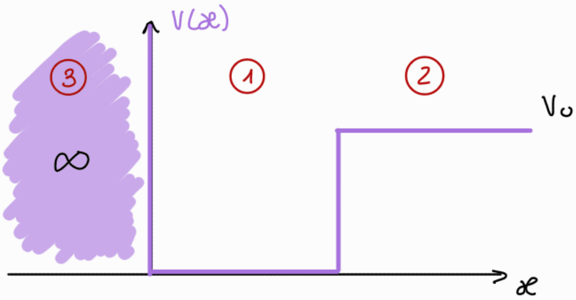
3.G

3. m masadun partikula bat ondorengo potentzialaren eraginpean higitzen ari da:

$$V(x) = \begin{cases} \infty \,, & x < 0 \\ 0 \,, & 0 < x < a \\ V_0 \,, & x > a \end{cases} .$$

- Aurki itzazu autofuntzioen adierazpenak $E > V_0$ denean.
- $E < V_0$ denean, aurki ezazu energiaren autobalioek betetzen duten ekuazioa. Grafikoki froga ezazu autobalioek espektro diskretoa osatzen dutela.
- Zein da $2mV_0a^2/\hbar^2$ kantitatearen balio minimoa n egoera lotuak egoteko? Zenbat energia-maila daude ondorengo berdinketa dugunean, $a^2V_0 = 75\hbar^2/m$?
- Zenbat balio du $2mV_0a^2/\hbar^2$, $E = V_0/2$ baliodun egoera lotu bat bakarra egon dadin? Kasu honetan, zein da probableena den partikularen posizioa? Zein da klasikoki debekaturik dagoen zonaldean egoteko probabilitatea?

Daukagun kasua:



• $E > V_0$ bada izango dugu:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A\cos k_1 x + B\sin k_1 x & 0 < x < a \\ D\cos k_2 x + C\sin k_2 x & x > a \end{cases} \quad \text{non} \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

orduan:

$\psi(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

Eta jarraia izan behar da $\Rightarrow \begin{cases} B\sin k_1 a = D\cos k_2 a + C\sin k_2 a \\ Bk_1\cos k_1 a = -Dk_2\sin k_2 a + k_2 C\cos k_2 a \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Daukaguna da C eta D B normalizazio konstantearen menpean geratuko direla.

• $E<V_0$ denean hurrengoa dugu:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ A\cos k_1 x + B\sin k_1 x & 0<x<a \\ D e^{k_2 x} + C e^{-k_2 x} & a<0 \end{cases}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

orduan M.B.:

$$\psi(x\to\infty) = 0 \iff D=0$$
$$\psi(x=0) = 0 \iff A=0 \implies \psi(x) \begin{cases} B\sin k_1 x \\ C e^{-k_2 x} \end{cases}$$

orduan Jarraitasuna aplikatuz:

$$\psi_1(a) = \psi_2(a) \Rightarrow B\sin k_1 a = C e^{-k_2 a} \Rightarrow C = B\sin k_1 a \, e^{k_2 a}$$
$$\psi_1'(a) = \psi_2'(a) \Rightarrow B k_1 \cos k_1 a = B\sin k_1 a \, \cancel{e^{k_2 a}} (-k_2 \cancel{e^{-k_2 a}}) \iff$$
$$\iff -\operatorname{tg}(k_1 a) = \frac{k_1}{k_2} \implies$$

$$\implies -\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} a\right) = \sqrt{\frac{E}{V_0-E}} \qquad u = \frac{E}{V_0} \text{ bada eta } \alpha = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} a$$

daukagu $-\operatorname{tg}(\alpha\sqrt{u}) = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}}$ orduan.

$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}}$ mosten duenean $-\operatorname{tg}(\alpha\sqrt{u})$-ren adar bat energia maila bat gehiagora igoko da.

• Dakigu n-garren maila gorengo dela $E_n = V_0$ denean, hau da:

orduan $u=1$ izango da eta asintota izango dugu:

$$\operatorname{tg}(\alpha \cancel{\sqrt{u}}^{\,1}) = \infty \iff \alpha = \frac{\pi}{2} + n \iff \boxed{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} = \left(\frac{1}{2}+n\right)^2 \pi^2}$$

Beraz jakiteko zenbat energia maila dauden: $a^2 V_0 = \frac{75\hbar^2}{m}$?

$$\frac{mV_0a^2}{\hbar^2} = 75 \implies 2\cdot 75 = \pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2 \iff \frac{1}{2}+n = \frac{\sqrt{150}}{\pi} \iff n = \frac{\sqrt{150}}{\pi} - \frac{1}{2} \simeq 3 \text{ denean.}$$

Hau de 3 energia maila txikiagoak daude $n=0,1,2$.

• $E=\frac{V_0}{2}$ balio badu $u=\frac{E}{V_0}=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -tg\left(\alpha \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}=1 \iff \alpha\frac{1}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{4}+n\right)\pi \iff \alpha=\sqrt{2}\pi\left(\frac{1}{4}+n\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2mV_0a^2}{\hbar}=2\pi^2\left(\frac{1}{4}+n\right)^2 \text{ baliokoa du.}$$

Emandako datuarekin $K_1=\frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar}=K_2=K$ Beraz:

$$\Psi(x)=\begin{cases} B\sin Kx \\ B\sin Ka \; e^{K(a-x)} \end{cases}$$

Normalizatuz $\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi|^2 dx = B^2 \frac{\sin Ka + 2\sin^2\frac{Ka}{2}}{K} \overset{!}{=} 1$ todo en función de B.

Or duan baliorik probableena.

$\frac{\partial \Psi_I}{\partial x}=0$ denean $\Rightarrow BK\cos Kx=0 \iff x=\frac{\pi}{K}\left(\frac{1}{2}+n\right)$ denean non

$x<a$ denean beti

Eta

$$P(x>a)=\int_0^{\infty} B^2\sin^2 Ka \; e^{2K(a-x)}dx=\frac{B^2\sin^2(aK)}{2K}$$

3.G.

