

CY TECH

OPTION INGÉNIERIE FINANCIÈRE (MMF) et ACTUARIAT

Irina Kortchemski

Calibration des Modèles Financiers et Simulation

COURS 4. Calibration de volatilité locale à partir de volatilité implicite

1 Equation de Dupire

Le prix de l'option européenne vérifie l'équation de Black et Scholes :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(t = T, S) = \max(S - K, 0) \end{cases}$$

- $V(S, t; K, T, \sigma, r)$ est le prix d'une option Européenne.
- S, t sont des variables, K, T sont des paramètres
- σ est la volatilité d'un actif, elle n'est pas observable.

La volatilité est un paramètre qui mesure le risque associé au rendement de l'actif sous-jacent. Les praticiens ont rapidement vu que la volatilité historique, l'estimation du paramètre de volatilité par les données historiques, ne permet pas de reconstituer les prix observés sur le marché. Les praticiens ont observé : pour K et T différentes la volatilité n'est pas la même donc $\sigma = \sigma(T, K)$. Il existe deux possibilités : calibrer d'abord la volatilité implicite ou la volatilité locale.

Calibrer la volatilité implicite signifie de trouver $\sigma_{implicite}(T, K)$ pour que les formules du modèle de BS donnent les vrais prix du marché.

Calibrer la volatilité locale signifie de trouver une fonction déterministe

$$\sigma_{locale} : (S, t) \rightarrow \sigma_{locale}(S, t)$$

pour que les formules d'un modèle donnent les vrais prix du marché.

La volatilité locale est le paramètre qui mesure le risque associé à la variation instantanée de l'actif sous-jacent.

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_{locale}(S, t)dW_t$$

Dans le modèle du CEV (Constante Elasticity of Variance)

$$\sigma_{locale}(S, t) = \sigma_0 S^\alpha.$$

Ce modèle explique le skew de volatilité.

Notre objectif est de calibrer de volatilité locale à partir de volatilité implicite. Pour faire cela on utilise l'équation de Dupire.

Dans le modèle de volatilité locale les prix d'une option $V(T, K; t, S)$ vérifie l'équation de Dupire :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial T} + rK \frac{\partial V}{\partial K} - \frac{1}{2} \sigma_{locale}^2(K, T) K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K^2} = 0 \\ V(T = 0, K) = \Phi(K) \end{cases}$$

- **(K, T) sont des variables, (S, t) sont des paramètres.**

L'équation calcule les prix d'options pour **tous strikes K et maturités T** à une date donnée t . On utilise équation de Dupire pour recalculer la fonction de volatilité locale :

$$\sigma_{locale}(K, T) = \sigma_{locale}(S, t)|_{S=K, t=T}$$

à partir des prix d'options :

$$\sigma_{locale}(K, T) = \sqrt{2 \frac{\frac{\partial V}{\partial T} + rK \frac{\partial V}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K^2}}}$$

Notre objectif est le relier les dérivées $\frac{\partial V}{\partial T}$, $\frac{\partial V}{\partial K}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial K^2}$ avec la volatilité implicite. Si la courbe (ou surface) de volatilité implicite est calibrée la relation trouvée nous donne la surface de volatilité locale calibrée.

Pour déduire l'équation de Dupire on a besoin de la notion de la fonction de la densité conditionnelle conjointe $p(S, t; S', T)$ qui vérifie l'équation Fokker-Planck

$$\frac{\partial p}{\partial T} = - \frac{\partial(r(S', T)S'p(S, t; S', T))}{\partial S'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma_{locale}^2(S', T)(S')^2 p(S, t; S', T))}{\partial (S')^2}$$

On utilise cette fonction de densité conditionnelle conjointe pour calculer les prix des options :

$$V(S, t) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty p(S, t; S', T) \Phi(S') dS'$$

Cette formule exprime le fait que le prix de l'option varie de la valeur initiale $V(S, t)$ du point (S, t) dans le point (S_T, T) en faisant les transitions vers les points intermédiaires (S', T) avec la probabilité $p(S, t; S', T) dS'$

1.1 Densité conditionnelle conjointe ou Densité de transition

On peut déduire les équations Forward et Backward que vérifie la densité conditionnelle conjointe par deux facones différentes. Donnons d'abord la définition de la densité conditionnelle conjointe.

La fonction de densité conditionnelle (ou la fonction de densité de transition) $p(S, t; S', T)$ multiplié par dS' est une probabilité de trouver le prix d'une action dans l'intervalle $[S' < S_T < S' + dS']$, à condition qu'il était S à l'instant t .

$$p(S, t; S', T)dS' = P(S' < S_T < S' + dS' / S(t) = S)$$

On peut donc considérer $p(S, t; S', t')$ comme une probabilité de transition d'un état (S, t) vers un état (S', t') .

La densité conditionnelle conjointe $p(S, t; S', t')$ vérifie deux équations. Une équation fait intervenir les dérivées par rapport aux variables initiales (S, t) , c'est une équation Backward de Kolmogorov. L'autre équation fait intervenir les dérivées par rapport aux variables finales (S', t') , c'est une équation Forward de Kolmogorov ou l'équation de Fokker-Planck.

On peut déduire les équations Forward et Backward que vérifie la densité conditionnelle conjointe par deux facones différentes. Présentons d'abord la démonstration de Paul Willmott faite dans le livre "Paul Willmott on Quantitative finance".

