1. Gaia (Teoria Kuantikoaren sarrera)

Uhin-funtzioaren interpretazio estatistikoa.

1. m masadun partikula bat aske mugitzen da $x \in [-a/2, a/2]$ tartean (Beraz, tarte horretan energia potentziala konstantea da), baina ezin da hortik kanpo egon. Han da $x = -a/2$ eta $a/2$ puntuetan ormak daude. $t=0$ aldiunean duen uhin-funtzioa ondorengoa da:

$$\Psi(x, t=0) = \begin{cases} A\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) & x \in (-a/2, a/2) \\ 0 & besteetan \end{cases}$$

Zein da $x \in [a/6, a/2]$ tartean partikula aurkitzeko probabilitatea? Konpara ezazu probabilitate hau emaitza klasikoarekin.

Dakigunez, lehenengo normalizatu behar dugu funtzioa:

$$\int_{-a/2}^{a/2} |\Psi|^2 \, dx \overset{!}{=} 1 \iff A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$ (Tiene sentido es el osin infinito)

Beraz $$\mathbb{P}(x \in [a/6, a/2]) = \int_{a/6}^{a/2} |\Psi|^2 \, dx = \frac{1}{24}\, a\, \frac{2}{a}\left(4 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right) \Rightarrow \boxed{\mathbb{P} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}}$$

Emaitza klasikoan $\mathbb{P}(x) = K \Rightarrow \int_{-a/2}^{a/2} K \, dx \overset{!}{=} 1 \iff K = \frac{1}{a} \Rightarrow \mathbb{P}(a/6, a/2) = \frac{1}{3} >$ Kuantiko

1.G.

Hisemberg-en ziurgabetasunaren ondorio fisiko bat; sistemaren energia minimoa igortzea.

1. Dimentzio bakarreko osziladore harmonikoaren energia $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2$

- Ziurtasun Ezaren printzipioa erabiliz, egiaztatu energia minimoaren balioa ez dela zero. Kasurik onenean energiaren adierazpena honako hau da:

$$E \sim \frac{h^2}{32\pi^2 m x^2} + \frac{1}{2}Kx^2$$

- Egiaztatu osziladorearen energiarik txikiena $E_{min} \sim h\nu$ dela non $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$ osziladorearen maiztasuna den.
- Aplikatu aurreko emaitza osziladore makroskopikoaren kasuan (hartu $K = 10$ N/m eta $m = 100$g, esate baterako) oinarrizko egoeran daudenean mekanika klasikoaren ikuspuntutik, zein da osziladorearen anplitudea? Neurgarria da?

- Dakigu ziurgabetasun printzipiotik $\Delta p\, \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ dela $\Rightarrow \Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$ izango da, beraz kasurik hoberenean $\Delta p \sim p$ izanda (hau da, hartu ahal dugun ziurgabetasun txikiena):

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2 \sim \frac{h^2}{2\cdot 16\pi^2 m x^2} + \frac{1}{2}Kx^2 = \overbrace{\frac{h^2}{32\pi^2 m x^2}}^{\frac{\hbar^2}{8mx^2}} + \frac{1}{2}Kx^2 \qquad \text{Q.E.D.}$$

- Energia minimoaren balioa lortzeko: $\frac{d}{dx}E = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{32\pi^2 m}\left(-\frac{2}{x^3}\right) + Kx = 0 \Leftrightarrow x^4 = \frac{\hbar^2}{4mK} \Rightarrow x^2 = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{Km}}$$

Orduan $E_{min} = \frac{\hbar^2}{8m}\frac{2\sqrt{Km}}{\hbar} + \frac{1}{2}K\frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{Km}} = \frac{\hbar}{4}\sqrt{\frac{K}{m}} + \frac{\hbar}{4}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{min} = \frac{h}{2}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{h}{2}\nu$ eta $\frac{h}{2} \sim h$ oso txikia baita: $E_{min} \sim h\nu$

- Mekanika klasikoan emaitza hau aplikatuz: $E_{min(x)} \sim 10^{-33}$ J non anplitudea izango zen, $E_{min(x)} = \frac{1}{2}Kx_{max}^2 \Leftrightarrow x_{max} \sim 10^{-17}$ m $\ll$ 1 Å ez da neurgarria.

Hau da guretzat x E_{min} 0 izango litzateke.

Arrazoi onargarriak Schrödingerren ekuazioa lortzeko.

1. Ikusi dugunez, m masadun partikula ez-erlatibista bati dagokion uhinaren ekuazioa Schrödinger-ren ekuazioa dugu. Baina, zein da m masadun partikula aske eta erlatibistari dagokion uhin-ekuazioa? Lor ezazue ekuazio honen adierazpena (Klein-Gordon-en ekuazioa deitzen da). Horretarako Schrödinger-en ekuazioa lortzeko jarraitutako pausuak egin behar dituzue baina kasu honetan partikularekin lotutako uhinak bete egin behar duen erlazioa $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ da.

