

CY TECH

OPTION INGÉNIERIE FINANCIÈRE et ACTUARIAT

Irina Kortchemski

Calibration des Modèles Financiers et Simulation

Cours 1. Delta et Gamma-hedging (Delta et Gamma-couverture) dans le marché complet et incomplet.

On étudie la performance de la stratégie de delta-couverture dans le modèle de Black et Scholes et celui de volatilité stochastique. Dans les deux cas le trading a lieu uniquement aux dates discrètes t_i et le portefeuille n'est rebalancé que dans le nombre fini de points temporels pendant la vie de l'option.

On applique une stratégie de portefeuille autofinçant qui représente une stratégie dynamique d'achat ou de vente d'action et de prêts ou d'emprunts à la banque, donc la valeur du portefeuille n'est pas modifiée par l'ajout ou retrait du cash.

P&L (profit and loss) de la stratégie de delta-couverture est mesuré par la différence entre le prix de l'option à la maturité et la valeur finale du portefeuille de couverture.

1 Couverture des options

1.1 Delta-hedging continue

On se place dans un univers où les investisseurs sont insensibles au risque ("neutre" au risque), donc où le rendement attendu des actifs risqués est celui de l'actif sans risque : r . Cette étude se fera tout d'abord dans le cadre du modèle Black-Scholes standard, donc avec volatilité constante σ , où le prix à l'instant t , S_t , d'un actif vérifie :

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

Nous vendons une option, un call européen avec le prix $V(S, t)$. Nous allons mettre en place une stratégie de couverture d'un produit dérivé, un call européen, avec un portefeuille constitué d'une part de l'actif sous-jacent, une action, et d'autre part de l'actif sans risque, du cash placé en banque. Le portefeuille de couverture P_t s'écrit par la formule:

$$P_t = A(S_t, t) S_t + B_t$$

où

- $A(S, t)$ est le nombre d'unité de l'actif risqué dans le portefeuille. Cette quantité s'appelle aussi **ratio de couverture**.

- B est la quantité d'argent, solde du compte.

Ce portefeuille est construit d'une combinaison d'actions et de l'argent de telle façon qu'il ait le même risque que celui de l'option.

Dans la littérature on peut rencontrer un portefeuille

$$\Pi_t = A_t S_t + B_t - V_t$$

"Hedging portfolio is composed of

- *Short position in an option: $-V_t$*
- *Long position in S_t shares*
- *A_t amount of the cash B_t*

A short option hedging portfolio starts with some initial capital and invest in the stock and money market account so that the portfolio $\Delta_t S_t + B_t$ at each time t agrees with V_t ."

On dit que le portefeuille Π_t doit être Delta neutre:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial S} = A_t - \frac{\partial V_t}{\partial S} = 0$$

Dans ce cours nous utilisons le portefeuille $P_t = A(S_t, t) S_t + B_t$, nous étudions la différence entre le portefeuille et l'option à couvrir

$$P_t - V_t = A_t S_t + B_t - V_t$$

Pour avoir la cohérence entre les cours on présente ici les autres notations parfois utilisées.

- $V_t(\theta) = \theta_t \cdot S_t = \theta_t^1 S_t^1 + \theta_t^0 S_t^0$

- le nombre d'unité de l'actif risqué dans le portefeuille $A_t = \theta_t^1$
- la quantité d'argent $B_t = \theta_t^0 S_t^0 = e^{rt} \cdot \theta_t^0$

Considérons deux cas.

Cas 1 On vend l'option au prix $V_0 = V(S_0, t = 0)$ et on utilise cette quantité d'argent pour construire le portefeuille de couverture:

- $P_0 = V_0$ à $t = 0$.
- $A_0 S_0$ est l'investissement dans des actifs risqués.
- $B_0 = V_0 - A_0 S_0$ à $t = 0$ est l'investissement du montant résiduel dans des actifs sans risque.
- On veut assurer $P_t = V_t$ à chaque instant t . C'est la couverture.

Cas 2 On vend l'option pour le prix $V_0 = V(S_0, t = 0)$ et on utilise cette quantité de l'argent et de l'argent supplémentaire pour construire le portefeuille de couverture:

- $A_0 S_0$ est l'investissement dans des actifs risqués.
- B_0 (cash) est quelconque. Cette somme est investie dans des actifs sans risque.
- $P_0 = A_0 S_0 + B_0$ à $t = 0$.
- $P_t^{actualis} = P_t - (P_0 - V_0)e^{rt}$
- $P_0^{actualis} = P_0 - (P_0 - V_0) = V_0$
- On veut assurer que $P_t^{actualis} = V_t$ à chaque instant t . C'est la couverture.

Dans les deux cas notre objectif est d'étudier les variations dV_t et dP_t afin d'assurer $P_t = V_t$. On va montrer que la couverture est possible à deux conditions:

- La stratégie d'investissement est telle que A_t représente Delta de l'option: $A_t = N'(d_1)$.
- L'option vérifie l'équation de Black et Scholes.

On utilise la lemme d'Ito

$$d\langle S \rangle_t = \sigma^2 S^2 dt$$

pour calculer la variation de l'option:

$$dV_t = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} d\langle S \rangle_t = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 dt$$

La variation de portefeuille est

$$dP_t = A(S_t, t) dS_t + dB_t$$

Notez que dans l'équation, nous avons pas inclus un terme dA_t . C'est en fait un point assez subtil, car nous allons le voir (plus tard) que la quantité des actions A_t dépend en fait de S_t . Cependant, si nous pensons à une situation réelle, à tout instant de temps, il faut choisir A_t , puis le maintenir dans le portefeuille alors que l'actif se déplace aléatoirement. Donc, l'équation est en fait la variation de la valeur du portefeuille, pas un différentiel. Si nous prenions une vraie équation différentielle on a

$$dP_t = A(S, t) dS_t + dA(S, t) S_t + dB_t$$

mais nous devons nous rappeler que A ne change pas avec un petit intervalle de temps, puisque nous choisissons A , et alors S change aléatoirement. Nous ne sommes pas autorisés à regarder

dans l'avenir, (sinon, nous pourrions devenir riche sans risque, ce qui n'est pas autorisé par la condition de non-arbitrage) et donc A n'est pas autorisée à contenir toute informations sur l'évolution future des prix des actifs.

C'est pourquoi Ito calcul stochastique est utilisé.

Donc on vend ou on achète des actions aux instants $t, t+dt, t+2dt, \dots$ et entre ces moments la quantité d'actions A ne varie pas :

$$dA_t = A(S + dS, t + dt) - A(S, t) = 0.$$

De plus on applique une stratégie de portefeuille autofinanciant, donc la valeur de P_t n'est pas modifié par l'ajout ou retrait du cash.

En effet on peut écrire

$$dP_t = A(S_t, t)dS_t + dA(S_t, t) S_t + dB_t = A(S_t, t)dS_t + dA(S_t, t) S_t + d(e^{rt}\theta_t^0) =$$

$$A(S_t, t)dS_t + dA(S_t, t) S_t + re^{rt}\theta_t^0 dt + e^{rt}d\theta_t^0$$

L'achat ou la vente des actifs s'effectuent grace à une quantité de l'argent θ_t^0 :

$$dA(S_t, t) S_t + e^{rt}d\theta_t^0 = 0$$

Donc

$$dP_t = A(S_t, t)dS_t + re^{rt}\theta_t^0 dt = A(S_t, t)dS_t + rB_t dt$$

Considérons Cas 2.

Nous voulons assurer la couverture de l'option. Supposons qu'on assure la couverture à $t = t_0$. On va examiner comment évoluent l'option et le portefeuille dans le temps et essayer de maintenir cette couverture. On va calculer donc $V_t + dV_t, P_t + dP_t$ et $dV_t - dP_t$.

Calculons $dV_t - dP_t$.

On veut que cette différence soit non aléatoire (sans risque):

$$dV_t - dP_t = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 dt - (A_t dS_t + rB_t dt) =$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 dt - (A_t dS_t + rB_t dt) =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S} - A_t\right) dS_t + \left(\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - rB_t dt\right)$$

Pour éliminer le risque localement (à chaque instant temporel) on choisit

$$A_t = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

En effet S_t est connue à un instant t . Donc

$$d(V - P)_t = \left(\frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t) - A_t\right) \cdot S_t(rdt + \sigma dW_t) + \left(\frac{\partial V}{\partial t}(S_t, t) dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t, t) dt - rB_t dt\right)$$

est prévisible si on annule le terme avec le mouvement Brownien.

Puisque $V_t - P_t$ est maintenant sans risque dans l'intervalle $[t, t + dt]$, alors le principe de non-arbitrage affirme que

$$d(V - P)_t = rdt(V - P)_t$$

Donc

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - rB_tdt = rdt(V_t - A_t S_t - B_t)$$

Dans le cas de couverture continue l'option est couverte exactement.

