ÀLGEBRA LINEAL

ApuntsFME

Barcelona, Gener 2019

Autors: Paolo Lammens, Nil Fons, Andreu Huguet, Èric Sierra

Darrera modificació: 8 de gener de 2019.

Índex

Tema 1

Matrius i sistemes lineals

1.1 Teorema de Laplace

Definició 1.1.1. Sigui $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriu $n \times n$. Si $n > 1$, anomenarem determinant de M (abreviat $\det M$) a l'expressió següent:

$$\det M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} m_{1,j} \cdot (-1)^{1+j} \det M_{1,j} \,,$$

on $M_{i,j}$ denota la submatriu que s'obté traient la fila i i la columna j de M. En el cas $n = 1$, el determinant serà igual a l'únic coeficient de la matriu.

Teorema 1.1.2. *Teorema de Laplace.*
L'expansió del determinant per la primera fila és equivalent a a l'expansió del determinant per qualsevol fila o columna.

Demostració. La demostració del teorema parteix de la demostració de cada un dels lemes 1.1.3, 1.1.4, i 1.1.6—que s'enuncien i es demostren a continuació del teorema.

Un cop demostrats els lemes 1.1.3, 1.1.4, i 1.1.6 la demostració del teorema complet és gairebé immediata. Ja s'ha demostrat que l'expansió per la i-èsima fila és equivalent a l'expansió per primera fila (lema 1.1.6), i que aquesta és equivalent a l'expansió per primera columna (lema 1.1.3). Podem fer exactament el mateix raonament que hem fet per demostrar el lema 1.1.6, però per columnes en lloc de files, per demostrar que l'expansió per primera columna és equivalent a l'expansió per la j-èsima columna. Per tant queda demostrat que expandir per la i-èsima fila és equivalent a expandir per la j-èsima columna. $\square$

Lema 1.1.3. L'expansió del determinant per la primera fila és equivalent a l'expansió del determinant per la primera columna:

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} m_{1,j} \cdot (-1)^{1+j} \det M_{1,j} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot (-1)^{i+1} \det M_{i,1}$$

Demostració. Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Per $n = 2$ és cert:

$$\begin{aligned}\det A = \sum_{j=1}^{2} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \det A_{1j} &= a_{11} \left|a_{22}\right| - a_{12} \left|a_{21}\right| = \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \\ &= a_{11} \left|a_{22}\right| - a_{21} \left|a_{12}\right| = \sum_{i=1}^{2} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \det A_{i1} \,.\end{aligned}$$

Suposem que és cert per $n-1$, per un valor arbitrari de $n > 2$ (hipòtesi d'inducció). El determinant d'$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vindrà donat per

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \cdot (-1)^{1+j} \det A_{1,j} \,. \tag{1.1}$$

El primer terme d'aquesta expressió serà $a_{1,1} \cdot C_{1,1}$, on $C_{1,1} = (-1)^{1+1} \cdot \det A_{1,1} = \det A_{1,1}$. Aquest coincideix exactament amb el primer terme de l'expansió per primera columna.

Analitzem la resta de termes ($j > 1$). Sigui $\tilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} A_{1,j}$ i siguin $\tilde{a}_{\ell,m}$ els seus elements. La matriu $\tilde{A}$ és d'ordre $n-1$; per tant, per hipòtesi d'inducció, el seu determinant es pot calcular expandint per la primera columna:

$$\det \tilde{A} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \tilde{a}_{\ell,1} \cdot (-1)^{\ell+1} \det \tilde{A}_{\ell,1} \,. \tag{1.2}$$

Com que aquesta matriu s'obté eliminant la primera fila i la j-èsima columna (on, recordi's, $j > 1$), es té l'equivalència $\forall \ell \leq n-1 \,:\, \tilde{a}_{\ell,1} = a_{\ell+1,1}$. De manera similar, $\tilde{A}_{\ell,1} = (A_{1,j})_{\ell,1} = A_{(1,\ell+1),(j,1)}$, on la notació $M_{(a,b),(\alpha,\beta)}$ denota la submatriu que s'obté eliminant les files a, b i les columnes α, β de la matriu M. Visualitzant-ho:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$A_{1,j} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & j-1 & j & \cdots & n-1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \mathbf{a_{2,1}} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{n,1}} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \end{array}$$

$$\tilde{A}_{\ell,1} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\ell,2} & \cdots & a_{\ell,j-1} & a_{\ell,j+1} & \cdots & a_{\ell,n} \\ a_{\ell+2,2} & \cdots & a_{\ell+2,j-1} & a_{\ell+2,j+1} & \cdots & a_{\ell+2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = A_{(1,\ell+1),(j,1)} \,.$$

Per tant podem escriure (1.2), fent el canvi d'índex $k \stackrel{\text{def}}{=} \ell + 1$, com

$$\det A_{1,j} = \sum_{k=2}^{n} a_{k,1} \cdot (-1)^{k} \det A_{(1,k),(j,1)} \,. \tag{1.3}$$

A continuació, separant el primer terme de (1.1), i substituint $\det A_{1,j}$ per l'expressió (1.3) a la resta de termes, obtenim

$$\begin{aligned}\det A &= a_{1,1} \cdot A_{1,1} \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n} \left(a_{1,j} (-1)^{1+j} \sum_{k=2}^{n} a_{k,1} (-1)^{k} \det A_{(1,k),(j,1)} \right) .\end{aligned} \tag{1.4}$$

Ara manipulem algebraicament el sumatori ($\sum_{j=2}^{n} [\cdots]$) per tal de "girar" els sumatoris:

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{n} \left(a_{1,j} (-1)^{1+j} \sum_{k=2}^{n} a_{k,1} (-1)^{k} \det A_{(1,k),(j,1)} \right) &= \\ = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{k=2}^{n} a_{1,j} \cdot a_{k,1} (-1)^{1+j+k} \det A_{(1,k),(j,1)} \right) &= \\ = \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} \cdot a_{k,1} (-1)^{1+j+k} \det A_{(1,k),(j,1)} \right) &= \\ = \sum_{k=2}^{n} \left(a_{k,1} (-1)^{k+1} \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} (-1)^{j} \det A_{(1,k),(j,1)} \right) &.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Ara, fent el mateix raonament que ens ha fet arribar a (1.3) però en direcció inversa, notem que el sumatori $\sum_{j=2}^{n} [\cdots]$ és l'expansió per primera fila del determinant de la matriu $A_{k,1}$. Per tant, l'expressió (1.5) queda així:

$$\sum_{k=2}^{n} a_{k,1} (-1)^{k+1} \cdot A_{k,1} . \tag{1.6}$$

Finalment, tornant a substituir (1.6) en l'equació (1.4), obtenim

$$\det A = a_{1,1} \cdot A_{1,1} + \sum_{k=2}^{n} a_{k,1} \cdot (-1)^{k+1} A_{k,1} . \tag{1.7}$$

Noteu que ara podem tornar a introduir el primer terme ($a_{1,1} \cdot A_{1,1}$, que és igual a $a_{1,1} \cdot (-1)^{1+1} A_{1,1}$) al sumatori:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} \cdot (-1)^{i+1} A_{k,1} . \tag{1.8}$$

Aquesta darrera expressió és l'expansió per primera columna del determinant d'A. □

Lema 1.1.4. Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. El determinant d'una matriu B que s'obté intercanviant dues files adjacents de la matriu A és $-\det A$.

Demostració. Per $n = 2$, és cert:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb = -(cb - ad) = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} .$$

Suposem que és cert per $n-1$, per un valor arbitrari de $n>2$ (hipòtesi d'inducció). Sigui A una matriu $n \times n$ i B la matriu obtinguda intercanviant les files r i $r+1$ d'A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

A partir del lema 1.1.3, podem calcular el determinant de B expandint per la primera columna:

$$\det B = \sum_{i=1}^{n} b_{i,1} \cdot (-1)^{i+1} \det B_{i,1}\,. \tag{1.9}$$

Per tots els índex i tals que $i \neq r \wedge i \neq r+1$, els coeficients $b_{i,1}$ i $a_{i,1}$ són equivalents; d'altra banda,

$$\forall i \notin \{r, r+1\}: \quad B_{i,1} = (A_{i,1})^{f_r \rightleftarrows f_{r+1}}\,, \tag{1.10}$$

on el superíndex $f_r \rightleftarrows f_{r+1}$ denota que s'intercanvien de posició les files r i $r+1$. Intuïtivament, això és el mateix que constatar que intercanviar primer les files (d'on s'obté la matriu B) i després obtenir la submatriu (ergo, $B_{i,1}$) és equivalent a obtenir en primer lloc la submatriu (ergo, $A_{i,1}$) i intercanviar les files després (d'on s'obté $(A_{i,1})^{f_r \rightleftarrows f_{r+1}}$).

La submatriu $B_{i,1}$ és d'ordre $n-1$; llavors, utilitzant l'hipòtesi d'inducció en el fet (1.10), es té que $\det B_{i,1} = -\det A_{i,1}$. Per tant, utilitzant aquestes equivalències en l'eq. (1.9),

$$\begin{aligned} \det B = -\left(\sum_{i \notin \{r,r+1\}} a_{i,1} \cdot (-1)^{i+1} \det A_{i,1} \right) \\ + b_{r,1} \cdot (-1)^{r+1} \det B_{r,1} \\ + b_{r+1,1} \cdot (-1)^{(r+1)+1} \det B_{r+1,1} \end{aligned} \tag{1.11}$$

(s'han separat els termes $i=r$ i $i=r+1$ de la suma, ja que per aquests no valen les equivalències anteriors). En el cas on $i=r$, es té que $b_{r,1} = a_{r+1,1}$—ja que B s'ha obtingut intercanviant les files r i $r+1$ en A. Per la mateixa raó, $B_{r,1} = A_{r+1,1}$, ja eliminar la fila r en B és equivalent a eliminar la fila $r+1$ en A (aquí "equivalent" vol dir que s'obté la mateixa submatriu):

$$B_{r,1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ a_{r,1} & a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \\ a_{r+2,1} & a_{r+2,2} & \cdots & a_{r+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$A_{r+1,1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{r,1} & a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ a_{r+2,1} & a_{r+2,2} & \cdots & a_{r+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} .$$

De manera similar, $b_{r+1,1} = a_{r,1}$ i $B_{r+1,1} = A_{r,1}$.

Per tant, els últims dos termes de l'expressió (1.12) es poden reescriure com

$$\begin{gathered} a_{r+1,1} \cdot (-1)^{r+1} \det A_{r+1,1} \\ a_{r,1} \cdot (-1)^{(r+1)+1} \det A_{r,1} \, . \end{gathered}$$

Observem que ara en cada terme tot està "en funció de" r i $r+1$, respectivament, exceptuant l'exponent del -1. Utilitzant la identitat $\forall a \in \mathbb{Z} : (-1)^a = -(-1)^{a\pm 1}$, podem tornar a reescriure com

$$\begin{gathered} -a_{r+1,1} \cdot (-1)^{(r+1)+1} \det A_{r+1,1} \\ -a_{r,1} \cdot (-1)^{r+1} \det A_{r,1} \, . \end{gathered}$$

Finalment, a partir d'això podem simplificar l'expressió (1.11) reintroduint aquests termes al sumatori:

$$\begin{aligned} \det B = - &\left(\sum_{i \notin \{r,r+1\}} a_{i,1} \cdot (-1)^{i+1} \det A_{i,1} \right) \\ &- a_{r+1,1} \cdot (-1)^{(r+1)+1} \det A_{r+1,1} \\ &- a_{r,1} \cdot (-1)^{r+1} \det A_{r,1} = \\ = - &\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} \cdot (-1)^{i+1} \det A_{i,1} \right) . \end{aligned} \tag{1.12}$$

L'expressió entre parèntesis és el determinant de la matriu A (expansió per primera columna). Per tant, $\det B = -\det A$. $\square$

Corol·lari 1.1.5. És conseqüència directa d'aquest últim lema (1.1.4) que el determinant de la matriu obtinguda intercanviant dues files r i s qualssevol (no necessàriament adjacents) d'una matriu A és $-\det A$, ja que intercanviar la posició de dues files és equivalent a fer un nombre imparell d'intercanvis entre files adjacents.

Demostració. Primer cal fer $s-r$ (suposant que $s>r$) intercanvis per posar la fila r a la posició de s. Ara la fila s es troba a la posició $s-1$, per tant només cal fer $(s-1)-r = s-r-1$ intercanvis de files adjacents. Llavors el nombre total d'intercanvis és $(s-r)+(s-r-1) = 2(s-r)-1$, que és imparell.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-1,1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s-1,1} & \cdots & a_{s-1,n} \\ a_{s,1} & \cdots & a_{s,n} \\ a_{s+1,1} & \cdots & a_{s+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-1,1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s-1,1} & \cdots & a_{s-1,n} \\ a_{s,1} & \cdots & a_{s,n} \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \\ a_{s+1,1} & \cdots & a_{s+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-1,1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{s,1} & \cdots & a_{s,n} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s-1,1} & \cdots & a_{s-1,n} \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \\ a_{s+1,1} & \cdots & a_{s+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

□

Lema 1.1.6. Sigui $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'expansió del determinant de M per la primera fila és equivalent a l'expansió per la i-èsima fila:

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\} :$$
$$\det M = \sum_{j=1}^{n} m_{1,j}\cdot(-1)^{1+j}\det M_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\cdot(-1)^{i+j}\det M_{i,j}\,.$$

Demostració. Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i sigui B la matriu obtinguda movent la fila i d'A a la primera fila mitjançant $i-1$ intercanvis consecutius de files adjacents:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Llavors, com a conseqüència directa del lema 1.1.4 i del seu corol · lari (1.1.5),

$$\det A = (-1)^{i-1}\det B\,. \tag{1.13}$$

Desenvolupem $\det B$ segons la seva definició.

