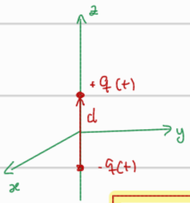
1. Gaia

1) Dipolo elektriko bakun eta oszilakorraren kargaren balioa eta banaketa-distantzia honako hauek dira: $q = \pm q_0 e^{-i\omega t}$ eta d. Kontuan hartuz horrelako dipoloak $d \ll \lambda$ eta $d \ll r$ baldintzak betetzen dituela:
a) Kalkulatu $V(\mathbf{r},t)$ potentzial eskalar elektrikoa eta halaber, frogatu $\omega = 0$ denean dipoloaren potentzial eskalar elektrikoa elektrostatikan lortzen dena dela.
b) Kalkulatu $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ potentzial bektore magnetikoa
c) Lorturiko potentzialetik abiatuz lortu dipolo elektrikoak sortzen dituen $\mathbf{E}$ eremu elektrikoa eta $\mathbf{B}$ eremu magnetikoa,
d) Frogatu dipolo honek igortzen duen potentziaren batazbestekoa honela idatz daitekeela: $<P>=(2\pi/3)Z_0(d/\lambda)^2(|I_0|^2/2)$, non $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$ den karga aldakorrak sortzen duen korronte elektrikoa.
e) Aurreko atala kontuan hartuz kalkulatu erradiazio-erresistentzia.



a), b) $V(\vec{r},t)$ kalkulatzeko jarraituko dugun ibilbidea:
- $A(\vec{r},t)$ kalkulatu
- $V(\vec{r},t)$ lortu Lorentzen Gauge.

Beraz: $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\vec{p}(t)}$ non $\vec{p}(t) = \overbrace{q\,d}^{p_0}\, e^{-i\omega t}\hat{k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{i\omega\mu_0 p_0}{4\pi}\underbrace{\frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r}}_{f(r,t)}\hat{k} = -\frac{i\omega\mu_0 p_0}{4\pi} f(r,t)\,\hat{k}$$

Esto será útil más adelante

- $\frac{\partial}{\partial r} f(r,t) = ik\, f(r,t) - \frac{f(r,t)}{r} = f(r,t)\left(ik - \frac{1}{r}\right)$ (1)
- $\frac{\partial}{\partial t} f(r,t) = -i\omega\, f(r,t)$ (2)
- $\lim_{\omega\to 0} f(r,t) = 1/r$ (3)

Orduan Lorentzen gaugea: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$

- $\frac{\partial V}{\partial t} = -i\omega V e^{-i\omega t}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{p} = 0$ como el campo magnetico no hay flujo neto a traves de ninguna superficie.

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}(f\,\vec{p}_0) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\vec{p}_0\cdot\vec{\nabla}f =$

$$= -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\vec{p}_0\cdot\left(\frac{\partial}{\partial r}f\,\hat{r}\right) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} f\left(ik - \frac{1}{r}\right)(\vec{p}_0\cdot\hat{r}) =$$

$$= -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} p_0\cos\theta\, f\left(ik - \frac{1}{r}\right)$$

Orduan:
$$\boxed{\begin{aligned} V(\vec{r},t) &= \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0} f\left(\frac{1}{r} - ik\right) \\ \vec{A}(\vec{r},t) &= -\frac{i\omega\mu_0 qd}{4\pi} f\,\hat{k}\end{aligned}}$$

$\omega \to 0$-ko limitea badaukagu.

- $\vec{A}(\vec{r},t) = 0$
- $V(\vec{r},t) = \frac{p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r} \Rightarrow V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}_0\cdot\hat{r}}{r^2}$

c) Hurrengo adierazpenak erabiliko ditugu.

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A}\end{aligned}}$$

Hasiko gara $\vec{B}$ ateratzen errazena baita:

- $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\varphi} =$

$$= \frac{i\omega\mu_0 p_0}{4\pi} f\left(ik - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}V + i\omega\vec{A}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0} f\left[\left(\frac{2}{r^2} - 2ik\right)\cos\theta\,\hat{r} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} - k^2\right)\sin\theta\,\hat{\theta}\right] \\ \vec{B} &= \frac{i\omega\mu_0 p_0}{4\pi} f\left(ik - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\,\hat{\varphi}\end{aligned}}$$

d), e) $I = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{d}\frac{dP}{dt} = \frac{-i\omega p_0}{d}e^{-i\omega t} = I_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_0 = -\frac{i\omega p_0}{d} \quad \text{eta} \quad \vec{p} = \frac{id}{\omega}\vec{I} = \frac{id}{\omega}\cdot\vec{I}_0 e^{-i\omega t}$$

Dakigunez: $\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2}k^4|\vec{p}|^2\sin^2\theta}$ beraz

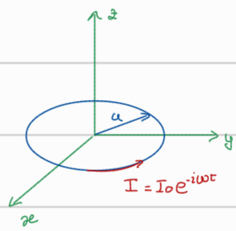
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0}{32\pi^2}\frac{\omega^4}{c^2}\cdot\frac{d^2}{\omega^2}I_0^2\cdot\sin^2\theta \Rightarrow \langle P\rangle = \frac{Z_0 k^2 d^2 I_0^2}{32\pi^2}\int_\Omega \sin^2\theta\, d\Omega =$$

$$= \frac{Z_0 k^2 d^2 I_0^2}{32\pi^2}\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{Z_0 d^2}{12\pi}\frac{\omega^2}{c^2}I_0^2$$

Jakinda $\boxed{\begin{aligned}\omega &= 2\pi f \\ c &= \lambda f\end{aligned} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}}$ $\Rightarrow \langle P\rangle = \frac{Z_0 d^2}{12\pi}\cdot\frac{4\pi^2 c^2}{c^2\lambda^2}I_0^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P\rangle = \frac{2\pi}{3}Z_0\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2\frac{I_0^2}{2}} \quad \text{non} \quad \boxed{R_{err} = \frac{2\pi}{3}Z_0\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2}$$