1.1.1 Equation Forward de Kolmogorov

Pour déduire ces équations on considère l'approximation trinomiale du mouvement stochastique de l'actif :

$$dS_t = A(S_t, t)dt + B(S_t, t)dW, \quad A(S_t, t) = S_t\mu(S_t, t), \quad B(S_t, t) = S_t\sigma_{locale}(S_t, t)$$

Soient $\phi^-(S, t)$ et $\phi^+(S, t)$ les probabilités d'obtenir les valeurs $S + dS$ et $S - dS$ au moments $t + dt$.

$$E[dS] = \phi^-(S, t)(-dS) + \phi^+(S, t)(dS) + 0 \cdot (1 - \phi^-(S, t) - \phi^+(S, t))$$

$$Var[dS] = \phi^-(S, t)(-dS)^2 + \phi^+(S, t)(dS)^2 + 0^2 \cdot (1 - \phi^-(S, t) - \phi^+(S, t))$$

Pour trouver les $\phi^-(S, t)$ et $\phi^+(S, t)$ on utilise les expressions de l'esperance et de la variance du modèle continue :

$$E[dS] = A(S, t)dt, \quad Var[dS] = B^2(S, t)dt$$

On en obtient

$$\phi^+ = \frac{dt}{(dS)^2}(B^2(S, t) + A(S, t)dS) \quad \phi^- = \frac{dt}{(dS)^2}(B^2(S, t) - A(S, t)dS)$$

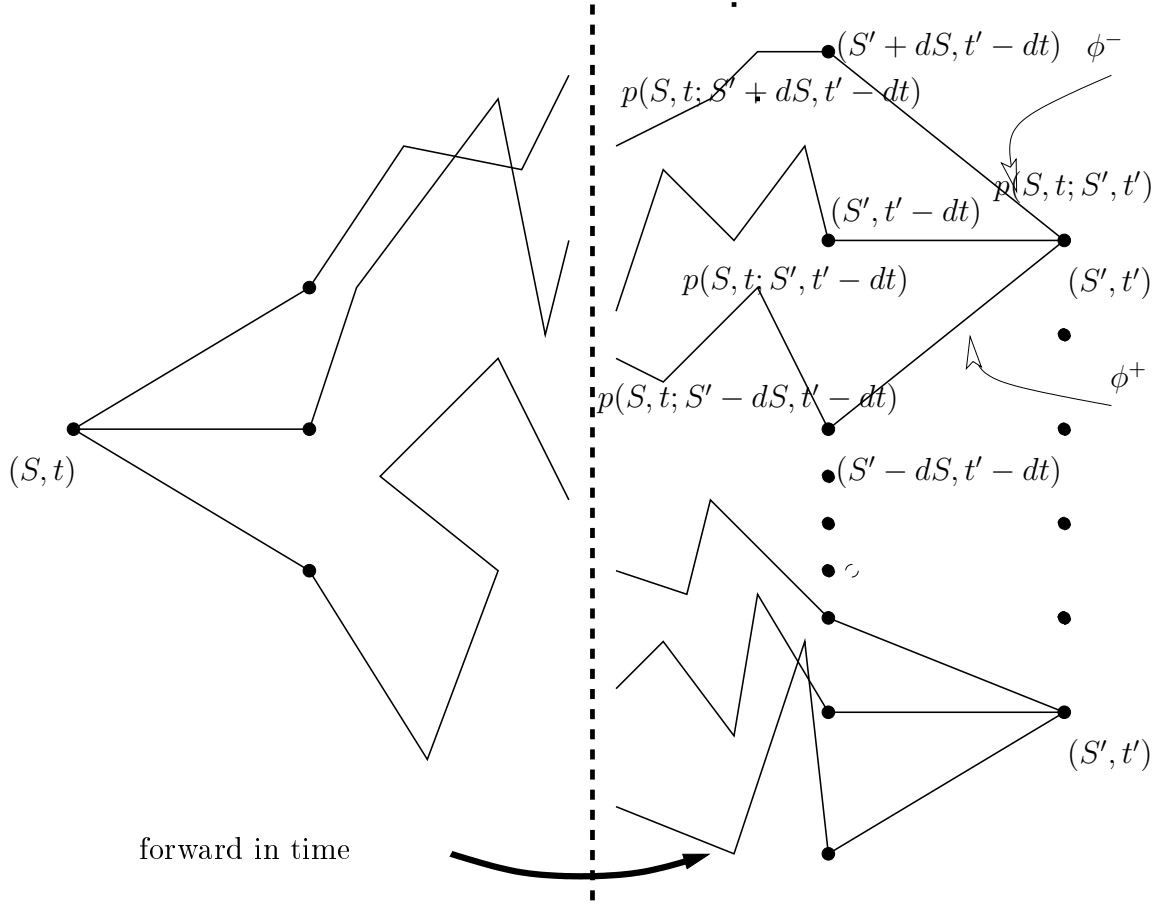


FIGURE 1 – Mouvements stochastiques elementaires pour la deduction de l'équation Forward

Considérons le Fig.1. Le point du depart (S, t) est bien déterminé. Le point final (S', t') est quelconque. On calcule la probabilité $p(S, t; S', t')$ d'arriver à (S', t') à condition être à (S, t) et on obtient l'équation suivante :

$$p(S, t; S', t') = \phi^-(S' + dS, t' - dt)p(S, t; S' + dS, t' - dt) + \\ (1 - \phi^-(S', t' - dt) - \phi^+(S', t' - dt))p(S, t; S', t' - dt) + \phi^+(S' - dS, t' - dt)p(S, t; S' - dS, t' - dt)$$

On utilise maintenant la décomposition en série de Taylor en point (S', t') et on obtient l'équation aux dérivées partielles pour $p(S, t; S', t')$:

$$\frac{\partial p(S, t; S', t')}{\partial t'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S'^2} (B^2(S', t') p(S, t; S', t')) - \frac{\partial p(S, t; S', t')}{\partial S'} (A(S', t') p(S, t; S', t'))$$

C'est une équation Forward de Kolmogorov qui s'appelle aussi l'équation de Fokker-Planck. Cette équation exige la condition initiale à t et doit être résolue pour $t' > t$.

