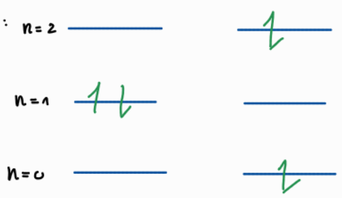
8. Gaia

Partikula independienteen adibide batzuk

1. Egin bedi dimentsio bakarreko oszilatzaile harmonikoarena bezalako potentzialaren eraginpeko bi elektroik osaturiko (e^-, e^-) bikotearen $E_2 = 3\hbar\omega$ energiako egoera posibleen azterketa.

Dauzkagu bi elektroi potentzial harmoniko batean 2. egoera kitzikatuan egonda:

Hau gertatzeko:



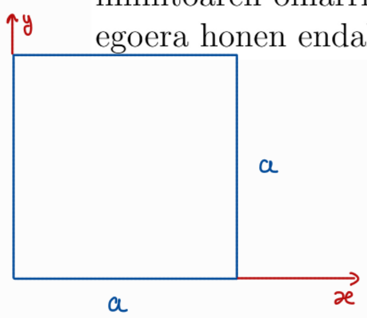
Dauden egoera posibleak

$|\psi^a\rangle = \overbrace{|1\ 1\rangle}^{\text{sim}} \otimes \overbrace{|0\ 0\rangle}^{\text{antis.}}$ $g=1$

$|\psi^b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|2\ 0\rangle + |0\ 2\rangle\right] \otimes |0\ 0\rangle$ $g=1$

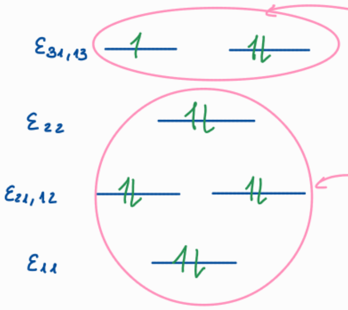
$|\psi^c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|2 0\rangle - |0 2\rangle\right] \otimes \{|1\ m_s\rangle\}$ $g=3$

2. 11 elektroi a zabalerako karratua den bi dimentsioko potentzial osin infinitoaren oinarrizko egoeran daude. Zein da sistemaren energia? Zein da egoera honen endekapena?



Orduan dakigunez $E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2a^2 m}(n_x^2 + n_y^2)$

orduan hauek ordenatu ahal ditugu hurrengo moduan:



honen endekapena $g=4$ izango da.

hauen endekapena $g=1$

Sistemaren energia:

$E = 2\varepsilon_{11} + 4\varepsilon_{21} + 2\varepsilon_{22} + 3\varepsilon_{31} = \frac{35\hbar^2\pi^2}{a^2 m}$

endekapena $g=4$ //

3. Aurki bedi dimentsio bakarreko oszilatzaile harmonikoarena bezalako potentzialaren eraginpeko bi W^+ bosoik osaturiko (W^+, W^+) bikotearen oinarrizko egoeraren endekapenaren ordena, W^+ bosoiaren spina $s = 1$ dela jakinik.

Bosoiak ditugunez haien uhin-funtzioa simetrikoa izan behar da eta biak $|00\rangle$ mailan egonda, hau simetrikoa izango da. Orduan, beharko dugu spin egoera ere simetrikoa izatea.

s_1 eta s_2 1 direnez spin osoaren oinarrian simetrikoak diren egoerak:

$\{|2, m_s\rangle\}$ $m_s = 2, 1, 0, -1, -2$ eta $|00\rangle$ izango dira $\Rightarrow$

$\Rightarrow |\psi\rangle = |00\rangle \otimes \begin{cases} \{|2\ m_s\rangle\} & g=5 \\ |0\ 0\rangle & g=1 \end{cases}$ izango dugu.