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{1,j} \cdot (-1)^{1+j} \det B_{1,j} \,. \tag{1.14}$$

Per construcció, $b_{1,j} = a_{i,j}$ per tot j. D'altra banda, la matriu $B_{1,j}$ és equivalent a la matriu $A_{i,j}$—ja que, novament per construcció, la primera fila de B és la i-èsima fila d'A; vegi's el diagrama anterior per visualitzar-ho. Per tant, (1.14) es pot reformular com

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot (-1)^{1+j} \det A_{i,j} \,. \tag{1.15}$$

Unint les equacions (1.13) i (1.15), obtenim

$$\begin{multline} \det A = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot (-1)^{1+j} \det A_{i,j} = \\ = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot a_{i,j} \cdot (-1)^{1+j} \det A_{i,j} = \\ = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot (-1)^{i+j} \det A_{i,j} \,. \end{multline} \tag{1.16}$$

Aquesta darrera expressió és l'expansió del determinant d'A per la i-èsima fila. □

1.2 Propietats del determinant

Proposició 1.2.1. El determinant de la matriu A' que s'obté multiplicant una fila o una columna sencera d'una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ per un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ és

$$\det A' = \lambda \det A\,.$$

Demostració. A partir del teorema de Laplace, podem calcular el determinant d'A' mitjançant l'expansió per la fila o columna que ha estat multiplicada; per exemple, si la s'ha multiplicat per λ la fila k:

$$\det A' = \sum_{j=1}^{n} {a'}_{k,j} \cdot C_{k,j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda a_{k,j} \cdot C_{k,j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} {a'}_{k,j} a_{k,j} \cdot C_{k,j} = \lambda \det A\,.$$

□

Proposició 1.2.2. Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ matrius que *difereixen només en els coeficients d'una fila o d'una columna* (com a màxim). Sigui la matriu M la matriu que s'obté sumant les dues files/columnes diferents D'A i B i deixant la resta de coeficients iguals (que a A i a B). Llavors

$$\det M = \det A + \det B$$

Demostració. Sigui k l'índex de la columna diferent entre A i B. Pel teorema de Laplace, podem expandir el determinant de M per la k-èsima columna:

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} \cdot C_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} (a_{i,k} + b_{i,k}) \cdot C_{i,k} = \\ = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \cdot C_{i,k} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,k} \cdot C_{i,k} = \det A + \det B\,.$$

Es pot fer exactament el mateix raonament per files. Noteu, a més, que els cofactors $C_{i,k}$ són iguals per totes tres matrius, ja que, excepte la k-èsima columna/fila, tota la resta de columnes/files són iguals. □

Proposició 1.2.3. Per qualsevol $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$, si A conté dues files (o columnes) iguals entre elles, llavors $\det A = 0$.

Demostració. Siguin r i s els índex de les files idèntiques en A. Sigui B la matriu que s'obté intercanviant les files r i s d'A. Llavors, per una banda, $\det B = \det A$ ja que les dues matrius són idèntiques. D'altra banda, pel lema 1.1.4 $\det B = -\det A$. Per tant,

$$\det A = -\det A \quad \therefore \det A = 0\,.$$

El mateix raonament és vàlid per columnes també. □

Proposició 1.2.4. Si sumem un múltiple d'una fila/columna d'$A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ a una fila/columna diferent, el determinant d'A no canvia.

Demostració. Sigui B la matriu que s'obté sumant la fila r d'A a la fila s (on $r \neq s$). Sigui $\tilde{A}$ la matriu que s'obté reemplaçant la r-èsima fila d'A per la s-èsima fila multiplicada per l'escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. És a dir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & \cdots & a_{s,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{s,1} & \cdots & \lambda a_{s,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & \cdots & a_{s,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix}.$$

Per la propietat que s'enuncia en 1.2.2,

$$\det B = \det A + \det \tilde{A}\,. \tag{1.17}$$

Sigui la matriu $\tilde{A}'$ la matriu que s'obté reemplaçant la r-èsima fila d'A per la s-èsima fila (sense multiplicar per λ):

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & \cdots & a_{s,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & \cdots & a_{s,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix}.$$

Aplicant la proposició 1.2.1 en (1.17), obtenim

$$\det B = \det A + \lambda \cdot \det \tilde{A}'\,.$$

Per la propietat de 1.2.3, $\det \tilde{A}' = 0$, ja que $\tilde{A}'$ conté una fila duplicada (la fila s d'A). Per tant,

$$\det B = \det A\,.$$

□

Lema 1.2.5. Direm que una matriu elemental és de tipus E_1 si, quan multiplica per l'esquerra a una altra matriu, n'intercanvia la posició de dues files, de tipus E_2 si en multiplica escalarment una fila, i de tipus E_3 si en suma un múltiple d'una fila a una fila diferent. Llavors:

i) Les matrius de tipus E_1 tenen determinant -1.

ii) Les matrius de tipus E_2 tenen determinant λ, on λ és l'escalar pel qual es multiplica la fila.

iii) Les matrius de tipus E_3 tenen determinant 1.

iv) Per qualsevol matriu elemental $E \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ i per qualsevol matriu $M \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$,

$$\det(EM) = \det E \cdot \det M\,.$$

Demostració. Demostrarem cada una de les proposicions a continuació.

i) Sigui E una matriu elemental de tipus E_1. Les matrius d'aquest tipus tenen dues files intercanviades—en concret, tenen la r-èsima i la s-èsima fila de la matriu identitat intercanviades, on r i s són els índex de les files que r i s intercanvia en la matriu M quan la multiplica per l'esquerra:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & \cdots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, pel lema 1.1.4, $\det E = -\det I_n = -1$.

ii) Sigui E una matriu elemental de tipus E_2. Aquestes matrius són la identitat amb una fila multiplicada per $\lambda \in \mathbb{R}$, un escalar:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \lambda & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Llavors, per la proposició 1.2.1, $\det E = \lambda \det \mathrm{Id} = \lambda$.

iii) Les matrius de tipus E_3 són la identitat amb una de les files multiplicada per un escalar λ sumada a una de diferent. Per exemple,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Sigui E una matriu arbitrària d'aquest tipus. Per la proposició 1.2.2, el determinant d'E és el mateix que el de la identitat, i per tant $\det E = 1$.

iv) Sigui $M \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ una matriu qualsevol, siguin $\tilde{M}_1$ $\tilde{M}_2$ i $\tilde{M}_3$ les matrius que s'obtenen aplicant transformacions elementals qualssevol de tipus 1, 2 i 3 respectivament i siguin E_1, E_2 i E_3 les matrius elementals corresponent (respectivament). D'una banda, per les proposicions 1.1.4, 1.2.1 i 1.2.2, tenim que

$$\det \tilde{M}_1 = -\det M,\ \det \tilde{M}_2 = \lambda \det M \text{ i } \det \tilde{M}_3 = \det M\,,$$

respectivament. D'altra banda, per les proposicions de i), ii) i iii), tenim que

$$\det E_1 = -1,\ \det E_2 = \lambda \text{ i } \det E_3 = 1\,.$$

Per tant és cert que

$$\det \tilde{M}_1 = \det E_1 \det M,\ \det \tilde{M}_2 = \det E_2 \det M \text{ i } \det \tilde{M}_3 = \det E_3 \det M\,.$$

□

Lema 1.2.6. Qualsevol matriu $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ es pot "descompondre" en un seguit de matrius elementals $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ de manera que

$$A = E_m \cdots E_1 \,\mathrm{Id}_n$$

Teorema 1.2.7. Per dues matrius $A, B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ qualssevol,

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det(BA)\,.$$

Demostració. Qualsevol matriu $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ es pot descompondre en un seguit d'operacions elementals sobre la matriu identitat (lema 1.2.6). És a dir, existeixen matrius elementals $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ tals que

$$A = E_m \cdots E_2 E_1\,.$$

Per tant

$$AB = (E_m \cdots E_2 E_1)B\,.$$

Aplicant el lema 1.2.5 recursivament:

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det E_m \cdot \det(E_{m-1} \cdots E_1 B) = \\ &= \det E_m \cdot \det E_{m-1} \cdot \det(E_{m-2} \cdots E_1 B) = \cdots \\ &\cdots = \det E_m \cdot \dots \cdot \det E_1 \cdot \det B\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Ara, tornant a aplicar 1.2.5 recursivament però en sentit recíproc,

$$\begin{aligned}\det(AB) &= [\det E_m \cdot \dots \cdot \det E_2 \cdot \det E_1] \cdot \det B = \\ &= [\det E_m \cdot \dots \cdot \det E_3 \cdot \det(E_2 E_1)] \det B = \\ &= [\det E_m \cdot \dots \cdot \det E_4 \cdot \det(E_3 E_2 E_1)] \cdot B = \cdots \\ &\cdots = \det(E_m \cdots E_1) \det B = \det A \cdot \det B\,.\end{aligned}$$

El fet que $\det(AB) = \det(BA)$ és conseqüència directa d'això últim i de la commutabilitat de la multiplicació entre escalars. □

Tema 2

Espais vectorials

2.1 Definicions d'espais i subespais vectorials

Definició 2.1.1. Un espai vectorial V sobre un cos $\mathbb{k}$ (també anomenat un $\mathbb{k}$-espai vectorial) equipat d'una operació "suma"

$$\begin{array}{rccc} (+): & V \times V & \to & V \\ & (v, w) & \mapsto & v + w \,, \end{array}$$

i d'una operació "multiplicació escalar"

$$\begin{array}{rccc} (\cdot): & \mathbb{k} \times V & \to & V \\ & (\lambda, v) & \mapsto & \lambda \cdot v \,, \end{array}$$

és un conjunt d'elements, anomenats **vectors**, que compleix les següents propietats:

i) *Tancat per la suma.* $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V \quad \vec{v} + \vec{w} \in V$

ii) *Tancat per la multiplicació escalar.* $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall \vec{v} \in V \quad \lambda \cdot \vec{v} \in V$

iii) *Associativitat de la suma.* $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

iv) *Commutabilitat de la suma.* $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V \quad \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

v) *Identitat additiva.* $\exists \mathbf{0} \in V : \forall \vec{v} \in V \quad \vec{v} + \mathbf{0} = \vec{v}$

vi) *Inversa additiva.* $\forall \vec{v} \in V\ \exists (-\vec{v}) \in V : \quad \vec{v} + (-\vec{v}) = \mathbf{0}$

vii) *Identitat multiplicativa.* Sigui 1 la identitat multiplicativa del cos $\mathbb{k}$. Llavors, $\forall \vec{v} \in V \quad 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

viii) *Compatibilitat de la multiplicació escalar i la multiplicació en el cos.* $\forall a, b \in \mathbb{k}\ \forall \vec{v} \in V \quad a(b \cdot \vec{v}) = (ab) \cdot \vec{v}$.

ix) *Distributivitat de la multiplicació escalar respecte la suma en el cos.* $\forall a, b \in \mathbb{k}\ \forall \vec{v} \in V \quad (a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$.

x) *Distributivitat de la multiplicació escalar respecte la suma vectorial.* $\forall a \in \mathbb{k}\ \forall \vec{v}, \vec{w} \in V \quad a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$.

Tots els elements $\lambda \in \mathbb{k}$ s'anomenen **escalars**.

Definició 2.1.2. Sigui E un $\Bbbk$-espai vectorial. Es diu que un subconjunt $V \subseteq E$ és un subespai vectorial d'E si (i només si) V també és un espai vectorial per sí mateix (és a dir, està tancat per la suma, per la multiplicació escalar, etc.).

Observació 2.1.3. Per demostrar que un subconjunt V d'un espai vectorial E és un subespai vectorial només cal comprovar que està tancat per la suma i per la multiplicació escalar; la resta de propietats "s'hereten" de l'espai E.

Ara definirem la forma més comú d'espai vectorial, a la qual pertanyen espais familiars com $\mathbb{R}^n$.

Definició 2.1.4. Sigui $\Bbbk$ un cos. Definirem $\Bbbk^n$, on $n \in \mathbb{N}$, com el conjunt de totes les n-tuples (conjunts ordenats de cardinal n) d'elements que pertanyen al cos $\Bbbk$.

Proposició 2.1.5. Per tot cos $\Bbbk$ i natural $n \in \mathbb{N}$ ($n \neq 0$), $\Bbbk^n$ és un espai vectorial sobre el cos $\Bbbk$ si definim el seu producte intern com a la suma component a component i el producte extern com la multiplicació per l'escalar component a component.

Per convenció, quan ens referim a $\Bbbk^n$ empraremla definició anterior de suma i multiplicació escalar.

2.2 Dependència lineal

Definició 2.2.1. Es diu que els vectors d'un conjunt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ d'un $\Bbbk$-espai vectorial són linealment dependents (abreviat l.d.) si i només si

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk : \quad \left(\exists i\colon \lambda_i \neq 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0} \right) .$$

Si els vectors d'un conjunt no són l.d. es diu que són linealment independents (abreviat l.i.).

Corol·lari 2.2.2. S'obté directament a partir de la definició 2.2.1 que:

i) Qualsevol conjunt de vectors que contingui l'element neutre $\vec{0}$ és linealment dependent.

ii) Dos vectors són linealment dependents entre sí si i només si són proporcionals.

iii) Si un conjunt de vectors és l.i., qualsevol subconjunt d'aquest també ho és.

iv) Si els vectors $v_1, \ldots, v_k$ són linealment dependents, almenys un d'aquests es pot expressar com a combinació lineal dels altres.

Demostració.

i) Per qualsevol $\lambda \in \Bbbk$, $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. Per tant, per un conjunt de vectors $\{v_1, \ldots, v_n, \vec{0}\}$ sempre existirà una combinació

$$0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n + \lambda \cdot \vec{0}$$

que suma $\vec{0}$, sent $\lambda \neq 0$. Per tant, aplicant la definició, els vectors $\{v_1, \ldots, v_n, \vec{0}\}$ són linealment dependents.

ii) Si u i v són vectors l.d., per definició,

$$\exists \lambda, \mu \in \Bbbk : \quad (\lambda \neq 0 \vee \mu \neq 0) \wedge \left(\lambda u + \mu v = \vec{0}\right)$$

i per tant (suposant, sense pèrdua de generalitat, que $\lambda \neq 0$),

$$u = -\frac{\mu}{\lambda} v \Rightarrow u \propto v\,.$$

iii) Sigui $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunt de vectors l.i.. És suficient demostrar que els subconjunts d'un element menys són l.i.—la resta en segueixen lògicament per inducció. Suposem que existeix un subconjunt d'A que és l.d.; suposem, sense pèrdua de generalitat, que és el conjunt $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Llavors

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \Bbbk : \quad \exists i \colon \lambda_i \neq 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i = \vec{0}\,.$$

Podem afegir el vector $0 \cdot v_n$ a la banda esquerra de l'equació:

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \Bbbk : \quad \exists i \colon \lambda_i \neq 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i + 0 \cdot v_n = \vec{0}\,. \tag{2.1}$$

Com que hem imposat que $\exists i \in \{1, \ldots, n-1\} \colon \lambda_i \neq 0$, encara que $\lambda_n = 0$, la proposició (2.1) és equivalent a la següent:

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk : \quad \exists i \colon \lambda_i \neq 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}\,;$$

ergo, els vectors $v_1, \ldots, v_n$ són l.d.—contradicció.

iv) Si uns vectors $v_1, \ldots, v_k$ són l.d., per definició,

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Bbbk : \quad \exists i \colon \lambda_i \neq 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \vec{0}\,.$$

Sigui j un índex tal que $\lambda_j \neq 0$. Llavors

$$\lambda_j u_j = -\sum_{i \neq j} \lambda_i v_i \;\Rightarrow\; u_j = -\frac{1}{\lambda_j} \sum_{i \neq j} \lambda_i v_i\,.$$

$\square$

Observació 2.2.3. Que els vectors $v_1, \ldots, v_n \in \Bbbk^m$ siguin l.d. és equivalent a que el sistema homogeni $Ax = \mathbf{0}$ tingui una solució no trivial, on $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\Bbbk)$ és la matriu formada pels vectors $v_1, \ldots, v_k$ com a columnes i $x \in \Bbbk^n$.