Orduan hasiko gara uhin ekuaziotik:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \longrightarrow \text{dakigunez } \Psi = e^{-i\omega t}\varphi(x)$$

Beraz: $e^{-i\omega t}\nabla^2\varphi(x) = \frac{1}{v^2}(-\omega^2)e^{-i\omega t}\varphi(x) \Leftrightarrow \nabla^2\varphi = -\frac{\omega^2}{v^2}\varphi$

Dakigunez: $v = \lambda \cdot f = \lambda \frac{\omega}{2\pi}$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \nabla^2\varphi = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\varphi$. Orain, erabiliz de Broglieren identitatea $\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \nabla^2\varphi = -\overbrace{\frac{4\pi^2}{h^2}}^{1/\hbar^2} p^2\varphi \Leftrightarrow p^2 = -\frac{\hbar^2}{\varphi}\nabla^2\varphi$$

. Beraz daukagu:

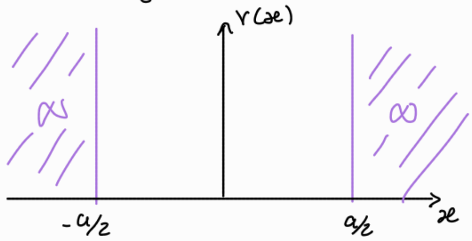
$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \Leftrightarrow E^2 = -\frac{\hbar^2}{\varphi}c^2\nabla^2\varphi + m_0^2c^4 \Leftrightarrow \boxed{-\hbar^2c^2\nabla^2\varphi + m_0^2c^4\varphi = E^2\varphi}$$

2. m masadun partikula bat aske mugitzen da $x \in [a/2, a/2]$ tartean (beraz, tarte horretan energia potentziala konstantea da), baina ezin da hortik campo egon. Frogatu horrengoa dela oinarrizko egoeraren uhin-funtzioa:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} & x \in \text{tartea} \\ 0 & x \text{ tarte kanpo.} \end{cases}$$

Kalkulatu ezazu ere E energiaren balioa.

Daukagu:



orduan dakigu $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi + V(x)\Psi = i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t}$

Aldagai banantze: $\Psi(x,t) = \psi(x)\,\varphi(t)$.

Hau da: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''}{\psi} + \cancel{V(x)}^{0} = i\hbar\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = E$ hau da:

- $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi \iff \psi'' + \overbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}^{K^2}\psi = 0 \iff \psi = A\cos(Kx) + B\sin(Kx)$

Dakigu oinarrisko egoera simetrikoa izan behar dela $\Rightarrow B=0$

gainera, $\psi(a/2) = 0$ izan behar da $\Rightarrow \cos(K\frac{a}{2}) = 0 \iff K\frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} \iff$

$\iff K = \frac{\pi}{a}$ eta ondorioz: $\sqrt{2mE} = \frac{\hbar\pi}{a} \iff \boxed{E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}}$

- $i\hbar\dot{\varphi} = E\varphi \iff \varphi = Ae^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

Hau da gure uhin funtzioa: $\Psi(x,t) = \psi(x)\,\varphi(t) \iff$

$$\boxed{\Psi(x,t) = A\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad \text{non} \quad x \in [-a/2, a/2] \text{ eta } E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}}$$

Fourier-ren Garapenak eta transformatuak.

1. Kalkula ezazu $A(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2}$ funtzioaren ($k_0, \alpha > 0$ kte) Fourier-ren anti transformatua $\psi(x)$.

$A(k)$ normalizatuz $\quad A = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4}$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{ikx}\, dk = \frac{1}{(2\pi\alpha)^{1/4}} e^{ik_0 x - \frac{x^2}{4\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}}{(2\pi\alpha)^{1/4}} \left[\cos k_0 x + i \sin k_0 x\right]}$$

1.6.

2. Zein da hasierako ($t=0$) aldiuneko dimentsio bakarreko uhin-funtzioak, $\Psi(x,0)$, bete behar duen erlazioa bere Fourier-ren transformatua, $A(k,0)$ erreala izateko.

Dakigunez $A(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi(x,0) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int \Psi \cos(kx) dx + i \int \Psi \sin(kx) dx \right]$

Beraz $A(k,0) \in \mathbb{R} \iff \int \Psi \sin(kx) dx = 0$

Beraz $\sin(kx)$ funtzio bikoitia denez eta tarte simetrikoan integratzen dugunez $\Psi(x)$ funtzio bakoitia bada, orduan $\Psi \sin(kx)$ funtzio bakoitia izango da eta ondorioz parte irudikaria nulua izango da $\Rightarrow$
$\Rightarrow A(k,0) \in \mathbb{R}$ izanda.

Momentuaren dentsitate probabilitatea.

1. $t=0$ aldiunean, partikula askearen uhina honako hau da,

$$\Psi(x, t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|k|}{k_0}} e^{ikx} \, dk$$

$t=0$ aldiunean momentua neurtuta zein da $-p_1$ eta p_1 balioen arteko emaitza lortzeko probabilitatea?

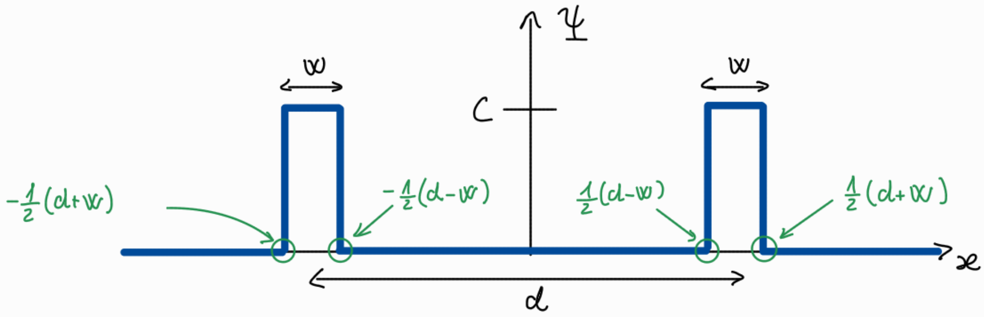
Dakigu $A(k) = A\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{|k|}{k_0}}$ izango dela.