Il existe une solution speciale de cette équation avec la fonction Delta de Dirac pour la condition initiale qui represente une variable qui commence avec la probabilité 1 de S à $t = t'$:

$$p(S, t; S', t')|_{t'=t} = \delta(S' - S) \\ p(S, t; S', T) = \frac{1}{\sigma S' \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left(-\frac{1}{\sigma^2 S' (T-t)} \ln \left(\frac{S'}{S} \right) - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right)^2$$

1.1.2 Equation Backward de Kolmogorov

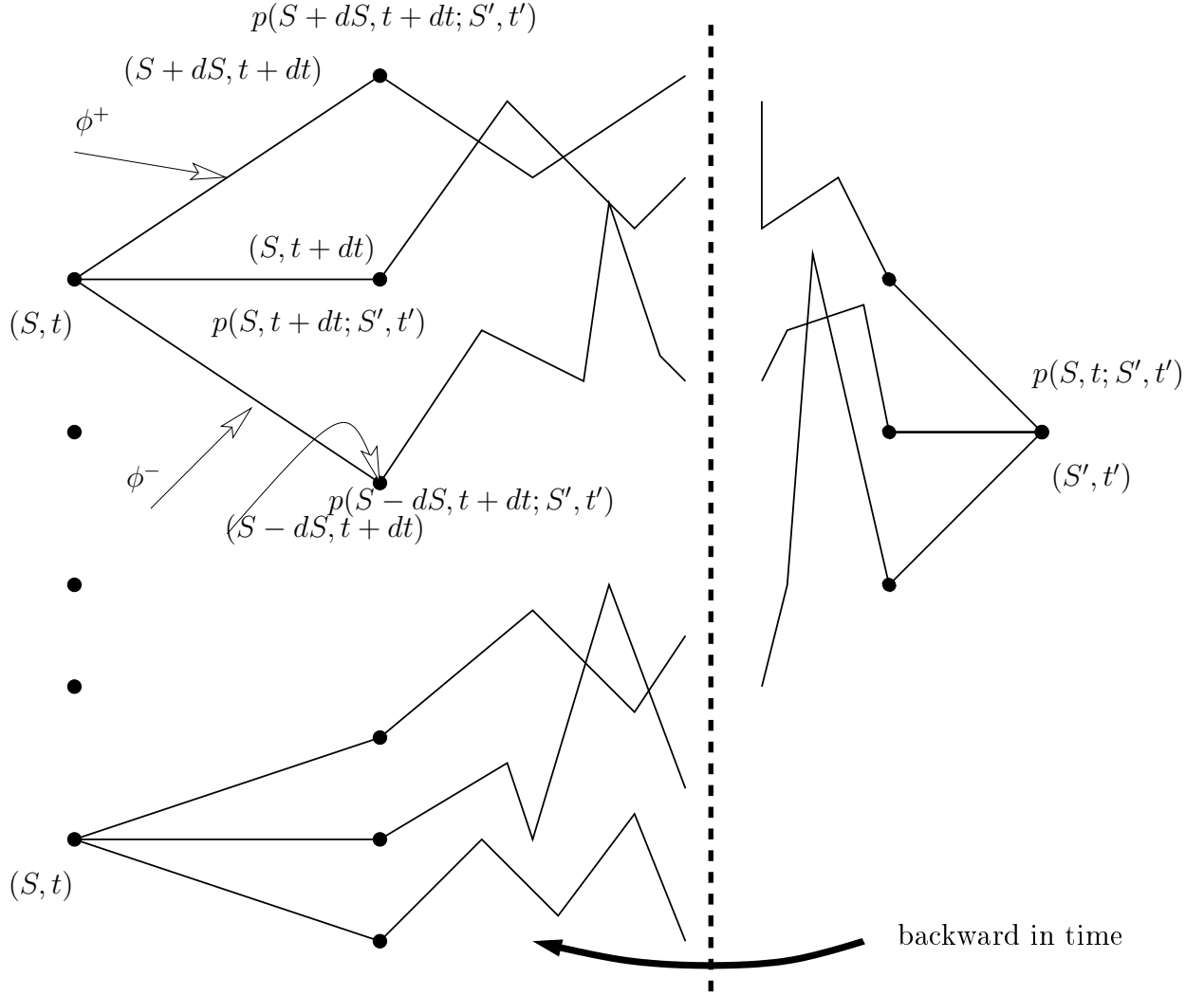


FIGURE 2 – Mouvements stochastiques elementaires pour la deduction de l'équation Backward

Considérons le Fig.2. Le point du depart (S, t) est quelconque. Le point final (S', t') est bien déterminé. quelconque. On calcule la probabilité $p(S, t; S', t')$ d'arriver à (S', t') à condition être à (S, t) et on obtient l'équation suivante :

$$p(S, t; S', t') = \phi^-(S, t)p(S - dS, t + dt; S', t') + (1 - \phi^-(S, t) - \phi^+(S, t))p(S, t + dt; S', t') + \phi^+(S, t)p(S + dS, t + dt; S', t')$$

On utilise maintenant la décomposition en série de Taylor en point (S', t') et on obtient l'équation aux dérivés partielles pour $p(S, t; S', t')$:

$$\frac{\partial p(S, t; S', t')}{\partial t} + \frac{1}{2}B^2(S, t)\frac{\partial^2 p(S, t; S', t')}{\partial S^2} + A(S, t)\frac{\partial p(S, t; S', t')}{\partial S} = 0$$

C'est une équation Backward de Kolmogorov Cette équation exige la condition final à t' et doit être résolue pour $t < t'$.

La densité

$$p(S, t; S', T) = \frac{1}{\sigma S' \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2 S'(T-t)} \ln\left(\frac{S'}{S}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2$$

vérifie bien sûr cette équation.

Presentons aussi une autre déduction de ces équations basée sur le théorème de Feynman-Kac.

Notre idée donc est la suivante : la fonction de densité conditionnelle conjointe relie l'équation de BS et l'équation de Dupire et on cherche à déduire d'abord l'équation de Fokker-Planck, puis l'équation de Dupire.

