[2. Cuatri]

2. Etxechallenge

1. Ariketa

$t=0$ aldiuneko hidrogeno atomoko elektroiaren egoera ondorengo uhin-funtzioaren bidez adierazten dugu:

$$\Psi(\vec{r},0)=\left[2\psi_{100}+\psi_{210}+\sqrt{2}\psi_{211}+\sqrt{3}\psi_{21-1}\right]\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Aldiune horretan, zein da protoiatik 10^{-10} cm-tara elektroia aurkitzeko probabilitatea?

$$P(r)\,dr = r^2 |R(r)|^2 dr \Rightarrow P(r) = \int_0^{r_0} r^2 |R(r)|^2 \, dr$$

$$P(0<r<10^{-10}\text{ cm}) = \frac{4}{10}\int_0^{r_0} |R_{10}|^2 r^2 dr + \frac{6}{10}\int_0^{r_0} |R_{21}|^2 r^2 dr =$$

$$= 3'5 \cdot 10^{-6}$$

2. Ariketa

Tritium atomoaren elektroia oinarrizko egoeran dago. Bapatean, erreakzio nuklear baten ondorioz, tritium atomo horren nukleoa aldatzen da, eta bi protoi eta neutroi bat izatera pasatzen du. Erreakzioa gertatzen den aldiune horretan (beraz, ez dago denborarik elektroiaren hasierako egoera aldatzeko), zein da elektroia atomo berriaren oinarrizko egoeran egoteko probabilitatea?

Daukagun elektroia $|\psi\rangle = |100\rangle_T$ ← tritioarena

Pasatzen gara tritiotik → Heliora. $(Z=2)$

Probabilitatea $|\psi'\rangle = |100\rangle_H$

Dakigu $\langle \vec{r} | 100 \rangle = Y_0^0 \, R_{10} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot 2 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a_0}}$

orduan egin behar dugu oinarri aldaketa bat:

$|\psi\rangle = \sum c_n |n\, l\, m_l\rangle_H$ eta nahi duguna $|C_1|^2$ izango

da $\Rightarrow$ $|C_1|^2 = \left| {}_H\langle 100 | 100 \rangle_T \right|^2 =$

$$= \left| \int_0^\infty R_{10}^*(Z=2) \cdot R_{10}(Z=1)\, r^2 dr \int_\Omega |Y_0^0|^2 \, d\Omega \right|^2 =$$

$$= \left| 4 \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \left(\frac{2}{a_0} \right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{r}{a_0}} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2 dr \right|^2 = 0'702$$

Etxeechallenge 3

1. Galdera

$\xi_i = (\vec{r}_i, \sigma_i)$ i partikularen aldagai espazialak eta espinoralak izanik, i eta j partikulak trukatzen dituen truke-eragileak, $\widehat{P}_{ij}$, ondorengo erlazioa betetzen du N partikulen egoera zehazten duen Ψ uhin-funtzioaren gainean aplikatzean:

$$\underbrace{\widehat{P}_{ij}}_{\hat{P}} \underbrace{\Psi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_j, \cdots, \xi_N)}_{\Psi} = \underbrace{\Psi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_j, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_N)}_{\Psi'}$$

$\widehat{P}_{ij}$ eragilea hermitikoa al da? Eta unitarioa?

Oharra: $\widehat{A}$ eragile bat unitarioa izateko $\widehat{A}^{-1} = \widehat{A}$ bete behar da; edo beste era batean esanda, $\widehat{A}^{-1}\widehat{A} = \mathbb{1}$ denez, $\widehat{A}^2 = \mathbb{1}$ izango dugu.

Orlegiaz notazio aldaketa dago adierazita.