4. Kontsidera dezagun beheko energia potentzialaren adierazpena (dimentsio bakarreko molekula diatomikoaren eredua izan daitekena):

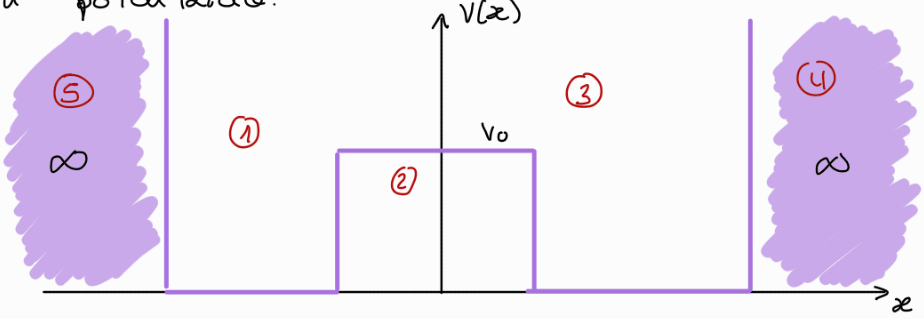
$$V(x) = \begin{cases} \infty\,, & |x| > l + a \\ 0\,, & a < |x| < l + a \\ V_0\,, & |x| < a \end{cases} .$$

- Hamiltondarren autofuntzioek paritate definitua (hau da, simetrikoak edo antisimetrikoak diren) al dute?
- $E < V_0$ denean, froga ezazu autobalioek ondorengo bi ekuazioetatik bat betetzen dutela.

$$\frac{1}{k}\tan kl = -\frac{1}{\beta}\tanh \beta a, \quad \frac{1}{k}\tan kl = -\frac{1}{\beta}\coth \beta a,$$

non $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ eta $\beta = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$. Zein da kasu bakoitzari dagokion autofuntzioaren paritatea?

Daukagun potentziala:



- Hau bete egingo da:

$[\hat{H}, \hat{I}] = 0$ badira.

$$[\hat{H}, \hat{I}] = [\hat{T}, \hat{I}] + [V, \hat{I}] = V(x)\hat{I} - \hat{I}V(x) = V(x)\hat{I} - V(-x)\hat{I} = V(x)\hat{I} - V(x)\hat{I} = 0$$

Trukakorrak direnez aldibereko oinarria izango dute

$$\hat{I}\,\psi(x) = \lambda\,\psi(x) \Rightarrow \psi(-x) = \lambda\,\psi(x)$$

Eta berriz $\hat{I}(\psi(-x)) = \hat{I}(\lambda\psi(x)) \Rightarrow \psi(x) = \lambda\lambda\psi(x) \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

Hau da $\psi(-x) = \pm\,\psi(x) \Rightarrow$ Antisimetrikoak eta simetrikoak izan daitezke.

orduan $E<V_0$ bada daukagu hurrengo $\psi(x)$:

$$\psi(x)=\begin{cases} 0 \\ Ae^{ikx}+Be^{-ikx} \\ Ce^{\beta x}+De^{-\beta x} \\ Ee^{ikx}+Fe^{-ikx} \\ 0 \end{cases} \quad \text{non} \quad K=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ eta } \beta=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

Lehen esan dugunez autofuntzioak izan ahal dira simetriko edo antisimetriko:

Simetriko $\psi(-x)=\psi(x) \Rightarrow A=F$, $B=E$, $C=D \Rightarrow$

$$\Rightarrow \psi(x)=\begin{cases} Ae^{ikx}+Be^{-ikx} \\ 2C\,ch(\beta x) \\ Be^{ikx}+Ae^{-ikx} \end{cases}$$

M.B: $\psi(l+a)=0 \Rightarrow Ae^{ik(l+a)}=-Be^{-ik(l+a)} \Rightarrow B=-Ae^{2ik(l+a)}$

$\psi_2(a)=\psi_3(a) \Rightarrow 2C\,ch(\beta a)=A\left(e^{ika}-e^{+ika}e^{ik2l}\right)=Ae^{ika}\left(e^{-ikl}-e^{ikl}\right)e^{ikl}=$

$=-2i\,Ae^{ik(l+a)}\sin kl \Rightarrow C=-2iAe^{ik(l+a)}\dfrac{\sin kl}{ch\beta a}$

orduan uhin funtzioa:

$\psi_1=Ae^{ikx}-Ae^{2ik(l+x)}e^{-ikx}=Ae^{ik(l+a)}\left(e^{ikx}e^{-ik(l+a)}-e^{-ikx}e^{ik(l+a)}\right)=$

$=-2iAe^{ik(l+a)}\sin(K(l+a-x))=A'\sin(K(l+a-x))$

$\psi_2=A'\sin Kl\,\dfrac{ch\beta x}{ch\beta a}$

$$\psi(x)=\begin{cases} A'\sin(K(l+a-x)) \\ A'\sin Kl\,\dfrac{ch\beta x}{ch\beta a} \\ A'\sin(K(l+a-x)) \end{cases} \quad \text{izango da uhin-funtzioa}$$

orduan:

$\psi_2'(a)=\psi_3'(a) \Rightarrow A\sin Kl.\dfrac{sh\beta a}{ch\beta a}\cdot\beta=-A'K\cos Kl \Leftrightarrow -K\cot g\,Kl=\beta\,tgh\,\beta a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{K}tg\,Kl=-\frac{1}{\beta}\,ctgh\,\beta a} \quad \square$$

Kasu antisimetrikoan. $\Rightarrow \psi(-x) = -\psi(x) \Rightarrow A=-F, B=-E, D=-C$

Beraz:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ 2C \operatorname{sh} \beta x \\ -(Be^{ikx} + Ae^{-ikx}) \end{cases}$$

Orduan: $\psi(l+a) = 0 \Leftrightarrow Ae^{ik(l+a)} = -Be^{-ik(l+a)}$

$\psi_1 = -Ae^{ik(l+a)} 2i \sin(k(l+a-x)) = A' \sin(k(l+a-x))$

$\psi_2(a) = \psi_3(a) \Rightarrow 2c \operatorname{sh} \beta a = A' \sin kl$ (1)