5. Bereizgarriak diren spin 1/2 duten bi partikulen sistema baten spin-egoeraren uhin-funtzioa ondorengoa da ($\hat{S}_{1z}$ eta $\hat{S}_{2z}$ eragileen autofuntzioen oinarrian $|\pm\pm>$ adieraziz):

$$|\psi> = \left[|++> + |+-> + \sqrt{2}\,|--> \right] \frac{1}{2}$$

Egoera horretan egonik $\hat{S}_{1x}$ neurtzerakoan, zein da $-\hbar/2$ lortzeko probabilitatea?

Lehenengo $\hat{S}_x$-ren autofuntzioen oinarrian jarriko dugu.

Dakigu $\begin{cases} |+> = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+>_x + |->_x\right] \\ |-> = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+>_x - |->_x\right] \end{cases}$

Honekin jar dezakegu gure egoera S_x-ren funtzioan:

- $|++> = |+> \otimes |+> = \frac{1}{2}\left[|++>_x + |+->_x + |-+>_x + |-->_x\right]$
- $|+-> = |+> \otimes |-> = \frac{1}{2}\left[|++>_x - |+->_x + |-+>_x - |-->_x\right]$
- $|--> = |-> \otimes |-> = \frac{1}{2}\left[|++>_x - |+->_x - |-+>_x + |-->_x\right]$

Beraz gure uhin-funtzioa

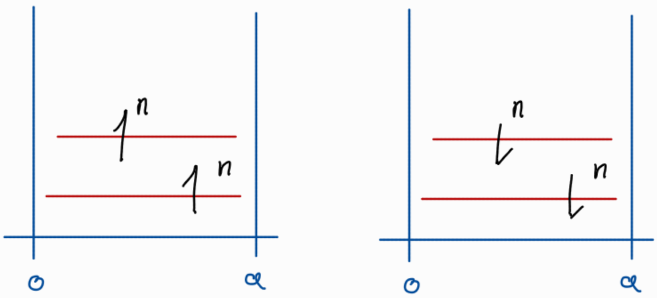
$$|\psi>_x = \frac{1}{2}\left[2|++>_x + 2|-+>_x + \sqrt{2}\left(|++>_x - |+->_x - |-+>_x + |-->_x\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{2})|++>_x + (2-\sqrt{2})|-+>_x - \sqrt{2}|+->_x + \sqrt{2}|-->_x\right]$$

orduan $\hat{S}_{1x}$ neurtzean $-\hbar/2$ izateko probabilitatea:

$$\boxed{P(-\hbar/2) = \frac{2 + (2-\sqrt{2})^2}{4}}$$

6. Spinak paraleloak dituzten bi neutroi a zabalerako (hormak $x = 0$ eta $x = a$ puntuetan daude) dimentsio bakarreko potentzial-osin infinituan daude. Bi neutroien arteko elkarrekintza arbuiatuz, neutroi bat oinarrizko egoeran dagoela suposatuko dugu eta bestea lehenengo egoera kitzikatuan. Zein da aldiberean bi partikulak osinaren ezkerreko zatiaren erdian $(x_1, x_2 < a/2)$ egoteko probabilitatea?



Fermioiak direnez biak spin paraleloan egoteko maila desberdinetan egon behar dira derrigorrez:

Gainera dakigu m_s-ren balio posible bakarrak 1 edo -1 izango direnez spin egoera tripletea izango da eta uhin-funtzioa, berriz, antisimetrikoa

$$|\psi\rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1\,2\rangle - |2\,1\rangle\right]}_{|\varphi\rangle} \otimes \overbrace{\left[\alpha|1\,1\rangle + \beta|1\,-1\rangle\right]}^{|\alpha|^2+|\beta|^2=1}$$

non $\langle x_1,x_2|n_1\,n_2\rangle = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x_1\right)\sin\left(\frac{n_2\pi}{a}x_2\right)$

Beraz:

$$P(x_1, x_2 < a/2) = \int_0^{a/2} dx_1\,dx_2 \langle\varphi|\varphi\rangle \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{4} - \frac{8}{9\pi^2}}$$

7. Bereizgarriak diren spin 1/2 duten bi partikulen sistema baten spin-egoerak $\hat{S}_{1z}$ eta $\hat{S}_{2z}$ behagarrien autofuntzioen oinarrian ($\{| \pm\pm >\}$) adierazten ditugu. Demagun sistemaren hasierako egoera normalizaturik dagoen ondorengo uhin-funtzioa dela:

$$|\psi >= \alpha\,|++> + \beta\,|+-> + \gamma\,|-->,$$

non α, β eta γ zenbaki irudikariak diren. Denboran zehar sistemaren egoera ondorengo Hamiltondarraren eraginez aldatzen da:

$$\hat{H} = \omega_1 \hat{S}_{1z} + \omega_2 \hat{S}_{2z}.$$

Es como si les aplicasemos un campo magnético.