2) Korronte-begizta batetik, a erradioduna eta XY planoan kokatua, $I_0 e^{-i\omega t}$ korrontea dabil. Begiztak $a \ll \lambda$ eta $a \ll r$ baldintzak betetzen dituela hartuz:
a) Kalkula ezazu $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ potentzial bektore magnetikoa.
b) Kalkula itzazu Eremu elektromagnetikoak erradiazio eskualdean
c) Frogatu begizta honek igortzen duen potentziaren batazbestekoa honela idatz daitekeela: $<P>=(8\pi^5/3)Z_0(a/\lambda)^4(|I_0|^2/2)$.
d) Aurreko atala kontuan hartuz kalkulatu erradiazio-erresistentzia.



a) Hau kalkulatzeko lehenengo behar dugu begiztaren momentu magnetikoa:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}\,'\times\vec{J}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'^3 = \frac{1}{2}\oint a\cdot I(t)\cdot d\vec{l}' = \frac{1}{2}2\pi a^2 I(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{m} = \pi a^2 I(t)}$$

Honekin $\vec{A}$ ateratzeko hurrengo adierazpena erabiliko dugu:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{i\mu_0 k e^{ikr}}{4\pi r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right)(\hat{r}\times\vec{m})}$$

- $(\hat{r}\times\hat{k}) = (1,0,0)\times(\cos\theta, -\sin\theta, 0) = -\sin\theta\,\hat{\varphi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{i\mu_0 k I_0 a^2}{4}\sin\theta\,\frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right)\hat{\varphi}}$$

b) Erradiazio eskualdean gaudenez hurrengo adierazpenak erabiliko ditugu:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec B &= \vec\nabla\times\vec A\\ \vec E &= i\omega\vec A\\ \vec\nabla &\equiv ik\hat r\end{aligned}}$$

Gainera r oso handia denez $\vec A$ erradiazio eskualdean: $\vec A = -\frac{i\mu_0 K I_0 a^2}{4}\sin\theta\,\frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r}\,\hat\varphi$

$$\vec B = \vec\nabla\times\vec A = ikA(\hat r\times\hat\varphi) \Rightarrow \boxed{\vec B = \frac{\mu_0 K^2 I_0 a^2}{4}\sin\theta\,\frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r}\,\hat\theta}$$

$$\vec E = i\omega\vec A \Rightarrow \boxed{\vec E = \frac{\mu_0 K\omega I_0 a^2}{4}\sin\theta\,\frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r}\,\hat\varphi}$$

c),d) Orduan eremuak erabili ahal izateko:

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \langle\vec S\cdot(r^2\hat r)\rangle} = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}[\vec E\times\vec B]\cdot(r^2\hat r)$$

- $\vec E\times\vec B = \frac{\mu_0^2 I_0^2 a^4 K^3\omega}{16r^2}\sin^2\theta\,\hat r$

Beraz $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 I_0^2 a^4\omega^4}{32c^3}\sin^2\theta \Rightarrow \langle P\rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 a^4\omega^4}{32c^3}\,2\pi\cdot\frac{4}{3} =$

$$= \frac{\pi}{12}\frac{\mu_0 a^4}{c^3}\cdot\omega^4 I_0^2 = \frac{\pi}{12}\frac{\mu_0 a^4}{c^3}\cdot\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^4 I_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P\rangle = \frac{8\pi}{3}Z_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4\cdot\frac{I_0^2}{2}} \Rightarrow \boxed{R_{em} = \frac{8\pi}{3}Z_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4}$$

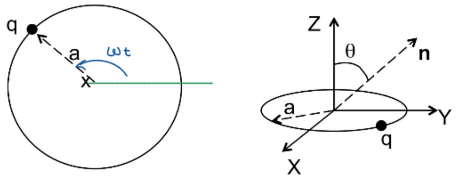
4) Karga bat (ikus irudia), q baliokoa, ω_0 abiadura angeluar konstantearekin higitzen da a erradioko orbita zirkularra deskribatuz.

(a) Lor itzazu, higidura ez-erlatibistaren kasuan, karga horrek sortzen dituen $\boldsymbol{E}$ eta $\boldsymbol{H}$ eremu elektromagnetikoak erradiazio eskualdean ($r>>a$). *Laguntza*: gogoratu ezazu soluzioa erreala izan behar duela, beraz balio konplexurik lortuz gero, emaitza izango da balio horren zati erreala.

(b) Karga biratzen duen planoaren ardatz perpendikularrari Z ardatza deituz, aztertu behatzailearen posizioarekiko (hots, Z ardatzak behatzailearen norabidearekin osatzen duen angeluarekiko) igorritako eremuen nolakotasuna, hots, polarizazioa nolakoa den: lineala, zirkularra edo eliptikoa .

(c) Kalkulatu erradiaturiko potentziaren banaketa angeluarra

(d) Kalkulatu erradiaturiko potentzia osoa



a) Lehenengo behar dugu karga birakoraren momentu dipolarra.

Oharra: Zergatik ez dugu $\vec m$ erabiliko?

Gogoratu $\vec m(t) \propto f(\omega_0)$ eta ω_0 kte izango denez $f(\omega_0)$ kte eta, ondorioz, $\vec m$ kte. $\vec A \propto \vec m \Rightarrow \vec A$ kte $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec B$ kte $\Rightarrow$ ez du erradiatuko.

Beraz, izango dugun momentu dipolarraren adierazpena:

Oharra: Adierazpen guztietan $\omega_0 \to \omega$

$$\vec p(t) = qa\cos\omega t\,\hat\imath + qa\sin\omega t\,\hat\jmath = q\cdot a(\cos\omega t\,\hat\imath + \sin\omega t\,\hat\jmath)$$

Inplizituki beti.