On remplace A_t dans l'équation précédente et on obtient l'équation de Black et Scholes pour le prix de l'option $V(t, S)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

Dans cette équation les variables t et S sont indépendantes et S est le prix de l'actif à la date t .

Si on intègre l'équation:

$$d(V - P)_t = rdt(V - P)_t \Rightarrow \int_0^t \frac{d(V - P)_t}{(V - P)_t} = \int_0^t rdt$$

on obtient

$$V(S_t, t) - P(S_t, t) = (V(S_0, 0) - P(S_0, 0))e^{rt}$$

soit

$$V(S_t, t) = P(S_t, t) - (P(S_0, 0) - V(S_0, 0))e^{rt}$$

On définit le portefeuille actualisé

$$P_t^{actualise} = P_t - (P_0 - V_0)e^{rt}$$

La valeur du portefeuille actualisé $P_t^{actualise}$ coïncide avec celle de l'option V_t à chaque instant t . La somme $(P_0 - V_0)$ représentant le cash supplémentaire acquit les intérêts qu'on déduit du portefeuille total.

Dans le cas de la couverture discrète (Chapitre 1.2) il existe toujours l'erreur de la couverture qui s'appelle Profit et Loss:

$$P\&L = d(V - P)_t - rdt(V - P)_t$$

Considérons Cas 1.

$$d(V - P)_t = dV_t - dP_t = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}rS_tdt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2dt - (A_t dS_t + rB_tdt) = 0$$

Pour éliminer le risque localement (à chaque instant temporel) on choisit

$$A = \frac{\partial V}{\partial S}$$

On remplace aussi B_t par

$$B_t = V_t - A_t S_t = V_t - S_t \frac{\partial V}{\partial S}$$

et on obtient aussi l'équation de Black et Sholes pour le prix de l'option:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

En conclusion: Si l'option vérifie l'équation de Black et Scholes alors elle peut être couverte à chaque instant, l'erreur de la couverture est exactement zero. Le marché est complet.

1.2 Contrôle stochastique

Lorsque le prix du portefeuille P_t est tout le temps positif, on peut exprimer la stratégie d'investissement de manière équivalente en termes de la proportion (ou poids) de la richesse totale investie en l'actif risqué, notée par ω_t . Cette proportion est reliée au nombre d'unités à acheter via

$$\omega_t = \frac{A_t S_t}{P_t}.$$

En termes de la proportion investie en actif risqué, l'équation du portefeuille autofinçant devient

$$\frac{dP_t}{P_t} = (1 - \omega_t) r dt + \omega_t \frac{dS_t}{S_t} = (r + (\mu - r)\omega_t) dt + \omega_t \sigma dW_t.$$

On voit que la volatilité d'un portefeuille qui investit la proportion ω_t dans l'actif risqué est égale à ω_t , et que son espérance de rendement en excès du rendement de l'actif sans risque est égale à $\omega_t(\mu - r)$ si le drift de l'actif μ n'est pas égale à r . Dans ce portefeuille, le montant investi en l'actif sans risque est donné par $P_t(1 - \omega_t)$, c'est-à-dire, si $\omega_t > 1$, la stratégie consiste à emprunter pour investir un montant supérieur à la valeur du portefeuille en l'actif risqué. Dans ce cas, on dit que le portefeuille comporte un levier. Le levier augmente à la fois l'espérance du rendement et le risque (volatilité) du portefeuille.

Introduisons une fonction d'utilité $U : x \rightarrow \ln(x)$. On cherche à obtenir une valeur maximale de portefeuille

$$\Phi(t, x) = \sup_{\omega_t} \mathbb{E}[U(P_T) | P_t = x]$$

grâce à une stratégie optimale ω_t .

La valeur $\Phi(t, x)$ est la solution de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellmann.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sup_{\omega_t} [(\omega_t \mu + (1 - \omega_t) r) x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \omega_t^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}] = 0 \\ \Phi(t = T, x) = \ln(x), \quad x > 0 \end{cases}$$

1.3 Delta-hedging discrete

Dans le modèle de Black-Scholes, pour que l'option soit complètement répliquée, le portefeuille de couverture doit être réajusté en continu. En pratique, il est bien entendu réajusté un

nombre fini de fois, à des dates discrètes, ce qui conduit à une erreur de couverture (erreur de discrétisation).

L'actif sous-jacent S est un processus stochastique $S(t)$, $t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(0) = S_0 \quad (1)$$

On note σ la volatilité de l'action.

La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Discretisons l'intervalle temporelle:

$$[t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N = T]$$

On peut présenter le prix de l'action à chaque t_i par la formule récurrente:

$$S_{i+1} = S_i \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sqrt{\Delta t} \sigma N(0, 1)\right)$$

La valeur théorique de l'option Call européenne est donné par la formule de Black et Sholes:

$$V^{BS}(S_i, t_i) = S_i N(d_1(S_i, t_i)) - K e^{-r(T-t_i)} N(d_2(S_i, t_i))$$

$$d_1(S_i, t_i) = \frac{\ln(S_i/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t_i)}{\sigma \sqrt{T - t_i}} \quad d_2(S_i, t_i) = \frac{\ln(S_i/K) + (r - \sigma^2/2)(T - t_i)}{\sigma \sqrt{T - t_i}}$$

Il est possible de simuler à l'aide de MatLab l'évolution de l'actif et de constater que la courbe d'évolution du prix de l'option correspondante appartient à la surface Black-Scholes.

Analytical Solution of European Call and the projection of MC simulation of Price Analytical Solution of European Call and the projection of MC simulation of Price evol

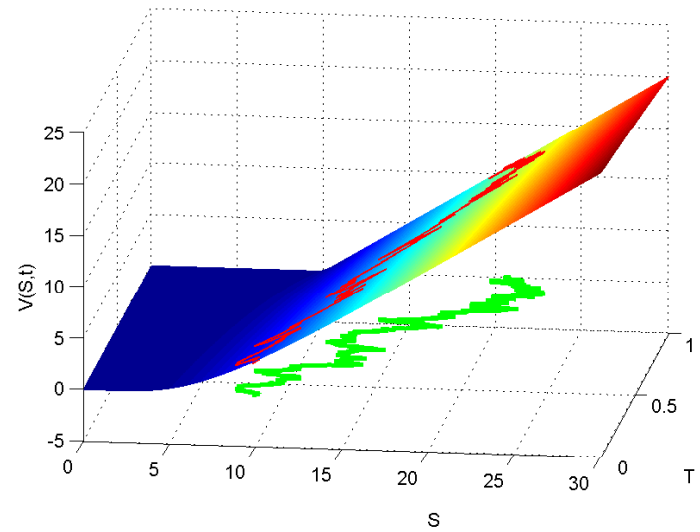
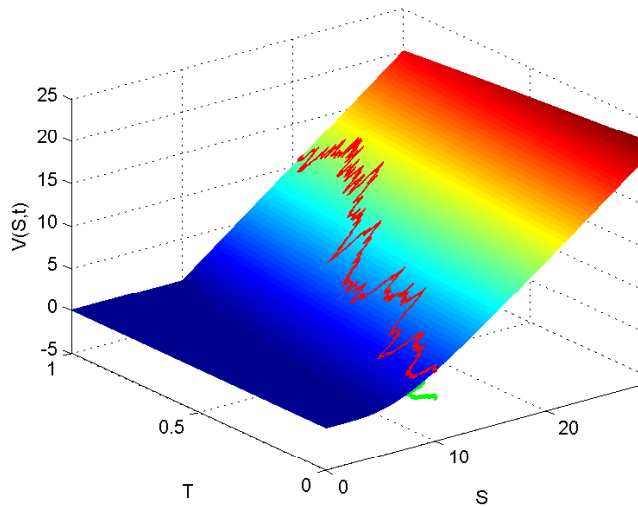