1.2 Théorème Feynman-Kac

Supposons que la fonction $F(x, t)$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + A(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} B^2(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad F(t = T, x) = \Phi(x)$$

Soit S_t un processus stochastique \mathcal{F}_t mesurable qui vérifie l'équation stochastique :

$$dS_t = A(S_t, t)dt + B(S_t, t)dW_t, \quad A(S_t, t) = S_t \mu(S_t, t), \quad B(S_t, t) = S_t \sigma_{locale}(S_t, t).$$

Supposons que le processus $A(S_t, t) \frac{\partial F}{\partial x}|_{x=S_t} \in L^2$

Alors $F(x, t)$ peut être représentée de la forme d'une espérance conditionnelle :

$$F(x, t) = \mathbb{E}[\Phi(S_T) / S_t = x]$$

1.2.1 Equation backward de Kolmogorov

Déduisons cette équation du Théorème de Feynman-Kac.

Soit la fonction de la condition finale une fonction indicatrice :

$$\Phi(y) = \mathbb{I}_{[S', S' + dS']}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [S', S' + dS'] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$F(x, t) = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{[S', S' + dS']}(S_T) / S_t = x] = P[S' < S_T < S' + dS' / S_t = x] = p(x, t; S', T) dS'$$

La fonction $F(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles, donc la densité conditionnelle vérifie la même équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t}(x, t; S', T) + A(x, t) \frac{\partial p(x, t; S', T)}{\partial x} + \frac{1}{2} B^2(x, t) \frac{\partial^2 p(x, t; S', T)}{\partial x^2} = 0 \\ p(x, t = T; S', T) = \delta(x - S') \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t}(S, t; S', T) + S \mu(S, t) \frac{\partial p(S, t; S', T)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_{locale}^2(S, t) S^2 \frac{\partial^2 p(S, t; S', T)}{\partial S^2} = 0 \\ p(S, t = T; S', T) = \delta(S - S') \end{cases}$$

Cette équation s'appelle l'équation backward de Kolmogorov.

1.2.2 Equation forward de Kolmogorov ou l'équation de Fokker-Planck. Dédution.

On va montrer que la densité conditionnelle $p(x, t; S', T)$ vérifie aussi l'équation de Kolmogorov forward ou l'équation de Fokker-Planck.

$$\frac{\partial p(x, t; y, T)}{\partial T} + \frac{\partial (A(S', T)p(x, t; S', T))}{\partial S'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (B^2(S', T)p(x, t; S', T))}{\partial S'^2} = 0$$

Nous sommes dans les conditions du théorème de Feynman-Kac. Soit

$$\tau \in [t, T]$$

Ecrivons le différentiel d'un processus stochastique :

$$dF(S_\tau, \tau) = \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial F}{\partial x} dS_\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} d\langle S \rangle_\tau$$

Ici

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=S_\tau}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(x, \tau)}{\partial x^2} \Big|_{x=S_\tau}$$

En utilisant le lemme d'Ito on obtient

$$dF(S_\tau, \tau) = \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial F}{\partial x} dS_\tau + \frac{1}{2} B^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} d\tau$$

Intégrons chaque membre sur l'intervalle $[t, T]$ et prenons l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T dF(S_\tau, \tau) / S_t = x \right] = \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial F}{\partial x} dS_\tau + \frac{1}{2} B^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} d\tau / S_t = x \right]$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[F(S_T, T) - F(x, t) / S_t = x] = \\ & \mathbb{E} \left[\int_t^T \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} + A(S_\tau, \tau) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} B^2(S_\tau, \tau) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) d\tau / S_t = x \right] + \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{\partial F}{\partial x} B(S_\tau, \tau) dW_\tau / S_t = x \right] \end{aligned}$$

L'espérance

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{\partial F}{\partial x} B(S_\tau, \tau) dW_\tau / S_t = x \right] = \int_t^T \frac{\partial F}{\partial x} B^2(S_\tau, \tau) \mathbb{E}[dW_\tau] / S_t = x = 0$$

grâce aux propriétés du mouvement Brownien et du fait que $\frac{\partial F}{\partial x} B^2(S_\tau, \tau)$ indépendant de dW_τ .

Le théorème du Feynman-Kac dit que

$$\mathbb{E}[F(S_T, T) / S_t = x] = F(x, t)$$

Donc

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} + A(S_\tau, \tau) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} B^2(S_\tau, \tau) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) d\tau / S_t = x \right] = 0$$

On utilise le théorème de Fubini et le fait que l'espérance est un opérateur linéaire. Donc

$$\int_t^T \mathbb{E}_{S_\tau} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}(S_\tau, \tau) + A(S_\tau, \tau) \frac{\partial F}{\partial x}(S_\tau, \tau) + \frac{1}{2} B^2(S_\tau, \tau) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(S_\tau, \tau) \right) / S_t = x \right] d\tau = 0$$

On peut réécrire l'espérance conditionnelle avec la fonction de densité conditionnelle $p(x, t; y, \tau)$:

$$\int_0^\infty \int_t^T p(x, t; y, \tau) \left(\frac{\partial F(y, \tau)}{\partial \tau} + A(y, \tau) \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{2} B^2(y, \tau) \frac{\partial^2 F(y, \tau)}{\partial y^2} \right) dy d\tau = 0$$

On intègre deux fois par parties chaque nombre et on utilise le fait que

$$p(x, t; \infty, \tau) = 0, \quad p(x, t; 0, \tau) = 0, \quad p(x, t; y, 0) = 0, \quad p(x, t; y, T) = 0$$

Donc

$$\int_0^\infty \int_t^T F(y, \tau) \left(-\frac{\partial p(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial(A(y, \tau)p(x, t; y, \tau))}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(B^2(y, \tau)p(x, t; y, \tau))}{\partial y^2} \right) dy d\tau = 0$$

On obtient donc l'équation forward de Kolmogorov :

$$\frac{\partial p(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial(A(y, \tau)p(x, t; y, \tau))}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(B^2(y, \tau)p(x, t; y, \tau))}{\partial y^2} = 0$$

Soit

$$\frac{\partial p(S, t; S', T)}{\partial T} - \frac{\partial(S' \mu(S', T)p(S, t; S', T))}{\partial S'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma^2(S', T)(S')^2 p(S, t; S', T))}{\partial (S')^2} = 0$$