$A(k)$ normalizatuz $A(k) = \dfrac{e^{-\frac{|k|}{k_0}}}{\sqrt{k_0}}$

Beraz $\mathbb{P}(-k_1, k_1) = \displaystyle\int_{-k_1}^{k_1} \frac{e^{-\frac{2|k|}{k_0}}}{k_0} \, dk = k_0^2 \left(1 - e^{-\frac{2k_1}{k_0}}\right)$

De Broglieren identitatea erabiliz: $\boxed{\mathbb{P}(-p_1, p_1) = k_0^2 \left(1 - e^{-\frac{2 p_1}{\hbar k_0}}\right)}$

2. Zein da beheko uhin-funtzioari dagokion momentuaren dentsitateprobabilitatearen adierazpena? Ahalik eta gehien simplifikatu adierazpena.



Uhin funtzioaren adierazpena lortu behar dugu:

$$\Psi = \begin{cases} C \,, & x \in \left[-\frac{1}{2}(d+w), -\frac{1}{2}(d-w)\right] \cup \left[\frac{1}{2}(d-w), \frac{1}{2}(d+w)\right] \\ 0 \,, & \text{besteetan.} \end{cases}$$

orduan, normalizatzen badugu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 2C^2 \cdot w \overset{!}{=} 1 \iff C = \frac{1}{\sqrt{2w}}$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\frac{1}{2}(d+w)}^{-\frac{1}{2}(d-w)} \Psi \, e^{-ikx} \, dx + \int_{\frac{1}{2}(d-w)}^{\frac{1}{2}(d+w)} \Psi \, e^{-ikx} \, dx \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{A(k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi w}} \left[e^{i\frac{dk}{2}} \sin\left(\frac{kw}{2}\right) - \frac{i}{2} \, e^{-i\frac{k(d+w)}{2}} \left(e^{ikw} - 1\right) \right]}$$

1. G.

Posizio eta momentuaren batazbestekoak eta desbideraketa estandarrak.

1. t_0 aldiunean, partikula baten uhin-funtzioa ondorengoa da:

$$\Psi(x,t_0) = \frac{1+ix}{1+ix^2}$$

Zein da partikularen posizioaren batazbesteko balio? Non egon daiteke partikula probabilitate handiagorekin?

Orduan, lehenengo normalizatu behar dugu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 \frac{(1+ix)^2}{(1+ix^2)^2}\, dx = A^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}} \stackrel{!}{=} 1 \iff A = \left(\frac{1}{2\pi^2}\right)^{1/4}$$

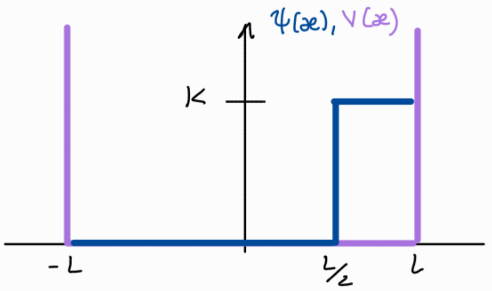
Beraz $\Psi(x,t_0) = \left(\frac{1}{2\pi^2}\right)^{1/4} \frac{1+ix}{1+ix^2}$

Beraz $\langle x \rangle = (\Psi, x\Psi) = 0$

Baina izango da baliorik probableena?, Hau jakiteko: $\frac{d}{dx}(|\Psi|^2) = 0$ denean izango da $\Rightarrow$ $x = 0, \pm\sqrt{-1+\sqrt{2}}, \pm i\sqrt{1+\sqrt{2}}$ eta $|\Psi(x,t_0)|^2$-n ebaluatuz $x=0$ izango da baliorik probableena.

1.G.

2. m masadun partikula bat 2L luzeera duen potentzial-osin infinitu baten barruan dago. Partikula honek hasieran duen uhin-funtzioa ($\psi(x)$) nulua da tarte osoan $[L/2, L]$ tartean izan ezik, non K konstantea balio duen. Kalkula ezazu (bakarrik L eta m-ren funtzioan) egoera horri dagokion ziurgabetasuna, Δx, eta momentuaren batazbestekoa.



Dakigunez $\psi = \begin{cases} K & x \in [L/2, L] \\ 0 & \text{besteetan.} \end{cases}$

Normalizatuz: $\displaystyle\int_{L/2}^{L} K^2\, dx = K^2 \frac{L}{2} \overset{!}{=} 1 \iff K = \sqrt{\frac{2}{L}}$

Hau da $\psi = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad \forall x \in [L/2, L]$ $\qquad \frac{7L^2}{12} \qquad \frac{9L^2}{16}$

Orduan: $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \langle x \rangle = (\psi, x\psi) = \frac{3}{4}L \\ \cdot\ \langle x^2 \rangle = (\psi, x^2\psi) = \frac{7L^2}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{L}{4\sqrt{3}}}$$

Eta $\langle \hat{p} \rangle = (\psi, \hat{p}\psi) = 0 \leftarrow \langle \hat{p} \rangle$ ezin baita konplexua izan.