Figure 1: Courbe d'évolution (rouge) du prix de l'option Call EU

Figure 2: Courbe d'évolution (verte) du prix de l'actif sur les plan S-t

On visualise le portefeuille à l'instant $t = t_i$ et à l'instant $t = t_{i+1}$

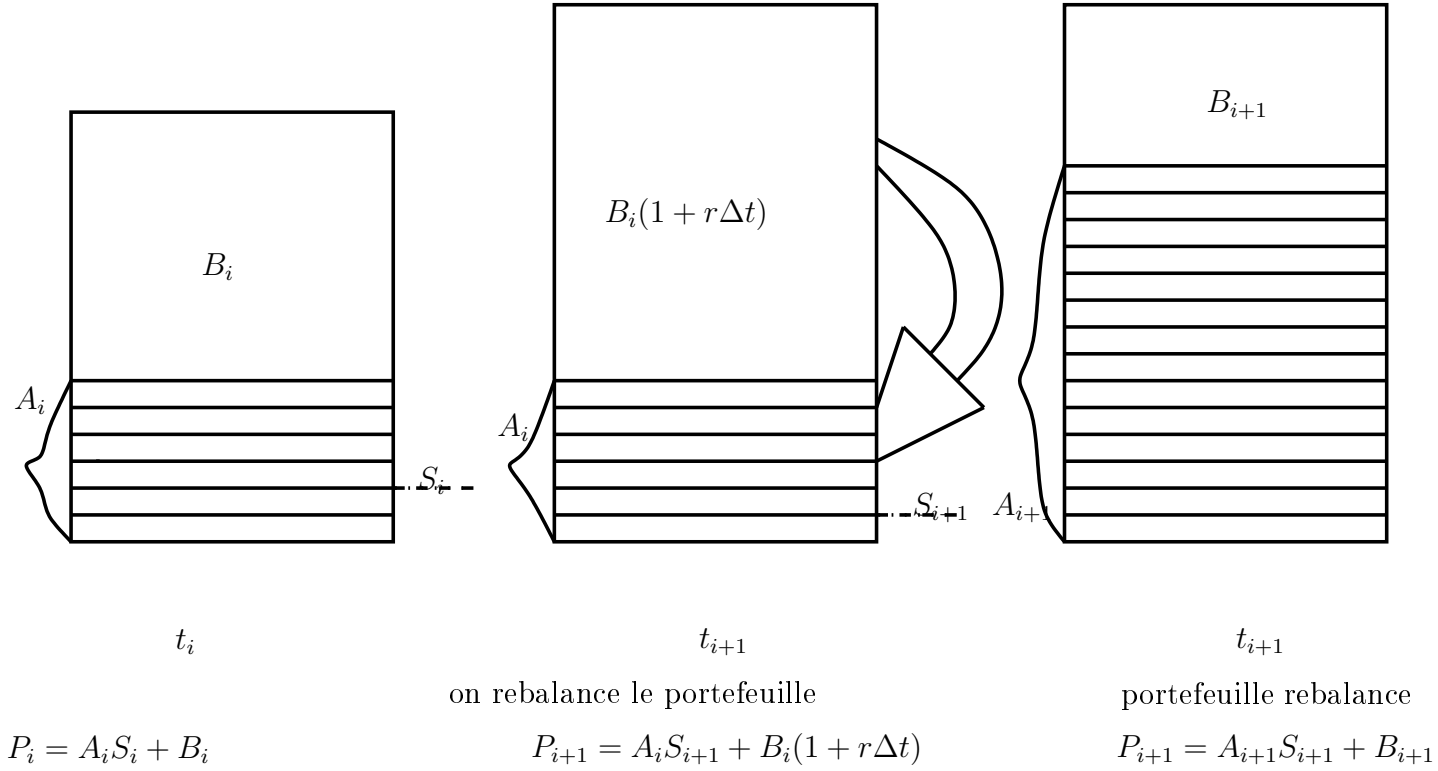


Figure 3: Portefeuille de la couverture en t_i et $t_i + \Delta t$

La valeur du portefeuille à l'instant $t = t_i$ est

$$P_i = A_i S_i + B_i$$

Pendant l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ la quantité d'actions ne varie pas. La valeur du portefeuille à l'instant $t = t_{i+1}$ est

$$P_{i+1} = A_i S_{i+1} + B_i(1 + r\Delta t)$$

On doit maintenant rébalancer le portefeuille c'est à dire recalculer la quantité d'actions et la quantité du cash dans le portefeuille. Pour cela on utilise la procédure d'autofinancement:

$$P_{i+1} = A_{i+1} S_{i+1} + B_{i+1}$$

et

$$A_i S_{i+1} + B_i(1 + r\Delta t) = A_{i+1} S_{i+1} + B_{i+1}$$

On a montré que la quantité d'actions qu'on doit avoir pour couvrir le portefeuille est

$$A_{i+1} = \frac{\partial V^{BS}(S_{i+1}, t_{i+1})}{\partial S_{i+1}}$$

Donc

- Si

$$A_{i+1} - A_i > 0$$

on achète des actions en utilisant **le portefeuille** P_{i+1} ou on emprunte de la banque.

- Si

$$A_{i+1} - A_i < 0$$

on vend des actions et place du cash à la banque.

Donc la quantité du cash dans le portefeuille est donné par la formule:

$$B_{i+1} = P_{i+1} - A_{i+1} S_{i+1} = A_i S_{i+1} + B_i(1 + rdt) - A_{i+1} S_{i+1}$$

On choisit de façon arbitraire la quantité du cash à $t = 0$.

La différence entre le prix de l'option et celui de portefeuille évolue selon la loi:

$$d(V - P) = rdt(V - P)$$

On intègre cette équation et on obtient:

$$V(S_i, t_i) - P(S_i, t_i) = (V(S(0), 0) - P(S(0), 0))e^{rt_i}$$

soit

$$V(S_i, t_i) = P(S_i, t_i) + (V(S(0), 0) - P(S(0), 0))e^{rt_i}$$

On définit le portefeuille actualisé

$$P^{actualise}(S_i, t_i) = P(S_i, t_i) + (V(S_0, 0) - P(S_0, 0))e^{rt_i}$$

Par les simulations on peut vérifier que $P^{actualise}(S_i, t_i)$ et le prix de l'option BS évoluent de la même façon à chaque instant temporel.

Si l'option est dans la monnaie ($S_T > K$) la valeur de delta (A_T) = 1.

Si l'option est hors la monnaie ($S_T < K$) la valeur de delta (A_T) = 0.

Dans la figure 2 ci-après on retrouve l'évolution de l'action S_i , de la quantité du cash B_i et de la quantité des actions A_i

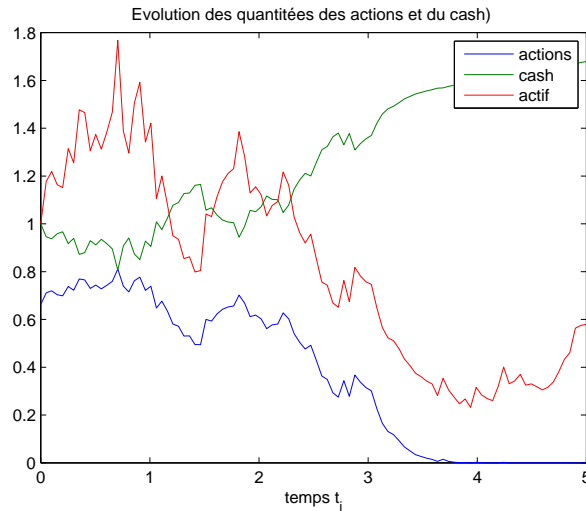


Figure 4: Evolution de S_i , A_i , B_i

L'évolution de la quantité d'actions et de la valeur du cash sont corrélés avec l'évolution de l'action et ainsi lorsque l'action augmente il est nécessaire d'acheter des actions en empruntant à la banque (A_i augmente et B_i diminue) alors que lorsque celle-ci diminue il faut vendre les actions pour prêter à la banque (B_i augmente et A_i diminue)

Dans la figure ci-après on retrouve l'évolution de portefeuille de couverture actualisé $P_i^{actualise}$ et du call européenne qui finit hors la monnaies: $V^{BS}(S_i, t_i)$.

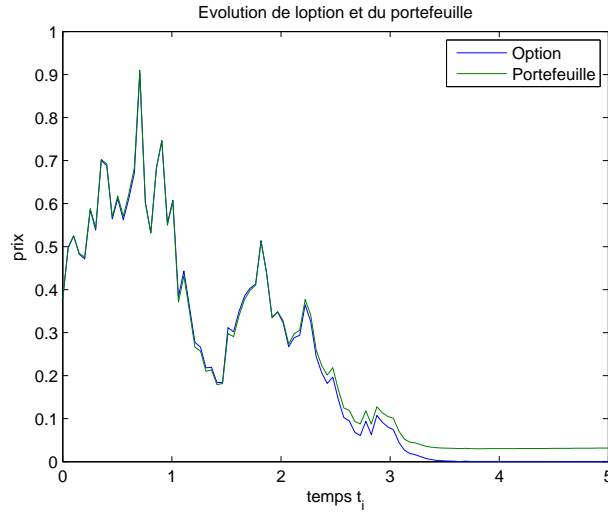


Figure 5: Evolution du portefeuille et de l'option

On constate que le portefeuille de couverture évolue de la même façon sauf une petite erreur. Dans la figure ci-après on trace l'erreur correspondant à la différence entre le portefeuille de couverture $P_i^{actualise}$ et du call européenne:

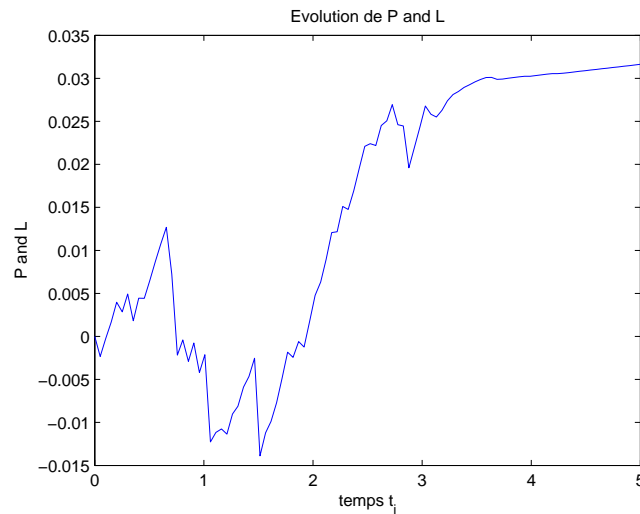


Figure 6: Evolution de l'erreur de la couverture $P^{actualise}(T) - V^{BS}(T)$

1.3.1 Profit et Loss

La performance de la stratégie de delta-couverture est donné par l'indice de Profit et Loss final:

$$P\&L(S_0, T) = \mathbb{E}[P^{actualise}(S_T, T) - V^{BS}(S_T, T)]$$

On peut simuler un grand nombre N_{mc} de chemins d'évolution des prix $P^{actualise}(S_T, T)$ et $V^{BS}(S_T, t_T)$. sur l'intervalle du temps $[0, T]$, en partant toujours de S_0 . Pour chaque chemin n on cherche la valeur finale. Puis on calcule la moyenne arithmétique:

$$\mathbb{E}[P\&L] = \sum_{n=1}^{N_{mc}} (P^{actualise(n)}(S_T, T) - V^{BS}(S_T, T)) / N_{mc}$$

Sur les figures vous voyez la fonction de densité de $P\&L$ sur l'intervalle $[-0.3, 0.3]$ (l'intervalle est divisé sur 100 parties) pour le cas lorsque le portefeuille est rebalancé à chaque instant t_i . Toutes valeurs de $P\&L(S_T, T)$ sont distribuées selon une loi qui ressemble la loi normale centrée réduites. On revient à la discussion de cette question plus tard.

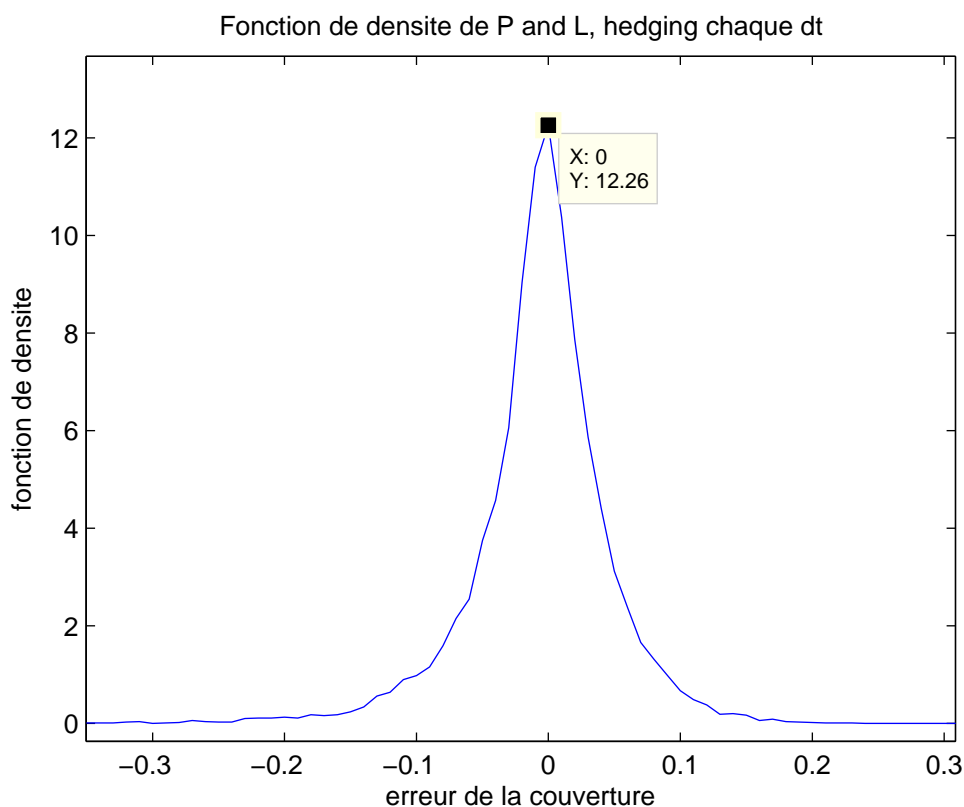


Figure 7: Fonction de densité du Profit et Loss final

1.3.2 Erreur de Couverture en Delta

Maintenant on choisit directement le nombre de discrétisation de l'intervalle temporelle. On la prendra égale à 100.

$$N = 100, \quad T = 0.5, \quad \Delta t = T/N$$

On effectue ensuite des simulations pour des nombres d'interventions du trading différents :

$$N_{trading} = 100; 25; 10$$

et une fois on ne couvre pas du tout l'option. Le nombre d'interventions du trading indique combien de fois le portefeuille est rebalancé. Par exemple, si $N = 100$ et $N_{trading} = 100$, on rébalance notre portefeuille à chaque instant t_i , si $N = 100$ et $N_{trading} = 25$, une fois sur quatre, c'est - à - dire on change la quantité des actions A_i une fois sur quatre t_i . On peut montrer par les simulation (et théoriquement en chapitre 1.8) que l'erreur de couverture est proportionnelle à Gamma de l'option qu'il faut couvrir et au $\sqrt{\Delta t}$ où Δt est l'intervalle entre deux trading successives:

$$(P^{actualise}(S_T, T) - V(S_T, T)) = \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \int_0^T e^{r(T-\tau)} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_\tau^2 dW_\tau$$

Dans la figure ci-après on retrouve l'évolution de portefeuille de couverture actualisé $P_i^{actualise}$ et du call européenne qui finit hors la monnaies: $V^{BS}(S_i, t_i)$, de quantités des actifs, du cash pour les trading une fois sur 10.

On présente ici les fonctions de densité et de repartition du Profit et Lost pour les différentes nombres d'interventions (trading). On voit que plus l'intervalles entre des trading est grande plus l'erreur de la couverture est élevée.

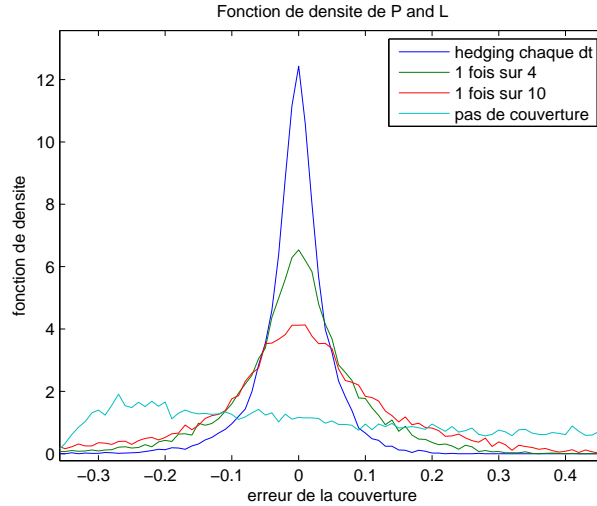


Figure 8: Fonctions de densité du Profit et Loss final

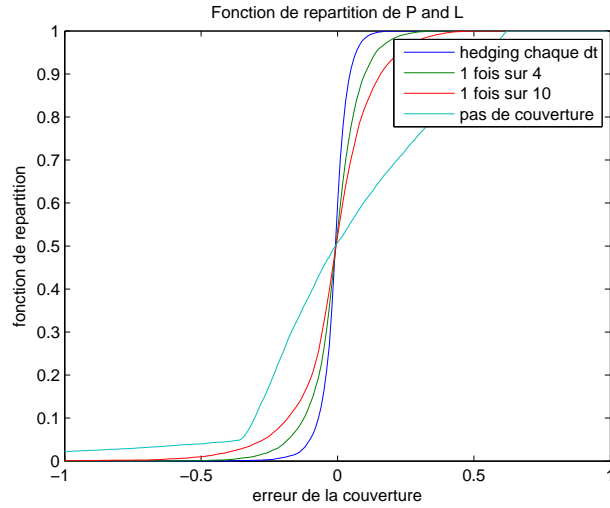


Figure 9: Fonctions de repartitions du Profit et Loss final

Présentons maintenant les fonctions de repartitions et de densité du Profit et Lost final sans hedging. On remarque qu'ils ne sont pas symétriques.