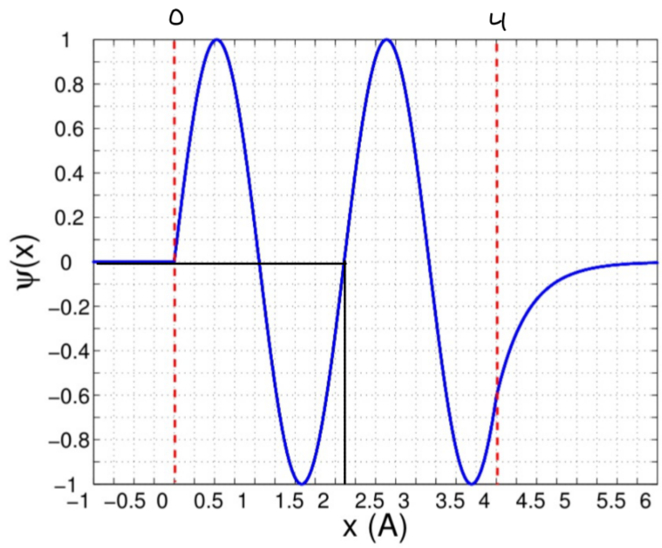
$\psi_2'(a) = \psi_3'(a) \Rightarrow 2c\beta \operatorname{ch} \beta a = -A' k \cos kl$ (2)

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{\beta} \operatorname{tgh} \beta a = \frac{1}{k} \operatorname{tg} kl}$$

$\square$

3.G.

5. Behean dagoen grafikoak elektroi bati dagokion Hamiltondarraren autofuntzio bat, $\psi(x)$, adierazten du. Elektroiak jasatzen duen energia potentziala gorriak diren lerro bertikalen bidez separaturiko hiru aldetan banandurik dago, tarte bakoitzean energia potentziala konstantea izanik. Zuzenean grafika honen gainean neurketak eginez, lor itzazu energia potentzialaren (V) eta uhin-funtzioaren adierazpen analitikoak, eta autofuntzio honi dagokion energia (E). Azal ezazu emandako erantzunak eta erabilitako prozedura.



Grafika behetuz $V(x)$ horrelakoa da:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 < x < 4 \\ V_0 & x > 4 \end{cases}$$

Orduan daukagu:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 \\ A\cos kx + B\sin kx \\ Ce^{\beta x} + De^{-\beta x} \end{cases} \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad \beta = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

Beraz M.B. $\rightarrow A = C = 0 \Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} B\sin kx \\ De^{-\beta x} \end{cases}$

Jarraiak $\psi(4) \Rightarrow B\sin 4k = De^{-\beta 4} \Rightarrow$ $\boxed{\psi(x) = \begin{cases} B\sin kx \\ B\sin k4 \, e^{\beta(4-x)} \end{cases}}$ izango da ψ-ren uhin funtzioa.

$\psi(x)$ bigarren partean partikula askea moduakoa denez:

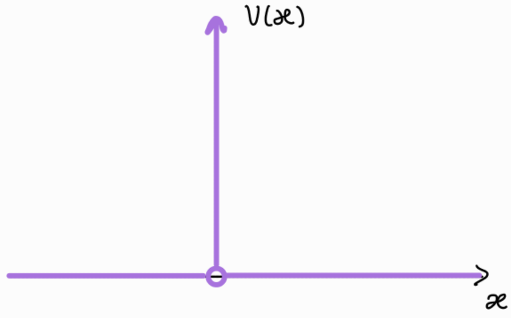
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 4\pi^2}{2m\lambda^2}$$ eta $\lambda = 2'25\,\mathring{A}$ da orduan $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{E = 4'72 \cdot 10^{-18}\,J = 29'45\,eV}$$

Dirac-en delta potentziala.

1. m masadun partikulak $E > 0$ energiarekin mugitzen dira Dirac-en delta-potentzial baten eraginpean, $V(x) = \gamma\delta(x)$ $(\gamma > 0)$. Kalkula itzazu islapen-, R, eta transmisio-, T, koefizienteen adierazpenak. Egin ezazu $T(E)$-ren grafikoa.

Daukagu



erako potentziala non $V(x)=\gamma\,\delta(x)$ $(\gamma>0)$

Izango dugu hurrengo uhin funtzioa:

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & x<0 \\ C e^{ikx} + D e^{-ikx} & x>0 \end{cases} \qquad \text{non} \quad k = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$$

Ezkerretik badator $\rightarrow$ $D=0$ izango da $\Rightarrow$ $\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} \\ C e^{ikx} \end{cases}$

Orduan Jarraitutasuna:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A+B=C$$

Ez-jarraitutasuna:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma\,\delta(x)\,\psi\,dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E\,\psi\,dx \right\}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{\varepsilon} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{-\varepsilon} \right] + \gamma\psi(0) \right\} = 0$$

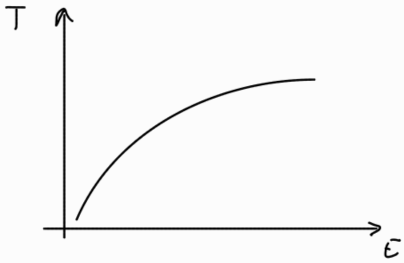
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[ikC - ikA + ikB \right] + \gamma C = 0 \Leftrightarrow -\frac{\hbar^2 ikB}{2m} + \gamma A + \gamma B = 0$$

$$\boxed{A = \left(\frac{i\hbar^2 k}{2m\gamma} - 1 \right) B} \Rightarrow \boxed{C = \frac{i\hbar^2 k}{2m\gamma}\,B}$$

Beraz $J_1 = |A|^2 \frac{k\hbar}{m} - |B|^2 \frac{k\hbar}{m}$ eta $J_2 = |C|^2 \frac{k\hbar}{m}$

Beraz $R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{1}{\frac{\hbar^4 k^2}{4m^2\gamma^2}+1}$ eta $T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{\hbar^4 k^2}{4m^2\gamma^2}\,\frac{1}{\left(\frac{\hbar^4 k^2}{4m^2\gamma^2}+1\right)} \Rightarrow$

$\Rightarrow T = \frac{1}{\left(1+\frac{4m^2\gamma^2}{\hbar^4 k^2}\right)}$ eta $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow T(E) = \frac{1}{\left(1+\frac{2m\gamma^2}{\hbar^2 E}\right)}$



izango da.

3.G.