Demostració. Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\Bbbk)$ una matriu qualsevol i sigui $x \in \Bbbk^n$ un vector. La multiplicació matricial Ax és equivalent a una combinació lineal de les columnes d'A amb coeficients $x_1, \dots, x_n$, on $x_1, \dots, x_n$ són les components del vector x:

$$Ax = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Tenint en compte la definició 2.2.1, que les columnes d'A siguin l.d. implica que existeixen coeficients $x_1, \dots, x_n$ no tots ells zero, tals que

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \mathbf{0} ,$$

que, pel que acabem de veure, és equivalent a

$$\exists x \in \Bbbk^n : \quad x \neq \vec{0} \quad \wedge \quad Ax = \mathbf{0} .$$

□

Lema 2.2.4. Si un conjunt de vectors $\{v_1, \dots, v_m\}$ és l.i., si substituïm un dels vectors v_k per una combinació lineal dels vectors $v_1, \dots, v_n$ (on el k-èsim coeficient és no nul),

$$v'_k = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i , \quad \text{on } \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R} , \; \mu_k \neq 0 ,$$

el conjunt de vectors $\{v_1, \dots, v'_k, \dots, v_n\}$ seguirà sent l.i..

Demostració. Suposem que no. Llavors

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \quad \exists i \colon \lambda_i \neq 0 \quad \wedge \quad \sum_{i\neq k} \lambda_i v_i + \lambda_k v'_k = \vec{0} .$$

Substituint v'_k pel seu valor corresponent,

$$\exists i \colon \lambda_i \neq 0 \quad \wedge \quad \sum_{i\neq k} \lambda_i v_i + \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \vec{0} .$$

Ara demostrem que λ_k no pot ser zero. Si ho fos, hi hauria d'haver per força un $\lambda_i \neq 0$ amb $i \neq k$ (ja que hem imposat que $\exists i \colon \lambda_i \neq 0$ per la definició de l.d.), i per tant existiria una combinació lineal no nul·la dels vectors $v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$ que suma $\vec{0}$, cosa que entraria en contradicció amb la hipòtesi que $v_1, \dots, v_n$ són l.i. (vegeu l'apartat iii) del corol · lari 2.2.2).

Com que $\lambda_k \neq 0$ i per hipòtesi $\mu_k \neq 0$, concloem que $\lambda_k \mu_k \neq 0$. Per tant, tenim que

$$\sum_{i\neq k} (\lambda_i + \lambda_k \mu_i)\, v_i + \lambda_k \mu_k v_k = \vec{0} \quad \wedge \quad \lambda_k \mu_k \neq 0 . \tag{2.2}$$

A partir de (2.2) veiem que existeix una combinació no nul · la dels vectors $v_1, \dots, v_n$ que suma $\vec{0}$, però per hipòtesi aquests vectors són l.i.; contradicció. □

Teorema 2.2.5. Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\Bbbk)$ una matriu qualsevol i sigui $\bar{A}$ la seva forma esglaonada (per files).

i) Les files d'A que corresponen (tenen el mateix índex) a les files d'$\bar{A}$ que tenen un pivot són l.i. entre elles. Qualsevol conjunt format per la unió de totes aquestes files i qualsevol altra fila (de les que no tenen associat un pivot) és l.d..

ii) Les columnes d'A que corresponen a les columnes d'$\bar{A}$ que tenen un pivot són l.i. entre elles. Qualsevol conjunt format per la unió de totes aquestes columnes i qualsevol altra columna (de les que no tenen associat un pivot) és l.d..

Demostració.

i) Denotarem amb $\overline{a_i}$ la i-èsima fila d'$\overline{A}$. Sigui k el nombre de files d'$\overline{A}$ que tenen pivot; per la definició de l'algorisme de Gauss, són les k primeres files. Primer demostrarem que $\overline{a_i}, \dots, \overline{a_k}$ són l.i.. Siguin $j_1, j_2, \dots, j_k$ els índexos de la columna que correspon al pivot de les files $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k}$ respectivament. Suposem que

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Bbbk : \quad \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \dots + \lambda_k\overline{a_k} = \vec{0}\,.$$

Per la definició de la forma esglaonada d'una matriu (seguint l'algorisme de Gauss), $\overline{a_1}$ serà l'única fila amb un coeficient no nul a la posició j_1. Per tant, $\lambda_1 = 0$. A més, $\overline{a_2}$ serà l'única fila a part d'$\overline{a_1}$ amb un coeficient no nul a la posició j_2; com que λ_1 ja és 0, λ_2 només pot ser 0. Seguint aquest raonament inductiu concloem que tots els coeficients han de ser nuls. Per tant, aplicant la definició 2.2.1, els vectors $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k}$ són l.i..

Ara demostrarem que $a_1, \dots, a_k$ són l.i.. Sabem cada una de les files $\overline{a_i}$ s'obté a partir de la fila a_i sumada amb una combinació lineal de totes les files anteriors $(a_1, \dots, a_{i-1})$. Podem "desfer" aquestes operacions sumant-li a $\overline{a_i}$ una combinació de les files $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{i-1}}$ de manera que la suma sigui a_i (vegeu l'exemple 2.2.6). Per tant, si prenem $i = k$, pel lema 2.2.4, el conjunt $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{k-1}}, a_k\}$ seguirà sent l.i.. Podem repetir aquest procés per $k-1, k-2, \dots, 1$, concloent que el conjunt $\{a_1, \dots, a_k\}$ és l.i..

Per demostrar que cadascuna de les files $a_{k+1}, \dots, a_m$ és l.d. amb el conjunt $\{a_1, \dots, a_k\}$ només cal veure que, per definició de forma esglaonada,

$$\forall i \in \{k+1, \dots, m\} : \quad \overline{a_i} = \vec{0}$$

i que cada fila $\overline{a_i}$ s'ha obtingut sumant-li a a_i una combinació lineal de totes les files anteriors:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} : \quad \overline{a_i} = a_i + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{i-1}a_{i-1} \quad \text{on } \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1} \in \Bbbk\,.$$

Per tant tenim que

$$\forall i \in \{k+1, \dots, m\} : \quad a_i + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{i-1}a_{i-1} = \vec{0}\,;$$

és a dir, per tot $i \in \{k+1, \dots, m\}$, el conjunt de vectors $\{a_1, \dots, a_k, \dots, a_i\}$ és l.d..

Pel que acabem d'observar, el conjunt $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ és l.d.:

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Bbbk : \quad \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k + a_{k+1} = \vec{0}\,.$$

Per tant a_{k+1} es pot expressar com a combinació lineal de $a_1, \ldots, a_k$:

$$a_{k+1} = -\lambda_1 a_1 - \cdots - \lambda_k a_k \,. \tag{2.3}$$

D'altra banda, el conjunt $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ també és l.d.:

$$\exists \mu_1, \ldots, \mu_{k+1} \in \Bbbk : \qquad \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_k a_k + \mu_{k+1} a_{k+1} + a_{k+2} = \vec{0} \,. \tag{2.4}$$

Substituint (2.3) en (2.4) deduïm que el conjunt $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+2}\}$ també és l.d.:

$$\sum_{i=1}^{k} (\mu_i - \mu_k \lambda_i)\, a_i + a_{k+2} = \vec{0} \,.$$

Seguint aquest raonament inductiu concloem que per tot $i \in \{k+1, \ldots, m\}$ el conjunt de vectors $\{a_1, \ldots, a_k, a_i\}$ és l.d..

ii) Sigui R la forma esglaonada *reduïda* d'A. Denotarem amb $A_1, \ldots, A_n$ i $R_1, \ldots, R_n$ les columnes d'A i de R, respectivament. Com a l'apartat anterior, $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ seran els índexos de les columnes de R que contenen un pivot. Primer demostrarem que $R_{j_1}, \ldots, R_{j_k}$ són l.i..

Suposem que existeixen coeficients $x_1, \ldots, x_k \in \Bbbk$ tals que

$$x_1 R_{j_1} + \cdots + x_k R_{j_k} = \mathbf{0} \,,$$

on $\mathbf{0}$ és el vector nul de $\Bbbk^m$. Per la definició de matriu esglaonada reduïda i de pivot, R_{j_k} serà la única columna (d'entre les columnes $R_{j_1}, \ldots, R_{j_k}$) amb un coeficient no nul a la posició k—vegeu l'exemple de (2.5).

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} j_1 & j_2 & & j_3 & & & & j_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.5}$$

Per tant $x_k = 0$. És més, per tot $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, R_{j_ℓ} és l'única columna (d'entre $R_{j_1}, \ldots, R_{j_k}$) que té un coeficient no nul a la posició ℓ, i per tant $x_\ell = 0$. És a dir, que $x_1, \ldots, x_k = 0$ i per tant $R_{j_1}, \ldots, R_{j_k}$ són l.i..

Ara demostrarem que $A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}$ són l.i.. Sigui A^P la matriu que s'obté seleccionant només les columnes $j_1, \ldots, j_k$ d'A. Suposem que $A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}$ no són l.i.. Això, per la observació 2.2.3, és equivalent a dir que el sistema $A^P x = \mathbf{0}$, on $x \in \Bbbk^k$, té una solució no trivial. Sigui $x^* \neq \vec{0}$ una d'aquestes solucions no trivials.

Òbviament, si fem les mateixes operacions per files que han transformat A en R sobre A^P, obtindrem R^P, on R^P denota la matriu que s'obté seleccionant només les columnes $j_1, \ldots, j_k$ de R. Com que les operacions per files no canvien el conjunt de solucions d'un sistema lineal, sabent que $A^P x^* = \mathbf{0}$, deduïm que $R^P x^* = \mathbf{0}$ també. Però això implica (altre cop, vegeu la observació 2.2.3) que les columnes de R^P són l.d.; contradicció.

Concloem que $A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}$ són l.i.. Per veure que la resta de columnes són l.d. només cal veure que si

$$R_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{on } j \notin \{j_1, \ldots, j_k\},$$

llavors $R_j = \alpha_1 R_{j_1} + \cdots + \alpha_\ell A R_{j_\ell}$ (vegeu l'exemple de (2.5) per més claredat—on les entrades $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ estan representades per asteriscs), i només cal aplicar el mateix raonament que abans per concloure que A_j és l.d. amb $A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}$.

□

Exemple 2.2.6. Esglaonem la següent matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -13 & -13 \\ 0 & \frac{9}{2} & 4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & -\frac{101}{4} & -\frac{95}{4} \end{pmatrix} \doteq \overline{A}\,.$$

Veiem que

$$\begin{aligned} &\overline{a_1} = a_1 \\ &\overline{a_2} + 3\overline{a_1} = a_2 \\ &\overline{a_3} + \frac{9}{2}\overline{a_1} - \frac{1}{2}\overline{a_2} = a_3\,. \end{aligned}$$

Corol·lari 2.2.7. El rang d'una matriu és equivalent al nombre de files linealment independents[1] i al nombre de columnes linealment independents.

Demostració. La definició anterior que havíem fet de rang per una matriu $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\Bbbk)$ qualsevol era "el nombre de pivots en la forma esglaonada d'A". Pel teorema 2.2.5, sabem que a cada pivot correspon (biunívocament) una fila/columna l.i. d'A. A més, en el mateix teorema hem demostrat que no hi pot haver un conjunt de files/columnes l.i. de cardinal més gran que el nombre de pivots. Per tant, el nombre de pivots d'A coincideix amb el (màxim) nombre de files l.i.. □

2.3 Generadors, base i dimensió

Definició 2.3.1. Donat un conjunt de vectors $G = \{v_1, \ldots, v_m\}$ dins d'un espai vectorial E, anomenarem "espai generat per $v_1, \ldots, v_m$" al conjunt de combinacions lineals dels

[1] Quan ens referim al "nombre de files/columnes/vectors l.i." d'un conjunt C, estem fent un abús del llenguatge, perquè aquest nombre depèn del subconjunt en qüestió: en realitat, ens referim al cardinal del subconjunt *més gran* de vectors l.i. de C.

vectors $v_1, \ldots, v_k$—és a dir,

$$\{v \mid \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m\} .$$

Ho denotarem

$$V = [v_1, \ldots, v_m] \quad \text{o} \quad [G] .$$

Proposició 2.3.2. Sigui E un espai vectorial. L'espai generat per un conjunt de vectors $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq E$ és el subespai vectorial d'E que conté $v_1, \ldots, v_k$ més petit.

Demostració. El conjunt de combinacions lineals de $v_1, \ldots, v_k$ és un espai vectorial:

$$\forall u, w \in [v_1, \ldots, v_k] \begin{cases} \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} : & u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \\ \exists \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R} : & u = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; u + v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i) v_i \in [v_1, \ldots, v_k] ;$$

$$\forall c \in \mathbb{R}, u \in [v_1, \ldots, v_k] \; \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} : \quad u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$$

$$\Rightarrow \; cu = c \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{m} (c\lambda_i) v_i \in [v_1, \ldots, v_k] .$$

Suposem que hi ha un subespai vectorial S d'E ue contingui $v_1, \ldots, v_k$ que és "més petit" que $[v_1, \ldots, v_k]$—és a dir, un subespai que conté "menys" elements. Llavors hi hauria almenys un element de $[v_1, \ldots, v_k]$ que no pertanyeria a S, però això implicaria que hi ha una combinació lineal de $v_1, \ldots, v_k$ que no pertany a S, mentre que per definició els subespais vectorials estan tancats per combinacions lineals; contradicció. □

Proposició 2.3.3. Si $v_1, \ldots, v_k$ són l.i. i generen un subespai vectorial V, i $u \notin V$, llavors $u, v_1, \ldots, v_k$ són l.i. entre sí.