- Hasierako egoeraren gainean, $\hat{S}_{1x}$ eta $\hat{S}_{2y}$ neurtzen baditugu aldiberean, zeintzuk izango liratekeen hauen balioak eta bere probabilitateak?
- Demagun aurreko neurketa ez dugula egiten, zenbat balio luke $< \hat{\mathbf{S}}_1(t) >$ denboraren funtzioan?

a)
$$\begin{cases} |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_x \pm |-\rangle_x\right] \\ |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_y \pm i|-\rangle_y\right] \end{cases}$$

$|+\rangle \otimes |+\rangle$

- $|++\rangle = \frac{1}{2}\left[|++\rangle_{xy} + i\,|+-\rangle_{xy} + |-+\rangle_{xy} + i\,|--\rangle_{xy}\right]$
- $|+-\rangle = \frac{1}{2}\left[|++\rangle_{xy} - i\,|+-\rangle_{xy} + |-+\rangle_{xy} - i\,|--\rangle_{xy}\right]$
- $|--\rangle = \frac{1}{2}\left[|++\rangle_{xy} - i\,|+-\rangle_{xy} - |-+\rangle_{xy} + i\,|--\rangle_{xy}\right]$

Orduan:
$$\boxed{\begin{aligned} P(++) &= \tfrac{1}{4}\,|\alpha+\beta+\gamma|^2 \\ P(+-) &= \tfrac{1}{4}\,|\alpha-\beta-\gamma|^2 \\ P(-+) &= \tfrac{1}{4}\,|\alpha+\beta-\gamma|^2 \\ P(--) &= \tfrac{1}{4}\,|\alpha-\beta+\gamma|^2 \end{aligned}}$$

b) $\vec{S}_1 = \underbrace{S_{1x} + S_{1y}}_{\text{Ez dira aldatuko}} + \underbrace{S_{1z}}_{\text{Bai aldatuko dela}}$ izango da, non Hamiltondarrak bakarrik izango duen eragina z-ren partean.

Gogoratu $\langle S_{1x} + S_{1y} + S_{1z}\rangle = \langle S_{1x}\rangle + \langle S_{1y}\rangle + \langle S_{1z}\rangle$

Orduan $\hat{S}_{1x}$ eragilea gure kasuan: $\hat{S}_{1x} = \frac{\hbar}{2} \overset{\text{solo afecta en } \mathcal{H}_1}{\sigma_x} \otimes \underbrace{\mathbb{1}}_{\text{No hace nada en } \mathcal{H}_2} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrizeak ikusita berealakoa de $\langle \hat{S}_{1x} \rangle = \langle \hat{S}_{1y} \rangle = 0$ izango dela egiaztatu dezakegu.

$$\hat{S}_{1y} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_{y} \otimes \mathbb{1} = \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_{1z} = \frac{\hbar}{2} \sigma_z \otimes \mathbb{1} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\langle \hat{S}_{1z} \rangle (t) = \langle \hat{S}_{1z} \rangle$ izango denez $[H, S_{1z}] = 0$ delako eta ondorioz H-ren autofuntzioak izango dira S_z-ren autobalioenak. Honengatik

$\boxed{\langle \hat{S}_1 \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - |\gamma|^2 \right)}$ izango dugu.