2. Partikula baten gaineko energia potentziala ondorengoa da:

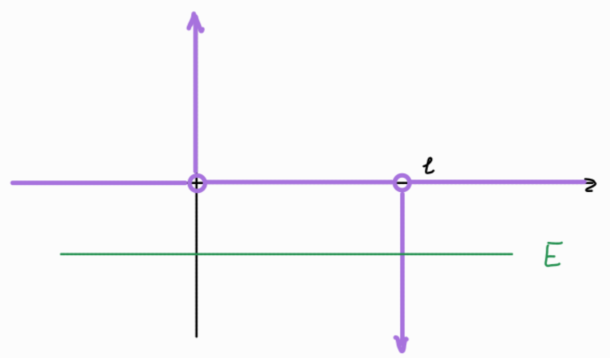
$$V(x) = \gamma\delta(x) - \gamma\delta(x-l),$$

non $\gamma > 0$ eta l distantzia bat den. Egoera lotuen energia $E = -\lambda^2\hbar^2/2m$ bezala idazten badugu, froga ezazu ondorengo erlazioa bete behar dela:

$$e^{-2\lambda l} = 1 - 4\frac{\lambda^2}{\mu^2},$$

non $\mu = 2m\gamma/\hbar^2$ den. Zenbat egoera lotuak daude?

Daukagun kasua:



Energia lotuen adierazpena: $E=-\frac{\lambda^2\hbar^2}{2m}$ orduan ondorengoa izango dugu:

Dakigu uhin-funtzioa ondorengo estruktura izango duela

$$\psi = \begin{cases} Ae^{\lambda x} & x<l \\ Be^{\lambda x}+Ce^{-\lambda x} & x\in(0,l) \\ De^{-\lambda x} & x>l \end{cases} \quad \text{non } \lambda = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$$

Orduan jarraitasuna:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A = B + C$$

$$\psi_2(l) = \psi_3(l) \Rightarrow Be^{\lambda l} + Ce^{-\lambda l} = De^{-\lambda l} \Rightarrow D = e^{\lambda l}(Be^{\lambda l}+Ce^{-\lambda l})$$

Eta ez-jarraitutasuna:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\gamma\psi\,\delta(x)\,dx\right\} = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\lambda(B-C)-\lambda A\Big) + \gamma A = 0 \Rightarrow -\frac{\lambda}{\mu}(B-C-A) = -A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\mu}(B-C-A) = A \iff \frac{\lambda}{\mu}(\cancel{B}-C-\cancel{B}-C) = C+B \iff$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{2\lambda}{\mu} C = C + B \Longrightarrow \boxed{B = -C\left(1 + \frac{2\lambda}{\mu}\right)}$$

Ez-jarraitasuna berriz:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\lambda D e^{-\lambda l} - \left(\lambda B e^{\lambda l} - \lambda C e^{-\lambda l}\right)\right] = \gamma\left(B e^{\lambda l} + C e^{-\lambda l}\right) \Longrightarrow$$

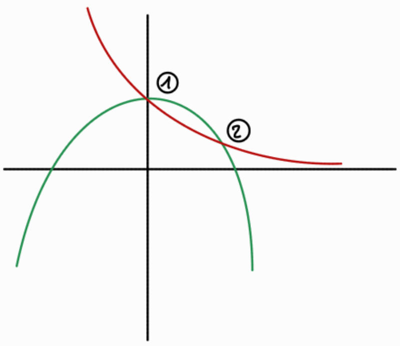
$$\Longrightarrow -\frac{\lambda}{\mu}\left(-B e^{\lambda l} - \cancel{C e^{-\lambda l}} - B e^{\lambda l} + \cancel{C e^{-\lambda l}}\right) = B e^{\lambda l} + C e^{-\lambda l}$$

$$\frac{2\lambda}{\mu} B e^{\lambda l} = B e^{\lambda l} + C e^{-\lambda l} \Longleftrightarrow \left(\frac{2\lambda}{\mu} - 1\right) B = C e^{-2\lambda l} \Longrightarrow B = \frac{C e^{-2\lambda l}}{\left(\frac{2\lambda}{\mu} - 1\right)}$$

Orduan:

$$B = \frac{C e^{-2\lambda l}}{\left(\frac{2\lambda}{\mu} - 1\right)} = -C\left(1 + \frac{2\lambda}{\mu}\right) \Longleftrightarrow e^{-2\lambda l} = \left(1 + \frac{2\lambda}{\mu}\right)\left(1 - \frac{2\lambda}{\mu}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{e^{-2\lambda l} = 1 - 4\frac{\lambda^2}{\mu^2}} \quad \square$$



Bi egoera lotuak egongo dira.

3.G.

3. m masadun partikula bat dimentsio bakarreko delta potentzial-osin hirukoitzaren barruan dago:

$$V(x) = -\gamma[\delta(x-a) + \delta(x) + \delta(x+a)].$$

Froga ezazu simetrikoa den oinarrizko mailaren energia ($E < 0$) ondorengo erlazioa betetzen duela:

$$e^{-2ka} = \frac{(2k-\mu)^2}{(2k+\mu)\mu},$$

non $k = \sqrt{-2mE}/\hbar$ eta $\mu = 2m\gamma/\hbar^2$ diren.

Daukagun uhin-funtzioa:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{kx} & x<-a \\ Be^{kx} + Ce^{-kx} & -a<x<0 \\ De^{kx} + Ee^{-kx} & 0<x<a \\ Fe^{-kx} & a<x \end{cases}$$

simetrikoa denez $\psi(-x) = \psi(x) \Rightarrow A = F$, $B = E$, $D = C$

ordun:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{kx} & ; \quad x<a \\ Be^{kx} + Ce^{-kx} & ; \quad -a<x<0 \\ Ce^{kx} + Be^{-kx} & ; \quad 0<x<a \\ Ae^{-kx} & ; \quad a<x \end{cases}$$

Jarraitasuna:

$\psi(-a)$-n jarraia $\Rightarrow Ae^{-ka} = Be^{-ka} + Ce^{ka}$

Ez jarraitutasuna.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[-k\,Ae^{-ka} - k\left(Ce^{ka} - Be^{-ka}\right)\right] = \gamma\left(Ce^{ka} + Be^{-ka}\right)$$

$$+\frac{k}{\mu}\left(\cancel{Be^{-ka}} + Ce^{ka} + Ce^{ka} - \cancel{Be^{-ka}}\right) = Ce^{ka} + Be^{-ka}$$

$$\frac{2K}{\mu} C e^{Ka} = C e^{Ka} + B e^{-Ka} \Longleftrightarrow \left(\frac{2K}{\mu} - 1\right) C\, e^{2Ka} = B$$