Demostració. Suposem que $v_1, \ldots, v_k, u$ són l.d.:

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu \in \mathbb{k} : \quad \exists i \colon \lambda_i \neq 0 \vee \mu \neq 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \; + \mu u = \vec{0} .$$

Veiem que μ no pot ser zero, ja que, si ho fos, hi hauria una combinació $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ (on almenys un $\lambda_i \neq 0$) que sumaria $\vec{0}$, cosa que contradiria la hipòtesi de que $v_1, \ldots, v_k$ són l.i.. Per tant u es pot expressar com a combinació lineal de $v_1, \ldots, v_k$:

$$u = -\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i ;$$

ergo, $u \in V$—contradicció. □

Definició 2.3.4. Direm que un subespai vectorial $V \subseteq E$ és finitament generat si existeix un conjunt finit de vectors $G = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq E$ tal que $V = [v_1, \ldots, v_k]$. En aquest cas direm que G és un "conjunt de generadors" de V, o que $v_1, \ldots v_k$ "generen" V.

Lema 2.3.5. Sigui V un espai vectorial finitament generat per $G = \{v_1, \ldots, v_m\}$—és a dir, $V = [v_1, \ldots, v_m]$. Llavors, si substituïm un dels vectors $v_k \in G$ per una combinació lineal dels vectors de G—on el k-èsim coeficient és no nul—,

$$v'_k = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i\,, \quad \text{on } \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}\,,\ \mu_k \neq 0\,,$$
$$G' = \{v_i \in G \mid i \neq k\} \cup \{v'_k\}\,,$$

G' segueix sent un conjunt de generadors de V.

Demostració. Per la definició de conjunt generador, qualsevol vector $v \in V$ es pot expressar com a combinació lineal dels vectors en G. Per tant:

$$\forall v \in V\ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m : \quad v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \sum_{i \neq k} \lambda_i v_i + \lambda_k v_k\,. \tag{2.6}$$

D'altra banda, tenim que

$$v'_k = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i\,,\ \mu_k \neq 0 \ \Rightarrow\ v_k = \frac{1}{\mu_k} v'_k - \frac{1}{\mu_k} \sum_{i \neq k} \mu_i v_i\,.$$

En conseqüència, continuant el desenvolupament de (2.6),

$$v = \sum_{i \neq k} \lambda_i v_i + \lambda_k \left(\frac{1}{\mu_k} v'_k - \frac{1}{\mu_k} \sum_{i \neq k} \mu_i v_i \right) = \sum_{i \neq k} \left(\lambda_i - \lambda_k \frac{\mu_i}{\mu_k} \right) v_i + \frac{\lambda_k}{\mu_k} v'_k\,.$$

Concloem que v es pot expressar com a combinació lineal de $v_1, \ldots, v'_k, \ldots, v_m$. □

Lema 2.3.6. Sigui V un espai vectorial finitament generat per $G = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Si els vectors $v_1, \ldots, v_m$ són l.d., llavors podem treure almenys un vector de G de manera que el conjunt resultant segueixi generant V.

Demostració. Si els vectors $v_1, \ldots, v_m$ són l.d., vol dir que

$$\exists \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R} : \quad \exists i \colon \mu_i \neq 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i = \vec{0}\,.$$

Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $\mu_m \neq 0$. Llavors,

$$v_m = \frac{1}{\mu_m} \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i v_i\,. \tag{2.7}$$

Qualsevol vector $v \in V$ es pot expressar com a combinació lineal de $v_1, \ldots, v_m$. Per tant,

$$\begin{aligned}\forall v \in V\ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} : \quad v &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i v_i + \lambda_m v_m = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i v_i + \frac{\lambda_m}{\mu_m} \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{m-1} \left(\lambda_i + \lambda_m \frac{\mu_i}{\mu_m} \right) v_i\,;\end{aligned}$$

és a dir, que qualsevol vector $v \in V$ es pot expressar com a combinació lineal de $v_1, \ldots, v_{m-1}$. Ergo, el conjunt $\{v_1, \ldots, v_{m-1}\}$ genera V. □

Definició 2.3.7. Sigui V un subespai vectorial d'E finitament generat. Direm que un conjunt de vectors $\{v_1, \ldots, v_k\}$ és una **base** de V si es compleixen les dues condicions següents:

i) $V = [v_1, \ldots, v_k]$

ii) Els vectors $v_1, \ldots, v_k$ són linealment independents

Teorema 2.3.8. *Teorema de Steinitz.*
Sigui E un $\Bbbk$-espai vectorial finitament generat; sigui $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ un conjunt de generadors d'E i sigui $W = \{w_1, ..., w_n\}$ un conjunt de vectors linealment independents d'E. Aleshores:

i) $n \leq m$

ii) Podem substituir n vectors del conjunt $\{u_1, ..., u_m\}$ pels n vectors de $\{w_1, ..., w_n\}$ de manera que el conjunt segueixi sent generador d'E.

Demostració. Per $n = 0$ és trivial; d'una banda, és obvi que $0 \leq m$, i d'altra banda, si substituïm 0 vectors de U, el conjunt no canvia, i, per hipòtesi, aquest és generador d'E. Per demostrar el cas general, raonem per inducció: suposem que el teorema és cert per $n = k - 1$, on k pren un valor arbitrari. Examinem el cas on $n = k$ a continuació, verificant ambdues conclusions del teorema l'una després de l'altra:

i) Per hipòtesi, els vectors $w_1, \ldots, w_k$ són linealment independents; per tant, $w_1, \ldots, w_{k-1}$ també ho seran. Llavors, per hipòtesi d'inducció, podem substituir $k - 1$ vectors d'U per $w_1, \ldots, w_{k-1}$, de manera que—reordenant el conjunt U, si cal—el nou conjunt $U' \stackrel{\text{def}}{=} \{w_1, \ldots, w_{k-1}, u_k, \ldots, u_m\}$ generi E.

   Com que (per hipòtesi) $w_k \in E$ i el conjunt U' genera E, w_k es pot expressar com a combinació lineal dels vectors d'U':

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Bbbk : \qquad w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i w_i + \sum_{i=k}^{m} \lambda_i u_i \,. \tag{2.8}$$

   Sigui $r \stackrel{\text{def}}{=} \min\{k - 1, m\}$. Des de (2.8) es pot deduir que $k - 1 < m$: en cas contrari, el terme de la dreta desapareixeria i per tant w_k seria una combinació lineal de $w_1, \ldots, w_r$ (només agafem r vectors ja que com a màxim podem substituir r vectors d'U): $w_k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i$. Això entraria en contradicció amb la hipòtesi (els vectors $\{w_1, \ldots, w_k\}$ són l.i.); per tant $k - 1 < m$.

   Finalment, essent m i k nombres naturals, $k - 1 < m$ és equivalent a $k \leq m$. Per tant, unint aquesta última conclusió amb el cas base $m = 0$, queda demostrat per inducció que $\forall m \colon n \leq m$.

ii) Seguint el raonament anterior, a partir de (2.8) també podem deduir que

$$\exists i \in \{k, \ldots, m\} : \qquad \lambda_i \neq 0 \,,$$

   ja que sinó w_k seria, altre cop, combinació lineal de $w_1, \ldots, w_{k-1}$, cosa que contradiu la hipòtesi.

Sigui $j \in \{k, \dots, m\}$ un índex que compleix $\lambda_j \neq 0$. Llavors,

$$
\begin{aligned}
w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i w_i + \sum_{i \in \{k,\dots,m\} \setminus \{j\}} \lambda_i u_i \quad + \lambda_j u_j \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad w_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i w_i - \sum_{i \in \{k,\dots,m\} \setminus \{j\}} \lambda_i u_i = \lambda_j u_j \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow u_j = \frac{1}{\lambda_j} \left(w_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i w_i - \sum_{i \in \{k,\dots,m\} \setminus \{j\}} \lambda_i u_i \right) ;
\end{aligned}
$$

per tant, u_j és combinació lineal del conjunt format per la resta de vectors d'U' units amb el vector w_k. A partir del lema 2.3.5, tenim que l'espai generat per U' és el mateix que l'espai generat per $\{w_1, \dots, w_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_{j-1}, w_k, u_{j+1}, \dots, u_m\}$: és a dir, que podem substituir també el vector w_k per un dels vectors u_i de manera que el conjunt resultant segueixi generant E.

Queda demostrat per inducció el teorema.

□

Corol·lari 2.3.9. En un $\mathbb{k}$-espai vectorial E finitament generat, totes les bases són finites i tenen la mateixa cardinalitat (el mateix nombre de vectors).

Demostració. Sigui B_1 base d'E de cardinalitat n ($|B_1| = n$) i sigui B_2 base d'E de cardinalitat m ($|B_2| = m$). D'una banda, per definició, els n vectors de B_1 generen E i els m vectors de B_2 són vectors linealment independents d'E; per tant, pel Teorema de Steinitz, $n \leq m$. D'altra banda, commutant el raonament, els m vectors de B_2 generen E i els n vectors de B_1 són vectors linealment independents d'E; per tant, pel Teorema de Steinitz, $m \leq n$. Conseqüentment, $n = m$. □

Definició 2.3.10. Sigui E un espai vectorial. Anomenarem "dimensió d'E" al nombre de vectors que formen una base vàlida d'E i el denotarem amb $\dim E$. Per convenció, $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Proposició 2.3.11. Sigui E un espai vectorial de dimensió n. Llavors:

i) Tot conjunt generador d'E té com a mínim n elements.

ii) Tot conjunt de vectors d'E linealment independents té com a màxim n elements.

iii) Tot conjunt de n vectors linealment independents d'E forma una base d'E.

iv) Tot conjunt de generadors d'E que contingui exactament n vectors és una base d'E.

Demostració.

i) Per hipòtesi, existeix un conjunt de n vectors d'E linealment independents (ja que les bases d'E contenen n vectors, per definició de dimensió), i per tant, aplicant el teorema de Steinitz (apartat i)), concloem que tot conjunt de generadors d'E ha de tenir n o més vectors.

ii) Per hipòtesi, existeix un conjunt de cardinal n que genera E (una base d'aquest), i per tant, aplicant el teorema de Steinitz (apartat i)), concloem que tot conjunt de vectors l.i. d'E ha de tenir n o menys vectors.

iii) Suposem que existeix un conjunt B de n vectors l.i. que no forma una base d'E. Per la definició de base (2.3.7), això és equivalent a dir que B no genera E. Llavors existeix un vector $w \in E$ que no es pot expressar com a combinació lineal dels vectors de B. Aplicant el contrarrecíproc de la proposició iv) del corol·lari 2.2.2, això implica que els $n+1$ vectors de $B \cup \{w\}$ són l.i.; però això entra en contradicció amb l'apartat ii).

iv) Suposem que existeix un conjunt B generador d'E amb n elements que no forma una base d'E. Per la definició de base (2.3.7), això és equivalent a dir que els vectors de B no són l.i.—són l.d.. Aplicant el lema 2.3.6, això implica que podem treure un vector de B de manera que els $m-1$ vectors restants segueixin generant E; però això entra en contradicció amb l'apartat i).

$\square$

Teorema 2.3.12. Siguin V_1 i V_2 dos subespais vectorials d'E tals que $V_1 \subseteq V_2$. Llavors:

i) $\dim V_1 \leq \dim V_2 \leq \dim E$

ii) $\dim V_1 = \dim V_2$ si i només si $V_1 = V_2$

Demostració.

i) Suposem que $\dim V_1 > \dim V_2$. Sigui $n = \dim V_1$, i sigui $u_1, \ldots, u_n$ una base de V_1; per tant $u_1, \ldots, u_n$ són l.i.. Com que $V_1 \subseteq V_2$ per hipòtesi, $u_1, \ldots, u_n \in V_2$. Per la proposició 2.3.11, hi poden haver com a màxim $\dim V_2$ vectors l.i. de V_2, però per hipòtesi $n = \dim V_1 > \dim V_2$; contradicció.

ii) La implicació recíproca és trivial, ja que si V_1 i V_2 són el mateix subespai, tenen la mateixa dimensió (ja que aquesta està ben definida). Demostrem doncs la implicació directa. Per hipòtesi, $V_1 \subseteq V_2$. Ara demostrem que $V_1 \supseteq V_2$. Sigui $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V_1. Suposem que existeix $v \in V_2$ tal que $v \notin V_1$. Llavors v no es pot expressar com a combinació lineal dels vectors $u_1, \ldots, u_n$, que, pel contrarrecíproc de la proposició iv) del corol·lari 2.2.2, és equivalent a dir que els $n+1$ vectors $u_1, \ldots, u_n, v$ són l.i.; però per la proposició 2.3.11 sabem que el màxim nombre de vectors l.i. en V_1 és $\dim V_1 = n$, contradicció. Ergo, $V_1 \supseteq V_2$ i per tant $V_1 = V_2$.

$\square$

Teorema 2.3.13. content...

Definició 2.3.14. Sigui $\Bbbk$ un cos i sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\Bbbk)$ una matriu amb coeficients en aquest cos. Definirem l'"espai fila d'A" com l'espai vectorial generat pels m vectors de $\Bbbk^n$ que formen les files d'A, i ho denotarem $\operatorname{row}(A)$. Definirem l'"espai columna d'A" com l'espai vectorial generat pels n vectors de $\Bbbk^m$ que formen les columnes d'A, i ho denotarem $\operatorname{col}(A)$.