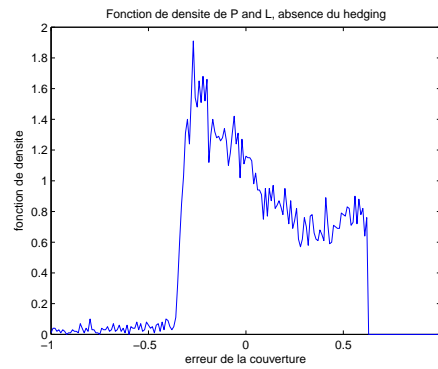


Figure 10: Fonctions de densité du Profit et Loss final. Pas de couverture

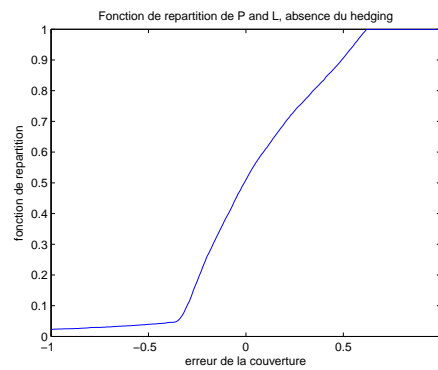


Figure 11: Fonctions de repartitions du Profit et Loss final. Pas de couverture

Ces graphes permettent de confirmer l'observation: plus la fréquence de rébalancement de notre portefeuille est élevée, plus l'erreur de couverture sera faible, c'est-à-dire meilleure sera la couverture. On peut montrer théoriquement que l'erreur de couverture est proportionnelle à Gamma de l'option qu'il faut couvrir et au $\sqrt{\Delta t}$ où Δt est l'intervalle entre deux trading successives:

$$(P^{actualise}(S_T, T) - V(S_T, T)) = \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \int_0^T e^{r(T-\tau)} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_\tau^2 dW_\tau$$

1.4 VaR: Value at Risk

La Value at Risk (ou VaR) est une mesure utilisée pour quantifier le risque de marché d'un portefeuille d'instruments financiers. Celle-ci mesure la perte potentielle maximale encourue sur une position, à un seuil (probabilité) fixé, sur un horizon de temps donné (jour, semaine, mois). La VaR répond à l'affirmation suivante : " Avec la probabilité $1- \alpha$ % nous n'allons pas perdre plus de $\gamma = \text{Var}$ euros. "

$$P(P\&L < \gamma) = \alpha$$

Sur la figure de la fonction de repartition de Profit and Loss (les valeurs negative correspondent aux pertes) on voit que

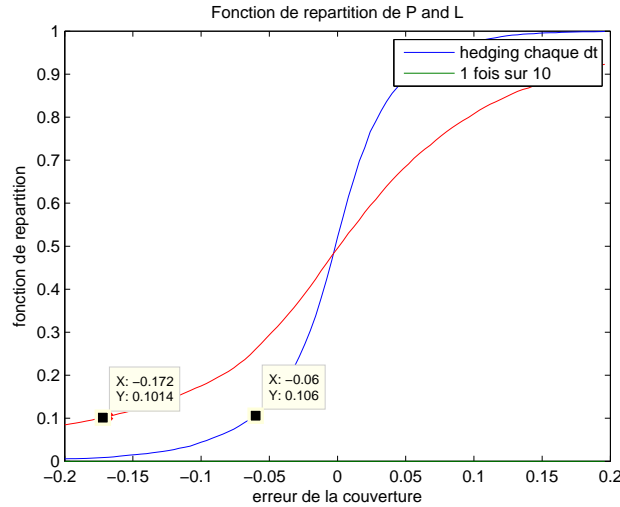


Figure 12: Value at Risk

- si on hedge chaque Δt $Var_{0.106 \sim 10\%} = -0.06$, par contre
- si on hedge une fois sur 10 $Var_{0.1014 \sim 10\%} = -0.172$

La figure Quantile-Quantile de Profit and Loss montre que Profit and Loss ne suit pas la loi normale.

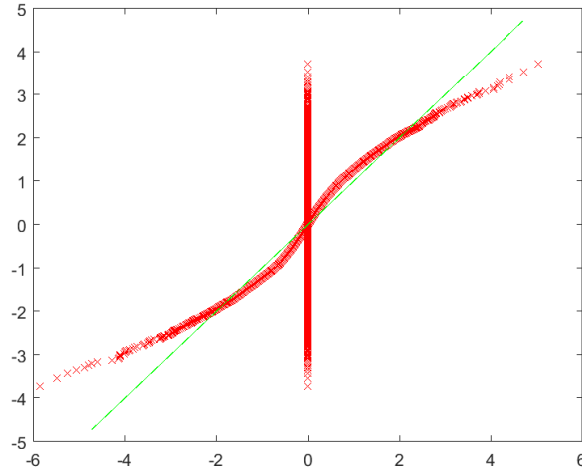


Figure 13: Quantile-Quantile de $P\&L$

1.5 Hedging et les modèles à volatilité stochastique

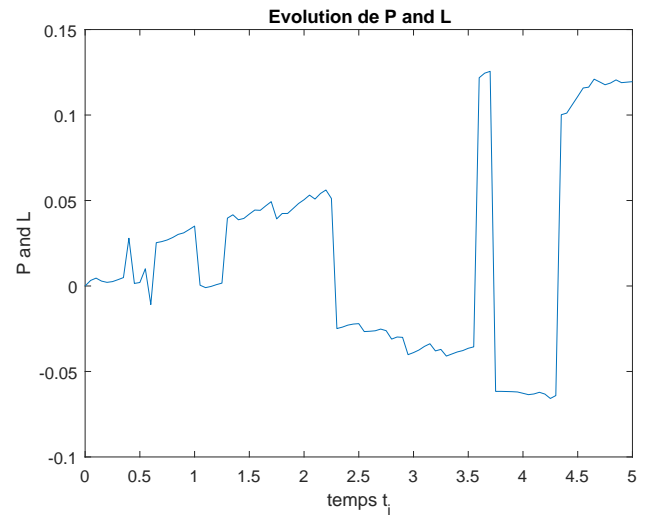
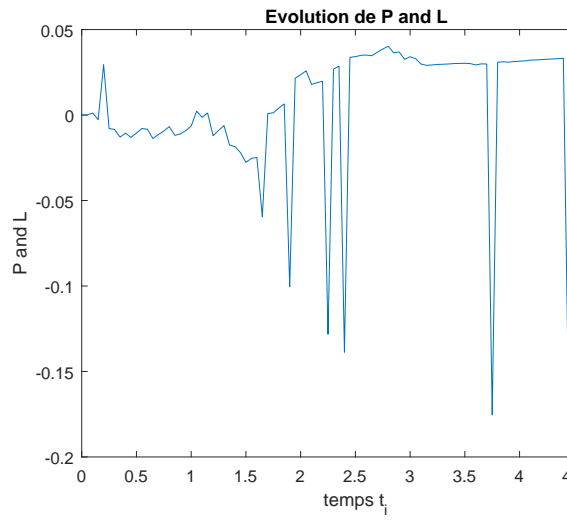
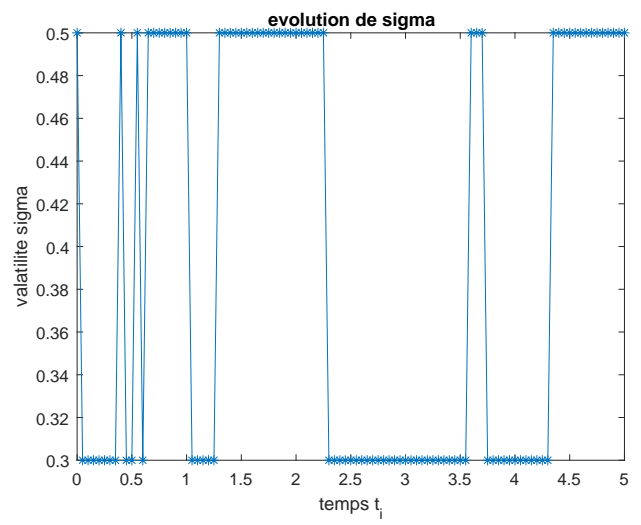
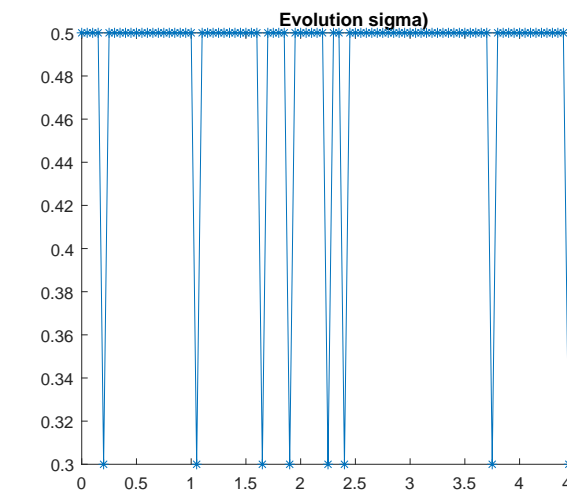
On étudie deux modèles à volatilité stochastique.