Berriz beeine o-an:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(K(C-B) - K(B-C)\right) = \gamma(B+C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{K}{\mu}(2C-2B) = B+C \Longleftrightarrow -\frac{2KC}{\mu} + \frac{2KB}{\mu} = B+C \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow C\left(1+\frac{2K}{\mu}\right) = B\left(\frac{2K}{\mu} - 1\right) = C\, e^{2Ka}\left(\frac{2K}{\mu} - 1\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-2Ka} = \frac{(-2K+\mu)^2}{\mu(2K+\mu)} \Rightarrow \boxed{e^{-2Ka} = \frac{(2K-\mu)^2}{\mu(2K+\mu)}}$$

4. m masadun partikula bat beheko dimentsio bakarreko potentzialaren eraginpean higitzen ari da:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , x < 0 \\ -V_0 a\delta(x-a) & , x > 0 \end{cases},$$

non $a > 0$. Zein da $\coth ka$ (non $k = \sqrt{2m|E|}/\hbar$ den) bete behar duen erlazioa egoera loturen bat izateko? Zein da V_0-ren balio minimoa gutxienez egoera lotu bat izateko?

Daukagu:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ Ae^{kx} + Be^{-kx} & 0<x<a \\ \cancel{Ce^{kx}}^{\,0} + De^{-kx} & a<x \end{cases}$$

- $\psi(0)=0 \Leftrightarrow A=-B \qquad \psi_1 = A\,\mathrm{sh}\,kx$
- $\psi(a)$-n jarraia $\Longleftrightarrow A\,\mathrm{sh}\,ka = De^{-ka} \Rightarrow D = Ae^{ka}\,\mathrm{sh}\,ka$

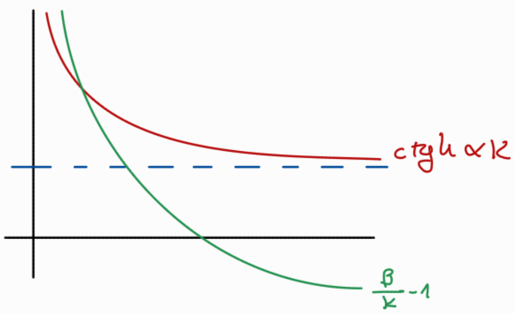
Hau da $\quad \psi(x) = \begin{cases} A\,\mathrm{sh}\,kx & 0<x<a \\ A\,\mathrm{sh}\,ka\, e^{k(a-x)} & a<x \end{cases}$

Orduan:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\cancel{A}k\,\mathrm{sh}\,ka - \cancel{A}k\,\mathrm{ch}\,ka\right] - V_0 a A\,\mathrm{sh}\,ka = 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}k\left(\mathrm{sh}\,ka + \mathrm{ch}\,ka\right) = V_0 a\,\mathrm{sh}\,ka \Longleftrightarrow \left(1 + \mathrm{ctgh}\,ka\right) = \frac{2mV_0 a}{\hbar^2 k} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{ctgh}\,ka = \frac{2mV_0 a}{\hbar^2 k} - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ctgh}\,\alpha k = \frac{\beta}{k} - 1$$



V_0 minimoa gutxienez bat egoteko?

orduan $\lim_{k\to 0}\left(\frac{\beta}{k} - 1\right) > \lim_{k\to 0} \mathrm{ctgh}\,\alpha k \Rightarrow$

$\Rightarrow$ edozein V_0 positiborentzat beti egongo da egoera lotu bat.

3.G.

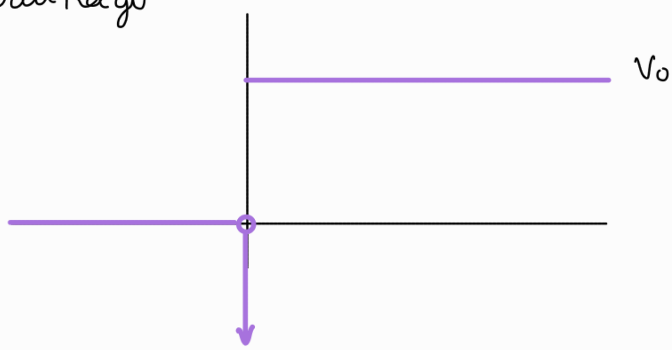
5. m masadun partikula bat ondorengo dimentsio bakarreko energia potentzialaren eraginpean higitzen ari da:

$$V(x) = V_0\theta(x) - \frac{\hbar^2 g}{2m}\delta(x),$$

non $g > 0$ den.

- Zein da egoera lotu guztien energien adierazpenak?
- Kalkula ezazu oinarrizko egoerari dagokion $<\hat{p^2}>$.
- Egoera geldikorraren energia $0 < E < V_0$ tartean egonik eta ezkerretik badator, kalkula ezazu islapen-koefizientearen adierazpena.

Daukagu



ordurean dakigunez egoera lotuak egongo dira bakarrik $E<0$

Beraz hauek aztertuko ditugu. $E<0$ denean.