Jakinda importatzen zaigun magnitudea $\mathrm{Re}[\vec p(t)]$ izango dela: $\vec p(t) = qa\,e^{-i\omega t}(\hat\imath + i\hat\jmath) \Rightarrow \vec p(t) = \vec p_0\,e^{-i\omega t}$

Orain nahi ditugu $\vec E$ eta $\vec H$ erradiazio eskualdean ($r>>a$):

$$\boxed{\begin{aligned}\vec H(\vec r) &= \frac{k^2c}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}(\hat n\times\vec p)\\ \vec E(\vec r) &= Z_0\,\vec H\times\hat n\end{aligned}}$$

Lehenengo kalkulatuko ditugu banaturik biderketak: Oharra: $\hat n = \hat r$

- $\hat n\times\hat\imath = (1,0,0)\times(\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta\cos\varphi, -\sin\varphi) =$
  $= \sin\varphi\,\hat\theta + \cos\theta\cos\varphi\,\hat\varphi$
- $\hat n\times\hat\jmath = (1,0,0)\times(\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \cos\varphi) =$
  $= -\cos\varphi\,\hat\theta + \cos\theta\sin\varphi\,\hat\varphi$

Beraz:

- $\hat n\times\vec p_0 = p_0[\hat n\times\hat\imath + i(\hat n\times\hat\jmath)] = p_0[(\sin\varphi - i\cos\varphi)\hat\theta +$
  $+ \cos\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi)\hat\varphi] = p_0(-ie^{i\varphi}\hat\theta + \cos\theta\,e^{i\varphi}\hat\varphi) =$
  $= p_0\,e^{i\varphi}(-i\hat\theta + \cos\hat\varphi)$

Beraz dauzkagu:

- $\vec H(\vec r) = \frac{k^2c}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{-i\omega t}\cdot p_0 =$
  $= \frac{k^2c\,p_0}{4\pi}\frac{e^{-i[\omega\overbrace{(t-r/c)}^{t'}-\varphi]}}{r}(-i\hat\theta + \cos\theta\,\hat\varphi)$
- $\vec E(\vec r) = Z_0\,\vec H\times\hat n = \frac{Z_0k^2c\,p_0}{4\pi}\frac{e^{-i(\omega t'-\varphi)}}{r}(\cos\theta\,\hat\theta + i\hat\varphi)$

Beraz parte errealak hartuz:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec H(\vec r) &= \frac{ck^2}{4\pi}\frac{qa}{r}[-\sin(\omega t'-\varphi)\,\hat\theta + \cos\theta\cos(\omega t'-\varphi)\,\hat\varphi]\\ \vec E(\vec r) &= \frac{Z_0ck^2}{4\pi}\frac{qa}{r}[\cos\theta\cos(\omega t'-\varphi)\,\hat\theta + \sin(\omega t-\varphi)\,\hat\varphi]\end{aligned}}$$

d) Polarizazioa ikusteko:

$$\theta=0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \begin{cases}\vec H(\vec r) = H_0(r)\cdot[-\sin\varphi(t)\,\hat\theta + \cos\varphi(t)\,\hat\varphi]\\ \vec E(\vec r) = Z_0H_0(r)[\cos\varphi(t)\,\hat\theta + \sin\varphi(t)\,\hat\varphi]\end{cases}$$

Hau da, $\boxed{\theta=0 \text{ den kasuan polarizazio zirkularra}}$

$$\theta=\pi/2 \Rightarrow \cos\theta=0 \Rightarrow \begin{cases} \vec H(\vec r)= H_0(r)\sin\varphi(t)\,\hat\theta \\ \vec E(\vec r)=Z_0 H_0(r)\sin\varphi(t)\,\hat\varphi\end{cases}$$

Hau da, $\boxed{\theta=\pi/2 \text{ kasuan lineala da polarizazioa eta ondorioz edozein } \theta\text{-rako eliptikoa}}$

c) Kasu honetan erabiliko dugun adierazpena:

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c^2 Z_0}{32\pi^2}k^4\,|(\hat n\times\vec p)\times\hat n|^2}$$ Beraz izango dugu:

- $(\hat n\times\vec p)\times\hat n=\vec p-(\hat n\cdot\vec p)\,\hat n=\vec p-p_0(\cos\varphi\sin\theta+i\sin\varphi\sin\theta)\hat n$
- $|(\hat n\times\vec p)\times\hat n|^2=\vec p^{\,*}\vec p-(\hat n\cdot\vec p)(\hat n\cdot\vec p^{\,*})=$

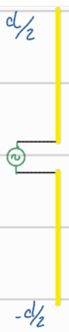
$$=2p_0^2-p_0^2(\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta)=p_0^2\overbrace{(2-\sin^2\theta)}^{\boxed{2-1+\cos^2\theta=1+\cos^2\theta}}$$

Hau da: $$\boxed{\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c^2k^4Z_0}{32\pi^2}\,p_0^2(1+\cos^2\theta)}$$

d) Potentzia osoa: $$\boxed{\langle P\rangle=\int_\Omega \frac{dP}{d\Omega}\,d\Omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle P\rangle=\frac{c^2k^4Z_0p_0^2}{32\pi^2}\cdot 2\pi\cdot\left(2\cdot 2-\frac{4}{3}\right)\Rightarrow \boxed{\langle P\rangle=\frac{c^2k^4Z_0p_0^2}{48\pi}}$$