Bi partikulen spin osoaren autofuntzioak

1. Bi elektroien spin osoa nulua izanik, zein da $\hat{S}_{1y}\hat{S}_{2y}$ eragilearen batezbesteko balioa?

Spin osoa nulua badugu hori esan nahi du gauden egoera hurrengoa dela : $|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+-\rangle - |-+\rangle]$

Eta gure eragilearen adierazpena: $\hat{S}_{1y}\hat{S}_{2y} = -\frac{\hbar^2}{4}\,\sigma_{1y}\otimes\sigma_{2y} = -\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

$$\langle \hat{S}_{1y}\hat{S}_{2y}\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}0&1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\langle S_{1y}S_{2y}\rangle = -\frac{\hbar^2}{2}}$$

2. Egin bedi, $\{H, S^2, S_z\}$ behagarrien aldibereko autoegoerek osatzen duten oinarriarekiko, dimentsio bakarreko oszilatzaile harmonikoarena bezalako potentzialaren eraginpeko bi Z^0 bosoik osaturiko (Z^0, Z^0) bikotearen oinarrizko egoeren eta lehen egoera kitzikatuen azterketa.

Z^0 bosoiak $s=1$ du. Beraz gure spin osoaren oinarria izango da:

- $\{|2\,m_s\rangle\}$ eta $|0\,0\rangle$ simetrikoak
- $\{|1\,m_s\rangle\}$ antisimetrikoa

Orduan egoera espaziala ere izango ditugu 2 posibilitate

$|\varphi^s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\,2\rangle + |2\,1\rangle]$ eta $|\varphi^a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|2\,1\rangle - |1\,2\rangle]$

Beraz gure egoerak simetrikoak izan behar direnez

$$|\psi\rangle = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}[|2\,1\rangle + |1\,2\rangle] \otimes \left\{\begin{array}{ll} \{|2\,m_s\rangle\} & g=5 \\ |0\,0\rangle & g=1 \end{array}\right\} g=6 \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[|2\,1\rangle - |1\,2\rangle] \otimes \{|1\,m_s\rangle\} \quad g=3 \end{array}\right\} g=9$$

eta energia $E = 4\hbar\omega$ izango da.

3. Bi elektroien spin-egoera zehazten duen Hamiltondarra ondorengoa da:

$$\hat{H} = -\alpha \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + \beta(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z})^2,$$

non α eta β konstante positiboak eta errealak diren. Zenbat balio du oinarrizko egoeraren energia? Honetarako kontutan izan $\alpha >> \beta$ dela.

$\alpha >> \beta$ denez egingo duguna izango da $H = H_0 + W$ non $\begin{cases} H_0 = -\alpha \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} \\ W = \beta (S_{1z} + S_{2z})^2 \end{cases}$

Egingo dugun lehenengoa izango da Hamiltondarra spin osoaren funtzioan jarri:

S_1^2 eta S_2^2 beti izango dira $\frac{3}{4}\hbar^2$

- $S^2 = (\vec{S_1} + \vec{S_2})^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S_1} \cdot \vec{S_2} \Leftrightarrow \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} = S^2 - \frac{3}{2}\hbar^2$
- $S_z^2 = (S_{1z} + S_{2z})^2$

Orduan izango dugu $H = -\alpha \left[S^2 - \frac{3}{2}\hbar^2\right] + \beta S_z^2$

Bi elektroiak ditugunez daukagun oinarria $\{|1\,1\rangle\ |1\,0\rangle\ |1\,-1\rangle\ |0\,0\rangle\}$ izango da. Oinarrizko egoera beti denez simetrikoa izango dugu bakarrik $|00\rangle$ izan ahal dugula. Beraz:

- $E_0^0 = \frac{3}{4}\alpha\hbar^2$

Eta zuzenketa:

$$S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ikusten denez ez da egongo zuzenketarik $\Rightarrow$ $\boxed{E = \frac{3}{4}\alpha\hbar^2}$

4. Elektroia eta positroiaren arteko egoera lotuak positronioak deitzen dira. Sistemaren $1s$ egoera bakarrik kontutan hartuz eta $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ eremu magnetikoaren barruan egonik, positronioari dagokion Hamiltondar efektiboa ondorengo eran adieraz dezakegu:

$$\hat{H} = E_0 + D\,\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + \frac{2\mu_B B}{\hbar}(\hat{S}_{1z} - \hat{S}_{2z}),$$

non E_0 eta D konstanteak diren, eta $\mathbf{S}_1$ eta $\mathbf{S}_2$ elektroiaren eta positroiaren spinak, hurrenez hurren.