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{Kx} + Be^{-Kx} & x<0 \\ Ce^{\lambda x} + De^{-\lambda x} & x>0 \end{cases} \qquad K = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} \qquad \lambda = \sqrt{2m(V_0-E)}$$

M.B. $\rightarrow$ $\psi(x\to -\infty) = 0 \rightarrow B=0$

$\psi(x\to\infty) = 0 \rightarrow C=0$ $\Rightarrow$ $\psi(x) = \begin{cases} Ae^{Kx} \\ De^{-\lambda x} \end{cases}$

Jarraitasuna:

$\psi(0)$-n jarraia $\Rightarrow$ $A=D$ $\Rightarrow$ $\psi(x) = \begin{cases} Ae^{Kx} \\ Ae^{-\lambda x} \end{cases}$

Ez-jarraitasuna:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\hbar^2 g}{2m}\delta(x)\,\psi(x)\,dx \right\} = 0$$

$$-\frac{\cancel{\hbar^2}}{\cancel{2m}}\left[-\lambda\cancel{A} - K\cancel{A}\right] - \frac{\cancel{\hbar^2}}{\cancel{2m}}g\cancel{A} = 0 \iff \lambda + K = g \iff \frac{\sqrt{2m}}{\hbar^2}\left(\sqrt{|E|} + \sqrt{V_0 - E}\right) = g$$

$$\sqrt{|E|}+\sqrt{V_0-E}=\frac{\hbar^2 g}{\sqrt{2m}} \iff E=-\frac{(g^4\hbar^8-4mV_0 g^2\hbar^4+4m^2V_0^2)}{8g^2\hbar^4 m} \iff$$

$$\iff E=-\left\{\frac{g^2\hbar^4}{8m}-\frac{V_0}{2}+\frac{mV_0^2}{2g^2\hbar^4}\right\}=\frac{V_0}{2}-\frac{g^2\hbar^4}{8m}+\frac{mV_0^2}{2g^2\hbar^4}=-\frac{(g^2\hbar^4-2mV_0)^2}{8g^2\hbar^4 m}$$

Hau da oinarrizko egoera:

$$\boxed{E=\frac{V_0}{2}-\frac{g^2\hbar^4}{8m}+\frac{mV_0^2}{2g^2\hbar^4}=-\frac{(g^2\hbar^4-2mV_0)^2}{8g^2\hbar^4 m}}$$ izango da.

eta honi dagokion autofuntzioa (Normalizatua:

$$\int_{-\infty}^{0}A^2 e^{2Kx}\,dx+\int_0^{\infty}A^2 e^{-2\lambda x}\,dx=A^2\left(\frac{1}{2K}+\frac{1}{2\lambda}\right)\overset{?}{=}1 \iff A=\sqrt{\frac{2\lambda K}{\lambda+K}}$$

Beraz
$$\boxed{\psi(x)=\sqrt{\frac{2\lambda K}{\lambda+K}}\begin{cases}e^{Kx} & x<0\\ e^{-\lambda x} & x>0\end{cases}}$$

Hiru tarte
$x\in(\infty,-\varepsilon]$
$x\in[-\varepsilon,\varepsilon]$ $\quad \varepsilon\to 0$
$x\in[\varepsilon,\infty)$

Beraz:
$$\langle\hat{p}^2\rangle=\left(\psi,-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,dx$$

Erdiko tarteau $\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\to -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2}{2m}g\,\delta(x)\psi=E\psi \iff$

$$\iff \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\psi\left(g\,\delta(x)+\frac{2m}{\hbar^2}E\right)$$

Beraz:
$$\langle\hat{p}^2\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\left\{-\hbar^2\left(A^2\int_{-\infty}^{\varepsilon}K^2e^{2Kx}dx-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}A\,|\psi(x)|^2\left(g\,\delta(x)+\frac{2m}{\hbar^2}E\right)dx+A^2\int_{\varepsilon}^{\infty}\lambda^2e^{2\lambda x}dx\right)\right\}=$$

$$=-\hbar^2\left(\frac{\cancel{2}\lambda K}{\cancel{K+\lambda}}\,\frac{\cancel{(K+\lambda)}}{\cancel{2}}-g\frac{2\lambda K}{\lambda+K}\right)=\boxed{\lambda K\hbar^2\left(\frac{2g}{K+\lambda}-1\right)=\langle\hat{p}^2\rangle}$$

Beraz $0<E<V_0$ R kalkulatzeko:

Dakigu
$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x<0 \\ Ce^{\lambda x} + De^{-\lambda x} & x>0 \end{cases} \qquad K = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad \lambda = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

MB: $\psi(x\to\infty)=0 \Rightarrow C=0$ izango da.

Jarraitasuna $\psi(0)$-n $\Rightarrow A+B=D \Rightarrow A = D-B$

Ez-jarraitasuna:
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\frac{\hbar}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x}dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\hbar^2 g}{2m}\delta(x)\psi(x)dx\right\}=0$$

$$-\frac{\cancel{\hbar^2}}{\cancel{2m}}\left(iKA - iKB + \lambda D\right) - \frac{\cancel{\hbar^2} g}{\cancel{2m}}D = 0$$

$$-\left(iK(D-B-B)+\lambda D\right) = gD = 2iKB - D(iK+\lambda) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow B = D\,\frac{g+\lambda+iK}{2iK} = \frac{D}{2}\left(\frac{g\lambda}{iK}+1\right) \Rightarrow A = \frac{D}{2}\left(\frac{g\lambda}{iK}-1\right)$$

Beraz $$R = \frac{|B|^2\frac{K\hbar}{m}}{|A|^2\frac{K\hbar}{m}} = \frac{\left(1+\left(\frac{g\lambda}{K}\right)^2\right)}{\left(1+\left(\frac{g\lambda}{K}\right)^2\right)} \Rightarrow \boxed{R=1}$$

osziladore - harmonikoa.

1. m masadun partikula batek k konstantea duen dimentsio bakarreko oszilatzaile harmonikoaren oinarrizko eta lehenengo egoera kitzikatuetan egoteko nulua ez den probabilitateren bat du, beste egoeretan egoteko probabilitatea nulua izanik. Bestaldetik, sistemaren momentuaren batezbestekoa nulua dela dakigu. Baldintza hauek kontutan izanik, froga ezazu aldiune horretan sistemak duen uhin-funtzioa erreala izan daitekeen. Bestaldetik, froga ezazu ere egoera honetan egonik posizioaren batezbestekoa nulua izan daitekeen.