3. Partikula baten aldiune bateko uhin-funtzioa ondorengoa izanik,

$$\Psi(x, t_0) = e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2} + i\frac{p_0}{\hbar}x}$$

Zein da $\langle \hat{p} \rangle$? Zenbat balio du $\langle \hat{x} \rangle$ eta Δx?

Lehenengo, dakigu $|\Psi|^2 = e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}$ eta hau normalizatuz: $A = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\alpha^2}}$

Beraz gure uhin-funtzioa: $\Psi(x, t_0) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2} + i\frac{p_0}{\hbar}x}}{\sqrt[4]{\pi\alpha^2}}$

orduan $\langle \hat{p} \rangle = (\Psi, \hat{p}\Psi) = \left(\Psi, -i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) =$

$$= \left(\Psi, -i\hbar\Psi\left(-\frac{x}{\alpha^2} + i\frac{p_0}{\hbar}\right)\right) = p_0\overbrace{(\Psi, \Psi)}^{1} + i\overbrace{\underbrace{\left(\Psi, \frac{\hbar}{\alpha^2}x\Psi\right)}_{\text{barruko funtzioa bakoitia da.}}}^{0} \Rightarrow \boxed{\langle \hat{p} \rangle = p_0}$$

Orain Δx lortzeko:

$\langle x \rangle = (\Psi, x\Psi) = 0 \leftarrow$ aurretik dakigu.

$\langle x^2 \rangle = (\Psi, x^2\Psi) = \frac{1}{2}a^2$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{a}{\sqrt{2}}}$$

4. Momentu espazioan dugun uhin-funtzioa $A(k)$ da, eta egoera honi dagokion $\langle x \rangle = x_0$ eta $\langle p \rangle = p_0$ dira non x_0 eta p_0 konstanteak diren. Ondorengo uhin-funtzio berri bat definitzen badugu: $A_1(x) = A(k)e^{ikx_1}$, non x_1 zenbaki erreala den, zein da egoera honi dagokion $\langle x \rangle$, goian emandako kantitateen funtzioan?

Erabiliko dugu $\hat{x} \equiv i\frac{\partial}{\partial k}$ dela momentu espazioan, orduan:

$$\langle x \rangle = (A_1(k), \hat{x} A_1(k)) = (A_1(k), e^{ikx_1} i\frac{\partial A(k)}{\partial k}) + (A_1(k), i(ix_1)A_1(k)) =$$

1 ← gogoratu B.E. dela.

$$= \left(A(k)\underbrace{\left(e^{ikx_1}, i\frac{\partial A(k)}{\partial k}e^{ikx_1}\right)}_{1}\right) - x_1\underbrace{(A_1(k), A_1(k))}_{1} = \underbrace{(A(k), \hat{x}A(k))}_{x_0} - x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x \rangle = x_0 - x_1}$$

Momentuaren eragilea

2. t_0 aldiunean, partikula baten uhin-funtzioa ondorengoa da:

$$\Psi(x, t_0) = \frac{1 + i x^2}{1 + i x^4}$$

Zein da $\langle \hat{p} \rangle$?

Lehenengo normalizatu behar dugu uhin funtzioa:

$$\int |\Psi|^2 dx \overset{!}{=} 1 \iff A = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\pi}}$$ izango da.

Orduan:

$$\boxed{\langle \hat{p} \rangle = (\underbrace{\underset{\text{bik}}{\Psi}, \underset{\text{bak}}{\hat{p}\,\Psi}}_{\text{bak}}) = 0}$$

bak $\leftarrow$ tarte simetrikoa $\Rightarrow$ integrala nulua.

1. G.

Eragile adjuntu eta hermitikoak.

1. $\hat{A} = x\frac{\partial^3}{\partial x^3} - x^3$. Zein da ondorengo erlazioa $(\Psi, \hat{A}\varphi) = (\hat{B}\Psi, \varphi)$, Ψ eta φ edozein uhin-funtzio izanik, betetzen duen $\hat{B}$ eragilearen adierazpena?

Definizioz $\hat{B} = \hat{A}^+$. Beraz:

$$\hat{A}^+ = \left(x\frac{\partial^3}{\partial x^3} - x^3\right)^\dagger = \left(-\frac{i}{\hbar^3} x \hat{p}^3 - x^3\right)^\dagger = \left(-\frac{i}{\hbar^3} x \hat{p}^3\right)^\dagger - (x^3)^\dagger$$

Dakigu $\hat{x} = \hat{x}^+$ eta $\hat{p} = \hat{p}^+$ beraz: $\hat{A}^\dagger = \frac{i}{\hbar}\hat{p}^3 x - x^3 =$

$$= \frac{\cancel{i}}{\cancel{\hbar^3}}(-i)^{\cancel{3}}\cancel{\hbar^3}\frac{\partial^3}{\partial x^3}(x) - x^3 = -i\frac{\partial^3}{\partial x^3}(x) - x^3 = -i\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 1\right) - x^3 =$$

$$= -i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\right) - x^3 = -i\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - x^3 =$$

$$= -i\left(2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) - x^3 = \boxed{-i\left(3\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) - x^3 = \hat{A}^+}$$

1.G.