5) Zentrutik elikaturiko antena lineal bat z ardatzean kokaturik dago eta luzatzen da $z=+d/2$ puntutik $z=-d/2$ punturaino. Antenak erdian tarte huts bat du, eta hortik kitzikatzen da sorgailu baten bidez. Antenatik dabilen korrontea honela idatz daiteke:
$I(z)\,e^{-i\omega t}=I_0(1-2|z|/d)\,e^{-i\omega t}$
Kalkulatu $d\ll\lambda$ baldintzapean:
a) antena honek igortzen duen batazbesteko potentzia angelu solidoko eta halaber,
b) potentzia osoa.
c) antenaren erradiazio-erresistentzia



$$I(z)e^{-i\omega t}=I_0\left(1-\frac{2|z|}{d}\right)e^{-i\omega t}\ ;\quad d\ll\lambda$$

a) Lortu behar dugu momentu dipolarra, korronteak kargak mugitzean sortuko duena.

$$\boxed{\int_V \vec J\,dV=\int \vec I\cdot d\vec\ell=-i\omega\vec p}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-d/2}^{d/2} dz\left[I_0e^{-i\omega t}\left(1-\frac{2|z|}{d}\right)\right]=I_0e^{-i\omega t}\left\{\int_{-d/2}^{0}\left(1+\frac{2z}{d}\right)dz+\int_0^{d/2}\left(1-\frac{2z}{d}\right)dz\right\}=I_0e^{-i\omega t}\left\{\left[z+\frac{z^2}{d}\right]_{-d/2}^{0}+\left[z-\frac{z^2}{d}\right]_0^{d/2}\right\}=$$

$$=I_0e^{-i\omega t}\left\{\frac d2-\frac d4+\frac d2-\frac d4\right\}=\frac{I_0 d}{2}e^{-i\omega t}=-i\omega\vec p\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec p=\frac{i I_0 d}{2\omega}e^{-i\omega t}}$$

Honekin emaitza lor dezakegu $$\boxed{\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c^2Z_0}{32\pi^2}k^4|\vec p|^2\sin^2\theta}$$

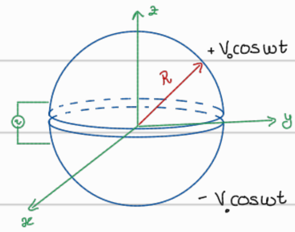
Hau da: $$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{\cancel{c^2}Z_0}{32\pi^2}\cdot k^{\cancel{4}\,2}\cdot\frac{d^2I_0^2}{4\cancel{\omega^2}}\sin^2\theta\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{dP}{d\Omega}=\frac{Z_0k^2d^2}{64\pi^2}\cdot\frac{I_0^2}{2}\sin^2\theta}$$

b),c) Beraz: $$\langle P\rangle=\frac{Z_0k^2d^2}{64\pi^2}\cdot\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{I_0^2}{2}=\frac{Z_0}{24\pi}\cdot\frac{4\pi^2c^2}{c^2\lambda^2}d^2\,\frac{I_0^2}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\langle P\rangle=\frac{\pi}{6}Z_0\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2\cdot\frac{I_0^2}{2}}\Rightarrow\boxed{R_{err}=\frac{\pi}{6}Z_0\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2}$$

6) Eroankortasun oso handiko bi geruza metaliko erdiesferiko (R erradiokoak) tarte isolatzaile oso estuaz banaturik daude. Potentzial alterno batera lotzen dira erdiesferak, potentziala $\pm V\cos\omega t$ bihurtuz. Lor itzazu erradiazio eremuak, erradiaturiko potentziaren banaketa angeluarra eta esferatik erradiaturiko potentzia osoa.
Laguntza: Jackson liburuaren 2.6, 2.7 eta 3.3 atalak lagungarriak dira.



Dakigunez esfera kanpotik izango dugun potentziala lortzeko erabiliko dugu $\nabla^2V=0$ hurrengo mugalde baldintzekin: $r\to\infty\Rightarrow V\to 0$

$$r=R\Rightarrow V(\theta)=\begin{cases}+V_0\cos\omega t & \theta\in[0,\pi/2]\\ -V_0\cos\omega t & \theta\in[\pi/2,\pi]\end{cases}$$

eta simetria asimutala

Hau da, daukagun potentzialaren adierazpen orokorra hurrengoa izango da:

$$V(\vec r)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\overset{0\ \text{Regularidad.}}{\cancel{A_\ell r^\ell}}+\frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

Hau ebatzi baino lehen

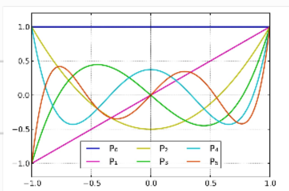
Orduan hau ebatzi baino lehen ikertuko dugu nola garatu hurrengo funtzioa Legendreren polinomioetan:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$ Hau garatu nahi dugu $\boxed{f(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell P_\ell}$

moduan eta hurrengoa dakigu: $\boxed{\int_{-1}^{1}dx\,P_\ell(x)\,P_\nu(x)=\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\nu}}$

Orduan gure kasuan izango dugu: $\boxed{A_\ell=\frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1}dx\,f(x)\,P_\ell(x)}$

- $A_\ell=\frac{2\ell+1}{2}\left[\int_0^1 P_\ell(x)\,dx-\int_{-1}^{0}P_\ell(x)\,dx\right]$
- $\ell=2n$ denean $P_\ell(x)$ bikoitia izango da.
- $\ell=(2n-1)$ denean $P_\ell(x)$ bakoitia.



Gure kasuan, izango dugun funtzioa bikoitia denean

$P_{2n}(x) = P_{2n}(-x)$ denez bi integralak berdinak izango

dira eta gure emaitza nulua izango da.

Baina, funtzio bakoitietan $P_{(2n-1)}(x) = -P_{(2n-1)}(x)$ denez

izango dugun emaitza $\int_0^1 P_{2n-1}(x)\,dx$-ren bikoitza izango da.