Daukagun uhin-funtzioa $\Psi(x) = \alpha \psi_0 + \beta \psi_1$ da. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

· Dakigu $\langle \hat{p} \rangle = 0$ eta frogatu behar dugu $\Psi(x) \in \mathbb{R}$ izan ahal dela.

$$\langle \hat{p} \rangle = (\Psi, \hat{p}\, \Psi) = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\alpha^* \psi_0 + \beta^* \psi_1, (\hat{a} - \hat{a}^+)(\alpha \psi_0 + \beta \psi_1)\right) =$$

$$= -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\left(\alpha^* \psi_0 + \beta^* \psi_1, \beta \psi_0\right) - \left(\alpha^* \psi_0 + \beta^* \psi_1, \alpha \psi_1\right)\right] =$$

$$= -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\alpha^* \beta - \beta^* \alpha\right) \overset{!}{=} 0 \iff \alpha^* \beta = \beta^* \alpha \quad \alpha^* \beta \in \mathbb{R}$$

Hau da $\Psi(x) = \alpha \psi_0 + \beta \psi_1 \in \mathbb{R}$ izan ahal da zeren eta $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha^* \beta = \beta^* \alpha$

Posisioaren batazbestekoa zeinden ikusteko:

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\left(\alpha^* \psi_0 + \beta^* \psi_1, \hat{a}(\alpha \psi_0 + \beta \psi_1)\right) + \left(\alpha^* \psi_0 + \beta^* \psi_1, \hat{a}^+(\alpha \psi_0 + \beta \psi_1)\right)\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\left(\alpha^* \psi_0 + \beta^* \psi_1, \beta \psi_0\right) + \left(\alpha^* \psi_0 + \beta^* \psi_1, \alpha \psi_1\right)\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\alpha^* \beta - \beta^* \alpha\right) \overset{!}{=} 0 \iff \alpha^* \beta = -\beta^* \alpha$$

Beraz bi gauzak aldi berean gertatzeko: $\begin{cases} \alpha^* \beta = \beta^* \alpha \\ \alpha^* \beta = -\beta^* \alpha \end{cases} \iff \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Psi(x) = \alpha \psi_0 \\ \Psi(x) = \beta \psi_1 \end{matrix}$

Izango baziren.

3. G.

3. $S = xp$ magnitudea definitzen dugu. m masadun partikula bat C berreskurapen konstantea duen dimentsio bakarreko oszilatzaile armonikoaren bigarren mailan ($n = 2$) egonik, zein da S magnitudeari dagokion eragilearen ziurgabetasuna, $\Delta\hat{S}$?

Lehenengo, dakigunez $\hat{S}$ eragilea ez da hermitikoa $\Rightarrow$ ez du emaitza erreal bat eman behar.

$\Psi(x) = \psi_2$

Lortuko dugu $\hat{S}(\hat{a},\hat{a}^+) = -i\frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}+\hat{a}^+)(\hat{a}-\hat{a}^+) =$

$[\hat{a},\hat{a}^+] = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1 \qquad \hat{a}\hat{a}^+ = 1 + \hat{a}\hat{a}^+$

$$= -i\frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a} - \hat{a}^{+2}\right) \overset{\downarrow}{=} -i\frac{\hbar}{2m\omega}\left(\underbrace{\hat{a}^2 + (\hat{a}^+)^2}_{\text{No tienen efecto}} - 1\right)$$

$\uparrow 2$ o $\downarrow 2$ pero no vuelven a ψ_2.

$$\langle\hat{S}\rangle = (\psi_2, \hat{S}\psi_2) = \frac{i\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle\hat{S}^2\rangle = (\psi_2, \hat{S}\hat{S}\psi_2) = -\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}$$

Hau da $\Delta S = \sqrt{-\frac{1}{4}\frac{\hbar^2}{m^2\omega^2} - \left(i\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\Delta S = 0}$

Kalkulatu dugu baina berezkoa zen $\Psi(x)$ Hamiltondearen auto-funtzioa baitzen.

3. G.

7. m_1 eta m_2 masadun bi partikulak dimentsio bakarrean higitzen dira. Partikula hauen arteko elkarrekintza ondorengoa izanik: $V(x_1, x_2) = a(x_1 - x_2)^2$, zein da bi partikulen oinarrizko energiaren adierazpena eta bere uhin-funtzioa?

$r = x_1 - x_2$ izanda eta $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ daukagu:

$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a r^2 \psi = E\psi$ izango litzateke, harmonikoa izanda baina $K = 2a$

izango litzateke eta $\omega = \sqrt{\frac{2a}{\mu}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ oinarrizko egoera $\boxed{\psi_0 = A\, e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}r^2} \text{ eta } E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \text{ non } \omega = \sqrt{\frac{2a}{\mu}}}$

1D-tik 3D-rako trantzisioak.

2. m masadun partikula baten $t = 0$ aldiuneko uhin-funtzioa ondorengoa da:

$$\Psi(\mathbf{r}, t=0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{4/3} \mathrm{e}^{-[(x-x_0)^2+y^2+z^2]}.$$

Zein da partikularen posizioaren batezbestekoa? Eta momentuarena?

Normalizatuta? $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 \, d^3\vec{r} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{4/3} \cdot A^2 \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{4/3} (\pi)^{2/3} A^2 =$

$= \left(\frac{2^4}{\pi^2}\right)^{1/3} A^2 \overset{!}{=} 1 \iff A = \left(\frac{4^2}{\pi^2}\right)^{1/6} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$

orduan $\Psi(\vec{r}, t=0) = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \, e^{-[(x-x_0)^2+y^2+z^2]}$

$\langle \vec{r} \rangle = x_0$ izango da.

$\langle \hat{\vec{p}} \rangle = 0 \leftarrow$ berehalakoa simetriagatik

3.G.

3. Hidrogeno-atomoaren egoera simetrikoen energia-mailak ondorengo dimentsio bakarreko potentzialarekin lor daitezke: $r \geq 0$ denean $V(r) = -K/r$ eta $r < 0$ denerako $V(r) = \infty$, non $K = e^2/4\pi\epsilon_0$ den.