3. Partikula baten (posizioa x momentua)-ren batazbesteko balioa kalkulatzean arazo bat sortzen da; honako bi adierazpen hauen artean

$$\langle xp\rangle = \int \Psi^* x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi\, dx \qquad \langle px\rangle = \int \Psi\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) x\,\Psi\, dx$$

zein da egokiena? Egiaztatu horien artean bat ere ez dela egokia (bi kasuotan emaitza erreala ez delako). Aldiz, honako adierazpen hau erreala dela egiaztatu,

$$\langle xp\rangle = \int \Psi^*\left[\frac{x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)+\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)x}{2}\right]\Psi\, dx$$

beraz horixe hartuko dugu $\langle xp\rangle$ magnitudearen balioa kalkulatzeko. Beste era batean esanda, $\hat{p}\hat{x}$ eta $\hat{x}\hat{p}$ ez dira hermitikoak baina $\frac{(\hat{p}\hat{x}+\hat{x}\hat{p})}{2}$ bai direla hermitikoak.

$\hat{x}\hat{p}$ eta $\hat{p}\hat{x}$ eragileak baliagarriak izateko, hau da emaitza erreala emateko biak hermitikoak izan behar dira. Hau da:

$$\hat{x}\hat{p} \stackrel{?}{=} (\hat{x}\hat{p})^{\dagger} \Rightarrow (\hat{x}\hat{p})^{\dagger} = \hat{p}^{\dagger}\hat{x}^{\dagger} = \hat{p}\hat{x} \neq \hat{x}\hat{p} \Rightarrow \text{ez da Hermitikoa}$$

$$\hat{p}\hat{x} \stackrel{?}{=} (\hat{p}\hat{x})^{\dagger} \Rightarrow (\hat{p}\hat{x})^{\dagger} = \hat{x}^{\dagger}\hat{p}^{\dagger} = \hat{x}\hat{p} \neq \hat{p}\hat{x} \Rightarrow \text{ez da Hermitikoa}$$

Hau da ez dira beharrezko baliagarriak eta emaitza ez da erreala izango.

Beste aldetik:

$$\frac{\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}}{2} \stackrel{?}{=} \left(\frac{\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}}{2}\right)^{\dagger} \Rightarrow \left(\frac{\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}}{2}\right)^{\dagger} = \frac{(\hat{x}\hat{p})^{\dagger}+(\hat{p}\hat{x})^{\dagger}}{2} = \frac{\hat{p}\hat{x}+\hat{x}\hat{p}}{2} = \frac{\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Hermitikoa da eta ondorioz emaitza erreala izango da.

1.6.

Denborarekiko menpekotasunik ez duen Schrödinger-en ekuazioa.

1. Ondorengo potentziala dugu:

$$V(x)=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{4}{225}\,\mathrm{sh}^2 x-\frac{2}{5}\,\mathrm{ch}\,x\right)$$

• Irudika ezazu $V(x)$ eta aurkitu minimoen posizioak ere.

• Froga ezazu ondorengo uhin-funtzioa

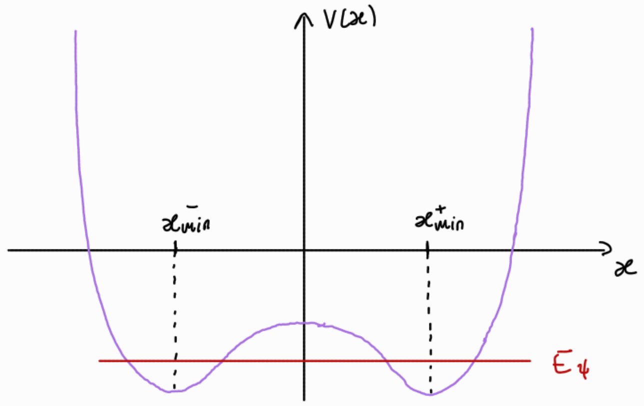
$$\psi(x)=(1+4\,\mathrm{ch}\,x)\,e^{-\frac{2}{15}\mathrm{ch}\,x}$$

Denboraren independientea den Schrödinger-en ekuazioaren emaitza dela. Aurki ezazu ere zein den uhin-funtzio honi dagokion energiaren balioa. $V(x)$ energia honen balioari dagokion marra horizontala.

• Irudikatzeko Wolframen sartuko dut hurrengo funtzioa:

$V(x)=a\,\mathrm{sh}^2x-b\,\mathrm{ch}\,x$ non $a=\frac{2\hbar^2}{225m}$ eta $b=\frac{\hbar^2}{5m}$ $\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{2}{45}\Rightarrow$

$\Rightarrow V(x)=\frac{\hbar^2}{5m}\left(\frac{2}{45}\,\mathrm{sh}^2x-\mathrm{ch}\,x\right)$ honela biderkatzen dagoen faktorea eskalatu egingo den funtzioa.