1.3 Dédution de l'équation de Dupire

On commence par la formule de prix d'un Call europeene en terme d'une fonction conjointe conditionnelle :

$$V(S, t) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty p(S, t; S', T) \Phi(S') dS', \quad \Phi(S') = \max(S' - K, 0)$$

On peut réécrire la formule

$$V(S, t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty p(S, t; S', T) (S' - K) dS'$$

Calculons les dérivées partielles :

1)

$$\frac{\partial V(S, t; K, T)}{\partial K} = -e^{-r(T-t)} p(S, t; S', T) (S' - K) |_{S'=K} - e^{-r(T-t)} \int_K^\infty p(S, t; S', T) dS' = -e^{-r(T-t)} \int_K^\infty p(S, t; S', T) dS'$$

2)

$$\frac{\partial^2 V(S, t; K, T)}{\partial K^2} = e^{-r(T-t)} p(S, t; S', T) |_{S'=K} = e^{-r(T-t)} p(S, t; K, T)$$

$$p(S, t; K, T) = -e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 V(S, t; K, T)}{\partial K^2}$$

On a obtenu Breeden-Litzenberg formule qui permet de calculer la fonction de densité de transition à partir du prix de "Butterfly spread" :

$$\frac{\partial^2 V(S, t; K, T)}{\partial K^2} = \frac{V(S, t, K + \Delta K, T) - 2V(S, t, K, T) + V(S, t, K - \Delta K, T)}{(\Delta K)^2}$$

On discute la calibration de la fonction de densité de transition directement aux prix de l'option Butterfly plus tard.

3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(S, t; K, T)}{\partial T} &= -rV + e^{-r(T-t)} \int_K^\infty \frac{\partial(p(S, t; S', T))}{\partial T} (S' - K) dS' = \\ &= -rV + e^{-r(T-t)} \int_K^\infty \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma_{locale}^2(t, S')(S')^2 p(S, t; S', T))}{\partial (S')^2} - \frac{\partial(rS' p(S, t; S', T))}{\partial S'} \right] dS' \\ &\quad - rV + e^{-r(T-t)} [I_1 + I_2] \end{aligned}$$

a)

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_K^\infty \frac{\partial^2(\sigma_{locale}^2(S', T)(S')^2 p(S, t; S', T))}{\partial (S')^2} (S' - K) dS'$$

b)

$$I_2 = - \frac{\partial(rS' p(S, t; S', T))}{\partial S'} (S' - K) dS'$$

On calcule les intégrales I_1 et I_2 .

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} (S' - K) \frac{\partial(\sigma_{locale}^2(t, S')(S')^2 p(S, t; S', T))}{\partial S'} \Big|_K^\infty - \frac{1}{2} \int_K^\infty \frac{\partial(\sigma_{locale}^2(S', T)(S')^2 p(S, t; S', T))}{\partial S'} dS' = \\ &\quad \frac{1}{2} (\sigma_{locale}^2(K, T) K^2 p(S, t; K, T)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -(rS' p(S, t; S', T)) (S' - K) \Big|_K^\infty + \int_K^\infty (rS' p(S, t; S', T)) dS' = \\ &= - \int_K^\infty r(S' - K) p(S, t; S', T) dS' + K \int_K^\infty r p(S, t; S', T) dS' \end{aligned}$$

On reprend le calcul

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(S, t; K, T)}{\partial T} &= -rV + e^{-r(T-t)} \frac{1}{2} (\sigma_{locale}^2(K, T) K^2 p(S, t; K, T)) + \\ &\quad e^{-r(T-t)} \left(- \int_K^\infty r(S' - K) p(S, t; S', T) dS' + K \int_K^\infty r p(S, t; S', T) dS' \right) = \\ &\quad -rV + e^{-r(T-t)} \frac{1}{2} (\sigma_{locale}^2(K, T) K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial (K)^2} + rV - rK \frac{\partial V(S, t; K, T)}{\partial K} \end{aligned}$$

On a obtenue l'équation de Dupire.

$$\frac{\partial V}{\partial T} + rK \frac{\partial V}{\partial K} - \frac{1}{2} \sigma_{locale}^2(K, T) K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 K} = 0$$

1.3.1 Relation entre la volatilité locale et la volatilité implicite

On exprime la volatilité locale de l'équation de Dupire.

$$\sigma_{locale}^2(T, K) = \frac{\frac{\partial V_{dupire}(S, t; K, T)}{\partial T} + rK \frac{\partial V_{dupire}(S, t; K, T)}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 V_{dupire}(S, t; K, T)}{\partial K^2}}$$

Le lien entre la volatilité locale et la volatilité implicite s'effectue à l'aide de la définition de la volatilité implicite :

$$V_{dupire}(K, T; S, t, \sigma_{locale}(T, K)) = V_{BS}(S, t; K, T, \sigma_{implicite}(T, K))$$

En effet on choisit $\sigma_{implicite}(T, K)$ de telle façon que

$$V_{BS}(S, t; K, T, \sigma_{implicite}(T, K)) = V^{marche}$$

De plus on calibre σ_{locale} pour que

$$V_{dupire}(K, T; S, t, \sigma_{locale}(T, K)) = V^{marche}$$

On en déduit la formule

$$V_{dupire}(K, T; S, t, \sigma_{locale}(T, K)) = V_{BS}(S, t; K, T, \sigma_{implicite}(T, K))$$

On doit calculer les dérivées partielles tenant compte du fait que $\sigma_{implicite}(T, K)$ dépend de T et K .

$$\sigma_{locale}^2(T, K) = \frac{\frac{\partial V_{BS}(K, T, \sigma_{implicite}(T, K))}{\partial T} + rK \frac{\partial V_{BS}(K, T, \sigma_{implicite}(T, K))}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 V_{BS}(K, T, \sigma_{implicite}(T, K))}{\partial K^2}}$$