Dakigu $\hat{P}\hat{P}\Psi = \hat{P}\Psi' = \Psi \Rightarrow \hat{P}\hat{P}\Psi = \Psi \iff \hat{P}\hat{P} = \mathbb{1}$

Eta dakigunez $\hat{P}\hat{P}^{-1} = \mathbb{1}$ dela definizioz

$\boxed{\hat{P} = \hat{P}^{-1} \text{ izango da hau da unitarioa izango dela frogatu dugu.}}$

Orduan jakiteko Hermitikoa den haren adierazpen orokorra erabiliko dugu.

solo vamos a tener en cuenta las variables que cambian para agilizar la notación $\xi_i \equiv i$ y $\xi_j \equiv j$

$$\langle \Psi, \hat{P}\varphi \rangle = \langle \hat{P}^{+}\Psi, \varphi \rangle \Rightarrow \int di\, dj\ \Psi^*(i,j) \cdot \hat{P}\varphi(i,j) = \int di\, dj\, [\hat{P}\Psi(i,j)]^* \varphi(i,j)$$

$$\int di\, dj\ \Psi^*(i,j)\, \varphi(j,i) = \boxed{\int di\, dj\ \Psi^*(j,i)\, \varphi(i,j)}$$

Parte honetan hurrengo aldaketa egiten

$i \rightarrow j \Rightarrow di = dj$

$j \rightarrow i \Rightarrow dj = di$

$\boxed{\int di\, dj\ \Psi^*(i,j)\, \varphi(j,i) = \int \underbrace{dj\, di}_{dj\,di = di\,dj} \Psi^*(i,j)\, \varphi(j,i) \Rightarrow \text{Orduan ere izango da Hermitiarra.}}$

2. Galdera

$\xi_i = (\vec{r}_i, \sigma_i)$ i partikularen aldagai espazialak eta espinoralak izanik, i eta j partikulak trukatzen dituen truke-eragileak, $\widehat{P}_{ij}$, ondorengo erlazioa betetzen du N partikulen egoera zehazten duen Ψ uhin-funtzioaren gainean aplikatzean:

$$\widehat{P}_{ij}\Psi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_j, \cdots, \xi_N) = \Psi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_j, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_N)$$

.

Goiko truke-eragileak erabiliz ondorengo eragile berriak definitzen ditugu:

$$\widehat{P}^{\pm}_{ij} \equiv \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \widehat{P}_{ij}\right).$$

Eragile hauek **proiektoreak** al dira? Zein da $\widehat{P}^{\pm}_{ij}$ eragileen eragina uhin-funtzio antisimetriko baten, Ψ^A, gainean aplikatzean?

Oharra: $\widehat{A}$ eragile bat **proiektore** bat bada $\widehat{A}^2 = \widehat{A}$ bete behar du, zeren eta $\widehat{A}$ eragileak Ψ uhin-funtzio baten gainean aplikatzean Hilbert espazioaren (egoera kuantikoen espazioa osoa) azpiespazio batean proiektatzen badu ($\mathcal{H}'$) (hau da, $\widehat{A}\Psi = \Psi'$, non $\Psi' \in \mathcal{H}'$), ateratzen den uhin-funtzioaren gainean berriro $\widehat{A}$ aplikatzen badugu, azpiespazio berdinean proiektatzen duenez, emaitza berdina lortuko dugu (hau da, $\widehat{A}\Psi' = \Psi'$) zeren eta dagoeneko $\Psi' \in \mathcal{H}'$. Hau da, $\widehat{A}$ eragilea proiektore bat bada $\widehat{A}^2 = \widehat{A}$ betetzen da, eta erlazio hau da frogatu behar duguna proiektore bat dela baieztatzeko.