Hau da erraz ikusten da bi minimo dituela eta maximo lokala $x=0$ puntuan. non $x_{min}=\pm 3'11153$ (Wolframekin eginda)

beraz: $V(x_{min})=\frac{\hbar^2}{5m}(-5'66944)=-1'13389\,\frac{\hbar^2}{m}$

• Orduan $\psi(x)$ sartu behar dugu Schrödingerren ekuazioan:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)\Rightarrow[\ldots]=-\frac{16}{15}\frac{\hbar^2}{2m}\psi(x)=E\psi(x)\Leftrightarrow$$

Horrela gure V(x)-ren eskala berberean dago.

$$\Leftrightarrow E=-\frac{8}{15}\frac{\hbar^2}{m}=-\frac{8}{3}\frac{\hbar^2}{5m}=-2'6\hat{6}\,\frac{\hbar^2}{5m}<V(x_{max})=-\frac{\hbar^2}{5m}$$

1.G.

2. $m=1$ eta $\hbar=1$ direneko unitateetan, suposa dezagun $\psi_0(x) = e^{-3x}x^2$ dela partikula bati dagokion oinarrizko egoera. Zein da sistemaren energia potentzialaren adierazpena eta oinarrizko egoera honi dagokion energia?

Orduan dakigu, ψ_0 honek hurrengo ekuazioa bete behar duela:

$$\frac{1}{2}\psi_0''(x) + V(x)\psi_0(x) = E\psi_0(x)$$

$$\psi_0'(x) = -3e^{-3x}x^2 + e^{-3x}2x \Rightarrow \psi_0'' = -3(-3e^{-3x}x^2 + e^{-3x}2x) + -3e^{-3x}2x + e^{-3x}2 =$$

$$= e^{-3x}(9x^2 - 6x - 6x + 2) = e^{-3x}(9x^2 - 12x + 2) = \left(9 - \frac{12}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\psi_0$$

Hau da

$$\frac{1}{2}\left(9 - \frac{12}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\psi_0 + V(x)\psi_0 = E\psi_0 \Rightarrow V(x) = E - \left(\frac{9}{2} - \frac{12}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$$

Orduan: $V(x \to \infty) = 0$ (erregularitatea) $\Rightarrow \boxed{E = -\frac{9}{2}}$ izango da. Hau da $\boxed{V(x) = -\frac{12}{x} + \frac{2}{x^2}}$

Uhin-funtzioaren denboraren garapena.

1. Sistema baten hamiltondarraren autobalioak ε_n dira eta haiei dagozkien autofuntzioak $\psi_n(x)$. Sistemaren $t=0$ aldiuneko uhinfuntzioa ondorengoa izanik.

$$\Psi(x,t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha_1}\psi_1(x)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\alpha_2}\psi_2(x)+\frac{1}{\sqrt{6}}e^{i\alpha_3}\psi_3(x)$$

non α_i konstante errealak diren. Egoera honetan egonik aldatzen al da $\langle x\rangle$ denboraren funtzioan?, eta $\langle H\rangle$?

Dakigunez: $$\Psi(x,t)=\frac{e^{i(\alpha_1-\frac{\varepsilon_1}{\hbar})t}}{\sqrt{2}}\psi_1(x)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i(\alpha_2-\frac{\varepsilon_2}{\hbar})t}\psi_2(x)+\frac{1}{\sqrt{6}}e^{i(\alpha_3-\frac{\varepsilon_3}{\hbar})t}\psi_3(x)$$

$$\begin{aligned}\langle x\rangle=(\Psi,x\Psi)=x_0&+\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\left[\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\hbar}t-\alpha_1+\alpha_2\right](\psi_1,x\psi_2)+\\&+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\left[\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{\hbar}t-\alpha_1+\alpha_3\right](\psi_1,x\psi_3)+\\&+\frac{1}{3\sqrt{2}}\cos\left[\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\hbar}t-\alpha_3+\alpha_2\right](\psi_3,x\psi_2)\end{aligned}$$

Hau da $\langle x\rangle$ t-ren menpekotasuna izango du.

$\langle\hat{H}\rangle=(\Psi,\hat{H}\Psi)=(\Psi,(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\Psi)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\Rightarrow\langle\hat{H}\rangle$ ez du t-rekiko menpekotasuna.

2. $t=0$ aldiunean, partikula askearen uhina honako hau da,

$$\Psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|k|}{k_0}} e^{ikx}\, dk$$

Kalkulatu $\Psi(x,t)$. Zenbat balio du $\Delta x \, \Delta p$ edozein t baliorako?

Lehenengo. $A(k) = A\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{|k|}{k_0}}$ eta hau normalizatuz $A(k) = \dfrac{e^{-\frac{|k|}{k_0}}}{\sqrt{k_0}}$

orduan $\Psi(x,0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k_0}\, A(k)\, e^{ikx}\, dk$

E_k energia baina k-n.

Eta $\Psi(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{ikx} \cdot e^{-i\frac{\hbar^2 k^2}{2m}t}\, dk = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi k_0}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|k|}{k_0}} e^{ik\left(x - \frac{\hbar^2 k}{2m}t\right)} dk =$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|k|}{k_0}} e^{ik\left(x - \frac{\hbar^2 k}{2m}\right)} dk}$$

$\leftarrow$ Ni wolfram es capaz.

Neurketen emaitzak eta hauen probabilitateak

1. Partikula bat jatorrian ($x=0$) zentraturiko a zabalerako potentzial-osin infinituan dago. Partikularen energia neurtuko bagenu $\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ eta $\frac{4\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ lortuko genuke, probabilitate berdinarekin. Hasierako aldiune batean $\langle\hat{x}\rangle=0$ bada, zenbat balio du $\langle\hat{p}\rangle$ hasierako aldiune horretan?