- Kalkula ezazu aurreko Hamiltondarraren autofuntzioak eta autobalioak eremu magnetikorik ez dagoenean ($B = 0$).
- $B \neq 0$ izanik, zein da energia bajuena duen aurreko autofuntzioari dagokion Hamiltondarraren batezbestekoa?

• Lehenengo B ez dugunean. Orduan daukagun Hamiltondarra:

$$H = E_0 + D\,\tilde{S}_1 \cdot \tilde{S}_2 = E_0 + \frac{D}{2}\left[S^2 - \frac{3}{2}\hbar^2\right]$$

Daukagun egoerak $|\psi\rangle = \{|1, m_s\rangle\, |00\rangle\}$ izango dira.

Beraz gure energiak izango dira:

$$S=1 \Rightarrow E = E_0 - \frac{D\hbar^2}{4}$$

$$S=0 \Rightarrow E = E_0 - \frac{3D\hbar^2}{4}$$

Hemendik oinarrizko egoera $E = E_0 - \frac{3D\hbar^2}{4}$ izango da.

• B ez nulua denean zuzendu behar dugu energiaren adierazpena. Zuzenketa ez dugunez endekapena:

$$\Delta E = \langle 00|H|00\rangle = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\langle +-| - \langle -+|\right] \frac{\cancel{2}\mu_B B}{\hbar}(S_{1z}-S_{2z})\left[|+-\rangle - |-+\rangle\right] = 0 //$$

Beraz gure oinarrizko egoeraren energia zuzendua $\boxed{E = E_0 - \frac{3D\hbar^2}{4}}$

5. Bi protoi L zabalera duen dimentsio bakarreko potentzial-osin infinituan daude. Bi protoien arteko elkarrekintza perturbatiboki azter dezakegu, eta ondorengo adierazpena du:

$$\hat{H}_{\text{int}} = V_0 L \delta(x_1 - x_2) + J\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2,$$

non V_0 eta J positiboak diren. Zein da bete behar den erlazioa bai oinarrizko eta lehenengo egoera kitzikatuaren spin egoera singletea izan dadin?

Daukagu bi protoi L zabalerako potentzial osinean:

• Oinarrizko egoera: Kasu honetan singletea izan behar da daukagun egoera bakarra simetrikoa baita: $|\psi\rangle = |11\rangle \otimes |00\rangle$

• Lehenengo egoera kitzikatua izango ditugu bi egoera posible.

$|\varphi^t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|21\rangle - |12\rangle\right] \leftarrow$ bai ala bai tripletearekin

$|\varphi^s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|21\rangle + |12\rangle\right] \leftarrow$ bai ala bai singletearekin.

Biak, bi protoien elkarrekintza kontuan izan gabe, energia berdina izango dute: $E = \frac{5\hbar^2\pi^2}{2a^2 m}$

Perturbazio teoriaren bitartez ikusi dezakegu H_{int} (gure perturbazioa) energia maila jaitsiko duen ala ez.

$$H_{int} = \overbrace{V_0 L\, \delta(x_1 - x_2)}^{W_x} + \overbrace{J/2 \left[S^2 - \frac{3}{2}\hbar^2 \right]}^{W_s}$$ izanda Singlete egoerarekin hasiko gara:

$$\cdot\ E_S = E_S^0 + \overbrace{\langle \psi^s | H_{int} | \psi^s \rangle}^{\text{Ez daukagu endekapena.}} = E_S^0 + \langle \varphi^s | W_x | \varphi^s \rangle + \overbrace{\langle 00 | W_s | 00 \rangle}^{-\frac{3J\hbar^2}{2}}$$

