3.G.

3. Betetzen al da ondorengo berdinketa

$$< x^2 >=< y^2 >=< z^2 >= \frac{1}{3} < r^2 >$$

hiru dimentsioko oszilatzaile harmoniko eta isotropoaren autofuntzioetan?

Daukagun uhin funtzioa: $\Psi_{n_1 n_2 n_3} = H_{n_1} H_{n_2} H_{n_3} \, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+z^2)}$

orduan:

$$\left.\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= (\Psi, x^2 \Psi) = F(y,z) \\ \langle y^2 \rangle &= (\Psi, y^2 \Psi) = G(x,z) \\ \langle z^2 \rangle &= (\Psi, z^2 \Psi) = H(x,y) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{ez dira zertan berdinak izan behar.}$$

L_z-ren autofuntzioak eta autobalioak

3. m masadun partikula baten egoera ondorengo uhin-funtzioaren bidez deskribatzen dugu:

$$\Psi(\mathbf{r}, t=0) = e^{-\alpha r^2}\phi,$$

non $\alpha > 0$ den. L_z magnitudea neurtzen badugu, zein da $\hbar$ lortzeko probabilitatea aldiberean partikularen $r \in [a, b]$ tartean egonik.

Daukagu $\Psi(\vec{r}, t=0) = e^{-\alpha r^2}\varphi$

L_z-ren autofuntzioak $\psi_m = \dfrac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$ non $L_z\psi_m = \hbar m \psi_m \Rightarrow |C_1|^2$ nahi dugu.

orduan Ψ normalizatuz:

$$\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} A^2 e^{-2\alpha r^2}\varphi^2 r^2\sin^2\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi \Rightarrow A = \sqrt{\frac{3\sqrt{\alpha^3}}{\sqrt{2\pi^7}}}$$

orduan:

$$P(C_1[a,b]) = \left|\left(\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \Psi\right)\right|^2 = \left|\int_a^b\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} A e^{-\alpha r^2}\varphi r^2\sin^2\theta \, d\varphi\,d\theta\,dr\right|^2 =$$

$$= \frac{9}{64\pi^2}\left\{2\sqrt{\alpha}\left(a e^{-a^2\alpha} - b e^{-b^2\alpha}\right) + \sqrt{\pi}\left(-\mathrm{Erf}[a\sqrt{\alpha}] + \mathrm{Erf}[b\sqrt{\alpha}]\right)\right]\right]^2$$

4.G.

Momentu angeluarraren autobalioak eta autofuntzioak

3.

- (a) Froga bedi $\hat{L}_x$ eta $\hat{L}_y$ eragileen itxarotako balioak nuluak direla, harmoniko esferiko guztietarako.
- (b) Kalkula bitez, harmoniko esferikoen bidez adierazitako egoeren kasuan, momentu angeluarraren x eta y osagaien batezbesteko desbidazio kuadratikoen bigarren errodurak.

a) Frogatu $\langle \hat{L}_x \rangle = \langle \hat{L}_y \rangle = 0$ edozein $Y_m^l(\theta, \varphi)$-rako

Dakigunez:

$$\langle \hat{L}_x \rangle = \left(Y_l^m, \left(\frac{L_+ + L_-}{2}\right) Y_l^m \right) = \frac{1}{2}\left[(Y_l^m, L_+ Y_l^m) + (Y_l^m, L_- Y_l^m) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(Y_l^m, A_l^m Y_l^{m+1}) + (Y_l^m, B_l^m Y_l^{m-1}) \right] = 0$$

igual que antes

$$\langle \hat{L}_y \rangle = \left(Y_l^m, \left(\frac{L_+ - L_-}{2i}\right) Y_l^m \right) = 0 \qquad \square$$

- Orduan ΔL_x^2 eta ΔL_y^2:

$$\Delta L_x^2 = \langle L_x^2 \rangle = \frac{1}{4}\left(Y_l^m, (L_+ + L_-)(L_+ + L_-) Y_l^m \right) =$$