Hint: Honerako kontuan izan a zabalerako potentzial-osin infinituari dagozkion autobalioak $E_n=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}$ direla, eta hauei dagozkien autofuntzioak:

$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left[\frac{n\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]$

Dakigun informazioarekin dakigu:

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$$

Dakigunez: $\Psi(x,0)$ denean $\Psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1+\psi_2)$ gehituko diogu fase bat horrela $\langle x\rangle=0$ izateko: $\Psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1+e^{i\alpha}\psi_2)$

orduan $|\psi|^2=\frac{1}{2}\left(\psi_1^2+\psi_1\psi_2\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)+\psi_2^2\right)=\frac{1}{2}\left(\psi_1^2+2\psi_1\psi_2\cos\alpha+\psi_2^2\right)$

Beraz: $\langle x\rangle=(\Psi,x\Psi)=\frac{1}{2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\cancel{x\psi_1^2}^{\,0}+2x\psi_1\psi_2\cos\alpha+\cancel{x\psi_2^2}^{\,0}\right)dx=\frac{16a}{9\pi^2}\cos\alpha\doteq 0 \iff$

$\iff \cos\alpha=0 \iff \alpha=\frac{\pi}{2}$

orduan daukagu $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ dela $\Rightarrow \Psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1+i\psi_2)$

Beraz $\langle\hat{p}\rangle=(\Psi,\hat{p}\Psi)=\frac{1}{2}\left(\psi_1+i\psi_2\,,\,i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)=\dots=\frac{8\hbar}{3a}$

1. G.

3. Partikula baten t_0 aldiuneko uhin-funtzioa $\psi(x, t_0) = \cos^2 C x$ da, non $C>0$ den. Egoera horretan egonik, momentuaren alderantzizkoa, p^{-1}, neurtzen dugu t_0 aldiune horretan. Zeintzuk dira lor ditzakegun balioak eta haien probabilitatea K?

Dakigunez $A(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t_0)\, e^{-iKx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\delta(K) + \frac{1}{2}\delta(K-2C) + \frac{1}{2}\delta(K+2C) \right)$

Normalizatuta? $C^2 \cdot \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = C^2 \frac{3}{4}\pi \overset{!}{=} 1 \Leftrightarrow C = \frac{2}{\sqrt{3\pi}}$

Han da $A(K) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\delta(K) + \frac{1}{2}\delta(K-2C) + \frac{1}{2}\delta(K+2C) \right)$ eta $K = \frac{p}{\hbar}$ denez:

$$A(p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\delta\left(\frac{p}{\hbar}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{p}{\hbar} - 2C\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{p}{\hbar} + 2C\right) \right)$$

Neurtu ahal ditugun p-ren balioak:

$p_1 = 0 \rightarrow p_1^{-1} = \infty$

$p_2 = 2\hbar C \rightarrow p_2^{-1} = \frac{1}{2\hbar C}$

$p_3 = -2\hbar C \rightarrow p_3^{-1} = -\frac{1}{2\hbar C}$

eta haien probabilitateak $\mathbb{P}(\infty) = \mathbb{P}(0) = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}(p_2^{-1}) = \mathbb{P}(p_2) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(p_3^{-1})$

2. Gaia (Formalismoa)

Trukatzaileak

1 Frogatu ondorengo erlazioak: $[x^n, p] = i\hbar n x^{n-1}$, $[x, p^n] = i\hbar n p^{n-1}$, $[f(x), p] = i\hbar \frac{df}{dx}$

• $[x^n, p] = x^n\left(-i\hbar \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x}}\right) - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) x^n = i\hbar n x^{n-1}$ Q.E.D.

• Honetarako erabiliko dan egingo dugu momentuen espazioan: $\hat{x} = i\frac{\partial}{\partial x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$

Beraz: $[x, p^n] = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}(p^n) - p^n i\hbar \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial p}} = i\hbar n p^{n-1}$ QED

Bakarrik x-ren funtzioa denez $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dx}$

• $[f(x), p] = f(x)\left(-i\hbar \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x}}\right) - \left(-i\hbar\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right) = i\hbar\frac{d f(x)}{d x}$ QED

2.G.

Behagarrien denbora-garapenaren ekuazioa eta higidura-konstanteak

1. m masadun partikula bat $V(x)$ energia potentzialaren eraginpean higitzen delarik, froga ezazu ondorengo berdinketa betetzen dela:

$$m\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = \langle p_x x + x p_x\rangle$$

Daukagu $\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, x^2]\rangle + \langle \cancelto{0}{\frac{\partial x^2}{\partial t}}\rangle$

Orduan: $[\hat{H}, x^2] = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 x^2}{\partial x^2} + \cancel{V(x)}x^2 + x^2\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \cancel{V(x)}x^2 =$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(2 + 4x\frac{\partial}{\partial x} + \cancel{x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\right) + \cancel{\frac{\hbar^2}{2m}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}} = -\frac{\hbar^2}{m}\left(1 + 2x\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Beraz: $\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = -i\hbar\langle 1 + 2x\frac{\partial}{\partial x}\rangle$

Orain: $\langle x p_x + p_x x\rangle = \langle -i\hbar x\frac{\partial}{\partial x} - i\hbar\frac{\partial}{\partial x}x\rangle = \langle -i\hbar\left(1 + 2x\frac{\partial}{\partial x}\right)\rangle$

Hau da $\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = -i\hbar\langle 1 + 2x\frac{\partial}{\partial x}\rangle = \langle x p_x + p_x x\rangle$ QED.

