $\left.\begin{array}{l} E = \gamma m c^2 \\ E_0 = mc^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma = E/E_0$ izango dugu.

$\gamma = 1428'6$ izango da, hain handia denez $\beta \sim 1$ dela suposatu dezakegu $\Rightarrow \Delta t = \dfrac{\Delta x}{c} = 10^{-6}$ s beharko ditu detektagailura ailegatzeko.

π^+ pausaguneko sisteman:

$$\Delta t^* = \frac{\Delta t}{\gamma} = 7 \cdot 10^{-10} \text{s}$$

Zer ikusten da? Laborategiko denbora $\Delta t < \tau$ da, baina partikularen denbora propioa (benetan garrantzitsua dena) $\Delta t^* > \tau$. Orduan:

$N/N_0 \sim 0'98$ izango da, hau da errealitatean pioi gehienak ailegatuko dira detektagailura. Baina Galileoren fisikan izango dugu $N/N_0 \sim 10^{-12}$, hau da, ez ziren ia pioirik detektatuko.

2) Lorentzen transformazioa honako era honetan idatz daiteke: $x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$ (Einstein-en konbekzioaren arabera idatzia) edo $\underline{x}' = A\underline{x}$, non $\underline{x} = x_\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, \mathbf{x})$ den. Demagun $\underline{x}$ bektorea $\sum$ erreferentzialean ematen dela. Kalkula ezazu zein izan behar duen A, honako transformazioa $\underline{x} \rightarrow \underline{x}' \in \sum'$ deskribatzeko ondorengo kasuetan:

(a) $\sum'$ erreferentziala $\sum$ erreferentzialarekiko **v** abiaduraz higitzen da *z* ardatzaren norabidean.

(b) $\sum'$ erreferentziala $\sum$ erreferentzialarekiko **v** abiaduraz higitzen da *y* ardatzaren norabidean.

(c) $\sum'$ erreferentziala $\sum$ erreferentzialarekiko **v** abiaduraz higitzen da *x* ardatzaren norabidean.

Honelako transformazioei "boost" transformazioak deritze.

Transformazio hauek edozein tetrabektorentzako orokortuko ditugu. Izan bedi $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

Demagun x_i norabidean mugitzen hari garela. Orduan

- $x_0' = \gamma(x_0 - \beta x_i)$
- $x_i' = \gamma(x_i - \beta x_0)$
- $x_j' = x_j$ non $j \neq i$ den.

Demagun $i = 1$ kasua. Matrizialki idatziko genuke:

$$\boxed{\underline{x}' = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}}$$

Matrize honi deituko diogu A_i, hau da x_i norabidean desplazatzen denean daukaguna. Besteak:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad A_3 = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Honekin ariketa tribiala bihurtu egingo da:

$\underline{X} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x_1, x_2, x_3)$

a) z norabidean $i = 3 \Rightarrow \underline{x}' = A_3 \underline{x}$

b) y norabidean $i = 2 \Rightarrow \underline{x}' = A_2 \underline{x}$

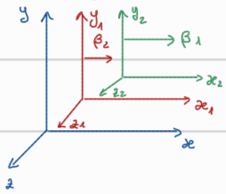
c) x norabidean $i = 1 \Rightarrow \underline{x}' = A_1 \underline{x}$

3) Froga ezazu, era esplizituan, elkarren segidako eta norabide bereko Lorentz-en bi transformazio eta behean adierazitako v abiadurako Lorentz-en transformazio bakarra baliokideak direla:

$$v = (v_1 + v_2)/[1+(v_1 v_2/c^2)]$$

Frogapen honen bidez abiadura paraleloen batze-legea frogatzen da.

Dakiguna:



Biak β_1 eta β_2 paraleloak dira.

orduan: $\underline{X_1} = A_1\, \underline{X}$

$\underline{X_2} = A_2\, \underline{X_1}$

Eta lehen esan dugunez $\underline{X_2} = A\, \underline{X}$ izango da, non argi dago $A = A_1 \cdot A_2$ izango den.

$$A = \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{(2\times2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_2 & -\beta_2\gamma_2 & 0 \\ -\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{(2\times2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_1\gamma_2(1-\beta_1\beta_2) & -\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) & \gamma_1\gamma_2(1-\beta_1\beta_2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{(2\times2)} \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{(2\times2)} \end{bmatrix}$$

Transformazio guztiak forma honetakoak dira.