Proposició 2.3.15. Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\Bbbk)$ una matriu qualsevol. El rang d'A és equivalent a:

(i) La dimensió de l'espai fila d'A

(ii) La dimensió de l'espai columna d'A

Demostració. Al corol·lari 2.2.7 ja hem demostrat que el rang d'una matriu equival al nombre màxim de files/columnes l.i.. Per tant, aplicant l'apartat ii) de la proposició 2.3.11, sabem que la dimensió de l'espai fila/columna ha de ser major o igual que aquest nombre. D'altra banda, no pot ser estrictament major que aquest nombre, ja que sinó, segons l'apartat i) de la mateixa proposició, les files/columnes l.i. d'A trobades no serien generadors de l'espai fila/columna d'A, mentre que per definició ho són. □

Teorema 2.3.16. Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times k}(\Bbbk)$ una matriu tal que contingui els vectors $v_1, \ldots, v_k \in \Bbbk^m$ com a columnes:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ | & | & & | \end{pmatrix} .$$

Llavors:

i) Els vectors $v_1, \ldots, v_k$ són l.d. si i només si existeix una solució no trivial (diferent de $\vec{0}$) al sistema homogeni $Ax = \vec{0}$.

ii) Els vectors $v_1, \ldots, v_k$ són l.i. si i només si $\mathrm{rang}(A) = k$.

iii) Els vectors $v_1, \ldots, v_k$ generen $\Bbbk^m$ si i només si $\mathrm{rang}(A) = m$.

iv) Els vectors $v_1, \ldots, v_k$ formen una base de $\Bbbk^m$ si i només si $\mathrm{rang}(A) = k = n$.

Demostració.

i) Per la definició de dependència lineal, els vectors $v_1, \ldots, v_k$ són l.d. si i només si existeixen coeficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, no tots ells 0, tals que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \vec{0}$. Això és equivalent a la formulació matricial:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \lambda_1 \begin{pmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k \begin{pmatrix} | \\ v_k \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_k \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \vec{0} \in \Bbbk^m .$$

ii) Conseqüència directa de la proposició 2.3.15 (el rang d'A és igual a la dimensió de l'espai columna d'A).

iii) Sabem que l'espai columna d'A (l'espai generat per $v_1, \ldots, v_k$) és un subespai de $\Bbbk^m$. Per tant, aplicant el teorema 2.3.12, aquest espai coincideix amb $\Bbbk^m$ si i només si la dimensió del primer (que per la proposició 2.3.15 és el rang d'A) coincideix amb la del darrer—és a dir, $\mathrm{rang}(A) = m$.

iv) Conseqüència directa dels apartats ii) i iii).

□

2.3.1 Base a partir de generadors

Si tenim un conjunt de generadors $G = \{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{k}^n$ d'un espai vectorial $V \subseteq \mathbb{k}^n$—és a dir, tal que $V = [v_1, \ldots, v_k]$—podem trobar una base com segueix. Aplicant el lema 2.3.6, podem treure successivament vectors de G fent que el conjunt resultant segueixi sent generador de V. Podem fer aquest procés fins que tinguem un conjunt de vectors l.i., cosa que implicaria que hem trobat una base.

Això ho podem fer mitjançant l'algorisme de Gauss: esglaonem (per files) la matriu $A \in \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{k})$ formada pels vectors $v_1, \ldots, v_k$ com a files/columnes. Els vectors que corresponguin a una fila no nul·la/columna amb pivot de la forma esglaonada d'A seran l.i. i formaran una base de $\mathbb{k}^n$.

Exemple 2.3.17. Sigui U el subespai de $\mathbb{R}^5$ generat pels vectors

$$u_1 = \left(\frac{1}{2}, -1, 3, -4, \frac{5}{4}\right)\ ,\ u_2 = \left(-1, 2, -\frac{1}{2}, -3, -8\right)\ ,\ u_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)\ ,$$
$$u_4 = (1, -2, 1, 2, \pi)\ .$$

Trobeu una base de U.

Solució. Mètode 1: esglaonar *per files* la matriu que té els vectors u_1, u_2, u_3, u_4 com a files.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 3 & -4 & \frac{5}{4} \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} & -3 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 & 2 & \pi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seleccionem els vectors no nuls: hem trobat la base $\{(1, -2, 0, 4, 0), (0, 0, 1, -2, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

Mètode 2: esglaonar *per files* la matriu que té els vectors u_1, u_2, u_3, u_4 com a columnes.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \\ \frac{5}{4} & -8 & -\frac{1}{2} & \pi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seleccionem els vectors $u_1, \ldots, u_4$ que corresponen a un pivot: $\{u_1, u_3, u_4\}$.

2.3.2 Base a partir de vectors l.i.

Si tenim n vectors l.i. $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{k}^n$, podem trobar una base de $\mathbb{k}^n$ que contingui $u_1, \ldots, u_k$ com segueix. Formem una matriu que contingui els vectors $u_1, \ldots, u_k$ i els vectors de la base canònica (o de qualsevol altra base de $\mathbb{k}^n$) com a files/columnes. El conjunt total d'aquests vectors òbviament genera $\mathbb{k}^n$; per tant podem aplicar el mateix procediment explicat a la secció 2.3.1 per trobar una base.

Formalment el que estem fent és, a partir d'una base de $\Bbbk^n$ (la canònica, normalment), utilitzant el teorema de Steinitz, trobar quins vectors de la base en qüestió podem substituir pels vectors $u_1, \dots, u_k \in \Bbbk^n$ de manera que segueixi generant $\Bbbk^n$ (i per tant, per la proposició 2.3.11, en segueixi sent una base).

Noteu que si volem trobar una base que inclogui $u_1, \dots, u_k$, necessàriament hem de col·locar aquests vectors "al principi" de la matriu, ja que l'algorisme de Gauss per esglaonar matrius "intenta" anul·lar successivament les files inferiors/obté pivots a les primeres columnes.

Exemple 2.3.18. Donats els vectors l.i. $u = (2, -3, 0, 4)$ i $v = (1, 0, 1, 0)$, trobeu una base de $\mathbb{R}^4$ que els contingui.

Solució. Construïm la matriu que té els vectors donats com a columnes i la ampliem amb els vectors (en columna) de la base canònica de $\mathbb{R}^4$, i esglaonem per files:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Seleccionem els vectors que corresponen a un pivot: $\{u, v, e_1, e_2\}$. També podem escollir $\{u, v, e_3, e_4\}$ però per exemple no podem escollir $\{u, v, e_1, e_3\}$ (la submatriu corresponent només té 3 pivots).

2.3.3 De generadors a equacions

Si tenim un conjunt generador d'un subespai vectorial $V \subseteq \Bbbk^m$, i volem trobar un sistema d'equacions lineals que representi aquest espai vectorial, podem aplicar el següent mètode. Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\Bbbk)$ és la matriu que té els vectors generadors per columnes, el sistema lineal $Ay = x$, on $y \in \Bbbk^n$ i $x \in \Bbbk^m$ és un vector arbitrari $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, té com a conjunt solució totes les n-tuples de coeficients (el vector y) tals que la combinació lineal corresponent dels vectors generadors sigui igual al vector arbitrari x.

Si x pertany a V el sistema ha de ser consistent. Per tant, si la i-èsima fila de la forma esglaonada d'A és nul·la, el coeficient i-èsim de l'última columna de la forma esglaonada de la matriu ampliada $A|x$—que està en funció de $x_1, \dots, x_m$—també ha de ser nul. D'aquesta manera obtenim una "equació" per cada fila nul·la en la forma esglaonada d'A.

Exemple 2.3.19. Doneu un sistema lineal d'equacions el conjunt de solucions del qual sigui l'espai vectorial generat per $u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, 0, 1), w = (-1, 2, 5)$.

Solució.

$$A|x = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 0 & 2 & 4 & y - 2x \\ 0 & 4 & 8 & z - 3x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 0 & 2 & 4 & y - 2x \\ 0 & 0 & 0 & z - 2y + x \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x - 2y + z = 0\,.$$

Podem comprovar aquesta equació amb els vectors generadors, que, efectivament, la compleixen.

2.3.4 D'equacions a generadors

Si tenim un sistema lineal d'equacions (homogeni), per trobar els generadors només cal resoldre el sistema (esglaonant i reduint la matriu de coeficients corresponent) i expressar les variables dependents en funció de les variables lliures. Els vectors associats a les variables lliures seran generadors de l'espai vectorial corresponent. Noteu que si el sistema és determinat la única solució ha de ser per força $\vec{0}$.

2.4 Coordenades i canvi de base

Teorema 2.4.1. Sigui V un $\Bbbk$-espai vectorial, i sigui $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base d'aquest. Per cada $v \in V$ existeix una única n-tupla[2] de coeficients $c_1, \dots, c_n \in \Bbbk$ tals que $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$.

Demostració. Per la definició de base, sabem que existeix almenys una combinació lineal de $v_1, \dots, v_k$ que sigui igual a v. Demostrem que és única.

Suposem que existeixen dues n-tuples de coeficients, $(c_1, \dots, c_n)$ i $(d_1, \dots, d_n)$, tals que

$$v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$$
$$v = d_1v_1 + \dots + d_nv_n \,.$$

Llavors, restant les dues igualtats,

$$(c_1 - d_1)v_1 + \dots + (c_n - d_n)v_n = \vec{0}\,.$$

Per la definició de base, els vectors $v_1, \dots, v_n$ són l.i., i per tant, aplicant la definició 2.2.1, si una combinació lineal d'aquests suma zero els coeficients en qüestió només poden ser zero, i per tant

$$\forall i \; c_i - d_i = 0 \;\Rightarrow\; c_i = d_i \,.$$

□

Definició 2.4.2. Sigui V un $\Bbbk$-espai vectorial, i sigui $B = \{v_1, \dots, v_n\}$[3] una base d'aquest. Per cada $v \in V$, direm que la (única) n-tupla de coeficients $c_1, \dots, c_n \in \Bbbk$ tals que

$$v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$$

són les coordenades de v respecte la base B. Les denotarem amb el vector $v_B \in \Bbbk^n$:

$$v_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} .$$

[2] Una n-tupla és un conjunt ordenat de n elements.

[3] Seguirem utilitzant la notació habitual de conjunt per a una base, però s'ha de tenir en compte que és un conjunt ordenat (és una n-tupla).

Proposició 2.4.3. Les coordenades preserven combinacions lineals. És a dir, sent V un $\Bbbk$-espai vectorial i B una base qualsevol d'aquest,

$$\forall u_1, \ldots, u_k \in V \; \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Bbbk : \quad (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k)_B = \lambda_1 (u_1)_B + \cdots + \lambda_k (u_k)_B \,.$$

Demostració. Siguin $u^1, \ldots, u^k$ vectors en V; sigui B una base d'aquest i siguin

$$u_B^i = \begin{pmatrix} c_1^i \\ \vdots \\ c_n^i \end{pmatrix}$$

les coordenades del vector u^i en la base $B = \{w^1, \ldots, w^n\}$ per cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, on $n = \dim V$. Siguin $\lambda^1, \ldots, \lambda^k \in \Bbbk$ coeficients escalars qualssevol. Llavors,

$$\lambda^1 u_B^1 + \cdots + \lambda^k u_B^k = \begin{pmatrix} \lambda^1 c_1^1 + \cdots + \lambda^k c_1^k \\ \vdots \\ \lambda^1 c_n^1 + \cdots + \lambda^k c_n^k \end{pmatrix} .$$

Per comprovar que aquest vector coincideix amb les coordenades del vector $(\lambda^1 u^1 + \cdots + \lambda^k u^k)$ en la base B, podem multiplicar cada component pel vector w^j corresponent (on $j \in \{1, \ldots, n\}$) i comprovar que el resultat és el vector $(\lambda^1 u^1 + \cdots + \lambda^k u^k)$. Efectivament,

$$\begin{aligned} & \left(\lambda^1 c_1^1 + \lambda^2 c_1^2 \cdots + \lambda^k c_1^k\right) w^1 \\ & + \left(\lambda^1 c_2^1 + \lambda^2 c_2^2 \cdots + \lambda^k c_2^k\right) w^2 \\ & \vdots \\ & + \left(\lambda^1 c_n^1 + \lambda_k^2 + \cdots + \lambda^k c_n^k\right) w^n = \\ = \quad & \lambda_1 \left(c_1^1 w^1 + c_2^1 w^2 + \cdots + c_n^1 w^n\right) \\ & + \lambda_2 \left(c_1^2 w^1 + c_2^2 w^2 + \cdots + c_n^2 w^n\right) \\ & \vdots \\ & + \lambda_k \left(c_1^k w^1 + c_2^k w^2 + \cdots + c_n^k w^n\right) = \\ = \quad & \lambda^1 u^1 + \cdots + \lambda^k u^k \,, \end{aligned}$$

on per arribar a l'última igualtat hem utilitzat el fet que $(c_1^i, \ldots, c_n^i)$ són les coordenades de u^i en la base B. □

Proposició 2.4.4. Sigui V un espai vectorial de dimensió n i B una base qualsevol d'aquest. Sigui $\mathbf{0^V} \in V$ la identitat additiva de V, i sigui $\mathbf{0^B} \in \Bbbk^n$ la identitat additiva de $\Bbbk^n$. Llavors

$$(\mathbf{0^V})_B = \mathbf{0^B} \,;$$

és a dir, les coordenades en qualsevol base del vector nul de qualsevol subespai són el vector nul de $\Bbbk^n$, on n és la dimensió del subespai.

Demostració. Emprant la proposició 2.4.3, per qualsevol $v \in V$

$$(\mathbf{0}^{\boldsymbol{V}})_B = (v - v)_B = v_B - v_B = \mathbf{0}^{\boldsymbol{B}}\,.$$

□

Proposició 2.4.5. Sigui V un $\mathbb{k}$-espai vectorial i $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ una base d'aquest. Per vectors $u_1, \dots, u_k \in V$ qualssevol, $u_1, \dots, u_k$ són l.i. si i només si els vectors $(u_1)_B, \dots, (u_k)_B \in \mathbb{k}^n$ també ho són.

Demostració. Demostrem primer la implicació directa. Suposem que $u_1, \dots, u_k$ són l.i. però $(u_i)_B, \dots, (u_k)_B$ no ho són. Llavors

$$\exists \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}: \quad \exists i\colon \mu_i \neq 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{k} \mu_i (u_i)_B = \vec{0}\,.$$

Aplicant la proposició 2.4.3, això és equivalent a

$$\exists \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}: \quad \exists i\colon \mu_i \neq 0 \quad \wedge \quad \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i\right)_B = \vec{0}\,.$$

Aquí $\vec{0}$ denota el vector nul de $\mathbb{k}^n$. Si denotem amb $\mathbf{0}$ el vector nul de V, per la proposició 2.4.4, $(\mathbf{0})_B = \vec{0}$. Per tant, utilitzant el fet que la correspondència entre vectors i coordenades és biunívoca,

$$\exists \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}: \quad \exists i\colon \mu_i \neq 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i = \mathbf{0}\,,$$

però els vectors $u_i, \dots, u_k$ són l.i. per hipòtesi; contradicció.