Alors on peut écrire :

$$\sigma_{locale}^2(T, K) = \frac{\frac{\partial V_{BS}(K, T, \sigma_{imp})}{\partial T} + \frac{\partial V_{BS}(K, T, \sigma_{imp}(T, K))}{\partial \sigma_{imp}} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial T} + rK \frac{\partial V_{BS}(K, T, \sigma_{imp})}{\partial K} + rK \frac{\partial V_{BS}(K, T, \sigma_{imp}(T, K))}{\partial \sigma_{imp}} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial}{\partial K} \left(\frac{\partial V_{BS}(K, T, \sigma_{imp})}{\partial K} + \frac{\partial V_{BS}(K, T, \sigma_{imp}(T, K))}{\partial \sigma_{imp}} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} \right)}$$

On calcule explicitement la deuxième dérivée et on obtient :

$$\sigma_{locale}^2(T, K) = \frac{\frac{\partial V_{BS}}{\partial T} + \frac{\partial V_{BS}}{\partial \sigma_{imp}} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial T} + rK \frac{\partial V_{BS}}{\partial K} + rK \frac{\partial V_{BS}}{\partial \sigma_{imp}} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \left(\frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial K^2} + 2 \frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial K \partial \sigma_{imp}} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} + \frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial \sigma_{imp}^2} \left(\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} \right)^2 + \frac{\partial V_{BS}}{\partial \sigma_{imp}} \frac{\partial^2 \sigma_{imp}}{\partial K^2} \right)}$$

Les formules suivantes sont très utiles :

La valeur de l'option Call européenne

$$V^{BS}(K, T) = S_i N(d_1(S, t; K, T, \sigma_{imp})) - K e^{-r(T-t)} N(d_2(S, t; K, T, \sigma_{imp}))$$

$$d_1(K, T, \sigma_{imp}) = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma_{imp}(K, T)^2/2)(T-t)}{\sigma_{imp}(K, T) \sqrt{T-t}},$$

$$d_2(K, T, \sigma_{imp}) = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma_{imp}(K, T)^2/2)(T-t)}{\sigma_{imp}(K, T) \sqrt{T-t}}$$

Les dérivées sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V^{BS}(K, T, \sigma_{imp})}{\partial \sigma_{imp}} &= S\sqrt{T-t}N'(d_1) \\
\frac{\partial V^{BS}(K, T, \sigma_{imp})}{\partial T} &= \frac{S\sigma_{imp}N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(d_2) = \frac{\partial V^{BS}(S, t, \sigma_{imp})}{\partial \sigma_{imp}} \frac{\sigma_{imp}}{2(T-t)} + rKe^{-r(T-t)}N(d_2) \\
\frac{\partial V^{BS}(K, T, \sigma_{imp})}{\partial K} &= -\sqrt{T-t}N(d_2) \\
\frac{\partial^2 V^{BS}(K, T, \sigma_{imp})}{\partial K^2} &= \frac{\partial V^{BS}(K, T, \sigma_{imp})}{\partial \sigma_{imp}} \frac{1}{K^2\sigma(T-t)} \\
\frac{\partial^2 V^{BS}(K, T, \sigma_{imp})}{\partial \sigma_{imp} \partial K} &= \frac{\partial V^{BS}(K, T, \sigma_{imp})}{\partial \sigma_{imp}} \frac{d_1}{K\sigma_{imp}\sqrt{T-t}} \\
\frac{\partial^2 V^{BS}(K, T, \sigma_{imp})}{\partial \sigma_{imp}^2} &= \frac{\partial V^{BS}(S, t, \sigma_{imp})}{\partial \sigma_{imp}} \frac{d_1 d_2}{\sigma_{imp}}
\end{aligned}$$

On injecte toutes les dérivées dans la formule et on obtient :

$$\sigma_{locale}^2(T, K) = 2 \frac{\frac{\sigma_{imp}}{2\sqrt{T-t}} + \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial T} + rK \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K}}{\frac{1}{\sigma_{imp}(T-t)} + \frac{2Kd_1}{\sigma\sqrt{T-t}} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} + \frac{K^2 d_1 d_2}{\sigma_{imp}} \left(\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K}\right)^2 + K^2 \frac{\partial^2 \sigma_{imp}}{\partial K^2}}$$

Considérons deux cas .

- Premier cas : $\sigma_{imp}(K, T) = \sigma_{imp}(K)$, $\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial T} = 0$, $t = 0$.

$$\sigma_{locale}^2(T, K) = \frac{\sigma_{imp}^2 + 2rKT\sigma_{imp} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K}}{1 + 2K\sqrt{T}d_1 \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} + K^2 d_1 d_2 T \left(\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K}\right)^2 + K^2 T \sigma_{imp} \frac{\partial^2 \sigma_{imp}}{\partial K^2}}$$

Il est claire qu'on peut construire la courbe de volatilité locale à partir de la courbe de volatilité implicite calibrée.

- Deuxieme cas : $\sigma_{imp}(K, T) = \sigma_{imp}(T)$, $\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} = 0$, $t = 0$.

Donc

$$\sigma_{locale}^2(T) = \sigma_{imp}^2 + 2T\sigma_{imp} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial T}$$

On peut réécrire cette formule de la forme

$$\sigma_{locale}^2(T) = \frac{\partial(T\sigma_{imp}^2)}{\partial T}$$

Considerons T comme une variable, on peut donc écrire :

$$\sigma_{locale}^2(\tau) = \frac{\partial(\tau\sigma_{imp}^2)}{\partial \tau}$$

On intègre chaque membre

$$\int_0^T \sigma_{locale}^2(\tau) d\tau = \int_0^T d(\tau\sigma_{imp}^2)$$

$$\int_0^T \sigma_{locale}^2(\tau) d\tau = T \sigma_{imp}^2(T)$$

$$\sigma_{imp}^2(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_{locale}^2(\tau) d\tau$$

En conclusion : la volatilité locale est donc la moyenne quadratique de la volatilité locale sur la durée de la vie de l'option.

- Troisième cas : Général.