Hau da: $A_\ell = (2\ell+1)\int_0^1 P_{2\ell+1}(x)\,dx = \begin{cases} A_0 = 3/2 \\ A_1 = -7/8 \\ A_3 = 11/16 \\ \vdots \end{cases}$

Gure problemara bueltatuz:

$$V(R) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} \cdot P_\ell(\cos\theta) = V(\theta)$$

Biderkadura eskalarra bi aldeetan eginez: $(\cos\theta \equiv x)$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[\frac{B_\ell}{R^{\ell+1}}\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\,P_\nu(x)\,dx = \int_{-1}^{1} V(x)\,P_\nu(x)\,dx\right]$$

$$\frac{B_\ell}{R^{\ell+1}}\,\frac{2}{2\ell+1} = V_0(t)\,2\int_0^1 P_\ell(x)\,dx \iff \boxed{B_\ell = (2\ell+1)V_0(t)R^{\ell+1}\int_0^1 P_\ell(x)\,dx}$$

non ℓ gozatiak bakoitiak izango dira.

Guri interesatzen zaigu nez kurbilketa dipolarra:

$B_1 = \frac{3}{2}\cdot V_0\, R^2 \cos\omega t$ izango dugu. Hau da:

$$V \simeq \frac{3}{2} V_0 \frac{R^2}{r^2}\cos\omega t\,\cos\theta \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3} \iff$$

$\iff \boxed{\vec p = V_0 6\pi\varepsilon_0 R^2 e^{-i\omega t}\,\hat k}$ izango da momentu dipolarra.

Honekin lortu ahal ditugu bereala eremuak (Erradiazio zonaldean):

- $\hat r \times \hat k = (1,0,0)\times(\cos\theta, -\sin\theta, 0) = -\sin\theta\,\hat\varphi$
- $(\hat r\times\hat k)\times\hat r = (0, 0, -\sin\theta)\times(1,0,0) = -\sin\theta\,\hat\theta$

orduan:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec H(\vec r) &= \frac{k^2 c}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)(\hat n\times\vec p)\\ \vec E(\vec r) &= Z_0\,\vec H\times\hat n\end{aligned}}$$

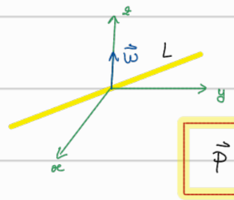
$$\boxed{\begin{aligned}\vec H(\vec r) &= -\frac{3\varepsilon_0 k^2 c V_0}{2}\frac{R^2}{r^2}e^{-i\omega t'}\sin\theta\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\hat\varphi\\ \vec E(\vec r) &= -\frac{3k^2 V_0}{2}\frac{R^2}{r^2}e^{-i\omega t'}\sin\theta\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\hat\theta\end{aligned}}$$

Orain erradiaturiko potentziaren banaketa angeluarra

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2}k^4|\vec p|^2\sin^2\theta} \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{9}{3}\frac{Z_0}{\mu_0}(kR)^4 V_0^2\sin^2\theta}$$

Beraz $\boxed{\langle P\rangle = 8\pi\frac{Z_0}{\mu_0}(kR)^4 V_0^2}$

7) Lor ezazu l luzera laburreko hari birakor batek erradiatzen duen potentzia. Hasiera batean X ardatzean kokaturik balego, zentrua jatorrian duelarik, luzera-unitateko karga-dentsitatea litzateke: $\lambda = \lambda_0 x$. Haria, X-Y planoan z ardatzaren inguruan biratzen da ω maiztasun angeluarrarekin ($l << \omega/c$).
Erkatu lorturiko emaitza dipolo linear oszilakor bakunaren emaitzarekin.



Gainera $\lambda = \lambda_0 x$ denez lortu ahal

dugu hagatxoaren momentu dipolarra:

$$\boxed{\vec p = \int \vec r\, dq} \Rightarrow \underline{p_0} = \int_{-l/2}^{l/2} x\,\lambda_0\,dx = \lambda_0\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx =$$

$$= \underline{\frac{\lambda_0\, l^3}{12}}$$

Honekin daukagu zein izango den momentu dipolar elektrikoa.

Baina hau ez da guk erabiltzen oi duguna beraz:

$$\vec p = p_0\,(\cos\omega t\,\hat\imath + \sin\omega t\,\hat\jmath) = p_0\, e^{-i\omega t}(\hat\imath + i\hat\jmath) = \vec p_0\, e^{-i\omega t}$$

Kasu honetan erabiliko dugun adierazpena:

$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2}k^4\,|(\hat n\times\vec p)\times\hat n|^2}$ Beraz izango dugu:

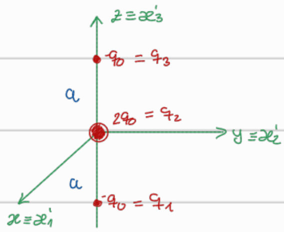
- $(\hat n\times\vec p)\times\hat n = \vec p - (\hat n\cdot\vec p)\,\hat n = \vec p - p_0\,(\cos\varphi\sin\theta + i\sin\varphi\sin\theta)\hat n$
- $|(\hat n\times\vec p)\times\hat n|^2 = \vec p^{\,*}\,\vec p - (\hat n\cdot\vec p)(\hat n\cdot\vec p^{\,*}) =$

$$= 2p_0^2 - p_0^2(\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta) = p_0^2\underbrace{(2-\sin^2\theta)}_{\boxed{2-1+\cos^2\theta\, =\, 1+\cos^2\theta}}$$

Hau da: $\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 k^4 Z_0}{32\pi^2}\cdot p_0^2(1+\cos^2\theta)}$ ikusten denez

karga bakuna birakaren berdina izango da.

8) Lor ezazu kuadripolo lineal oszilakor batek erradiatzen duen potentziaren banaketa angeluarra eta potentzia osoa. Kuadrupolo lineala z ardatzean kokatuta dago eta $-q_0$ kargak $z=\pm a$ puntuetan izanik, $+2q_0$ karga $z=0$ puntuan kokatuta dago.