Hau da: $\begin{cases} \gamma = \gamma_1\gamma_2(1-\beta_1\beta_2) & (1) \\ \gamma\beta = \gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) & (2) \end{cases}$

Hau da $\beta = \dfrac{\beta_1+\beta_2}{1-\beta_1\beta_2} \Rightarrow \boxed{v = \dfrac{v_1+v_2}{1-\frac{v_1v_2}{c^2}}}$ ▨

4) Σ' koordenatu-sistema Σ koordenatu-sistemarekiko **v** abiaduraz higitzen da. Σ' sisteman, partikula baten abiadura ***u'*** da eta azelerazioa, ***a'***. Lor ezazu azelerazioen arteko Lorentz-en transformazioa, eta froga ezazu Σ sisteman v-rekiko paraleloak (//) eta perpendikularrak ($\perp$) diren azelerazioaren osagaiak honako hauek direla:

$$\mathbf{a}_{//} = \mathbf{a'}_{//}\,(1 - v^2/c^2)^{3/2}/(1+ \mathbf{v}.\mathbf{u'}/c^2)^3$$

$$\mathbf{a}_{\perp} = [\mathbf{a'}_{\perp} + (\mathbf{v}/c^2) \times (\mathbf{a'} \times \mathbf{u'})](1 - v^2/c^2)/(1 + \mathbf{v}.\mathbf{u'}/c^2)^3$$

Orduan erabiliko dugu: $\underline{X} = (x_0, \vec{x})$. Dakigunez:

- $dt = \gamma\left(1 + \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2}\right) dt'$ non $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
- $dx_{\parallel} = \gamma(dx'_{\parallel} + \vec{v}\, dt') = \gamma(u'_{\parallel} + v)\, dt'$
- $d\vec{x}_{\perp} = d\vec{x}'_{\perp} = \vec{u}'_{\perp}\, dt'$

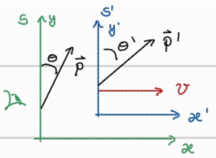
Beraz:
- $u_{\parallel} = \dfrac{dx_{\parallel}}{dt} = \dfrac{u'_{\parallel} + v}{1 + \frac{\vec{u}'\cdot\vec{v}}{c^2}}$
- $\vec{u}_{\perp} = \dfrac{d\vec{x}_{\perp}}{dt} = \dfrac{\vec{u}_{\perp}}{\gamma\underbrace{\left(1 + \frac{\vec{u}'\cdot\vec{v}}{c^2}\right)}_{\xi}}$

Hauek deribatuz lortuko dugu. (Konponente bakoitza)

$$a_{\parallel} = \frac{a_{\parallel}}{\gamma^3 \cdot \xi^3} \quad ; \quad \vec{a}_{\perp} = \frac{\vec{a}'_{\perp}}{\gamma^2\,\xi^2} - \frac{v\vec{a}'_{\perp}}{c^2}\;\frac{a_{\parallel}}{\gamma^2\,\xi^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{\perp} = \frac{1}{\gamma^2\,\xi^3}\left[\vec{a}'_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2} \times (\vec{a}' \times \vec{u}')\right]$$

5) Karga-banaketa batek **p'** momentu dipolarra dauka bere pausaguneko sisteman. Kalkula ezazu zein den **p** momentu dipolarra, banaketa **v** abiaduraz higitzen ikusten duen behatzailearen ikuspegitik.



Dakigunez, definizioz: $\boxed{\vec{p} = \int \vec{r} \cdot \rho(\vec{r})\, dV}$

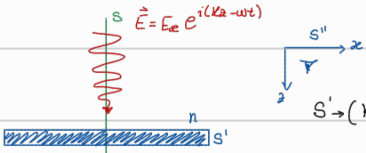
orduan $\vec{p}$ momentu dipolarra banatu ahal dugu bitan:

$$\vec{p} = \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp} = \int \vec{r}_{\parallel}\, \rho\, dV + \underbrace{\int \vec{r}_{\perp} \cdot \rho\, dV}_{\text{Hau kte mantenduko da.}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{p}_{\parallel} = \int \vec{r}_{\parallel}\, \rho\, dV$. Dakigunez S' sistema pausaguneko sistema da $\Rightarrow \vec{p}\,'_{\parallel} = \int \vec{r}\,'_{\parallel} \overbrace{\dfrac{q}{dV'}}^{\rho'} dV'$ non $\vec{r}\,'_{\parallel} = \gamma\, \vec{r}_{\parallel}$ eta $dV' = \gamma\, dV \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{p}\,'_{\parallel} = \int \gamma \vec{r} \cdot \rho\, dV = \gamma\, \vec{p}_{\parallel} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \dfrac{\vec{p}\,'_{\parallel}}{\gamma} + \vec{p}_{\perp}}$ izango da behatzaileak ikusiko duen momentu dipolarra.

6) Uhin elektromagnetiko lau monokromatikoak (airean hedatzen denak) n errefrakzio-indizeko ingurune baten gainazal laua perpendikularki erasotzen du. Pausagunean dagoen behatzailearekiko, uhin erasotzailearen eremu elektrikoa $E^{o}_{x}\, e^{i(kz-\omega t)}$ adierazpenaren alde errealak emandakoa da, z gainazalarekiko osagai perpendikularra izanik. Lor ezazu uhin islatuaren maiztasuna ingurunea (eta bere gainazala) behatzailearekiko v abiaduraz higitzen bada z ardatzaren positiboan zehar.



Doppler efektuaren tetrabektorea:

$$S' \to (k'_0, 0, 0, k') \xrightarrow{\text{transf.}} S \to (k_0, 0, 0, k)$$

non $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$ eta $k'_0 = \dfrac{\omega'}{c}$

Lehenengo, dakigu xaflan argiaren abiadura $n = \dfrac{c}{v} \Rightarrow v = \dfrac{c}{n}$

Orduan xaflara ailegatzean haren abiadura aldatu egingo da beraz: $\boxed{k'_0 = \gamma(k_0 - \vec{\beta}\cdot\vec{k})}$ orduan $\boxed{k = \dfrac{\omega}{c} \text{ argi izpietan}}$:

$\boxed{\omega' = \gamma\omega(1-\beta\cos\theta) \quad \text{non } \theta}$

Ingurunekoo eraso perpendikularraren eraginez $\boxed{\omega' = \gamma\omega(1-\beta)}$

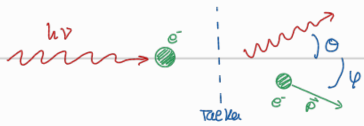
Eta islatzean perpendikularki islatzean: $\underbrace{\omega' = \omega''\gamma(1+\beta)}_{\text{orain "higitzen" den ingurunea izango da S'' (nahiz eta hau izan "pausagunean" dagoena)}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega'' = \frac{\omega'}{\gamma(1+\beta)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{\omega'' = \dfrac{1-\beta}{1+\beta}\,\omega}$. Hau oro kontu dezakegu edozein θ angeluko islapenarentzako: $\omega'' = \dfrac{1-\beta\cos\theta}{1-\beta\cos(\theta+\pi)}\,\omega \Rightarrow \boxed{\omega'' = \dfrac{1-\beta\cos\theta}{1+\beta\cos\theta}\,\omega}$

7) a) Idatz itzazu Compton efektuaren (fotoiak pausaguneeko elektroia jotzen duenean) momentuaren eta energiaren kontserbazio-legeak.
b) Idatz ezazu fotoi sakabanatuaren energia, atzerako 180ºko angelupeko sakabanaketaren kasuan (onar ezazu ateratzen den elektroia argiaren abiadurarekin doala).

a)



Energiaren Kontserbazioa: $h\nu + mc^2 = h\nu' + \gamma\, mc^2$

momentuaren Kontserbazioa: $p_x = \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + \gamma m v\cos\varphi$

$$p_y = 0 = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + \gamma m v \sin\varphi$$