Soit $t = 0$. Introduisons le moneyness x :

$$x = \ln(S/K) + rT, \quad d_{1,2} = (x \pm \frac{1}{2} \sigma_{imp}^2 T) / (\sigma_{imp} \sqrt{T})$$

Introduisons $\hat{\sigma}(T, x)$. Faisons le changement de variables :

$$\sigma_{imp}(T, K) \rightarrow \hat{\sigma}(T, x)$$

Recalculons les dérivées :

$$\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial T} = \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial T} + \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial T} = r \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial T}$$

$$\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} = \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial K} = \frac{-1}{K} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{imp}}{\partial K^2} = \left(\frac{-1}{K}\right)^2 \frac{\partial^2 \hat{\sigma}}{\partial x^2} + \frac{1}{K^2} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x}$$

On injecte ces dérivées dans la formule pour la volatilité locale et on obtient

$$\sigma_{locale}^2(T, x) = \frac{\hat{\sigma}^2 + 2rT \hat{\sigma} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial T}}{(1 - \frac{x}{\hat{\sigma}} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x})^2 + \hat{\sigma} T \frac{\partial^2 \hat{\sigma}}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \hat{\sigma}^2 T^2 (\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x})^2}$$

Cette expression peut être considérée comme l'équation aux dérivées partielles :

$$2rT \hat{\sigma} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial T} = \sigma_{locale}^2 (1 - \frac{x}{\hat{\sigma}} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x})^2 + \sigma_{locale}^2 \hat{\sigma} T \frac{\partial^2 \hat{\sigma}}{\partial x^2} - \sigma_{locale}^2 \frac{1}{4} \hat{\sigma}^2 T^2 (\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x})^2 - \hat{\sigma}^2$$

Faisons tendre T vers 0 : $T \rightarrow 0$ Alors dans ce cas l'équation se résout explicitement :

$$\sigma_{locale}^2(0, x) = \frac{\hat{\sigma}^2(0, x)}{(1 - \frac{x}{\hat{\sigma}} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x})^2}$$

On remarque qu'on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\frac{dx}{\sigma_{locale}(0, x)} = d\left(\frac{x}{\hat{\sigma}(0, x)}\right)$$

Soit

$$\int_0^z \frac{dx}{\sigma_{locale}(0, x)} = \int_0^z d\left(\frac{x}{\hat{\sigma}(0, x)}\right) = \frac{z}{\hat{\sigma}(0, z)}, \quad z \in \mathbb{R}^+$$

Faisons le changement de variables $x = zy$. L'équation

$$\hat{\sigma}(0, z) = \frac{z}{\int_0^z \frac{dx}{\sigma_{locale}(0, x)}}$$

devient

$$\hat{\sigma}(0, z) = \frac{1}{\int_0^1 \frac{dy}{\sigma_{locale}(0, zy)}}$$

Nous avons démontré que, dans la limite de très courte maturité, la volatilité implicite est égale à la moyenne harmonique des volatilités locales, le résultat établie par Berestycki et Busca. Supposons maintenant que $\sigma(0, z)$ est dérivable en $z = 0$.

Calculons $\frac{d\hat{\sigma}(0, z)}{dz}|_{z=0}$. Reprenons l'équation

$$\hat{\sigma}(0, z) = \frac{z}{\int_0^z \frac{dx}{\sigma_{locale}(0, x)}}$$

et la dérivons par rapport à z :

$$\frac{d\hat{\sigma}(0, z)}{dz} = \frac{\int_0^z \frac{dx}{\sigma_{locale}(0, x)} - z \frac{1}{\sigma_{locale}(0, z)}}{(\int_0^z \frac{dx}{\sigma_{locale}(0, x)})^2}$$

Pour calculer le

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d\hat{\sigma}(0, z)}{dz}$$

on utilise le règle de l'Hopital

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d\hat{\sigma}(0, z)}{dz} = \frac{\frac{1}{\sigma_{locale}(0, z)} - \frac{1}{\sigma_{locale}(0, z)} + \frac{z}{\sigma_{locale}^2(0, z)} \frac{d\sigma_{locale}(0, z)}{dz}}{2 \int_0^z \frac{dx}{\sigma_{locale}(0, x)} \frac{1}{\sigma_{locale}(0, z)}} = \frac{\frac{z}{\sigma_{locale}(0, z)} \frac{d\sigma_{locale}(0, z)}{dz}}{2 \int_0^z \frac{dx}{\sigma_{locale}(0, x)}} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_{locale}(0, z)}{dz}$$

On a démontré que la pente à la monnaie de la volatilité locale est égale, pour courtes maturités, à 2 fois la pente à la monnaie de la volatilité implicite.

$$\frac{d\hat{\sigma}(0, 0)}{dz} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_{locale}(0, 0)}{dz}$$

• Reprenons le Premier cas : $\sigma_{imp}(K, T) = \sigma_{imp}(K)$, $\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial T} = 0$, $t = 0$. C'est le cas du TP1 du cours "Introduction à la Calibration".

Nous avons interpolé par les splines cubiques les points de la volatilité implicite calculés à partir des données pour les options cotées en London International Financial Futures and Option Exchange (LIFFE) le 22 Aout 2001.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
Strike K_i	5125	5225	5325	5425	5525	5625	5725	5825
Prix d'option	475	405	340	280.5	226	179.5	139	105

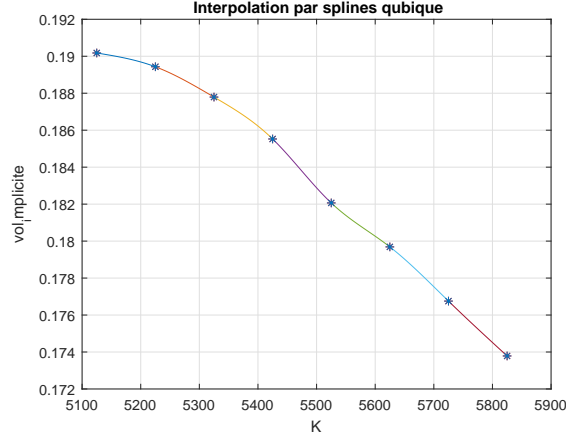


FIGURE 3 – Smile de volatilité implicite en fonction du strike

Sur chaque intervalle $[K_{i-1}, K_i]$ on a tracé la courbe de volatilité implicite $\sigma^{implicite}(K)$ (K est une variable continue) après avoir calculé les coefficients $C_1, C_2, C_3, \dots, C_6$ et $C_0 = 0, C_7 = 0$.