Karga banaketa honetan argi dago

Karga totala 0 dela eta momentu

dipolar elektrikoa ere bai, beraz

kurbilketa kuadrupolarra erabi beharko dugu.

Oharra: $q_0 \equiv q_0\, e^{-i\omega t}$ gemuzak emateko.

Garapen multipolarra egiten badugu:

$$\boxed{V(r) = \frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\sum_i^3\sum_j^3 Q_{ij}\, x_i x_j + \dots}$$

Hemen berehala ikusten dugu nola: $\begin{cases} Q_T = 0 \\ \vec{p} = q(-d)\hat{k} - 2q(0) + q d\hat{k} = 0 \end{cases}$

Beraz tentsore kuadrupolarra aterako dugu. Honen adierazpena: $\boxed{Q_{ij} = \sum_k q_k\left(3x'_{ik}x'_{jk} - r_k^2\delta_{ij}\right)}$

Tentsore honen komponenteak aterako ditugu.

Tentsoreak simetrikoak.

ikusi nola ez dagoenez inolako kargarik x eta y ardatzean $q_K = 0$ izango da.

- $Q_{12} = Q_{21} = \sum_k q_k\left(3x'_{1k}x'_{2k} - 0\right) = 0$

- Gauza berdinaren gatik: $Q_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j$

orduan diagonaleko elementuak:

- $Q_{11} = \sum_k q_k\left(3x'_{1k}x'_{1k} - r_k^2\right) = q_1(0 - a^2) + q_2(0-0) + q_3(0-a^2)$
  $= 2q_0 a^2$

- $Q_{22} = \sum_k q_k\left(3x'_{2k}x'_{2k} - r_k^2\right) = 2q_0 a^2$

- $Q_{33} = \sum_k q_k\left(3x'_{3k}x'_{3k} - r_k^2\right) = -q_0\left(3(-a)(-a) - a^2\right) - q_0(3a^2 - a^2) =$
  $= -4q_0 a^2$

Hau da $\boxed{Q_{ij} = 2q_0a^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}$

Simetria asimutala dugunez $\hat{n} = \sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{k}$

Eta erabiliko dugun adierazpena:

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{z_0 c^2}{1152\pi^2} k^6\, \mathrm{Re}\left[(\hat{n}\times\bar{Q})\times\hat{n}\right]^2 \quad \text{non } \bar{Q} = \sum_i Q_i n_i}$$

Beraz:

- $\bar{Q} = 2q_0a^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} = 2q_0a^2\left(\sin\theta\,\hat{\imath} - 2\cos\theta\,\hat{k}\right)$

- $\hat{n}\times\bar{Q} = 6q_0a^2 e^{-i\omega t}\cos\theta\sin\theta\,\hat{\jmath}$

- $(\hat{n}\times\bar{Q})\times\hat{n} = 6q_0a^2e^{-i\omega t}\cos\theta\sin\theta\left(\cos\theta\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\hat{k}\right)$

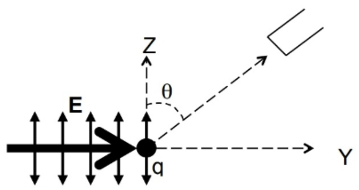
- $\left[(\hat{n}\times\bar{Q})\times\hat{n}\right]\left[(\hat{n}\times\bar{Q}^*)\times\hat{n}\right] = 36q_0^2a^4\cos^2\theta\sin^2\theta$

Beraz: $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{z_0c^2k^6}{1152\pi^2}36q_0^2a^4\overbrace{\cos^2\theta\sin^2\theta}^{\frac{\sin^2(2\theta)}{4}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 a^4 q_0^2}{128\pi c^3}\,\omega^6\sin^2(2\theta)}$$

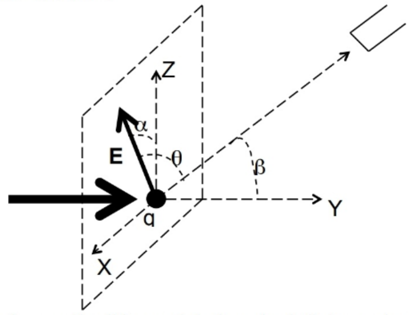
9) Kontsidera ezazu elektroi aske bat (pausagunean dagoena) erasotua dela linealki polarizaturiko uhin lau monokromatiko batez. Kalkulatu, kasu EZ-erlatibistan:

(i) Sakabanaketaren sekzio eragile diferentziala; hots, dσ/dΩ, uhin erasotzailea (Y ardatzaren norabidean zuzendua) linealki polarizaturik dagoela suposatuz.

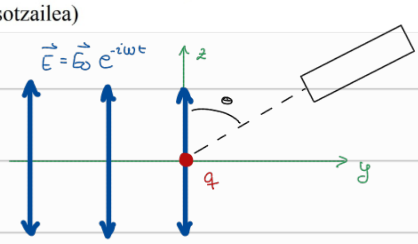


(ii) Sakabanaketaren sekzio eragile osoa. Honi Thompson sakabanaketaren (scattering) sekzio eragilea dei ohi zaio.

(iii) Uhin erasotzailea polarizatu gabekoa den kasu orokorraren emaitza lortzeko (i) emaitza erabil daiteke. Horretarako, egin behar den gauza bakarra zera da: (a) emaitzaren bataz bestekoa polarizazio angelu desberdinetarako egin. Beraz, aipaturikoa eginez kalkulatu <dσ/dΩ>.



Laguntza: Sekzio eragile diferentziala honela definitzen da: (erradiaturiko potentzia dΩ angelu solidopean θ norabidean)/(fluxu erasotzailea=azalera unitateko potentzia erasotzailea). Sekzio eragile osoa defini daiteke honela: (erradiaturiko potentzia)/(fluxu erasotzailea)



a) Orduan lortu behar duguna da q kargak mugitzean sortzen duen momentu dipolarra (hau da lurbilpen dipolarra).