Lehenengo Proiektorea den ikusi behar dugu beraz definizioa aplikatuko dugu

$(\hat{P}^{\pm})^2 \Psi \overset{?}{=} \hat{P}^{\pm} \Psi$

$(\hat{P}^{\pm})^2 = \hat{P}^{\pm}\hat{P}^{\pm} = \frac{1}{4}(1 \pm \hat{P})(1 \pm \hat{P}) = \frac{1 \pm \hat{P} + \hat{P}\hat{P} \pm \hat{P}}{4} = \frac{1 \pm 2\hat{P} + \overbrace{\hat{P}\hat{P}}^{1}}{4} = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{P})$ izango da

Hau da, $\boxed{(\hat{P}^{\pm})^2 = \hat{P}^{\pm} \text{ eta ondorioz proiektore bat izango da}}$

Zer gertatuko da $\hat{P}^{\pm}$ Ψ^A baten gainean aplikatzen badugu?

$\hat{P}^{\pm}\Psi^A = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{P})\Psi^A = \frac{1}{2}(\Psi^A \pm \Psi^{A'}) \Rightarrow$ Definizioa: $\hat{P}\Psi = \Psi' = -\Psi$ izango da Ψ Antisimetrikoa bada

$\Rightarrow \hat{P}^{\pm}\Psi^A = \frac{1}{2}(\Psi^A \mp \Psi^A)$ $\boxed{\begin{array}{l} \hat{P}^{+}\Psi^A = 0 \\ \hat{P}^{-}\Psi^A = \Psi^A \end{array}}$ izango dira emaitza posibleak.

Ebaechallenge 4

Bi elektroiei dagozkien Hamiltondarra ondorengo da (aldagai espazialak ahaztuko ditugu, spinen aldagaietan zentratzeko): $\widehat{H}_0 = -A(\sigma_{1z} + \sigma_{2z})$, non $\vec{\sigma}$ Pauliren matrizeak diren. Beraz, $\widehat{\vec{S}}_1 = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}_1$ eta $\widehat{\vec{S}}_2 = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}_2$. Ondorengo perturbazioa aplikatzen badugu: $\widehat{H}_1 = \epsilon(\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y})$, eta lehenengo perturbazio-teoria kontsideratzen badugu, zeintzuk dira H_0-ren autobalioen zuzenketak? H osoaren autobalio zehatzen berdinak al dira?

$\hat{H}_0$ izango da: $\hat{H}_0 = -A(\sigma_{1z} + \sigma_{2z}) = -A\left[\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}}\right]$

$\Longrightarrow \hat{H}_0 = -A\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$ izango da

Beraz:

$E_1^0 = -2A \quad ; \quad |++\rangle$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ son lo mismo ya que nuestra base es: $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$

$E_2^0 = 0 \quad ; \quad \{|+-\rangle, |-+\rangle\}$ izango dira gure autobalio eta

$E_3^0 = 2A \quad ; \quad |--\rangle$ autofuntzioak

Perturbazioaren adierazpena:

$\hat{H}_1 = \varepsilon\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}}\right\} = \varepsilon\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

Beraz gure kasuan $E_2 = 0$ endekatua egonda ikusiko dugu nola ΔE lortzeko hurrengo determinantea ebatzi beharko dugun:

$\begin{vmatrix}-\Delta E & 2\varepsilon\\ 2\varepsilon & -\Delta E\end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \Delta E = \pm 2\varepsilon$ Hau da zuzenketekin:

$$\boxed{\begin{aligned}E_1^1 &= 2A\\ E_2^1 &= +2\varepsilon\\ E_3^1 &= -2\varepsilon\\ E_4^1 &= -2A\end{aligned}}$$

izango dira energiak.

Blokeka diagonala

Orduan $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 = \begin{bmatrix} \boxed{-2A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 2\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2A} \end{bmatrix}$

Diagonalizatu gabeko blokea soilik diagonalizatuko dugu. Ea ba, egizue.

Orduan: $\begin{bmatrix} -E & 2\varepsilon \\ 2\varepsilon & -E \end{bmatrix} = 0 \iff E^2 - 4\varepsilon^2 = 0 \iff \begin{cases} E_2 = 2\varepsilon \\ E_3 = -2\varepsilon \end{cases}$

Hau da H osoaren autobalioak:

$\boxed{E_1 = -2A \;;\; E_2 = 2\varepsilon \;;\; E_3 = -2\varepsilon \;;\; E_4 = 2A}$ izango dira. Zuzenketan lortutako berberak.