Beraz izango dugu:

$$\boxed{\begin{aligned} &E: \quad h(\nu-\nu') = (\gamma-1)\,mc^2 \\ &p \begin{cases} x: h(\nu - \nu'\cos\theta) = \gamma\beta mc^2\cos\varphi \\ y: -h\nu'\sin\theta = \gamma\beta mc^2\sin\varphi \end{cases} \end{aligned}}$$

b) Orduan izango dugu: $\theta = \pi$ eta $\varphi = 0$

Suposatuz $\beta \to 1$ dela orduan $h\nu'$ kalkulatu nahi dugunez:

$$\left.\begin{aligned} h\nu + h\nu' &= \gamma mc^2 \\ h\nu - h\nu' &= (1-\gamma)mc^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h\nu + h\nu'}{h\nu - h\nu'} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \Leftrightarrow \frac{\nu/\nu' + 1}{\nu/\nu' - 1} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu/\nu'\,(1-\gamma) + (1-\gamma) = \nu/\nu'\,\gamma - \gamma \Leftrightarrow \nu/\nu'\,(1-2\gamma) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{h\nu}{h\nu'} = \frac{1}{-1+2\gamma} \Leftrightarrow \boxed{h\nu' = (2\gamma-1)\,h\nu}$$ izango da sakabanatutako energia.

c) Compton eta Thomson sakabanaketak.

• Compton sakabanaketa:

Aldatuko dugu gure kontserbazioaren adierazpena:

Energia $\rightarrow (h\nu - h\nu' + m_e c^2)^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4$

Momentua $\rightarrow \vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}\,' \Rightarrow p_e^2 = \vec{p}_e\cdot\vec{p}_e = (\vec{p}-\vec{p}\,')\cdot(\vec{p}-\vec{p}\,') =$

$$= p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_e^2c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta$$

Hau energiaren kontserbazioan sartuz:

$$(h\nu - h\nu' + m_e c^2)^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta + m_e^2c^4$$

• $(h\nu - h\nu' + m_ec^2)^2 = (h\nu - h\nu')^2 + m_e^2c^4 + 2m_ec^2(h\nu - h\nu') =$

$$= (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu' + m_e^2c^4 + 2m_ec^2(h\nu - h\nu')$$

Beraz: $-\cancel{2}h^2\nu\nu' + \cancel{2}m_ec^2(\cancel{h}\nu - \cancel{h}\nu') = -\cancel{2}h^2\nu\nu'\cos\theta \Rightarrow$

comptonen maiztasuna $\nu_c = \frac{m_e c^2}{h}$

$$\Rightarrow \nu\nu'(1-\cos\theta) = \nu_c(\nu - \nu')$$

$$\nu\nu'(1-\cos\theta) = \nu_c(\nu-\nu') \Rightarrow 1-\cos\theta = \nu_c\left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu}\right)$$

Eta $\nu\lambda = \nu'\lambda' = c$ denez: $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \lambda_c(1-\cos\theta) \quad \text{non} \quad \lambda_c = \frac{h}{m_e c}}$$

• Orduan sakabanatutako sekzio eragilea kalkulatzeko Klein-Nishina formula formula erabiliko dugu. (Kasu ez polarizatua)

Klein-Nishina formula

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \sin^2\theta\right]}$$

Orduan aurreko emaitza erabiliz

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda}(1-\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}(1-\cos\theta)$$

Eta $\frac{1}{2} r_0^2 = \frac{\alpha^2\lambda_c^2}{8\pi^2}$ non $\alpha = 1/137$ den. $\Rightarrow \frac{1}{2} r_0^2 \simeq 1'41\cdot 10^{-15}$ m.

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2\lambda_c^2}{8\pi^2\left[1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}(1-\cos\theta)\right]^2}\left[\frac{1}{1+\frac{\lambda_c}{\lambda}(1-\cos\theta)} + 1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}(1-\cos\theta) - \sin^2\theta\right]}$$

Izango da Compton sakabanaketaren sekzio eragilea.

Energia txikietan $E \simeq E'$ izango dira $\Rightarrow \lambda/\lambda' \simeq 1$ izango dira

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2\left[2 - \sin^2\theta\right] = \frac{1}{2} r_0^2\left[1 + \cos^2\theta\right]$, hau da Thomsonen sakabanaketa, Comptonen sakabanaketaren kasu partikularra da non bai hasierako eta amaierako sakabanatutako fotoien energia berdinak diren. Beste era batera esanda energia txikietan. Energia txikietan fotoiak ia ez dio momenturik transferituko elektroiari, hau da, $\gamma \to 1$.