Per demostrar la implicació recíproca només cal recórrer tot el raonament que hem fet en sentit invers. □

Veient totes aquestes propietats, les coordenades ens permeten reduir o "traduir" qualsevol espai vectorial "abstracte" (de polinomis, de funcions, de successions...) a l'espai $\mathbb{k}^n$ corresponent, on n és la dimensió de l'espai vectorial original. Això ens permet aplicar tots els coneixements de $\mathbb{k}^n$ a qualsevol espai vectorial. Formalitzarem aquesta idea més endavant amb el concepte d'isomorfisme.

2.4.1 Canvi de base

Sigui E un $\mathbb{k}$-espai vectorial de dimensió n. Suposem que disposem de dues bases d'aquest: $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ i $C = \{w_1, \dots, w_n\}$, i que disposem de les coordenades d'un vector $v \in E$ en la base B: $v_B = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{k}^n$. Què necessitem per poder obtenir les coordenades de v en la base C (v_C)? Observem que

$$(v)_C = (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n)_C = \lambda_1 (u_1)_C + \cdots + \lambda_n (u_c)_C\,,$$

on la darrera igualtat segueix de la propietat que hem vist a la proposició 2.4.3. Inferim que si coneixem les coordenades dels vectors $u_1, \dots, u_n$ en la base C, podem trobar les coordenades respecte C de qualsevol vector $v \in V$, donades les seves coordenades respecte B. Això motiva la següent definició.

Definició 2.4.6. Sigui E un espai vectorial, si siguin $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ i W bases d'aquest. Definirem la matriu de canvi de base de U a W com

$$A_{U \to V} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ (u_1)_W & (u_2)_W & \cdots & (u_n)_W \\ | & | & & | \end{pmatrix} ;$$

és a dir, la matriu que té les coordenades dels vectors de la base B (els vectors $u_1, \dots, u_n$) respecte la base W.

La utilitat d'aquesta definició es reflecteix en la proposició 2.4.7.

Proposició 2.4.7. Sigui E un espai vectorial, si siguin U i W bases d'aquest. Llavors,

$$\forall v \in E : \quad A_{U \to W} \cdot v_U = v_W .$$

Demostració. Per tot $v \in E$, sent $v_U = (c_1, \dots, c_n)$ les coordenades de v en la base U,

$$A_{U \to W} \cdot v_U = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ (u_1)_W & (u_2)_W & \cdots & (u_n)_W \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 (u_1)_W + \cdots + c_n (u_n)_W = (c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n)_W \doteq (v)_W = v_W .$$

□

Proposició 2.4.8. Sigui E un $\Bbbk$-espai vectorial i siguin B, C, D bases qualssevol d'aquest. Llavors:

i) $A_{B \to C}$ és invertible i $A_{B \to C}^{-1} = A_{C \to B}$

ii) $A_{C \to D} A_{B \to C} = A_{B \to D}$

Demostració.

i) Els vectors que formen la base B són l.i; per tant, emprant la proposició 2.4.5, les seves coordenades en la base C també ho són. Per tant les columnes d'$A_{B \to C}$ són linealment independents, cosa que implica que $\det A_{B \to C} \neq 0$, ergo $A_{B \to C}$ és invertible.

ii) Emprant la proposició 2.4.7, per tot vector $v \in E$

$$(A_{C \to D} A_{B \to C})\, v_B = A_{C \to D} \,(A_{B \to C} \cdot v_B) = A_{C \to D} \cdot v_C = v_D .$$

□

2.5 Intersecció i suma de subespais

La unió de subespais no és (necessàriament) un subespai vectorial[4]. Per treballar amb un concepte intuïtiu més o menys anàleg, definirem la suma de subespais.

Definició 2.5.1. Sigui E un $\Bbbk$-e.v. i siguin V_1 i V_2 subespais vectorials d'aquest. Definirem la suma de V_1 i V_2 com el conjunt

$$V_1 + V_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in E \mid \exists u \in V_1, w \in V_2 \colon v = u + w\} ;$$

és a dir, el conjunt de tots els vectors de E que es poden expressar com a suma d'un vector de V_1 i d'un vector de V_2.

Teorema 2.5.2. Sigui E un $\Bbbk$-e.v. i siguin V_1 i V_2 subespais vectorials d'aquest qualssevol. Llavors

i) $V_1 \cap V_2$ és un subespai vectorial d'E.

ii) $V_1 + V_2$ és un subespai vectorial d'E.

Demostració.

i) Per tot parell de vectors $u, v \in V_1 \cap V_2$ es compleix que $u \in V_1$ i $v \in V_1$, per definició d'intersecció. Com que V_1 està tancat per la suma, $u + v \in V_1$. D'altra banda, $u \in V_2$ i $v \in V_2$, i com que V_2 està tancat per la suma, $u + v \in V_2$. Tenim que $u + v \in V_1 \wedge u + v \in V_2$; per tant, $u + v \in V_1 \cap V_2$.

   A més, per tot $\lambda \in \Bbbk$, $\lambda u \in V_1$ i $\lambda v \in V_2$ (u pertany tant a V_1 com a V_2, i ambdós estan tancats per la multiplicació escalar). Segueix que $\lambda u \in V_1 \cap V_2$.

ii) Per tot parell de vectors $u, w \in V_1 + V_2$, cadascun es pot expressar (per definició) com la suma d'un vector de V_1 i un vector de V_2:

$$\begin{aligned} \exists v_1^u \in V_1, v_2^u \in V_2 : \quad & u = v_1^u + v_2^u \\ \exists v_1^w \in V_1, v_2^w \in V_2 : \quad & w = v_1^w + v_2^w \,. \end{aligned}$$

   Llavors

$$u + w = (v_1^u + v_2^u) + (v_1^w + v_2^w) = (v_1^u + v_1^w) + (v_2^u + v_2^w) \ .$$

   Com que V_1 i V_2 estan tancats per la suma, $(v_1^u + v_1^w) \in V_1$ i $(v_2^u + v_2^w) \in V_2$. Hem demostrat que $u + w$ es pot escriure com una suma d'un vector de V_1 més un vector de V_2, ergo $u + w \in V_1 + V_2$.

   Finalment, per tot $\lambda \in \Bbbk$, reutilitzant els mateixos noms,

$$\lambda u = \lambda\,(v_1^u + v_2^u) = \lambda v_1^u + \lambda v_2^u \,.$$

   V_1 i V_2 estan tancats per la multiplicació escalar, per tant $\lambda v_1^u \in V_1$ i $\lambda v_2^u \in V_2$. Hem demostrat que λu es pot escriure com una suma d'un vector de V_1 més un vector de V_2, ergo $\lambda u \in V_1 + V_2$.

□

[4] De fet, la unió de dos subespais vectorials V_1 i V_2 és un subespai vectorial si i només si $V_1 \subseteq V_2 \vee V_1 \supseteq V_2$.

Teorema 2.5.3. *Fórmula de Grassmann.*
Sigui E un $\mathbb{k}$-e.v. de dimensió finita (finitament generat) i siguin V_1 i V_2 subespais vectorials d'aquest qualssevol. Llavors

$$\dim (V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 \cap V_2) \ .$$

Demostració. Suposem que $V_1 \cap V_2 \neq \{\vec{0}\}$. Sabem, pel teorema 2.3.12, que $\dim(V_1 \cap V_2) \leq \dim V_1$ i $\dim(V_1 \cap V_2) \leq \dim V_2$. Sigui $\{u^1, \dots, u^d\}$ una base de $V_1 \cap V_2$. Pel teorema de Steinitz, podem "ampliar" aquesta base a una base de V_1 d'una banda i a una base de V_2 de l'altra—és a dir, podem trobar una base de V_1 (resp. V_2) i substituir d vectors d'aquesta pels vectors $u^1, \dots, u^d$.

Siguin

$$\{u^1, \dots, u^d, v^1, \dots, v^r\} \quad \text{on } v^1, \dots, v^r \in V_1 \tag{2.9}$$

i

$$\{u^1, \dots, u^d, w^1, \dots, w^s\} \quad \text{on } w^1, \dots, w^s \in V_2 \tag{2.10}$$

les bases esmentades de V_1 i V_2, respectivament. Cada vector $a \in V_1$ es pot expressar com a combinació lineal de $\{u^1, \dots, u^d, v^1, \dots, v^r\}$, i cada vector $b \in V_2$ es pot expressar com a combinació lineal dels vectors $\{u^1, \dots, u^d, w^1, \dots, w^s\}$. Per tant cada suma $a+b$ es pot expressar com a combinació lineal de $\{u^1, \dots, u^d, v^1, \dots, v^r, w^1, \dots, w^s\}$—noteu que no cal "repetir" els vectors $u^1, \dots, u^d$. És a dir, que

$$V_1 + V_2 = [u^1, \dots, u^d, v^1, \dots, v^r, w^1, \dots, w^s] \, .$$

Ara demostrarem que $\{u^1, \dots, u^d, v^1, \dots, v^r, w^1, \dots, w^s\}$ són l.i.. Suposem que no ho són:

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_d, \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_{d+r}, \lambda_{d+r+1}, \dots, \lambda_{d+r+s} \in \mathbb{k} \colon \exists i \in \{1, \dots, d+r+s\} \colon \lambda_i \neq 0$$
$$\wedge$$
$$\lambda_1 u^1 + \dots + \lambda_d u^d + \lambda_{d+1} v^1 + \dots + \lambda_{d+r} v^r + \lambda_{d+r+1} w^1 + \dots + \lambda_{d+r+s} w^s = \vec{0} \, . \tag{2.11}$$

Sigui $j \in \{1, \dots, d+r+s\}$ un índex tal que $\lambda_j \neq 0$. Vegem ara que $j \notin \{d+1, \dots, d+r+1\}$. Suposem que $j \in \{d+1, \dots, d+r\}$; això implicaria que algun dels vectors v^k (on $k \in \{1, \dots, r\}$) es pot expressar com a combinació lineal dels vectors $u^1, \dots, u^d, w^1, \dots, w^S$. Tenint en compte tota combinació lineal de $u^1, \dots, u^d$ pertany a V_2 (ja que $u^1, \dots, u^d \in V_1 \cap V_2$) i que tota combinació lineal de $w^1, \dots, w^s$ també pertany a V_2, això implicaria que $v^k \in V_2$; d'altra banda, per construcció $v^k \in V_1$. Per tant tindríem que $v^k \in V_1 \cap V_2$, cosa que per construcció de la base (2.10) no pot ser. Podem raonar de manera similar per $j \in \{d+r+1, \dots, d+r+s\}$.

Pel que hem vist podem reduir (2.11) a

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{k} \ \exists i \in \{1, \dots, d\} \colon \lambda_i \neq 0 \quad \wedge \quad \lambda_1 u^1 + \dots + \lambda_d u^d = \vec{0} \, .$$

Però això entra en contradicció amb el fet que $u^1, \dots, u^d$ són l.i. per hipòtesi.

Hem demostrat que $\{u^1, \dots, u^d, v^1, \dots, v^r, w^1, \dots, w^s\}$ formen una base de $V_1 + V_2$. Per tant

$$\dim(V_1 + V_2) = d + r + s = (d+r) + (d+s) - d = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 \cap V_2) \ .$$

$\square$

Pot ser d'ajuda intuïtiva (o mnemotècnica) pensar en la fórmula de Grassmann com "l'equivalent" per espais vectorials del principi d'inclusió-exclusió (per tot parell de conjunts A i B, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$).

Definició 2.5.4. Sigui E un espai vectorial, i siguin F i G subespais d'aquest. Direm que "E és suma directa de F i G" i ho denotarem

$$\text{“}E = F \oplus G\text{”}$$

si i només si per cada vector $v \in E$ existeix una única parella de vectors $(u \in F, w \in G)$ tal que $v = u + w$.

Proposició 2.5.5. Sigui E un espai vectorial, i siguin F i G subespais d'aquest. Llavors $E = F \oplus G$ si i només si es compleix

$$E = F + G \quad \wedge \quad F \cap G = \{\vec{0}\}\,.$$

Demostració. Demostrem primer la implicació directa: suposem que $E = F \oplus G$. La proposició $E = F + G$ en segueix trivialment—si existeix una única manera d'expressar tot $v \in E$ com a suma d'un $u \in F$ i d'un $w \in G$, n'existeix com a mínim una (que és la condició necessària per a que es compleixi $E = F + G$).

Demostrem, doncs, que $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Suposem que no; és a dir, suposem que $\exists v \in F \cap G \colon v \neq \vec{0}$. Observem que si expressem v com a suma de $u \in F$ i $w \in G$ ho podem fer de dues maneres, ja que v pertany tant a F com a G:

$$\begin{aligned} v &= \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G} \\ v &= \underbrace{\vec{0}}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in G}\,. \end{aligned}$$

Això contradiu la definició de suma directa.

Ara demostrem la implicació recíproca: suposem que $E = F + G$ i $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Demostrarem que per tot $v \in E$ existeix una única manera d'expressar v com a suma d'$u \in F$ i $w \in G$. Suposem que no. Llavors, existeixen vectors $u_1 \in F$, $w_1 \in G$, $u_2 \in F$, i $w_1 \in G$ tals que

$$\begin{aligned} v &= u_1 + w_1 \\ v &= u_2 + w_2 \\ u_1 \neq u_2\,,&\ w_1 \neq w_2\,, \end{aligned}$$

i per tant, restant les dues igualtats,

$$\vec{0} = u_1 + w_1 - u_2 - w_2 \Leftrightarrow u_1 - u_2 = w_1 - w_2\,.$$

Sabent que $u_1 \neq u_2$, el vector $u_1 - u_2 = w_1 - w_2 \neq \vec{0}$ no és nul. A més, d'una banda, $u_1, u_2 \in F$ i per tant $u_1 - u_2 \in F$ (F està tancat per la suma), i d'altra banda, $w_1, w_2 \in G$ i per tant $w_1 - w_2 \in G$ (G està tancat per la suma). Com que $u_1 - u_2$ i $w_1 - w_2$ són el mateix vector, això implica que està a la intersecció de F i G. Però per hipòtesi $F \cap G$ només conté el vector nul; contradicció. $\square$

2.6 Espai quocient

La unió d'espais vectorials no és (necessàriament) un espai vectorial; per poder utilitzar un concepte anàleg vam definir la suma de subespais a la definició 2.5.1. De manera similar, el conjunt complementari a un espai vectorial F dins d'un espai ambient E tampoc és un espai vectorial. Per poder treballar amb una estructura anàloga al complementari d'un conjunt però per espais vectorials, definirem l'espai quocient d'E per F.