2. Galdera

Bi elektroien spin osoaren OX ardatzarekiko proiekzioa neurtzen dugu eta $\hbar$ dela ikusi dugu. Jarraian sistemaren spin osoaren OZ ardatzarekiko proiekzioa neurtzen badugu, zein da $\hbar$ izateko probabilitatea?

Bi elektroiak baditugu izango ditugun spin osoa posibleak $s = 1, 0$ izango dira.

Neurtu badugu $\hbar$ orduan daukagun egoera $|\chi\rangle = |1,1\rangle_x$ izango da $\Rightarrow$

$\Rightarrow |\chi\rangle = |1,1\rangle_x = |++\rangle_x$

$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle + |-\rangle]$ izango da $\Rightarrow |\chi\rangle = |+\rangle_x \otimes |+\rangle_x = \frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle) \otimes (|+\rangle + |-\rangle) =$

$= \underbrace{\frac{1}{2}(|++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle + |--\rangle)}$

$\boxed{P(\hbar) = |C_{++}|^2 = |\langle ++|\chi\rangle|^2 = \frac{1}{4}}$

El resultado es obvio, sabiamos desde un principio que ya que si medimos $\hat{S}_x$, $\hat{S}_z$ tiene que quedar completamente indefinido. Esto es porque $[\hat{S}_z, \hat{S}_x] \neq 0$.

Ebeechallenge 5

1. Galdera.

Ezberdinak diren bi partikulen $\vec{L}^2$ eta L_z magnitudei (partikula bakoitzaren momentu angeluarra izanik) dagozkien zenbaki kuantikoak $l=1$ eta $m_l=0$ dira (bi partikulen zenbaki kuantikoak berdinak dira). Bi partikulen momentu angeluar osoaren modulua neurtzen badugu, zeintzuk dira lor ditzakegun balioak eta hauen probabilitateak?

Daukagu bi partikulen momentu angeluar osoa: $j = 2, 1, 0$ izango dela eta $m_{l_1} = 0 = m_{l_2}$ orduan izango dituzun auto balio bakarrak $m_j = 0$ ($m_j = m_{l_1} + m_{l_2}$) izanik: $\{|2\,0\rangle, |1\,0\rangle, |0\,0\rangle\}$ ← Hauen konbinazio lineal bat behar dugu.

Beraz $\quad \overset{m_{l_1}\ m_{l_2}}{|0\ \ 0\rangle} = \alpha\,\overset{j\ m_j}{|2\,0\rangle} + \beta\,\overset{j\ m_j}{|1\,0\rangle} + \gamma\,\overset{j\ m_j}{|0\,0\rangle}$

Ondorioz $\quad |0\ \ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}\,|2\,0\rangle - |0\,0\rangle\right] \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} P(6\hbar^2) = 2/3 \\ P(0) = 1/3 \end{cases}}$

2. Galdera.

Bi elektroi 3Dko kutxa baten barruan daude. Kutxaren aldeak $a<b<c$ dira. Elektroiek spin triplete egoerari dagokion energia bajuena duen autofuntzioa dute. Honekin batera, partikulen arteko elkarrekintza ondorengoa da: $V(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = abcV_0\delta(x_1-x_2)\delta(y_1-y_2)\delta(z_1-z_2)$, eta perturbatiboki kontsidera dezakegu. Zein da egoera honen energia, elkarrekintza lehenengo ordeneko perturbazio-teoriarekin aztertzen badugu?