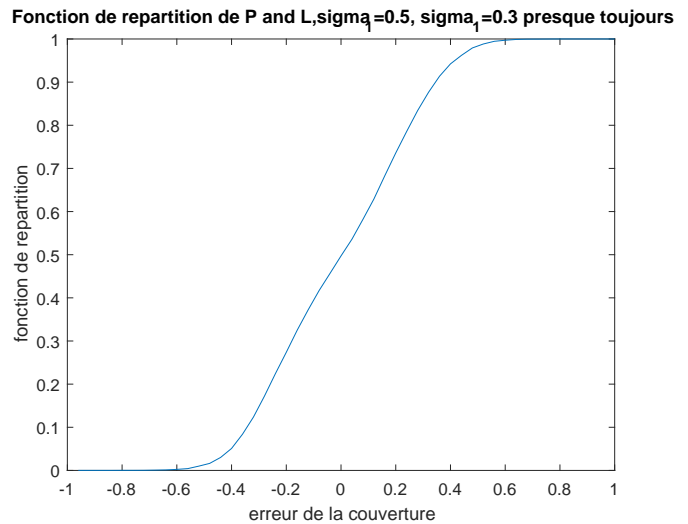
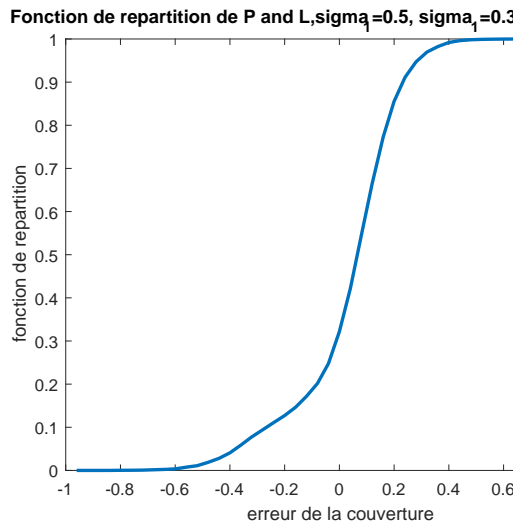
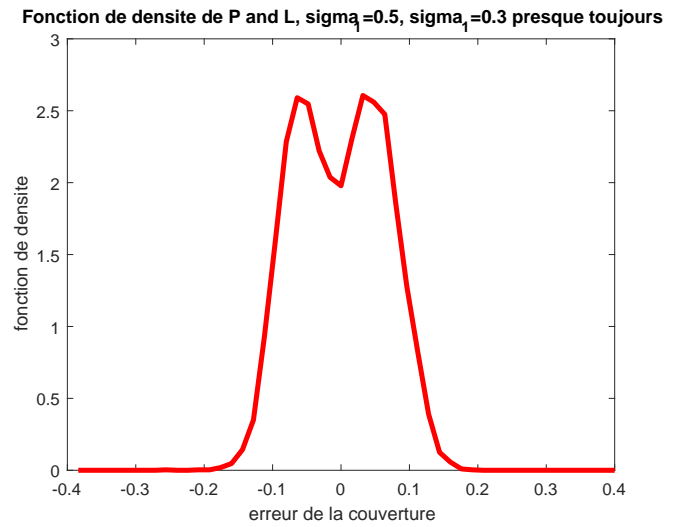
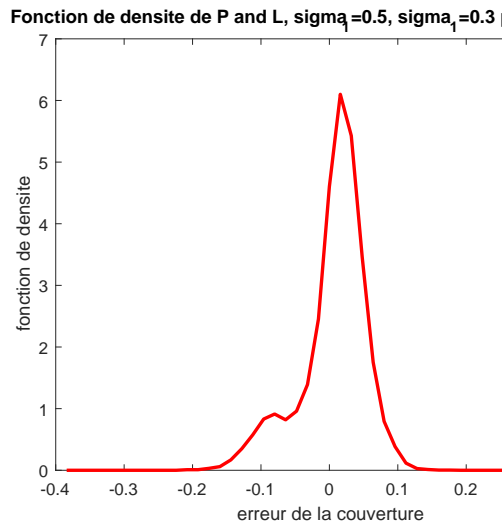
Dans le modèle 1 (à gauche sur les dessins) la volatilité ne peut prendre que deux valeurs avec les probabilités différentes:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0.3 & p = 0.88 \\ \sigma_2 = 0.5 & p = 0.12 \end{cases}$$

Dans le modèle 2 (à droite sur les dessins) les probabilités de transition à chaque t_i d'une volatilité implicite vers une autre sont les suivantes:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0.3 \\ \sigma_2 = 0.5 \\ P(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2) = 0.1 \\ P(\sigma_2 \rightarrow \sigma_1) = 0.9 \end{cases}$$





On observe que dans le modèle 1 la couverture est approximative tandis que dans modèle 2 elle est impossible.

1.6 Gamma-hedging

Dans une tentative pour rendre compte de certaines erreurs dans les opérations de couverture delta à intervalles infinis de couverture, on peut essayer d'utiliser l'informations de la dérivé seconde. La dérivée seconde d'une valeur de l'option de BS est appelé gamma, par conséquent, cette stratégie est appelée delta-gamma couverture. Pour que la couverture gamma travaille, nous avons besoin d'un instrument qui a une certaine gamma (S actif a dérivé seconde nulle). Par conséquent, les traders parlent souvent d'être long (positif) ou court (négatif) gamma, et essayer d'acheter / vendre des choses pour obtenir gamma neutre.

On vend une option européenne avec le prix $V(S, t)$.

On utilise la quantité V de l'argent après avoir vendu l'option V et de l'argent supplémentaire pour construire le portefeuille de couverture pour pouvoir éliminer le risque.

$$P(S, t) = A(S, t) S + G(S, t) C(S, t) + B$$

- $A(S, t)$ est la quantité des actions dans le portefeuille
- $G(S, t)$ est la quantité des options du type C dans le portefeuille
- B est la quantité d'argent, solde du compte.

On applique une stratégie de portefeuille autofinçant qui représente une stratégie dynamique d'achat ou de vente d'action et de prêts ou d'emprunts à la banque, dont la valeur de P n'est pas modifié par l'ajout ou retrait du cash.

On vend ou on achète des actions et des options aux instants t $t + dt$ $t + 2dt...$ de façon à éliminer une partie aléatoire dans la différence entre les valeurs du portefeuille et l'option:

$$dV - dP = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt - (AdS + GdC + rBdt)$$

Le rendement de la somme $V - P$ qui est la différence entre le prix de l'option et celui de portefeuille est bien $rdt(V - P)$.

$$d(V - P) = rdt(V - P)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt - AdS - G(\frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt) - rBdt = rdt(V - AS - GC - B)$$

On en obtient:

$$(\frac{\partial V}{\partial S} - A - G\frac{\partial C}{\partial S})dS + (\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV dt + ASrdt) = 0$$

Pour éliminer le risque localement (à chaque instant temporel) on choisit

$$A + G\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial S}$$

On remplace A dans l'équation précédente et on obtient l'équation suivante:

$$(\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV)dt + G(\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC)dt = 0$$

Cette égalité est correcte si les options $V(S, t)$ et $C(S, t)$ vérifient les équations de Black et Sholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

et

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0$$

Si la procédure de couverture se fait de façon continue la couverture de Delta est suffisante. Si le rébalancement de portefeuille de couverture a lieu aux instants discrètes l'erreur de couverture est proportionnelle à Gamma de l'option qu'il faut couvrir:

$$(P^{actualise}(S_T, T) - V(S_T, T)) = \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \int_0^T e^{r(T-\tau)} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_\tau^2 dW_\tau$$

Ici Δt est l'intervalle entre deux trading successives.