Definició 2.6.1. Sigui E un $\Bbbk$ espai vectorial i sigui F un subespai d'aquest. Per cada vector $v \in E$ definirem la "classe de v mòdul F" com el conjunt

$$\overline{v} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in E \mid u - v \in F\}\,.$$

Qualsevol element de $\overline{v}$ s'anomena "representatiu de $\overline{v}$".

Definició 2.6.2. Sigui E un espai vectorial i sigui F un subespai d'aquest. Amb la relació d'equivalència

$$\sim: \quad x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x - y \in F \iff \overline{x} = \overline{y}$$

definirem "l'espai quocient d'E per F" com el conjunt quocient $E/\sim$, i el denotarem amb E/F. De manera equivalent,

$$E/F \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{v} \mid v \in E\}\,.$$

Per fer que l'espai quocient sigui un espai vectorial, hem de definir les operacions suma i una multiplicació escalar apropiades. Veurem a la proposició 2.6.4 que si utilitzem la suma i la multiplicació escalar definides a 2.6.3, l'estructura resultant és un espai vectorial.

Definició 2.6.3. Sigui E un espai vectorial i sigui F un subespai d'aquest. Definirem la suma en l'espai quocient E/F com la operació

$$\begin{array}{rrcl} (+)\colon & E/F \times E/F & \to & E/F \\ & (\overline{v}, \overline{w}) & \mapsto & \overline{v} + \overline{w} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{v + w}\,, \end{array}$$

i la multiplicació escalar com la operació

$$\begin{array}{rrcl} (\cdot)\colon & \Bbbk \times E/F & \to & V \\ & (\lambda, \overline{v}) & \mapsto & \lambda \cdot \overline{v} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lambda \cdot v}\,, \end{array}$$

on $v + w$ i $\lambda \cdot v$ són la suma i la multiplicació escalar definides a l'espai E.

Proposició 2.6.4. Sigui E un espai vectorial i sigui F un subespai d'aquest. Amb les operacions definides a 2.6.3, l'espai quocient E/F és un espai vectorial.

Demostració.

i) *Tancat per la suma.*

$$\forall \overline{v}, \overline{w} \in E/F \quad \overline{v} + \overline{w} \doteq \overline{v + w}\,;\ (v + w) \in E \Rightarrow \overline{v + w} \in E/F\,.$$

ii) *Tancat per la multiplicació escalar.*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall \overline{v} \in {}^{E}\!/_{F} \quad \lambda \cdot \overline{v} \doteq \overline{\lambda v}\,;\ \lambda v \in E \Rightarrow \overline{\lambda v} \in {}^{E}\!/_{F}\,.$$

iii) *Associativitat de la suma.*

$$\begin{aligned}&\forall \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in {}^{E}\!/_{F}\\ &(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w} \doteq \overline{u+v}+\overline{w} \doteq \overline{(u+v)+w} = \overline{u+(v+w)} \doteq \overline{u}+\overline{v+w} \doteq \overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})\,.\end{aligned}$$

iv) *Commutabilitat de la suma.*

$$\forall \overline{v}, \overline{w} \in {}^{E}\!/_{F} \quad \overline{v}+\overline{w} \doteq \overline{v+w} = \overline{w+v} \doteq \overline{w}+\overline{v}\,.$$

v) *Identitat additiva.* L'element neutre de ${}^{E}\!/_{F}$ és la classe del 0.

$$\forall \overline{v} \in {}^{E}\!/_{F} \quad \overline{v}+\overline{0} \doteq \overline{v+0} = \overline{v}\,.$$

vi) *Inversa additiva.* Utilitzem el fet que tot vector $v \in E$ té inversa additiva.

$$\forall \overline{v} \in {}^{E}\!/_{F} \quad \overline{v}+\overline{(-v)} \doteq \overline{v-v} = \overline{0}$$

vii) *Identitat multiplicativa.* Sigui 1 la identitat multiplicativa del cos $\Bbbk$. Llavors, $\forall \overline{v} \in {}^{E}\!/_{F} \quad 1 \cdot \overline{v} \doteq \overline{1 \cdot v} = \overline{v}$.

viii) *Compatibilitat de la multiplicació escalar i la multiplicació en el cos.* $\forall a, b \in \Bbbk\ \forall \overline{v} \in {}^{E}\!/_{F} \quad a(b \cdot \overline{v}) \doteq a \cdot \overline{b \cdot v} \doteq \overline{a(b \cdot v)} = \overline{(ab) \cdot v} \doteq (ab) \cdot \overline{v}$.

ix) *Distributivitat de la multiplicació escalar respecte la suma en el cos.* $\forall a, b \in \Bbbk\ \forall \overline{v} \in {}^{E}\!/_{F} \quad (a+b)\overline{v} \doteq \overline{(a+b)v} = \overline{av+bv} \doteq \overline{av}+\overline{bv} \doteq a\overline{v}+b\overline{v}$.

x) *Distributivitat de la multiplicació escalar respecte la suma vectorial.*

$$\begin{aligned}&\forall a \in \Bbbk\ \forall \overline{v}, \overline{w} \in {}^{E}\!/_{F}\\ &\qquad a(\overline{v}+\overline{w}) \doteq a \cdot \overline{v+w} \doteq \overline{a(v+w)} = \overline{av+aw} \doteq \overline{av}+\overline{aw} \doteq a\overline{v}+a\overline{w}\,.\end{aligned}$$

□

Observació 2.6.5. Sigui E un espai vectorial i sigui F un subespai d'aquest. La classe del vector $\mathbf{0} \in E$ mòdul F conté tots els vectors de F. És a dir,

$$\forall v \in E: \quad \overline{v} = \overline{\mathbf{0}} \longleftrightarrow v \in F \longleftrightarrow v \sim \mathbf{0}\,.$$

Tema 3

Aplicacions lineals

3.1 Definició i tipus

Definició 3.1.1. Una aplicació f entre dos $\mathbb{k}$-e.v. E i F,

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & v & \mapsto & f(v)\,, \end{array}$$

és una aplicació lineal (*linear map* o *linear transformation*) si i només si

$$\begin{gathered} \forall u, v \in E \quad f(u+v) = f(u) + f(v)\,, \\ \forall c \in \mathbb{k}\ \forall v \in E \quad f(c \cdot v) = c \cdot f(v)\,. \end{gathered}$$

Definició 3.1.2. L'aplicació lineal entre un $\mathbb{k}$-e.v. E i sí mateix que relaciona cada $v \in E$ amb sí mateix, és a dir,

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}: & E & \to & E \\ & v & \mapsto & v \quad \forall v \in E\,, \end{array}$$

s'anomena aplicació identitat i es denota amb Id.

Definició 3.1.3. Sigui E un $\mathbb{k}$-e.v., i sigui $\lambda \in \mathbb{k}$ un escalar. Tota aplicació lineal de la forma

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & E \\ & v & \mapsto & \lambda v \quad \forall v \in E \end{array}$$

s'anomena *homotècia*.

Proposició 3.1.4. Si una aplicació f entre dos $\mathbb{k}$-e.v. E i F és lineal, necessàriament $f(0_E) = 0_F$, on 0_E i 0_F són, respectivament, el vector nul d'E i de F.

Demostració. Sigui v un vector d'E tal que $f(v) = u \in F$. Per la linearitat de f, $f(0_E) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0 \cdot u = 0_F$. □

Proposició 3.1.5. Siguin E i F dos $\Bbbk$-e.v.; sigui $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base d'E i siguin $v_1, \ldots, v_n \in F$ vectors qualssevol de F. Llavors existeix una única aplicació lineal f tal que

$$f(u_i) = v_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} .$$

És a dir, que la imatge d'una base determina unívocament una aplicació lineal.

Demostració. Suposem que existeixen dues aplicacions lineals, $f\colon E \to F$ i $g\colon E \to F$, tals que

$$f(u_i) = v_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} ,$$
$$g(u_i) = v_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} .$$

Per cada vector $w \in E$, existeixen uns únics coeficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$ tals que

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i ,$$

ja que els vectors $u_1, \ldots, u_n$ formen una base (i per tant les coordenades de w respecte aquesta són úniques).

Llavors, emprant la linearitat de f,

$$f(w) = f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i .$$

D'altra banda, g també és lineal, i per tant

$$g(w) = g(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 g(u_1) + \cdots + \lambda_n g(u_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i .$$

Com que els coeficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ són únics, concloem que $f(w) = g(w)$. Però w és un vector arbitrari, ergo

$$\forall w \in E \quad f(w) = g(w) \Leftrightarrow f \equiv g .$$

□

Definició 3.1.6. Direm que una aplicació lineal f és un *monomorfisme* si i només si és injectiva.

Definició 3.1.7. Direm que una aplicació lineal f és un *epimorfisme* si i només si és suprajectiva (exhaustiva).

Definició 3.1.8. Direm que una aplicació lineal f és un *isomorfisme* si i només si és un monomorfisme i un epimorfisme alhora—és a dir, si és bijectiva.

Definició 3.1.9. Direm que una aplicació lineal f és un *endomorfisme* si i només si és de la forma $f\colon E \to E$—és a dir, si l'espai d'arribada i l'espai de sortida coincideixen.

Definició 3.1.10. Direm que una aplicació lineal f és un *automorfisme* si i només si és un endomorfisme i un isomorfisme alhora—és a dir, si és un endomorfisme bijectiu.

3.2 Nucli i imatge

Definició 3.2.1. Sigui $f\colon E \to F$ una aplicació lineal. La imatge de f es defineix com

$$\operatorname{Im} f \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in F \mid \exists u \in E\colon f(u) = v\}\,;$$

és a dir, com el conjunt de tot vector de F que és la imatge d'[almenys]un vector d'E.

Definició 3.2.2. Sigui $f\colon E \to F$ una aplicació lineal. El nucli de f es defineix com

$$\operatorname{Nuc} f \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}\,;$$

és a dir, el conjunt de vectors d'E que es transformen en el vector nul de F quan se'ls hi aplica f.

Proposició 3.2.3. Una aplicació lineal $f\colon E \to F$ és suprajectiva (exhaustiva) si i només si $\operatorname{Im} f = F$.

Demostració. D'una banda, per definició, $\operatorname{Im} f \subseteq F$, sigui quina sigui l'aplicació f. A més, si f és suprajectiva, per tot $v \in F$ existeix un $u \in E$ tal que $f(u) = w$. Per tant, per la definició d'imatge, tot $v \in F$ pertany a $\operatorname{Im} f$; ergo $F \subseteq \operatorname{Im} f$. Per tant $\operatorname{Im} f = F$.

La implicació recíproca és directa: si $\operatorname{Im} f = F$, per definició d'imatge, tot vector $v \in F$ compleix $\exists u \in E\colon f(u) = v$. Aquesta és la definició de que f sigui suprajectiva. $\square$

Proposició 3.2.4. Una aplicació lineal $f\colon E \to F$ és injectiva si i només si $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$.

Demostració. Suposem que f és injectiva i que $\exists w \in \operatorname{Nuc} f\colon w \neq 0_E$. Llavors, per tot vector $u \in E$,

$$u + w \neq u \quad \wedge \quad f(u+w) = f(u) + f(w) = f(u) + 0_F = f(u)\,,$$

cosa que contradiu la definició d'injectivitat (és a dir, $f(a) = f(b) \to a = b$). Per tant, si f és injectiva, $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$.

D'altra banda, suposem que $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$ però que f no és injectiva. Llavors, existeixen vectors $u, v \in E$ tals que

$$u \neq v \quad \wedge \quad f(u) = f(v) \;\Rightarrow\; f(u) - f(v) = f(u - v) = 0_F\,.$$

Com que per hipòtesi $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$, $u - v$ ha de ser per força 0_E, i per tant $u - v = 0_E \;\Rightarrow\; u = v$, cosa que contradiu la hipòtesi que $u \neq v$. Per tant queda demostrat el recíproc. $\square$

Proposició 3.2.5. El nucli d'una aplicació lineal $f\colon E \to F$ és un subespai vectorial d'E.

Demostració. Per tot parell de vectors $u, v \in \operatorname{Nuc} f$,

$$f(u+v) = f(u) + f(v) = 0_F + 0_F = 0_F \;\Rightarrow\; (u+v) \in \operatorname{Nuc} f\,.$$

Per tot escalar $c \in \Bbbk$ i vector $v \in \operatorname{Nuc} f$,

$$f(c \cdot v) = c \cdot f(v) = c \cdot 0_F = 0_F \ \Rightarrow \ c \cdot v \in \operatorname{Nuc} f\,.$$

□

Definició 3.2.6. Donada una aplicació lineal $f\colon E \to F$, la imatge d'un subconjunt $W \subseteq E$ es defineix com

$$f(W) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in F \mid \exists u \in W\colon f(u) = v\}\,.$$

Proposició 3.2.7. Donada una aplicació lineal $f\colon E \to F$, si W és un subespai vectorial d'E, $f(W)$ és un subespai vectorial de F.

Demostració. Siguin $u, v \in f(W)$ vectors tals que $u = f(w)$ i $v = f(y)$, on $w, y \in W$ (els vectors w, y existeixen per la definició de $f(W)$). Llavors

$$u + v = f(w) + f(y) = f(w + y)\,.$$

Com que W és un espai vectorial i per tant està tancat per la suma, tenim que $w + y \in W$; ergo existeix un vector de W la imatge del qual sigui $(u + v)$; és a dir, $(u + v) \in f(W)$. A més, per tot escalar $c \in \Bbbk$,

$$c \cdot u = c \cdot f(w) = f(c \cdot w)\,.$$

Novament, raonem que W és un e.v. i per tant està tancat per la multiplicació escalar: $c \cdot w \in W$. Concloem que existeix un vector de W (ergo, $c \cdot w$) tal que la seva imatge sigui $c \cdot u$; és a dir, $c \cdot u \in f(W)$. □

Corol·lari 3.2.8. La imatge d'una aplicació lineal $f\colon E \to F$ és un subespai vectorial de F.