$$\begin{aligned} \sigma_i^{implicite}(K) = & \frac{(K - K_i)^3}{(K_{i-1} - K_i)} \frac{C_{i-1}}{6} + \frac{(K - K_{i-1})^3}{(K_i - K_{i-1})} \frac{C_i}{6} + \\ & + (\sigma^{implicite}(K_{i-1}) - \frac{C_{i-1}}{6}(K_i - K_{i-1})^2) \frac{(K - K_i)}{(K_{i-1} - K_i)} + (\sigma^{implicite}(K_i) - \frac{C_i}{6}(K_i - K_{i-1})^2) \frac{(K - K_{i-1})}{(K_i - K_{i-1})} \end{aligned}$$

En utilisant la formule pour $\sigma^{implicite}(T, K)$ interpolée par splines cubiques on calcule sur chaque intervalle $[K_{i-1}, K_i]$ les dérivés :

$$\frac{\partial \sigma^{implicite}}{\partial K} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \sigma^{implicite}}{\partial K^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \sigma^{imp}}{\partial K} \right)_i(K) = & \frac{(K - K_i)^2}{(K_{i-1} - K_i)} \frac{C_{i-1}}{2} + \frac{(K - K_{i-1})^2}{(K_i - K_{i-1})} \frac{C_i}{2} + \frac{(\sigma^{imp}(K_{i-1}) - \frac{C_{i-1}}{6}(K_i - K_{i-1})^2)}{(K_{i-1} - K_i)} + \frac{(\sigma^{imp}(K_i) - \frac{C_i}{6}(K_i - K_{i-1})^2)}{(K_i - K_{i-1})} \\ \left(\frac{\partial^2 \sigma^{implicite}}{\partial K^2} \right)_i(K) = & \frac{(K - K_i)}{(K_{i-1} - K_i)} C_{i-1} + \frac{(K - K_{i-1})}{(K_i - K_{i-1})} C_i \end{aligned}$$

Sur chaque intervalle $[K_{i-1}, K_i]$ tracer la courbe de volatilité locale.

$$\begin{aligned} (\sigma_{locale}(K, T))^2 = & \frac{(\sigma^{implicite})^2 + 2rKT\sigma^{implicite} \frac{\partial \sigma^{implicite}}{\partial K}}{1 + 2K\sqrt{T}d_1 \frac{\partial \sigma^{implicite}}{\partial K} + K^2Td_1d_2 \left(\frac{\partial \sigma^{implicite}}{\partial K} \right)^2 + K^2T\sigma^{implicite} \frac{\partial^2 \sigma^{implicite}}{\partial K^2}}, \\ d_{12} = & \frac{\ln(S/K) + rT \pm 1/2(\sigma^{implicite})^2T}{\sigma^{implicite}\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

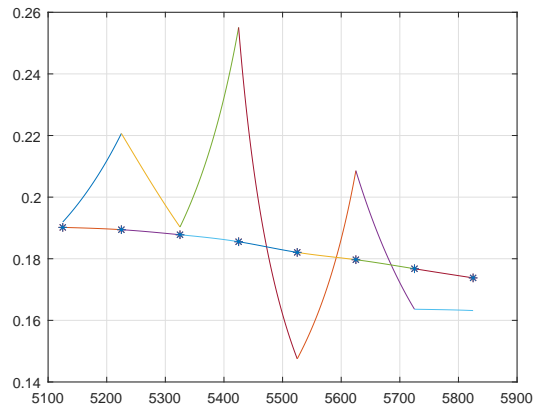


FIGURE 4 – Courbe de la volatilité locale en fonction du strike

On voit que l'allure de la courbe est trop sensible à la méthode de l'interpolation.

La même conclusion résulte des graphes du smile interpolé et de de volatilité locale obtenue à partir de volatilité implicite.

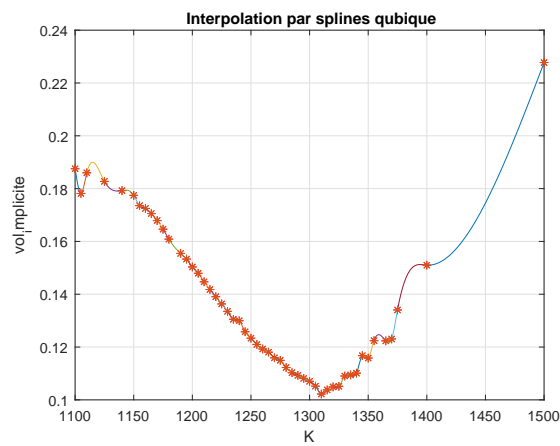


FIGURE 5 – Smile de volatilité implicite en fonction du strike

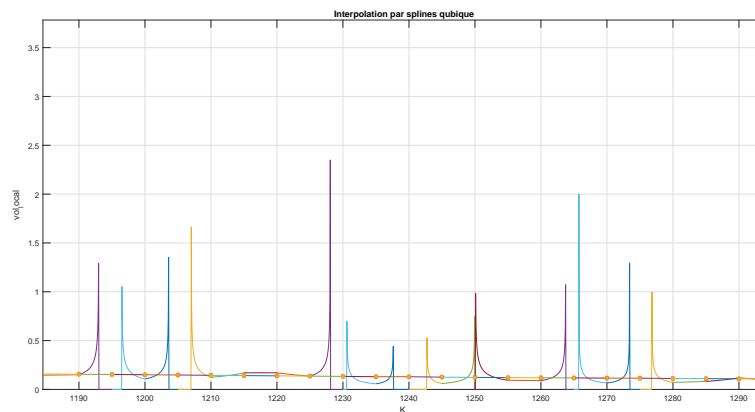


FIGURE 6 – Courbe de la volatilité locale en fonction du strike