2. m masa duen partikula baten gainean aplikaturiko energia potentziala $V=-\beta x$ da (indarra konstantea da), non $\beta>0$ den. Hasiera batean sistema $\Psi(x,t=0)$ egoeran dagoik, $\langle\hat{p}\rangle_{(t=0)}=p_0$ eta $\langle\hat{x}\rangle_{t=0}=x_0$ dira. Ehrenfesten teorema aplikatu partikularen posizioaren batezbestekoa izango duen denboraren garapena, $\langle x\rangle(t)$, kalkulatzeko. Gauza $(\Delta\hat{p})^2(t)$ lortzeko.

Dakigu $\langle\dot{x}\rangle=\frac{\langle p\rangle}{m}$ eta $\langle\dot{p}\rangle=\langle-\frac{\partial V}{\partial x}\rangle \Rightarrow \langle\ddot{x}\rangle=\frac{1}{m}\langle-\frac{\partial V}{\partial x}\rangle=$

$$=\frac{1}{m}\langle\beta\rangle=\frac{\beta}{m} \Rightarrow \langle x\rangle(t)=A+Bt+\frac{1}{2}\frac{\beta}{m}t^2$$

orduan: $\left.\begin{array}{l}\langle x\rangle_{t=0}=x_0 \Leftrightarrow A=x_0\\ \langle\dot{x}\rangle_{t=0}=\frac{p_0}{m} \Leftrightarrow B=\frac{p_0}{m}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\langle x\rangle(t)=x_0+\frac{p_0}{m}t+\frac{\beta}{2m}t^2}$

Dakigunez $(\Delta p)^2(t)=\langle p^2\rangle(t)-\langle p\rangle^2(t)$

$\langle p\rangle$ berealakoa da: $\langle p\rangle=\langle\dot{x}\rangle m=\beta t+p_0$

$\langle p^2\rangle$ ateratzeko: $\langle\dot{p^2}\rangle=\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},p^2]\rangle=\frac{i}{\hbar}\left\{\langle[\cancelto{0}{\frac{p^2}{2m},\hat{p}^2}]\rangle+\langle[V(x),p^2]\rangle\right\}=$

$$\cdot\,[V(x),p^2]=\beta\hbar^2\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}x\right)=\beta\hbar^2\left(\cancel{x\frac{\partial^2}{\partial x^2}}-2\frac{\partial}{\partial x}-\cancel{x\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\right)=-\beta\hbar^2 2\frac{\partial}{\partial x}$$

orduan $\langle\dot{p^2}\rangle=-i\hbar 2\beta\langle\frac{\partial}{\partial x}\rangle=2\beta\langle p\rangle=2\beta(\beta t+p_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle p^2\rangle=\beta^2t^2+2\beta p_0 t+C$$

orduan $(\Delta p)^2(t)=\cancel{\beta^2t^2}+\cancel{2\beta p_0 t}+C-\cancel{\beta^2t^2}-\cancel{2\beta p_0 t}-p_0^2 \Rightarrow \boxed{(\Delta p)^2(t)=C-p_0^2}$

2.G.

3. $\frac{1}{2}Kx^2$ energia potentzialaren eraginpean mugitzen den m masadun partikulari dagokion hamiltondearraren autobalioak $E_n = \left(\frac{1}{2}+n\right)\hbar\omega$ dira non, $\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$ den. Hamiltondear honen autofuntzioak simetrikoak ala antisimetrikoak direla jakinik, zein da egoera geldikorrei dagozkien energia zinetikoaren batezbestekoa? eta Δx?

Dakigu $\langle E_n\rangle_{\psi_n} = (\psi_n, E_n\psi_n) = E_n$

Viriala-ren teorematik $\langle\hat{T}\rangle_{\psi_n} = \frac{1}{2}\left\langle x\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle_{\psi_n} = \left\langle\frac{1}{2}Kx^2\right\rangle_{\psi_n} = \langle V\rangle_{\psi_n}$

Dakigunez $\langle E_n\rangle_{\psi_n} = \langle\hat{T}\rangle_{\psi_n} + \langle V\rangle_{\psi_n} = 2\langle\hat{T}\rangle_{\psi_n} = \left(\frac{1}{2}+n\right)\hbar\omega \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\langle\hat{T}\rangle_{\psi_n} = \frac{(1+2n)}{4}\hbar\omega}$

Δx ateratzeko: $\langle x\rangle = (\underset{\downarrow}{\overset{\text{sim, ant.}}{\psi}}, \underbrace{x\underset{\downarrow}{\overset{\text{sim, anti}}{\psi}}}_{\text{anti, sim.}}) = 0$ simetriagatik.

$\langle x^2\rangle$ ateratzeko $\langle V\rangle = \frac{1}{2}K\langle x^2\rangle \Leftrightarrow \langle x^2\rangle = \frac{2}{K}\langle V\rangle$

Non $\langle V\rangle$ atera ahal dugu lehen lortutako emaitzetik: $\langle V\rangle_{\psi_n} = \frac{(1+2n)}{4}\hbar\omega$

Beraz: $\boxed{(\Delta x)^2 = \left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\hbar\omega}{K}}$