Demostració. $E \subseteq E$, i per tant, per la proposició 3.2.7, $f(E) \doteq \operatorname{Im} f$ és un s.e.v. de F. □

Definició 3.2.9. Donada una aplicació lineal $f\colon E \to F$, definim la preimatge d'un subconjunt $W \in F$ com

$$f^{-1}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in E \mid f(u) \in W\}\,.$$

3.3 Composició

Definició 3.3.1. Donades dues aplicacions lineals $f\colon E \to F$ i $g\colon F \to G$ definirem la *composició de g amb f* com l'aplicació lineal

$$\begin{array}{rccl} g \circ f\colon & E & \to & G \\ & v & \mapsto & (g \circ f)(v) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(v))\,. \end{array}$$

Usarem la notació $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ per referir-nos a $f_n \circ (f_{n-1} \circ (\cdots \circ (f_2 \circ f_1))$.

Definició 3.3.2. Direm que una aplicació lineal $f\colon E \to F$ és invertible si existeix una aplicació lineal $g\colon F \to E$ tal que $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_E$. En aquest cas direm que g és l'inversa de f.

Proposició 3.3.3. Una aplicació lineal f és invertible si i només si és un isomorfisme.

Tema 4

Diagonalització

4.1 Matrius diagonals

Definició 4.1.1. Diem que un endomorfisme f d'un $\mathbb{k}$-espai vectorial E diagonalitza si existeix una base V tal que la matriu de f en base V, M_V, sigui diagonal. Direm que "f és diagonalitzable en $\mathbb{k}$" i "f és diagonal en base V".

Observació 4.1.2. Sigui f un endomorfisme que diagonalitza en base V. Llavors,

$$M_V(f) = A_{e\to V} M_e(f) A_{V\to e} = SDS^{-1}\,,$$

on $S = A_{V\to e}$ és la matriu de canvi de base de V a la base canònica.

Definició 4.1.3. Direm que una matriu $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ diagonalitza si existeix una matriu invertible $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ tal que

$$D = S^{-1}MS \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$$

sigui una matriu diagonal.

En aquesta darrera definició, la matriu M és equivalent a la matriu d'un endomorfisme $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en una certa base (per exemple la canònica).

4.2 Vectors i valors propis

Definició 4.2.1. Sigui $f \in \operatorname{End}(E)$. Direm que un vector $v \in E$ és un *vector propi* de f si $v \neq 0$ i

$$\exists \lambda \in \mathbb{k}: \qquad f(v) = \lambda v\,.$$

Anomenarem l'escalar λ corresponent el *valor propi* corresponent a v.

Lema 4.2.2. i) Un vector $u \in E$ és un VEP (de VAP $\lambda \in \Bbbk$) de f si i només si $u \in \operatorname{Nuc}(f - \lambda \operatorname{Id})$.

ii) $\lambda \in \Bbbk$ és un VAP d'algun VEP de f si i només si $\det(f - \lambda \operatorname{Id}) = 0$.

Demostració.

i) u és un VEP $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Bbbk$: $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow f(u) - \lambda u = (f - \lambda \operatorname{Id})(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \operatorname{Nuc}(f - \lambda \operatorname{Id})$

ii) Si $\det(f - \lambda \operatorname{Id}) \neq 0$, la única solució al sistema $(M(f) - \lambda \operatorname{Id})x = 0$ és la solució trivial $x = 0$, i per tant no hi ha cap vector x no nul tal que $M(f)x = \lambda x$.

□

Definició 4.2.3. Sigui $\lambda \in \Bbbk$ un vector propi de f. Definirem l'*espai propi* de λ com

$$E_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Nuc}(f - \lambda \operatorname{Id}) .$$

Observació 4.2.4. Segons el lema 4.2.2, tot vector propi de f de VAP λ és un element d'E_λ.

Definició 4.2.5. Definirem l'espectre de f com el conjunt de VAPs de f, i ho denotarem per $\sigma(f)$.

4.3 Polinomi característic

Definició 4.3.1. Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$. Definirem el polinomi característic d'A com

$$P_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - x \operatorname{Id}) .$$

Proposició 4.3.2. Siguin $f \in \operatorname{End}(E)$ un endomorfisme. El polinomi característic de la matriu de f en una certa base és independent de la base.

Demostració. Sigui U una base d'E, i sigui $A = M_U(f)$. Sigui V una altra base d'E, i sigui S la matriu de canvi de base de U a V. Llavors

$$B \stackrel{\text{def}}{=} M_V(f) = SAS^{-1} .$$

Per tant, el polinomi característic de B serà

$$\begin{aligned} P_B(x) = \det(B - x \operatorname{Id}) = \det(SAS^{-1} - xSS^{-1}) = \det[(SA - xS)S^{-1}] = \\ = \det(SA - Sx \operatorname{Id}) \det S^{-1} = \det[S(A - x \operatorname{Id})] \det(S^{-1}) = \\ = \det S \det(A - x \operatorname{Id}) \det S^{-1} = \det(A - x \operatorname{Id}) = P_A(x) , \end{aligned}$$

ja que $\det S \det S^{-1} = 1$. □

Corol·lari 4.3.3. Sigui A una matriu diagonalitzable, tal que $A = SDS^{-1}$ per alguna matriu diagonal D i matriu invertible S. Els valors propis d'A són els elements de la diagonal de D.

Demostració.
$$P_A(x) = P_D(x) = \det(D - x\,\mathrm{Id}) = \prod_{i=1}^{n}(d_{ii} - x)\,,$$
ergo d_{ii} és un VAP per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

Definició 4.3.4. Si $f \in \mathrm{End}(E)$ definirem el polinomi característic de f com $P_f(x) \overset{\text{def}}{=} P_M(x)$, on M és la matriu de f (en qualsevol base).

Proposició 4.3.5. Sigui f un endomorfisme i
$$P_f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$
el seu polinomi característic, on $c_0, \ldots, c_n \in \Bbbk$ són els coeficients. Llavors
$$\begin{aligned} c_0 &= \det f \\ c_{n-1} &= (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\, f \\ c_n &= (-1)^n\,. \end{aligned}$$

Demostració. Sigui $\tilde{A} = A - x\,\mathrm{Id}$.

$$\begin{aligned} P_f(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i,\sigma(i)} = \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i \neq \sigma(i)} a_{i,\sigma(i)} \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} - x) \right) = \sum_{\sigma \in S_n} \left[\prod_{i \neq \sigma(i)} a_{i,\sigma(i)} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,i} + [x] \right) \right] = \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{i \neq \sigma(i)} a_{i,\sigma(i)} \right) [x] = [x] + \det A\,, \end{aligned}$$

on $[x]$ denota un polinomi sense terme independent. Per tant $c_0 = \det A$. □

Corol·lari 4.3.6. La matriu d'un endomorfisme té el mateix determinant i la mateixa traça en qualsevol base.

4.3.1 Multiplicitat algebraica i geomètrica

Definició 4.3.7. Definirem la multiplicitat algebraica d'un VAP λ (a_λ) com la multiplicitat de l'arrel λ en el polinomi característic.

Definició 4.3.8. Donat un endomorfisme en un $\Bbbk$-e.v. de dimensió n, definirem la multiplicitat geomètrica d'un VAP λ com

$$g_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \dim E_\lambda = n - \operatorname{rang}(M(f) - \lambda \operatorname{Id}) .$$

Lema 4.3.9. Per tot VAP λ,

$$1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda .$$

Demostració. El fet que $1 \leq g_\lambda$ és conseqüència directa del fet que $\det(f - \lambda \operatorname{Id}) = 0$ (ergo $\operatorname{Nuc}(f - \lambda \operatorname{Id}) \supsetneq \{0\}$, per tant la dimensió del nucli és com a mínim 1).

Ara demostrem que $g_\lambda \leq a_\lambda$. Sigui $\mathcal{B}_{\restriction\lambda} = \{v^1, \ldots, v^k\}$ una base de E_λ. Sigui $\mathcal{B} = \{v^1, \ldots, v^k, v^{k+1}, \ldots, v^n\}$ una base d'E obtinguda per extensió de $\mathcal{B}_{\restriction\lambda}$. Sigui Q la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}$ a la canònica:

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ v^1_{\mathcal{C}} & \cdots & v^k_{\mathcal{C}} & v^{k+1}_{\mathcal{C}} & \cdots & v^n_{\mathcal{C}} \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix} .$$

Siguin

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} | & & | \\ v^1_{\mathcal{C}} & \cdots & v^k_{\mathcal{C}} \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times k}(\Bbbk) , \qquad V \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} | & & | \\ v^{k+1}_{\mathcal{C}} & \cdots & v^n_{\mathcal{C}} \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times (n-k)}(\Bbbk) ,$$

de manera que

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} U & V \end{array} \right) .$$

Q és invertible. Siguin $C \in \mathcal{M}_{k \times n}(\Bbbk)$, $D \in \mathcal{M}_{(n-k) \times n}(\Bbbk)$ tals que

$$Q^{-1} = \left(\begin{array}{c} C \\ \hline D \end{array} \right) .$$

Llavors tenim que

$$\left(\begin{array}{c|c} \operatorname{Id}_k & \varnothing \\ \varnothing & \operatorname{Id}_{n-k} \end{array} \right) = \operatorname{Id}_n = Q^{-1} Q =$$

□

4.4 Propietats de VAPs i VEPs

Lema 4.4.1. i) u, v VAP diferents l.i.

ii) Per VAPs $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ diferents,

$$E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} .$$

Demostració. Siguin $g_1, \ldots, g_r \in \mathbb{N}$ les multiplicitats geomètriques de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ respectivament. Siguin $B_1 = \{v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{g_1}^1\}, \ldots, B_r = \{v_1^r, v_2^r, \ldots, v_{g_r}^r\}$ bases dels espais $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_r}$ respectivament. Serà suficient demostrar que els vectors de $\bigcup_{i=1}^r B_i$ són l.i. (noteu que $B_1, \ldots, B_r$ són necessàriament disjunts).

Suposem que no ho són. Llavors, existeixen coeficients

$$\begin{gathered} c_1^1, \ldots, c_{g_1}^1 \in \mathbb{k} \\ c_1^2, \ldots, c_{g_2}^2 \in \mathbb{k} \\ \vdots \\ c_1^r, \ldots, c_{g_r}^r \in \mathbb{k}\,, \end{gathered}$$

tals que

$$\exists i \in \{1, \ldots, r\}\ \exists j \in \{1, \ldots, g_r\} : \quad c_j^i \neq 0 \tag{4.1}$$

i

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{g_r} c_j^i v_j^i = 0\,. \tag{4.2}$$

Definim

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\} \quad u^i \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{g_r} c_j^i v_j^i\,.$$

Noteu que per tot i, $u^i \in E_{\lambda_i}$. Reescrivim (4.2) com

$$\sum_{i=1}^{r} u^i = 0\,. \tag{4.3}$$

A partir de la condició (4.1), deduïm que $\exists i \in \{1, \ldots, r\}$: $u^i \neq 0$. Sigui $\mathcal{N} \overset{\text{def}}{=} \{i \mid u^i \neq 0\} \subseteq \{1, \ldots, r\}$. A partir de (lema anterior), sabem que els vectors de $\{u^i \mid i \in \mathcal{N}\}$, que són VEPs de VAPs diferents, són l.i., i per tant

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} u^i \neq 0\,;$$

però això entra en contradicció directa amb (4.3).

Per tant els vectors de $\bigcup_{i=1}^r B_i$ són l.i.. $\square$

Corol·lari 4.4.2. Si un endomorfisme f d'un espai E de dimensió n té n VAPs diferents $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{k}$, llavors

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}\,;$$

ergo la unió de les bases dels espais propis forma una base d'E i per tant f diagonalitza.

Demostració. Si tenim n VAPs diferents, tenim n espais propis diferents, $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_n}$. Pel lema 4.3.9, sabem que $g_{\lambda_i} \geq 1$ per tot i. A més, pel lema 4.4.1,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}) \geq \sum_{i=1}^{n} 1 = n = \dim E\,.$$

D'altra banda, com que $\sum_i E_{\lambda_i} \subseteq E$, $\dim\left(\sum_{i=1}^n E_{\lambda_i}\right) \leq \dim E$. Unint ambdues desigualtats obtenim que $\dim\left(\sum_{i=1}^n E_{\lambda_i}\right) = \dim E$, cosa que implica $\sum_{i=1}^n E_{\lambda_i} = E$. $\square$

Corol·lari 4.4.3. Si totes les arrels del polinomi característic $P_f(x)$ estan en $\Bbbk$ i són simples (tenen multiplicitat única), llavors f diagonalitza.

Demostració. Si totes les arrels estan en $\Bbbk$, llavors, pel teorema fonamental de l'àlgebra, en tenim n (comptant multiplicitats). Si totes les arrels són simples, vol dir que totes n arrels són diferents. Per tant f té n VAPs diferents. Pel corol · lari 4.4.2 deduïm que f diagonalitza. $\square$

Teorema 4.4.4. *Teorema de diagonalització.*
f diagonalitza sii es compleixen les dues següents condicions:

i) El polinomi característic es pot descompondre completament en $\Bbbk$

ii) Per tot VAP $\lambda \in \Bbbk$ de f, $g_\lambda = a_\lambda$

Demostració. Suposem existeix una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $M_\mathcal{V}(f)$ és diagonal. Siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Bbbk$ els VAPs i $m_1, \dots, m_r$ les seves multiplicitats, respectivament, de manera que $v_1, \dots, v_{m_1}$ són VEPs de VAP λ_1, ..., i $v_{n-m_r+1}, \dots, v_{m_r}$ VEPs de VAP λ_r.

$$M_\mathcal{V}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_r & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Llavors $P_f(x) = \det(M_\mathcal{V}(f) - x\,\mathrm{Id}) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdots (\lambda_r - x)^{m_r}$; per tant totes les arrels del característic estan en $\Bbbk$. A més, per hipòtesi, $g_{\lambda_i} = m_i$ per tot $i \in [r]$.

Ara demostrem la implicació recíproca. Per hipòtesi, $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ per tot i. Llavors, pel lema 4.4.1,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^n E_{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^n \dim(E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^n g_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n a_{\lambda_i} .$$

Pel teorema fonamental de l'àlgebra, $\sum_{i=1}^n a_{\lambda_i} = n$; llavors concloem que

$$\dim\left(\sum_{i=1}^n E_{\lambda_i}\right) = n = \dim E \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^n E_{\lambda_i} = E\,;$$

ergo els VEPs formen base. $\square$

1. Pol característc
2. Arrels; si estan en cos continuem
3. Multiplicitat algebraica
4. Multiplicitat geomètrica
5. Comparem
6. La matriu diagonal és la diagonal dels VEP
7. La base és la unió de les bases de E_{λ_i}

Índex alfabètic