$L_+^\dagger = L_-$ eta $L_-^\dagger = L_+$

$$= \frac{1}{4}\left((L_+ + L_-)^\dagger Y_l^m, (L_+ + L_-) Y_l^m \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((L_- + L_+) Y_l^m, (L_+ + L_-) Y_l^m \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((B_l^m Y_l^{m-1} + A_B^m Y_l^{m+1}), (A_l^m Y_l^{m+1} + B_l^m Y_l^{m-1}) \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((B_l^m)^2 + (A_l^m)^2 \right) = \frac{\hbar^2}{2}\left(l(l+1) - m^2 \right) \implies \boxed{\Delta L_x = \hbar \sqrt{\frac{l(l+1) - m^2}{2}}}$$

$$\langle L_y^2 \rangle = -\frac{1}{4}\left(Y_l^m , (L_+ - L_-)^2 Y_l^m \right) = -\frac{1}{4}\left((L_- - L_+) Y_l^m , (L_+ - L_-) Y_l^m \right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\left(B_l^m Y_l^{m-1} - A_l^m Y_l^{m+1} \right), \left(A_l^m Y_l^{m+1} - B_l^m Y_l^{m-1} \right) \right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-(B_l^m)^2 - (A_l^m)^2 \right) \Rightarrow \boxed{\Delta L_y = \hbar \sqrt{\frac{l(l+1) - m^2}{2}}}$$

4.G.

5. Eragile bat momentu angeluarraren edozein bi osagairekin trukakorra izanez gero, froga ezazu hirugarren osagaiarekin trukakorra izango dela ere.

Demagun $\hat{A}$ definizioz: $[\hat{A}, L_y] = [\hat{A}, L_z] = 0$ orduan $[\hat{A}, L_x] = ?$

$$[\hat{A}, L_y] = \hat{A} L_y - L_y \hat{A} = 0$$

$$[\hat{A}, L_z] = \hat{A} L_z - L_z \hat{A} = 0$$

$$[\hat{A}, L_x] = \hat{A} L_x - L_x \hat{A} = \frac{-i}{\hbar} \left(A [L_y, L_z] - [L_y, L_z] A \right) =$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \left[A L_y L_z - A L_z L_y - L_y L_z A + L_z L_y A \right] \overset{A \text{ trukakorra}}{=} 0 \qquad \square$$

4.6.

6. Kalkula itzazu $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ eta $\hat{L}_z$ eragileen aldibereko autofuntzio ($\psi(\mathbf{r})$) guztien adierazpenak.

Dakigunez hirurak ez dira trukakorrak beraz ez dute aldibereko autofuntziorik tribiala izan ezik. Handa, dakigunez ez dute erradioarekiko menpekotasunik beraz:

Aldibereko autofuntzio guztien adierazpenak: $\psi(\vec{r}) = f(r)\, Y_0^0$ non autobalioa 0.

4.G.

7. Demagun elektroi baten egoerak $\{\phi_x = xf(r), \phi_y = yf(r)\}$ oinarrian adieraz daitezkela, non uhin-funtzio hauek $\hat{L}_x$ eta $\hat{L}_y$ eragileen autofuntzioak diren, hurrenez hurren.

- Zeintzuk dira egoera hauei dagozkien behagarri hauen autobalioak?
- $\hat{\mathbf{u}}$ norabidea OXY planoan dago eta α angelua osotzen du OX ardatzarekiko. Goiko oinarria erabiliz, adieraz ezazu norabide honekiko momentu angeluarraren proiekzioaren $(\hat{L}_u)$ autobalio berdina duen autofuntzioa.

Daukagun oinarria $\{\phi_x = x f(r), \phi_y = y f(r)\}$ L_x eta L_y-ren autofuntzioak izanda.

- autobalioak?

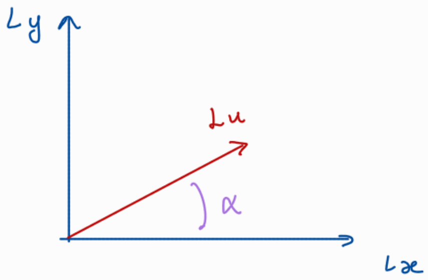
$L_x \propto r, x$

$$L_x \phi_x = L_x \, x f(r) = 0 \Rightarrow \lambda_x = 0$$

$$L_y \phi_y = L_y \, y f(r) = 0 \Rightarrow \lambda_y = 0$$

Hau da autobalioak: $\boxed{\lambda_x = \lambda_y = 0}$

-



Lehenengo L_u $\{\phi_x, \phi_y\}$ oinarrian jarri behar dugu.

$$\hat{u} = (\hat{u}\cdot\hat{\imath})\hat{\imath} + (\hat{u}\cdot\hat{\jmath})\hat{\jmath} = \overbrace{(\cos\alpha)\hat{\imath} + \left(-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)\hat{\jmath}}^{\text{Por definición.}} = \cos\alpha\,\hat{\imath} + \sin\alpha\,\hat{\jmath}$$

Beraz $L_u = L_x \cos\alpha + L_y \sin\alpha$ izango da.