* W_x zuzenketa hau orokorki egingo dugu erreztzeko gauzak:

$$\langle n\, m | W | n'\, m' \rangle = V_0 L \iint dx_1 dx_2\, \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x_2\right) \delta(x_1 - x_2)\, \sin\left(\frac{n'\pi}{L}x_1\right) \sin\left(\frac{m'\pi}{L}x_2\right) \frac{4}{L^2}$$

$$= V_0 L \int dx_2\, \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_2\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{L}x_2\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x_2\right) \sin\left(\frac{m'\pi}{L}x_2\right) \cdot \frac{4}{L^2}$$

Beraz: $$\langle \varphi^s | W | \varphi^s \rangle = \overbrace{\frac{4}{2} \langle 12 | W | 12 \rangle}^{\text{Simetria izango dugu.}} = \frac{V}{2}$$

Hau da zuzenketa: $$E_S = \underbrace{\frac{5\hbar^2\pi^2}{2ma^2}}_{E_1} + \frac{V}{2} - \frac{3J\hbar^2}{4}$$

Tripletea dugunean egoera espazialaren zuzenketa argi ikusten da nulua izango dela eta ondorioz:

$$E_t = E_t^0 + \underbrace{\langle \varphi^t | W_x | \varphi^t \rangle}_{0} + \underbrace{\langle 1\, m_s | W_s | 1\, m_s \rangle}_{\text{Endekapena}}$$

Endekapena egonda hurrengo matrizea diagonalizatu behar dugu:

$(W_s) = \frac{\hbar^2 J}{2} \mathbb{1}_{(3\times3)}$ $\Rightarrow$ Diagonala denez $\{|1\, m_s\rangle\}$ hiruren tzako gure zuzenketa: $\Delta E = \frac{\hbar^2 J}{2}$ izango da.

Hau da: $$\begin{cases} E_S = E_1 + \frac{V}{2} - \frac{3J\hbar^2}{4} \\ E_t = E_1 + \frac{\hbar^2 J}{4} \end{cases} \Rightarrow E_S \text{ 1. eg kitz.} \Leftrightarrow \frac{V}{2} - \frac{3J\hbar^2}{4} < \frac{\hbar^2 J}{4} \Leftrightarrow \frac{V}{2} < \hbar^2 J \Leftrightarrow \boxed{V < 2\hbar^2 J}$$

6. Bi positroi L zabalera duen dimentsio bakarreko potentzial osin infinituan daude. Bi positroien arteko alderapena perturbatiboki azter dezakegu, eta ondorengo adierazpena du:

$$\hat{H}_{\text{int}} = V_0 L \delta(x_1 - x_2)$$

Kalkula ezazu sistemaren bigarren egoera kitzikatuaren (hirugarren energia-maila) energiaren adierazpena (V_0-ren lehenengo ordenean).

Daukagu bi protoi 2. ek-n. $\Rightarrow E^0_{n_1 n_2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}(n_1^2 + n_2^2) \Rightarrow \overbrace{E^0_{22} = \frac{4\hbar^2\pi^2}{ma^2}}^{\text{Pert. gabe energia.}}$

Beraz daukagun egoera bakarrik izan ahal da: $|\psi\rangle = |22\rangle \otimes |00\rangle$ izango da. Gainera ez dagoenez endekapenik izango dugun energiaren zuzenketa:

$$E_{22} = E^0_{22} + \langle 22|\hat{H}_{int}|22\rangle$$

Non $\langle 22|\hat{H}_{int}|22\rangle = V_0 L \cdot \frac{4}{L^2} \overbrace{\iint dx_1 dx_2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{L}x_1\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{L}x_2\right)\delta(x_1 - x_2)}^{\frac{L}{4}} = V_0$

Beraz izango dugu: $\boxed{E_{22} = \frac{4\hbar^2\pi^2}{ma^2} + V_0}$

7. Demagun $s_1 = s_2 = 1$ spin-eko partikulek osaturiko sistemaren hamiltondarra hauxe dela: $H = A\,\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$, $A > 0$ izanik.