$F = m\ddot{z} = -eE \Leftrightarrow \ddot{z} = -\frac{eE_0e^{-i\omega t}}{m}$

Orduan $z(t) = z_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \dot{z} = -i\omega z \Rightarrow \ddot{z} = -\omega^2 z$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{z} = -\omega^2 z_0 e^{-i\omega t} = -\frac{eE_0e^{-i\omega t}}{m} \Rightarrow z_0 = \frac{eE_0}{\omega^2 m}$

Honekin, dakigunez $\boxed{\vec{p}_0 = z_0(-e)\hat{k}}$ izango da $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = -\frac{e^2E_0}{\omega^2 m}e^{-i\omega t}\hat{k}} \Rightarrow \boxed{|\vec{p}|^2 = \frac{e^4E_0^2}{\omega^4m^2}}$

Beraz dakigunez $\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 z_0}{32\pi^2}k^4|p|^2\sin^2\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\cancel{c^2}\, z_0}{32\pi^2}\,\frac{\cancel{\omega^4}}{c^{\cancel{4}\,2}}\cdot\frac{e^4E_0^2}{\cancel{\omega^4}m^2}\sin^2\theta = \frac{z_0e^4E_0^2}{32\pi^2c^2m^2}\sin^2\theta$

Orduan: $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP/d\Omega}{\langle|\vec{S}|\rangle}} = \frac{z_0e^4E_0^2}{32\pi^2c^2m^2}\sin^2\theta\cdot\frac{2\mu_0c}{E_0^2} =$

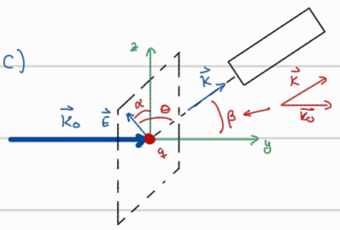
$= \frac{\mu_0^2}{16\pi^2}\cdot\frac{e^4}{m^2}\sin^2\theta = \left(\frac{e^2\mu_0}{4\pi m}\right)^2\sin^2\theta$

Elektroiaren erradio klasikoa: $\boxed{r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0mc^2} = \frac{e^2\mu_0}{4\pi m}\ 1\,2'18\cdot10^{-15}\,m}$

orduan izango dugu: $\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{thom} = r_0^2 \sin^2\theta}$

b) $\boxed{\sigma_{Tho} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \simeq 6'65\cdot 10^{-25}\ m^2}$

c)

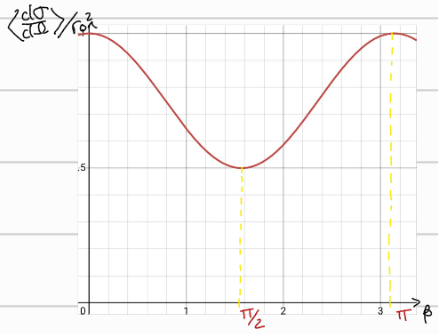


orduan kasu hau ebasteko aurreko kasua erabiliko dugu θ α eta β-ren funtzioan jarri eta gero α-rekiko batez bestekoa hartuz.

- $\sin^2\theta = (1-\cos^2\theta)$
- $\cos\theta = \cos\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\alpha \sin\beta$

Beraz aurreko adierazpena: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2\left(1-\cos^2\alpha \sin^2\beta\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\right\rangle_\alpha = r_0^2\left(1-\frac{\sin^2\beta}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\right\rangle_\alpha = \frac{r_0^2}{2}\left(1+\cos^2\beta\right)}$



10) Eguzkia plasma oso ionizatua da, eta bertan, batezbesteko elektroi-dentsitatea 10^{24} cm^{-3} ordenakoa da. (a) Kalkulatu erradiazio elektromagnetikoaren ibilbide askea eguzkian, (b) Zenbatets ezazu erradiazio elektromagnetikoak zenbat denbora behar duen eguzkiaren erditik azaleraraino heltzeko ($R_{eguzkia} = 7 \times 10^8$ m).
Laguntza: (b) atalean ibilbidea, ziur aski, azarezkoa da. Azarezko 3D-ko bidean, R distanzia-tarte zuzena bidaiatzeko ibili beharreko urrats-tarteen kopurua R^2/l^2 da; non l urrats-tartearen luzera den.

Dau kagun elektroi dentsitatea: $\rho_{e^-} = 10^{24}\ cm^{-3} = 10^{30}\ m^{-3}$

a) Orduan ikusi nahi dugu zenbat talka izango ditugun denbora unitateko. Jadanik dakigu $\boxed{\sigma_{Tho} = r_0^2 \sin^2\theta}$ izango deb. Talken maiztasuna:

zentzua dauka $\rho_e\uparrow, \sigma\uparrow$ eta $\ell\uparrow$ $\nu_{tal}\uparrow$

$\nu_{tal} = \frac{N_{tal}}{\Delta t} = \frac{\rho_{e^-}\cdot\sigma\cdot\ell}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\nu_{tal} = \rho_{e^-}\cdot\sigma\cdot c\ \ [e^- s^{-1}]}$

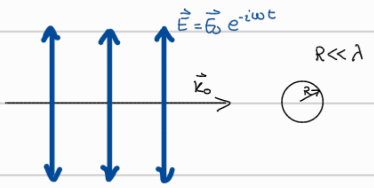
orduan batezbesteko ibilbide askea:

$\boxed{\ell = \frac{\langle v\rangle}{\nu_{tal}}} \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{1}{\rho_{e^-}\cdot\sigma_{Tho}}} \simeq 1'5\ \mu m$

b) Laguntzan esaten digute zenbat hurrats (talka) egongo diren:

$N_{tal} = \frac{R_{eg}^2}{\ell^2} \Rightarrow \boxed{t = \frac{R_{eg}^2}{\ell^2}\cdot\frac{1}{\nu_{tal}}} \Rightarrow \boxed{t = \frac{R_{eg}^2}{\ell\cdot c} \simeq 1\cdot 10^{15} s \simeq 34'48\ \text{Maños}}$

11) Elektroi aske bat kontsideratu beharrean kontsidera dezagun, orain, esfera dielektriko edo eroale txiki bat airean edo hutsean kokaturen gainean uhin lau monokromatiko batek erasotzen duela. Demagun gainera esferaren erradioa (R) erradiazio erasokorraren uhin-luzera (λ) baino txikiagoa dela (hobe $10R < \lambda$)
Kalkulatu baldintza hauetan, uhin erasokorraren λ-ren arabera:
i) sakabanaketaren sekzio eragile diferentziala.
ii) sakabanaketaren sekzio eragile osoa. Honi Rayleigh sakabanaketaren sekzio eragile deritzo eta zeruaren illunabarreko gorritasuna eta eguneko urdintasuna azaltzeko balio du.



a) Esfera dielektriko batean induzituko den momentu dipolar elektrikoa:

$\boxed{\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E} \quad \text{non} \quad \alpha = 4\pi R^3\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon-2\varepsilon_0}\right)}$ Metaletan $\varepsilon\to\infty \Rightarrow \alpha = 4\pi R^3$

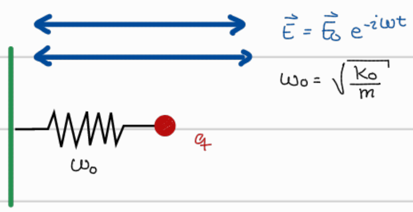
orduan dena α-ren funtzioan kalkulatuz:

- $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0 k^4}{32\pi^2}\cdot|p|^2\cdot\sin^2\theta = \frac{Z_0 c^2 k^4}{32\pi^2}\varepsilon_0^2|\alpha|^2 E_0^2 \sin^2\theta$
- $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP/d\Omega}{\langle|\vec{S}|\rangle} = \frac{Z_0 c^2 k^4}{32\pi^2}\cdot\varepsilon_0^2|\alpha|^2 \cancel{E_0^2}\sin^2\theta\cdot\frac{2\mu_0 c}{\cancel{E_0^2}} =$

$= \cancel{\mu_0^2 c^4 \varepsilon_0^2}\cdot\frac{k^4}{16\pi^2}\cdot|\alpha|^2\sin^2\theta \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2}\cdot k^4|\alpha|^2\sin^2\theta}$

b) $\sigma = \frac{8\pi}{3}\cdot\frac{1}{16\pi^2}k^4|\alpha|^2 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{8\pi}{3}(2\pi)^4\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon-2\varepsilon_0}\right)^2\frac{R^6}{\lambda^4}}$

12) Kasu honetan elektroi aske bat kontuan hartu beharrean atomo bati edo molekula bati loturiko elektroia kontuan hartuko dugu. Uhin elektromagnetiko monokromatiko lau eta linealki polarizatuak erasotzen duenean, elektroiaren higidura osziladore harmoniko bortxatu eta indargetuarena bezalakoa har dezakegu, oreka posizioarekiko desplazamenduak txikiak badira. Baldintza hauetan elektroiak pairatuko duen indar berreskuratzailea ia lineala izango baita lehen hurbilketan eta ez-linealtasunak, berriz, perturbazioak izango dira.
Eredu hau egokia da materian gertatzen den erradiazioaren sakabanaketa erresonantea tratatzeko (gogoratu konstante dielektrikoaren jokaera maiztasunarekin) eta baita ere materia sakabanatzailearen maiztasunarekiko menpekotasuna tratatzeko. Beraz, kontuan hartuz indar berreskuratzaile lineala, abiaduraren proportzionala den indar likatsua eta kanpoko indarra linealki polarizaturiko uhin lau monokromatikoak sortzen duela,
(a) kalkulatu kasu ez-erlatibistan sakabanaketaren sekzio eragile osoa uhin erasotzailearen maiztasunaren arabera eta
(b) irudikatu lorturiko emaitza, osziladorearen indargetze-konstantearen hiru balioetarako, eta emaitza azaldu.



a) Izango dugun ODE hurrengoa izango da.

$$\boxed{m\ddot{x} = -eE(t) - k_0 x - \underbrace{m\gamma\dot{x}}_{\text{erradiatzean galduko du energia}}}$$

Orduan $x(t) = A e^{-i(\omega t - \varphi_0)}$; $\dot{x} = -i\omega x$; $\ddot{x} = -\omega^2 x$

Hau ekuazioan sartuz:

$$-\omega^2 x - i\omega\gamma x + \omega_0^2 x = -\frac{e E_0}{m} e^{-i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{E_0}{m}\frac{e}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma} e^{-i\omega t}}$$

Hemendik, dipoloaren adierazpena lortu ahal dugu:

$$\boxed{\vec{p}(t) = -e\,\vec{r}(t)} \Rightarrow \vec{p}(t) = \frac{E_0}{m}\frac{e^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma} e^{-i\omega t}$$

Ere atera dezakegu α faktorea:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{m\varepsilon_0}\frac{e^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}} \Rightarrow |\alpha|^2 = \frac{e^4}{m^2\varepsilon_0^2}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}$$

Hortaz: $|\vec{p}|^2 = \varepsilon_0^2 |\alpha|^2 E_0^2 \Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2} k^4 \varepsilon_0^2 E_0^2 |\alpha|^2 \sin^2\theta$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 |\alpha|^2}{16\pi}\sin^2\theta \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \sin^2\theta \, \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}}$$

Beraz: $\boxed{\sigma = \underbrace{\boxed{\frac{8\pi}{3} r_0^2}}_{\sigma_{Tho}} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}}$

b)