Behar dugu $\Psi = a\phi_x + b\phi_y$ non L_u-ren autobalioa 0 den $\Rightarrow$

$$\Rightarrow L_u \Psi = (L_x \cos\alpha + L_y \sin\alpha)(a\phi_x + b\phi_y) =$$

$$= L_x \cos\alpha \, b\phi_y + L_y \sin\alpha \, a\phi_x =$$

$$= -i\hbar f(r)\left(b\cos\alpha\,(y\partial_z - z\partial_y)\,y + a\sin\alpha\,(z\partial_x - x\partial_z)\,x\right) =$$

$$= -i\hbar f(r)\, z\,(-b\cos\alpha + a\sin\alpha) \overset{!}{=} 0 \quad \text{denigorrez} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a\sin\alpha = b\cos\alpha \iff \quad b = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

Hau da $\psi = a\,(\phi_x + \mathrm{tg}\,\alpha\,\phi_y)$ non a normalizazio konstantea, beraz normalizatuz:

$$(\psi, \psi) \overset{!}{=} 1 \iff a^2\,(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) = a^2\,\frac{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha} = 1 \iff a = \cos\alpha$$

Beraz $\psi(\vec{r})$ non $L_z\,\psi(\vec{r}) = 0$ izango da $\boxed{\psi(\vec{r}) = \cos\alpha\,\phi_x + \sin\alpha\,\phi_y}$

4. G.

9. Sistema baten Hamiltondarra ondorengoa da:

$$\hat{H} = \alpha \hat{L}_x^6,$$

non α konstante bat den. Hasieran ($t = 0$), sistemaren egoera ondorengo uhin-funtzioaren bidez adierazten dugu:

$$\psi(t=0) = \sqrt{1/4}\, Y_1^1(\theta,\phi) + \sqrt{1/2}\, Y_1^0(\theta,\phi) + \sqrt{1/4}\, Y_1^{-1}(\theta,\phi).$$

Aurreko Hamiltondarraren eraginpean dagoelarik, kalkula ezazu hasierako aldiunean sistemak duen $\hat{L}_x$ behagarriaren batezbestekoa, $< \hat{L}_x > (t=0)$. Aldatzen al da balio hau denboran zehar? ψ uhin-funtzioa egoera geldikorra al da?

- $\langle L_x \rangle = \left(\psi, \frac{L_+ + L_-}{2} \psi \right) =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_1^1 + Y_1^{-1}) + Y_1^0, \left(\frac{A_1^{-1} Y_1^0}{\sqrt{2}} + A_1^0 Y_1^1 \right) + \left(\frac{B_1^1 Y_1^0}{\sqrt{2}} + B_1^0 Y_1^{-1} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} A_1^0 + \frac{A_1^{-1}}{\sqrt{2}} + \frac{B_1^1}{\sqrt{2}} + \frac{B_1^0}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\hbar}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle L_x \rangle = \hbar}$$

- $\frac{d\langle L_x \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, L_x] \rangle + \left\langle \frac{\partial L_x}{\partial t} \right\rangle^2 = 0 \Rightarrow$ ez da aldatzen denborarekin.

- Lehen adibidetik dakigu $L_x \psi = \hbar \psi \Rightarrow \hat{H} \psi = \hbar^6 \psi \Rightarrow$ bai da egoera geldikorra.

4.G.

Preguntar

10. Sistema baten momentu angeluarra (zehatza) $\sqrt{2}\hbar$ da. Sistema honek momentu kuadrupolar elektrikoa du eta kanpoko eremu elektrikoaren gradientearekin duen elkarrekintza ondorengo Hamiltondarraren bidez adierazten dugu:

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar}\left(\hat{L}_u^2 - \hat{L}_v^2\right),$$

non ω_0 konstante bat den, eta $\hat{L}_u$ eta $\hat{L}_v$ XOZ planoan dauden OX eta OZ norabideekiko 45^0-ko angelua osotzen duten $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}})/\sqrt{2}$ eta $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}})/\sqrt{2}$ norabideetan sistemaren momentu angeluar osoak ($\mathbf{L}$) dituen proiekzioak diren.