- Lor bitez H Hamiltondarraren energiak eta endekapenak. Egin bedi energia-mailen eskema.
- Idatz bitez H hamiltondarraren autoegoerak, S_{1z} eta S_{2z} eragileen aldibereko autoegoeren konbinazio linealaz.

$S_1 = S_2 = 1 \Rightarrow S_1^2 + S_2^2 = 4\hbar^2$

Daukagun Hamiltondarra obe tuko dugu: $S^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}[S^2 + 4\hbar^2]$

Beraz kasu honetan erabiliko dugun oinarria $\{|S\, m_S\rangle\}$ izango da.

$$\hat{H} = \frac{A}{2}[S^2 - 4\hbar^2] \quad \begin{array}{lll} S=2 & E_2 = A\hbar^2 \rightarrow \{|2\, m_S\rangle\} & g = 5\text{-koa} \\ S=1 & E_1 = -A\hbar^2 \rightarrow \{|1\, m_S\rangle\} & g = 3\text{-koa} \\ S=0 & E_0 = -4A\hbar^2 \rightarrow \underbrace{|0\,0\rangle}_{\text{zergatik?}} & g = 1\text{-koa} \end{array}$$

Como conmutan H y S^2 tenemos que van a ser las mismas autofunciones que las de los autovalores de S^2

- Hauek S_{1z} eta S_{2z} -ren funtzioan jarriz:

$\ell=2$: $|2\,2\rangle = |1\,1\rangle$

$$\left.\begin{aligned}
|2\,2\rangle &= |1\,1\rangle \\
|2\,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1\,0\rangle + |0\,1\rangle\right] \\
|2\,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left[|1\,{-1}\rangle + 2|0\,0\rangle + |{-1}\,1\rangle\right] \\
|2\,{-1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\,{-1}\rangle + |{-1}\,0\rangle\right] \\
|2\,{-2}\rangle &= |{-1}\,{-1}\rangle
\end{aligned}\right\} E_2 = A\hbar^2 \text{ izango dute.}$$

$\ell=1$:

$$\left.\begin{aligned}
|1\,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1\,0\rangle - |0\,1\rangle\right] \\
|1\,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1\,{-1}\rangle - |{-1}\,1\rangle\right] \\
|1\,{-1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\,{-1}\rangle - |{-1}\,0\rangle\right]
\end{aligned}\right\} E_1 = -A\hbar^2 \text{ izango dute}$$

$\ell=0$ $\quad |0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[|1\,{-1}\rangle - |0\,0\rangle + |{-1}\,1\rangle\right] \longrightarrow E_0 = -4A\hbar^2$ izango du.

8. $j_1 = 1$ eta $j_2 = 1/2$ momentu angeluar osoaren zenbaki kuantikoak dituen bereizgarriak diren bi partikulen Hamiltondarra ondorengoa da:

$$\hat{H} = A\,\hat{\mathbf{J}}_1 \cdot \hat{\mathbf{J}}_2,$$

non A konstante bat den. Hasierako aldiunean neurtutako $\hat{J}_{1z}$ eta $\hat{J}_{2z}$, 0 eta $\hbar/2$ dira, hurrenez hurren. Zein da edozein t aldiunetan izango genukeen $<\hat{J}_{1z}>(t)$.

Egingo dugu berez J_{1z} eta J_{2z} -ren autofuntzioetan:

Dakigu $\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 = J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y} + J_{1z}J_{2z}$

- $(J_{1x}J_{2x})$

$$(J_{1x}) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad (J_{2x}) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta ondorioz: } (J_{1x}J_{2x}) = J_{1x}\otimes J_{2x} = \frac{\hbar^2}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

- $(J_{1y}J_{2y})$:

$$(J_{1y}) = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad J_{2y} = \frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta ondorioz: } (J_{1y}J_{2y}) = J_{1y}\otimes J_{2y} = \frac{\hbar^2}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&-1 \\ -1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