Pour éliminer l'erreur de couverture du à hedging discrete on doit construire le portefeuille de Gamma - neutre, c'est-à - dire imposer la compensation de Gamma de $P^{actualise}$ et de Gamma de l'option V (qu'il faut couvrir):

$$\frac{\partial^2 P^{actualise}(S, t)}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 P(S, t)}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2}$$

Parfois on introduit un portefeuille

$$\Pi = P - V$$

et on exige qu'il soit Gamma neutre: $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = 0$

Utilisons l'équation

$$P(S, t) - V(S, t) = A(S, t) S + G(S, t) C(S, t) + B - V(S, t)$$

On dérive chaque membre une, puis deux fois par rapport à S , on tient compte du fait que la quantité des actions A et celle des options G restent constante pendant l'intervalle $[t, t + dt]$ donc

$$\frac{\partial A}{\partial S} = 0 \quad \frac{\partial^2 A}{\partial S^2} = 0$$

et

$$\frac{\partial G}{\partial S} = 0 \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = 0$$

On obtient la relation:

$$G \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$$

De plus on a déduit

$$A + G \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Ces deux relations permettent de trouver A et G :

$$G = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} / \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \equiv \Gamma(V) / \Gamma(C)$$

$$A = \frac{\partial V}{\partial S} - G \frac{\partial C}{\partial S} \equiv \Delta(V) - \frac{\Gamma(V)}{\Gamma(C)} \Delta(C)$$

1.7 Discrete Gamma-hedging et les simulations Monté-Carlo

Pour réduire l'erreur de couverture, on peut soit augmenter la fréquence de réajustement, ce qui engendre des coûts de transaction, soit diminuer le Gamma, en rajoutant au portefeuille des instruments de couverture adaptés (en général, des options liquides). Ceci n'est pas réaliste pour la couverture d'une seule option mais peut être tout à fait envisageable lorsqu'on souhaite couvrir un portefeuille contenant beaucoup d'options sur le même sous-jacent.

On peut présenter le prix de l'action à chaque instant t_i :

$$S_{i+1} = S_i \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sqrt{\Delta t} \sigma N(0, 1)\right)$$

La valeur théorique de l'option Call européenne

$$V^{BS}(S_i, t_i) = S_i N(d_{11}(S_i, t_i)) - K_1 e^{-r(T_1 - t_i)} N(d_{21}(S_i, t_i))$$

$$C^{BS}(S_i, t_i) = S_i N(d_{12}(S_i, t_i)) - K_2 e^{-r(T_2 - t_i)} N(d_{22}(S_i, t_i))$$

$$d_{11}(S_i, t_i) = \frac{\ln(S_i/K_1) + (r + \sigma^2/2)(T_1 - t_i)}{\sigma \sqrt{T_1 - t_i}} \quad d_{21}(S_i, t_i) = \frac{\ln(S_i/K_1) + (r - \sigma^2/2)(T_1 - t_i)}{\sigma \sqrt{T_1 - t_i}}$$

$$d_{12}(S_i, t_i) = \frac{\ln(S_i/K_2) + (r + \sigma^2/2)(T_2 - t_i)}{\sigma \sqrt{T_2 - t_i}} \quad d_{22}(S_i, t_i) = \frac{\ln(S_i/K_2) + (r - \sigma^2/2)(T_2 - t_i)}{\sigma \sqrt{T_2 - t_i}}$$

La valeur du portefeuille à l'instant $t = t_i$

$$P_i = A_i S_i + G_i C(S_i, t_i) + B_i$$

La valeur du portefeuille à l'instant $t = t_{i+1}$

$$P_{i+1} = A_i S_{i+1} + G_i C(S_{i+1}, t_{i+1}) + B_i(1 + r \Delta t)$$

Ici les quantités A et G ne varient pas sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$

On a montré que la quantité des options qu'on doit avoir pour couvrir le portefeuille est

$$G_{i+1} = \frac{\partial^2 V^{BS}(S_{i+1}, t_{i+1})}{\partial S_{i+1}^2} / \frac{\partial^2 C^{BS}(S_{i+1}, t_{i+1})}{\partial S_{i+1}^2}$$

La quantité des actions est

$$A_{i+1} = \frac{\partial V^{BS}(S_{i+1}, t_{i+1})}{\partial S_{i+1}} - G_{i+1} C^{BS}(S_{i+1}, t_{i+1})$$

Donc si

$$A_{i+1} - A_i > 0$$

on achète des actions en utilisant **le portefeuille** P_{i+1}

Si

$$A_{i+1} - A_i < 0$$

on vend des actions et place du cash sur banque deposits compte.

Si

$$G_{i+1} - G_i > 0$$

on achète des options en utilisant **le portefeuille** P_{i+1}

Si

$$A_{i+1} - A_i < 0$$

on vend des options et on place du cash sur banque deposit compte.

Après avoir recalculer la quantité des actions et des options on doit recalculer la quantité du cash dans le portefeuille. Pour cela on utilise la procedure d'autofinancement:

$$B_{i+1} = P_{i+1} - A_{i+1} S_{i+1} - G_{i+1} C^{BS}(S_{i+1}, t_{i+1}) = A_i S_{i+1} + B_i(1+rdt) - A_{i+1} S_{i+1} - G_{i+1} C^{BS}(S_{i+1}, t_{i+1})$$

On choisit de façon arbitraire la quantité du cash à $t = 0$.

La différence entre le prix de l'option et celui de portefeuille évolue selon la loi connue:

$$d(V - P) = rdt(V - P)$$

On intègre cette équation et on obtient:

$$V(S_i, t_i) - P(S_i, t_i) = (V(S(0), 0) - P(S(0), 0))e^{rt_i}$$

soit

$$V(S_i, t_i) = P(S_i, t_i) + (V(S(0), 0) - P(S(0), 0))e^{rt_i}$$

On définit le portefeuille actualisé

$$P^{actualise}(S_i, t_i) = P(S_i, t_i) + (V(S_0, 0) - P(S_0, 0))e^{rt_i}$$

Par les simulations on peut verifier que $P^{actualise}(S_i, t_i)$ et le prix de l'option BS évoluent de la même façon. Les simulation ci-dessous sont effectués pour les paramètres suivants:

$$r = 0.05, \quad \sigma = 0.5, \quad \Delta t = T_1/N, \quad N = 100, \quad K_1 = 1.5, \quad K_2 = 1.5, \quad S_0 = 1, \quad B_0 = 1,$$

$$T_1 = 5, \quad T_2 = 10.$$

Chaque intervalle temporelle (l'axe horizontale) a été divisé en $N=100$ intervalles Δt . On couvre l'option de maturité $T_1 = 5$, de strike $K_1 = 1$ et on achète des options supplémentaires (utilisées pour la couvertures) de maturité $T_2 = 10$, de strike $K_2 = 1.5$

Dans la figure ci-après on retrouve l'évolution des valeurs du cash B_i , de la quantités des actions A_i et de la quantités des options G_i .

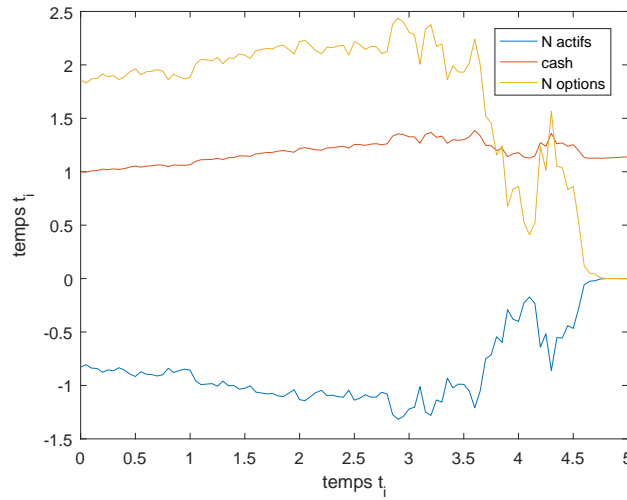
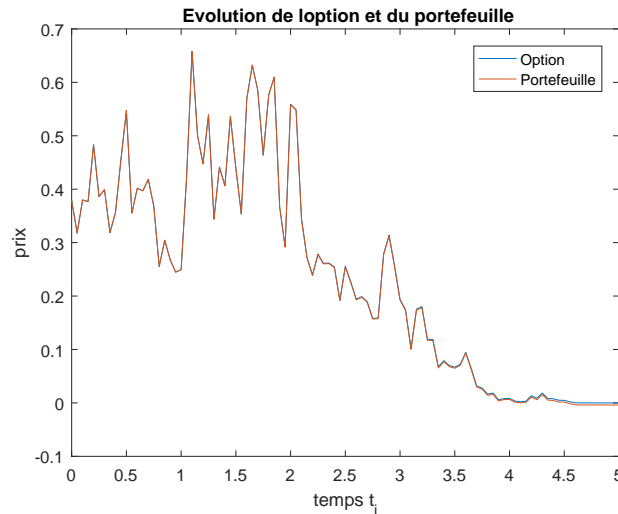


Figure 22: Evolution des instruments de couverture

L'évolution de la quantité d'actions et celle des options et du cash sont corrélés avec l'évolution de l'action et ainsi lorsque l'action augmente et l'option augmente on peut d'acheter des options et vendre des actions en plaçant à la banque (G_i augmente, B_i augmente et A_i diminue) alors que lorsque celles-ci diminue il faut vendre les actions pour prêter à la banque (B_i augmente et A_i diminue)

Dans la figure ci-après on retrouve l'évolution de portefeuille de couverture actualisé $P_i^{actualise}$ et celle du call à couvrir $V^{BS}(S_i, t_i)$.