Goiko Hamiltondarra kontutan harturik, zergatik ezin da aldatu sistemaren momentu angeluarraren balioa?

Hasieran ($t = 0$), sistemaren egoera ondorengo uhin-funtzioren bidez adierazten dugu:

$$\psi(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[Y_1^1(\theta,\phi) - Y_l^{-1}(\theta,\phi)].$$

Aurreko Hamiltondarraren eraginpean dagoelarik, kalkula ezazu sistemaren $\hat{L}_x$ behagarriaren batezbestekoari dagokion denboraren garapena, $< \hat{L}_x > (t)$.

orduan $L_u = \dfrac{L_x - L_z}{\sqrt{2}}$ $\quad L_v = \dfrac{L_x + L_z}{\sqrt{2}}$ izango da.

orduan $L_u^2 = \frac{1}{2}(L_x - L_z)^2 = \frac{1}{2}\left(L_x^2 + L_z^2 - L_x L_z - L_z L_x\right)$

$$L_v^2 = \frac{1}{2}(L_x + L_z) = \frac{1}{2}\left(L_x^2 + L_z^2 + L_x L_z + L_z L_x\right)$$

Beraz: $\hat{H} = \frac{\omega_0}{2\hbar}\left(\cancel{L_x^2} + \cancel{L_z^2} - L_x L_z - L_z L_x - \cancel{L_x^2} - \cancel{L_z^2} - L_x L_z - L_z L_x\right) =$

$$= -\frac{\omega_0}{\hbar}\left(L_x L_z + L_z L_x\right)$$

Orduan: $[L^2, \hat{H}] = -\frac{\omega_0}{\hbar}\left[L^2, L_x L_z + L_z L_x\right] = 0$

- $\langle L_x \rangle (t)$ garatzeko L_x Hamiltondarraren oinarrian jarri behar dugu:

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -\hbar \to \phi_- = \frac{1}{2}\left(Y_1^{-1} - \sqrt{2}\, Y_1^0 + Y_1^1\right) \\ \lambda_2 = \hbar \to \phi_+ = \frac{1}{2}\left(Y_1^{-1} + \sqrt{2}\, Y_1^0 + Y_1^1\right) \\ \lambda_3 = 0 \to \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-Y_1^{-1} + Y_1^1\right) \end{array}$$

orduan dan hagun egoera $\Psi(t=0) = \phi_0$

Han de $\langle L_x \rangle (t=0) = (\Psi, L_x \Psi) = 0$ izango da.

Eta gainera $[\hat{H}, \hat{L}_x] = 0$ izango denez: $\langle L_x \rangle (t) = 0$ izango da.

4.G.

14. Elektroi baten uhin-funtzioa ondorengoa da:

$$\psi(r,\theta,\phi)=\frac{1}{4}(e^{i\phi}\sin\theta+\cos\theta)R(r),$$

non $R(r)$ beheko normalizazio-baldintza betetzen duen edozein funtzioa den:

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = 1$$

$\hat{L}x$ neurtzen badugu, zeintzuk dira lor ditzakegun balioak eta hauen probabilitateak?

Daukagu $\psi(\vec{r})=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,Y_1^1+\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_0^0\right)R(r)$

orduan, Normalizatzen badugu: $A^2\frac{1}{16}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)\overset{!}{=}1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^2\frac{\pi}{8}=1 \Leftrightarrow \boxed{A=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}}$

$\left(\text{Reorder } (Y_e^m)^*=(-1)^m\, Y_e^{-m}\right)$

orduan $\psi(\vec{r})=\frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(-Y_1^1+\sqrt{2}\,Y_0^0\right)$

orduan $\langle L_x\rangle=\frac{\hbar}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1, & \sqrt{2}, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}=0$

No hace falta...

orduan, badakigu lortu ahal ditugun balioak, $\ell=1$ baita, $\hbar, -\hbar$ eta 0 balioak izango direla