- $$(J_{1z}J_{2z}) = \frac{\hbar^2}{2}\begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} & O & O \\ O & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & O \\ O & O & \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Beraz gure Hamiltondarraren adierazpena:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1+ & 1- & 0+ & 0- & -1+ & -1- \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & & & & & \\ & \sqrt{2} & 2 & & & \\ & 2 & 0 & & & \\ & & & 0 & 2 & \\ & & & 2 & -\sqrt{2} & \\ & & & & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \hat{H}\text{-ren} \\ \text{diagonalizazioaz:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} E_1 = -\frac{\hbar}{2} \; ; \; |1\rangle = |1+\rangle \; ; \; |3\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0+\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1-\rangle \\ E_2 = \hbar \; ; \; |2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle \\ E_3 = -\hbar \; ; \; |4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0-\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|-1+\rangle \\ E_4 = \frac{\hbar}{2} \; ; \; |5\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0-\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|-1+\rangle \; ; \; |6\rangle = |-1-\rangle \end{array} \right.$$

Orduan gure neurketa egitean: $|0+\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|3\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|2\rangle$ izango dugu. $\Rightarrow |\psi\rangle(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}|3\rangle e^{i\frac{t}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}|2\rangle e^{-it} =$

$$= \underbrace{\frac{2}{3}|0+\rangle e^{i\frac{t}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}|1-\rangle e^{i\frac{t}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{3}|1-\rangle e^{-it} + \frac{1}{3}|0+\rangle e^{-it}}_{\text{Hacer la media, mede pereza}}$$

9. Izan bedi $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ momentu angeluarra, $[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] = 0$ izanik. Froga bedi, $\mathbf{J}_\pm$ eragileak erabiliz, $\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2$ eragilearen itxarotako balioak m zenbaki kuantikoarekiko menpekotasunik ez duela. Ondoren, froga bedi $|j_1\, j_2\, j\, m>$ egoera $\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2$, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_1$ eta $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_2$ eragileen autoegoera dela, eta autobalioak lortu.

- Itxarotako balioa m-ren menpekotasuna izango du $\Longleftrightarrow [\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2, J_z] = 0$ badira, baina berehalakoa da hau ez dela gertatzen.

Gainera: $\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 = \frac{1}{2}[J^2 - J_1^2 - J_2^2]$ eran idatz dezakegu, hau ez duenez eraginik m-ren gainean dakigu ez duela menpekotasunik izango.

Ere, $J_\pm$ eragileak erabiltzean egingo diguna izango da matrizea blokeka diagonala m-ren balio ezberdinak konektatuz

FISIKA KUANTIKA

8 Gaia

Hiru partikulen adibide bat

1. Spina s=1/2 duen hiru partikulak hiruki baten erpinetan daude kokaturik. Partikua hauen spinen arteko interakzioa ondorengo hamiltondarraren bitartez adieraz dezakegu:

$$\hat{H} = J(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_3 + \hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{S}}_3)$$

Aurki ezazu hamiltondarraren autobalioak (energia mailak) eta balio bakoitzari dagokion endakapena.

- $\mathcal{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 \Longleftrightarrow \vec{S}_1 . \vec{S}_2 = \frac{1}{2}[\mathcal{S}^2 - S_1^2 - S_2^2]$
- $S^2 = (\vec{\mathcal{S}} + S_3)^2 \Longleftrightarrow \vec{\mathcal{S}} \cdot \vec{S}_3 = \vec{S}_1 . \vec{S}_3 + \vec{S}_2 . \vec{S}_3 = \frac{1}{2}[S^2 - \mathcal{S}^2 - S_3^2]$

$$\hat{H} = \frac{J}{2}(\mathcal{S}^2 - S_1^2 - S_2^2 + S^2 - \mathcal{S}^2 - S_3^2) = \frac{J}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2) = \frac{J}{2}\left(S^2 - \frac{9\hbar^2}{4}\right)$$

Izango genuke : $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \begin{cases} 1 \oplus \frac{1}{2} & \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases} \\ 0 \oplus \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \end{cases}$

Dauzkagun energiak: $\begin{cases} S = \frac{3}{2} \Rightarrow E = \frac{3J\hbar^2}{4} \\ S = 1/2 \Rightarrow E = -\frac{3J\hbar^2}{4} \end{cases}$