- Froga ezazu ondorengo uhin-funtzioa E energia duen Hamiltondarraren autofuntzioa dela: $\phi(r) = Cre^{-r/a}$ $(r \geq 0)$ eta $\phi(r) = 0$ $(r < 0)$. Adieraz ezazu E ondorengo beste konstante hauen funtzioan: m, α, $\hbar$ eta c (non $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_o\hbar c \cong 1/137$ den eta c argiaren abiadura).
- Kalkula ezazu E eta a-ren balio numerikoak.
- Kalkula ezazu C normalizazio-konstantearen balioa a-ren funtzioan.
- Kalkula ezazu $\phi(r)$ egoerari dagokion $\langle 1/r \rangle$-ren batezbesteko balioa eta, balio honetatik, ondorioztatu energia zinetikoaren batezbesteko balioa.

$$V(r) = -\frac{K}{r} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

• $\psi(r) = Cre^{-r/a} \Longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\partial^2_{r^2}(r^2 e^{-r/a}) - \frac{K}{r} re^{-r/a} = E\, re^{-r/a} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\hbar^2}{ma} - K\right) = \left(E + \frac{\hbar^2}{2ma^2}\right) r$$

$E \not\propto r \Rightarrow$ hau Hamiltondarraren autofuntzioa $\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{ma} = K \Leftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow a = \frac{\hbar^2}{Kma} \overset{m_{e^-}}{=} 0'53\,\text{Å} \simeq a_0 \text{ (Borh-en erradioa.)}$$

Beraz $E = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2} = -13'6\ eV \leftarrow$ ere oinarrizko egoera $\phi(\vec{r}) \equiv \phi_{100}$ baita.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} C^2 r^2 e^{-r/a} r^4 dr = C^2 a^4 6 \overset{!}{=} 1 \Longleftrightarrow C^2 = \frac{4}{3a^5}$

• orduan $\displaystyle\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \left(\psi, \frac{1}{r}\psi\right) = \int_0^{\infty} C^2\, r^3 e^{-\frac{2r}{a}} dr = C^2 \frac{3a^4}{8} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}a^5}\frac{\cancel{3}\cancel{a^4}}{\cancel{8}_2} = \frac{1}{2a}$

ψ egoera lotua izanda Viriala erabili dezakegu $\langle \hat{T} \rangle_\psi = \frac{1}{2}\left\langle r\left(+\frac{K}{r^2}\right)\right\rangle_\psi =$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \hat{T} \rangle_\psi = \frac{1}{4a}}$$

3.G.

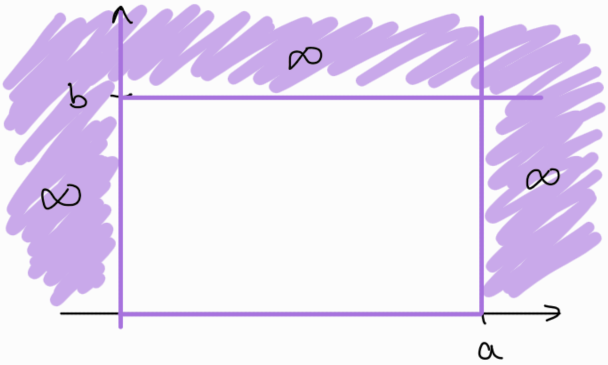
Hiru dimentzioko potentzial banangarriak.

1. m masadun partikula bat ondorengo potentzialaren eraginpean higitzen ari da:

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 < x < a \text{ eta } 0 < y < b \\ \infty, & \text{besteetan} \end{cases} .$$

- Aurki itzazu energiaren autobalioak eta autofuntzioak.
- Oinarrizko egoeran egonik, zein da $0 < x < a/3\ ,\ 0 < y < b/3$ aldean partikula aurkitzeko probabilitatea?
- $a = b$ denean aurki ezazu lehenengo lau mailen balioak.

Daukagun egoera:



- Daukagun egoera potentzial banangarria da, eta gainera bi potentzial osin infinituen batuketa. Hau, da:

$$\psi_{n_1,n_2} = \sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\left[\frac{n_1\pi}{a}x\right]\sin\left[\frac{n_2\pi}{b}y\right]$$

Eta autobalioak $E_{n_1,n_2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}\right)$

- oinarrizko egoera E_{11} izango da $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(0<x<\frac{a}{3}, 0<y<\frac{b}{3}\right) = \int_0^{b/3}\int_0^{a/3}\frac{4}{ab}\sin\left[\frac{\pi x}{a}\right]\sin\left[\frac{\pi y}{b}\right]dx\,dy = \frac{1}{\pi^2}$$

- $a=b$ kasuan:

$$\psi_{11} = \frac{2}{a}\sin\left[\frac{\pi}{a}x\right]\sin\left[\frac{\pi}{a}y\right] \longrightarrow E_{11} = \frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2}\ ;\ g=1$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_{12} &= \frac{2}{a}\sin\left[\frac{\pi}{a}x\right]\sin\left[\frac{2\pi}{a}y\right]\\ \psi_{21} &= \frac{2}{a}\sin\left[\frac{2\pi}{a}x\right]\sin\left[\frac{\pi}{a}y\right]\end{aligned}\right\} \longrightarrow E_{12} = \frac{5\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\ ;\ g=2$$

endekapena.

$$\psi_{22} = \frac{2}{a}\sin\left[\frac{2\pi}{a}x\right]\sin\left[\frac{2\pi}{a}y\right] \longrightarrow E_{22} = \frac{4\hbar^2\pi^2}{ma^2}\ ;\ g=1$$

$$\psi_{23} = \frac{2}{a}\sin\left[\frac{2\pi}{a}x\right]\sin\left[\frac{3\pi}{a}y\right] \longrightarrow E_{23} = \frac{13\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\ ;\ g=2$$

3.G.

2. m masadun partikula bat k konstantea duen bi dimentsioko oszilatzaile harmoniko eta isotroporen $n = 2001$ egoeran dago. Kalkula ezazu egoera honi dagokion $< r^2 >$.

Ozilatzaile harmoniko isotropo: $V(x,y) = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2) \equiv V(r) = \frac{1}{2} k r^2$

orduan hau jakinda $E_{n_1,n_2} = (1 + n_1 + n_2)\hbar\omega \equiv E_n = (1+n)\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}$

Virialaren teorema erabiliz:

egoera geldikorrean bakarrik energiaren ekarpen bat dugu.

$$\langle \hat{T} \rangle_{\psi_n} = \frac{1}{2}\langle r \frac{\partial}{\partial r} V(r) \rangle = \langle V \rangle_{\psi_n} \Rightarrow \langle E \rangle_{\psi_n} = E = (1+n)\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} = \langle \hat{T} \rangle_{\psi_n} + \langle \hat{V} \rangle_{\psi_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\langle V \rangle_{\psi_n} = \frac{2}{2} k \langle r^2 \rangle = 2002\,\hbar\omega \iff \boxed{\langle r^2 \rangle = 2002 \frac{\hbar\omega}{k}}$$