L_z diagonalizatuz:

$\lambda_1=-\hbar \rightarrow \phi_-=\frac{1}{2}\left(Y_1^{-1}-\sqrt{2}\,Y_1^0+Y_1^1\right)$

$\lambda_2=\hbar \rightarrow \phi_+=\frac{1}{2}\left(Y_1^{-1}+\sqrt{2}\,Y_1^0+Y_1^1\right)$

$\lambda_3=0 \rightarrow \phi_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-Y_1^{-1}+Y_1^1\right)$

orduan $\psi(\vec{r})$ L_z-ren oinarrira pasatzeko: $T_{L_z}^{H}=\left(\phi_-\middle|\phi_+\middle|\phi_0\right)$

$\psi_{L_z}(\vec{r})=\left(T_{L_z}^{H}\right)^{-1}\psi_H(\vec{r})=\frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,\phi_-+\phi_+\right)$

$\boxed{\text{orduan lortu ahal dugu } \ell_z=\pm\hbar \text{ eta } \mathbb{P}(\hbar)=\frac{1}{3} \text{ eta } \mathbb{P}(-\hbar)=\frac{2}{3}}$

4. G.

15. Elektroi baten uhin-funtzioa ondorengoa da:

$$\psi(r,\theta,\phi) = \frac{e^{-2r}}{r^2}(x+r).$$

Egoera horretan egonik L_x^{23} neurtzen dugu, zeintzuk dira lor ditzakegun balioak eta hauen probabilitateak?

Orduan L_x neurtzen badugu ez dauka r-ko edo x-ko menpekotasunik.

$$L_x \psi = \left[-i\hbar\,(y\partial_z - z\partial_y)\,x + L_x r\right]\frac{e^{-2r}}{r^2} = 0 \Rightarrow L_x^{23}\psi(\vec{r}) = 0 \text{ izango da.}$$

4.6.

16. Elektroi bat $l > 2$ momentu angeluarra duen zenbaki kuantikoaren azpiespazioan dago, uhin-funtzioa ondorengoa izanik,

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(Y_l^l + 2iY_l^{l-1} - Y_l^{l-2}\right),$$

non α konstante positiboa den. Kalkula ezazu L_x osagaiaren ziurgabetasuna, ΔL_x.

orduan ΔL_x kalkulatzeko lehenengo normalizatu behar dugu uhin funtzioa:

$$(\psi, \psi) = A^2(1+4+1) = A^2 6 \overset{!}{=} 1 \iff \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

Beraz: $\psi(\vec{r}) = \dfrac{e^{-\alpha r}}{\sqrt{6}\, r}\left(Y_l^l + 2i Y_l^{l-1} + Y_l^{l-2}\right)$ izango da.

$$\langle L_x \rangle = \frac{1}{6}\left(Y_l^l + 2i Y_l^{l-1} + Y_l^{l-2}, \frac{(L_+ + L_-)}{2}\left(Y_l^l + 2i Y_l^{l-1} + Y_l^{l-2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\Big(Y_l^l + 2i Y_l^{l-1} + Y_l^{l-2}, \left(0 + 2i A_l^{l-1} Y_l^l + A_l^{l-2} Y_l^{l-2}\right) +$$

$$+ \left(B_l^l Y_l^{l-1} + B_l^{l-1} Y_l^{l-2} + 0\right)\Big) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\cancel{B_l^l(-2i)} + \cancel{2i A_l^{l-1}} + A_l^{l-2} + B_l^{l-1}\right) = \frac{\hbar}{12}\left(\sqrt{l(l+1)-(l-2)(l-1)} + \sqrt{l(l+1)-(l-1)(l-2)}\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{6}\sqrt{l(l+1)-(l-1)(l-2)}$$

$$\langle L_x^2 \rangle = \frac{1}{4}\left((L_+ + L_-)(Y_l^l - 2i Y_l^{l-1} + Y_l^{l-2}), (L_+ + L_-)(Y_l^l + 2i Y_l^{l-1} + Y_l^{l-2})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(A_l^l Y_l^{l+1} - 2i A_l^{l-1} Y_l^l + A_l^{l-2} Y_l^{l-1} + B_l^l Y_l^{l-1} - 2i B_l^{l-1} Y_l^{l-2} + B_l^{l-2} Y_l^{l-3},$$

$$A_l^l Y_l^{l+1} + 2i A_l^{l-1} Y_l^l + A_l^{l-2} Y_l^{l-1} + B_l^l Y_l^{l-1} + 2i B_l^{l-1} Y_l^{l-2} + B_l^{l-2} Y_l^{l-3}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\left((A_l^l)^2 + 2(A_l^{l-1})^2 + (A_l^{l-2})^2 + (B_l^l)^2 + 2A_l^{l-2}B_l^l + 2(B_l^{l-1})^2 + (B_l^{l-2})\right) = \text{algo.}$$

4.G.