Daukagun egoera espeziala izango da lehenengo egoera kitzikatua lortu ahal izateko uhin funtzio antisimetriko bat.

$$\langle \vec{r}\,|\,n_x\,n_y\,n_z\rangle = \sqrt{\frac{8}{abc}}\,\sin\left[\frac{n_x\pi x}{a}\right]\sin\left[\frac{n_y\pi y}{b}\right]\sin\left[\frac{n_z\pi z}{c}\right]$$

Lehenengo egoera kitzikatuaren energia:

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right) \Longrightarrow \begin{cases} n_x=1,\ n_y=1,\ n_z=2 \\ n_x=1,\ n_y=2,\ n_z=1 \\ n_x=2,\ n_y=1,\ n_z=1 \end{cases}$$

Hauetatik zein den txikiena ikusi behar dugo:

- $\frac{2m}{\hbar^2\pi^2}\left(E_{211}-E_{112}\right) = \frac{4}{a^2}+\cancel{\frac{1}{b^2}}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}-\cancel{\frac{1}{b^2}}-\frac{4}{c^2} = 3\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)$

b-rekin berdina gertatuko da.

- $c > a \Leftrightarrow c^2 > a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} > \frac{1}{c^2}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2m}{\hbar^2\pi^2}\left(E_{211}-E_{112}\right) > 0 \Longrightarrow$ 1. egoera kitzikatuta E_{112} izango da.

Ondorioz: $|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|112\rangle_1|111\rangle_2 - |111\rangle_1|112\rangle_2\right]$ izango dugu.

1. ordeneko zuzen keta egiteko:

$$\langle V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\rangle = 16V_0 \int dx_1 dx_2 \sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{a}\,\delta(x_1-x_2)\,\cdot$$
$$\cdot\int dy_1 dy_2 \sin\frac{\pi y_1}{b}\sin\frac{\pi y_2}{b}\,\delta(y_1-y_2)\,\cdot$$

hauek biak ez nuluak izango dira

$$\cdot\int dz_1 dz_2 \sin\frac{\pi z_1}{c}\sin\frac{2\pi z_2}{b}\,\delta(z_1-z_2) \longrightarrow \int dz\,\underbrace{\sin\frac{\pi z}{c}\sin\frac{2\pi z}{c}}_{\text{ortogonalak}} = 0$$

$$\underbrace{-\left[\langle 112|\langle 111|\right]V\left[|112\rangle|111\rangle\right]}_{\text{aurrekoaren berdina.}} = 0$$

ez dago zuzen ketarik.

Beraz $E^{(1)}_{112} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\frac{(2b^2c^2+2a^2c^2+5a^2b^2)}{a^2b^2c^2} + \underbrace{0}_{\text{zuzen keta.}}$

Etxechallenge 6

1. Galdera.

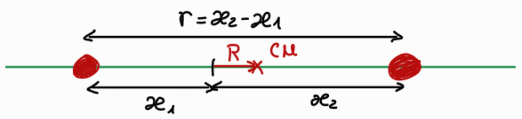
m masadun bereiztezinak diren bi bosoiak ω maiztasuna duen osziladore harmonikoan daude, eta haien arteko elkarrekintza $1/2K(x_1-x_2)^2$ da, non K konstante bat den eta x_1 eta x_2 partikulen posizioak. Hau da, sistemaren Hamiltondarra ondorengoa da:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x_1^2+\frac{1}{2}m\omega^2x_2^2+1/2K(x_1-x_2)^2$$

.

Zeintzuk dira sistemaren energia mailak?

Oharra: Aldagai-aldaketa egoki bat egin behar duzue: masa-zentrua eta bi partikulen posizio-bektore erlatiboaen funtzioan adierazten baduzue hamiltondarra era erraz batean kalkulatuko dituzue honen autofuntzioak eta autobalioak.