17. Elektroi baten uhin-funtzioa ondorengoa izanik:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\alpha r}}{r^2}(x + y + 2z + r),$$

non α konstante positiboa den, zein da elektroiaren L_x osagaia neurtzean 0 lortzeko probabilitatea?

Ordu au pasa tu ko dena

$$\psi(\vec{r}) = f(r)\cdot\left(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_1^{-1} - Y_1^1) + i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_1^{-1} + Y_1^1) + 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0 + \sqrt{4\pi}\,Y_0^0\right) =$$

$$= f(r)\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_1^{-1} - Y_1^1 + iY_1^{-1} + iY_1^1 + 2\sqrt{2}\,Y_1^0 + \sqrt{3}\,Y_0^0\right)$$

$$= f(r)\left((1+i)Y_1^{-1} + (-1+i)Y_1^1 + 2\sqrt{2}\,Y_1^0 + \sqrt{3}\,Y_0^0\right)$$

Normalizatuz:

$$(\psi,\psi) \stackrel{!}{=} 1 \iff A^2(2+2+8+3) = 1 \iff \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{15}}}$$

Beraz L_x Hamiltondarren autofuntzioetan jarriz:

$$\lambda_1 = -\hbar \rightarrow \phi_- = \frac{1}{2}(Y_1^{-1} - \sqrt{2}\,Y_1^0 + Y_1^1)$$

$$\lambda_2 = \hbar \rightarrow \phi_+ = \frac{1}{2}(Y_1^{-1} + \sqrt{2}\,Y_1^0 + Y_1^1) \implies L_x\psi = 0 \text{ emateko probabilitatea}$$

$$\lambda_3 = 0 \rightarrow \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-Y_1^{-1} + Y_1^1) \qquad |C_0|^2\text{-rena da} \implies$$

$$\implies C_0 = (\phi_0, \psi) = \frac{1}{\sqrt{30}}\left(-Y_1^{-1} + Y_1^1, (1+i)Y_1^{-1} + (-1+i)Y_1^1 + 2\sqrt{2}\,Y_1^0 + \sqrt{3}\,Y_0^0\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{30}}\left(-(1+i) + (-1+i)\right) = \frac{-2}{\sqrt{30}} \implies \boxed{P(0) = \frac{2}{15}}$$

4. G.

18. Elektroi baten uhin-funtzioa ondorengoa da:

$$\psi(\mathbf{r}) = Axy\frac{e^{-\alpha r}}{r^3},$$

non $\alpha > 0$ den eta A uhin-funtzioa normalizatzeko behar den konstantea (ez duzue A kalkulatu behar). Egoera honetan egonik, zenbat balio du $< \hat{L}_x >$?

Orduan : $\psi(\vec{r}) = \frac{A}{r} e^{-\alpha r} \cdot \sin\theta \cos\varphi \sin\theta \sin\varphi = A \frac{e^{-\alpha r}}{r} \sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi$.

Eta $\partial_\theta \psi = A \frac{e^{-\alpha r}}{r} \cdot \overbrace{2\sin\theta\cos\theta}^{\sin 2\theta}$; $\partial_\varphi \psi = A \frac{e^{-\alpha r}}{r} \sin^2\theta \, \overbrace{(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}^{\cos 2\varphi}$

Beraz $L_x \psi = -i\hbar \frac{A e^{-\alpha r}}{r} \left(-\sin\varphi \sin 2\theta - \frac{\cos\varphi \cos 2\varphi}{\operatorname{tg}\theta} \right)$

$\langle L_x \rangle = (\underset{\mathbb{R}}{\psi}, \underset{\mathbb{C}}{L_x \psi}) = 0$ izango da.