Daukagu $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)+\frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{2}K(x_1-x_2)^2$

Aldagai aldaketa izango da.

$$\begin{matrix} r = x_1 - x_2 \\ R = \frac{x_1+x_2}{2} \end{matrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = R + \frac{r}{2} \\ x_2 = R - \frac{r}{2} \end{matrix} \right\} \hookrightarrow x_1^2+x_2^2 = \left(R+\frac{r}{2}\right)^2 + \left(R-\frac{r}{2}\right)^2 = 2R^2 + \frac{r^2}{2}$$

Orduan:

- $\partial_{x_1} = \partial_{x_1} r\, \partial_r + \partial_{x_1} R\, \partial_R = \partial_r + \frac{1}{2}\partial_R \Rightarrow \partial^2_{x_1} = \partial_r^2 + \frac{1}{4}\partial_R^2 + \frac{1}{2}\partial_r\partial_R + \frac{1}{2}\partial_R\partial_r$
- $\partial_{x_2} = \partial_{x_2} r\, \partial_r + \partial_{x_2} R\, \partial_R = -\partial_r + \frac{1}{2}\partial_R \Rightarrow \partial^2_{x_2} = \partial_r^2 + \frac{1}{4}\partial_R^2 - \frac{1}{2}\partial_r\partial_R - \frac{1}{2}\partial_R\partial_r$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2} = 2\partial_r^2 + \frac{1}{2}\partial_R^2$$

Beraz

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{2}\partial_R^2 + 2\partial_r^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(2R^2 + \frac{1}{2}r^2\right) + \frac{1}{2}Kr^2$$

Beraz Hamiltondarra banangarria izango da:

$$H = H_R + H_r \quad \begin{cases} H_R = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{1}{2}\,\partial_R^2 + \dfrac{1}{2}\,2m\,\omega^2 R^2 \overset{\mu=2m}{=} -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\,\partial_R^2 + \dfrac{1}{2}\,\mu\,\omega^2 R^2 \\[2ex] H_r = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\,2\,\partial_r^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m\omega^2}{2} + k\right) r^2 \overset{\mu=\frac{m}{2}}{=} -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\,\partial_r^2 + \dfrac{1}{2}(\mu\omega^2 + k)\, r^2 \end{cases}$$

Beraz

- $$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\partial_R^2 + \frac{1}{2}\,\underbrace{\mu\,\omega^2}_{\mu\omega_R^2} R^2\right] \Phi_R = E_R\,\Phi_R \Rightarrow E_{n_1} = (1+n_1)\,\hbar\omega$$

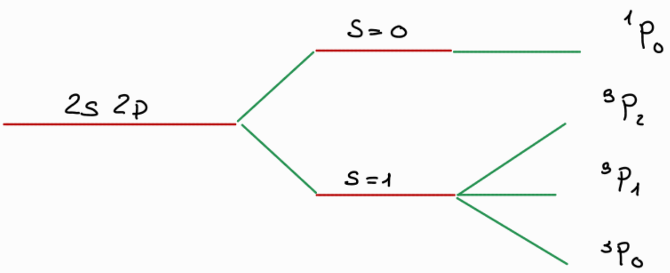
- $$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\partial_r^2 + \frac{1}{2}\,\underbrace{(\mu\omega^2 + k)}_{\mu\omega_r^2} r^2\right] \Phi_r = E_r\,\Phi_r \Rightarrow E_{n_2} = \left(\frac{1}{2} + n_2\right)\hbar\omega\sqrt{1 + \frac{k}{\mu\omega^2}}$$

Eta

$$\boxed{E_{n_1,n_2} = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\sqrt{1 + \frac{K}{\mu\omega^2}} \qquad n_1, n_2 \in \mathbb{N} + \{0\}}$$

2. Galdera.

Oinarrizko egoeran Be atomoak bi elektroi ditu $1s$ egoeran eta beste bi $2s$ egoeran. Lehenengo egoera kitzikatuan $2s$ mailan dagoen elektroietako bat $2p$ egoeran dago. LS (Russell-Saunders) akoplamendua kontsideratuz energiaren arabera ordenatu egoera kitzikatu hauei dagozkien notazio espektroskopikoak eta hauei dagozkien endakapenak.



$$\boxed{{}^1P_0 > {}^3P_2 > {}^3P_1 > {}^3P_0}$$