Dans la figure ci-après on retrouve l'évolution du call européenne qu'il faut couvrir $V^{BS}(S_i, t_i)$ et du call faisant partie portefeuille $C^{BS}(S_i, t_i)$ dont la quantité on doit rebalancer:

Figure 23: Evolution du portefeuille de couverture actualisé et celle du call à couvrir.

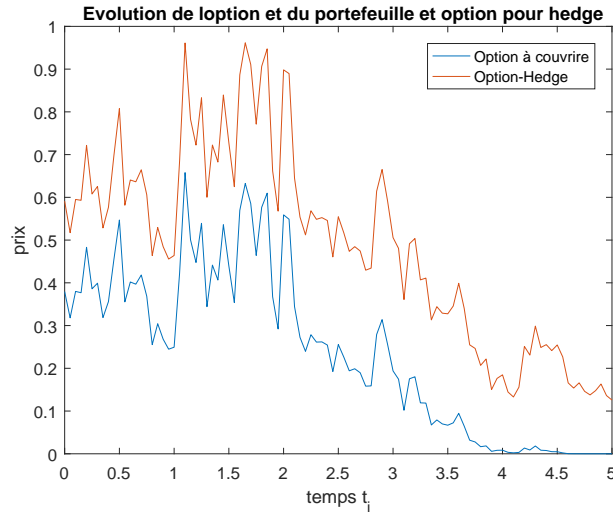


Figure 24: Evolution Evolution du Call V^{BS} et du Call pour Hedge

Dans la figure ci-après on trace l'erreur de la couverture $P\&L$ correspondant à la différence entre le portefeuille de couverture $P_i^{actualise}$ et du call européenne: $V^{BS}(S_i, t_i)$

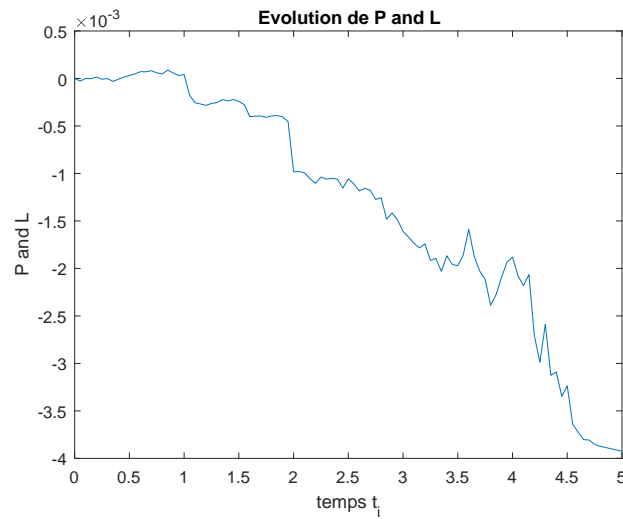


Figure 25: Evolution du l'erreur de la couverture

On constate par comparaison des Fig.7 et Fig.17 que la couverture en Gamma est beaucoup plus performante que celle en Delta.

La performance de la stratégie de delta-couverture est donné par l'indice de Profit et Lost final:

$$P\&L(S_0, T) = \mathbb{E}[P^{actualise}(S_T, T) - V^{BS}(S_T, T)]$$

On simule un grand nombre N_{mc} de chemins d'évolution des prix $P^{actualise}(S_T, T)$ et $V^{BS}(S_T, t_T)$. sur l'intervalle de temps $[0, T]$, en partant toujours de S_0 . Pour chaque chemin n on cherche la valeur finale. Puis on calcule la moyenne arithmétique:

$$\sum_{n=1}^{N_{mc}} (P^{actualise(n)}(S_T, T) - V^{BS}(S_T, T)) / N_{mc}$$

Sur la Figure 18 vous voyez les distributions pour le cas lorsque le portefeuille est rebalancées à chaque instant t_i . On constate encore une fois par comparaison des Fig.8 et Fig.18 que la couverture en Gamma est beaucoup plus performante que celle en Delta.

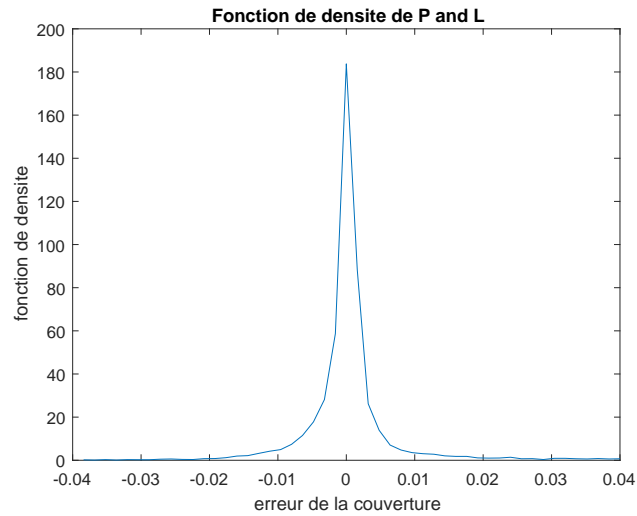
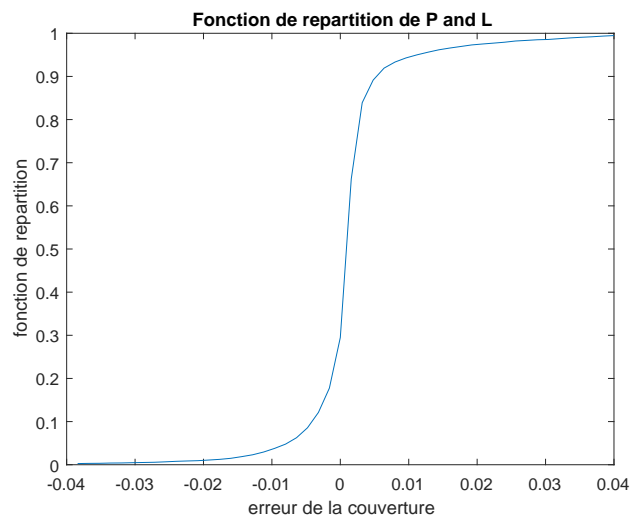


Figure 26: Fonction de densité de $P\&L$



1.8 Etude de Delta-hedging. Déductuion de la formule fondamentale du pricing d'une option

Déduisons une relation entre la valeur initiale d'une options et sa valeur terminale en utilisant la procedure du hedging.

Soit P_0, P_1, \dots, P_n les valeurs du portefeuille en $t_0 = 0, t_1 \dots t_n = T$.

Selon la procedure du hedging nous avons:

$$P_0 = A_0 S_0 + B_0$$

$$P_1 = A_0 S_1 + B_0(1+r\Delta t) = (\text{autofinancement}) = A_1 S_1 + B_1 \Rightarrow B_1 = (A_0 - A_1)S_1 + B_0(1+r\Delta t)$$

$$P_2 = A_1 S_2 + B_1(1+r\Delta t) = (\text{autofinancement}) = A_2 S_2 + B_2 \Rightarrow B_2 = (A_1 - A_2)S_2 + B_1(1+r\Delta t)$$

Pour le portefeuille en t_2 nous avons

$$P_2 = A_2 S_2 + S_2(A_1 - A_2) + S_1(A_0 - A_1)(1 + r\Delta t) + B_0(1 + r\Delta t)^2$$

On continue de la même facon et on obtient

$$P_n = A_n S_n + S_n(A_{n-1} - A_n) + (A_{n-2} - A_{n-1})S_{n-1}e^{r\Delta t} + (A_{n-3} - A_{n-2})S_{n-2}e^{2r\Delta t} + \dots + B_0e^{rn\Delta t}$$

De plus on connait la relation

$$P_n + (V_0 - P_0)e^{rn\Delta t} = V_n$$

qui est la solution de l'équation

$$d(V - P) = rdt(V - P)$$

On injecte l'expression pour P_n dans la dernière formule et on obtient:

$$\begin{aligned} A_n S_n + S_n(A_{n-1} - A_n) + (A_{n-2} - A_{n-1})S_{n-1}e^{r\Delta t} + (A_{n-3} - A_{n-2})S_{n-2}e^{2r\Delta t} + \dots + (A_0 - A_1)S_1e^{(n-1)r\Delta t} \\ + (P_0 - A_0 S_0)e^{rn\Delta t} + (V_0 - P_0)e^{rn\Delta t} = V_n \end{aligned}$$

On passe à la limite $\Delta t \rightarrow 0$, on note que $\Delta t \cdot n = T$ et dA_n la quantité d'actions achetées

$$dA_n = A_{n+1} - A_n.$$

La somme

$$S_n(A_{n-1} - A_n) + (A_{n-2} - A_{n-1})S_{n-1}e^{r\Delta t} + (A_{n-3} - A_{n-2})S_{n-2}e^{2r\Delta t} + (A_0 - A_1)S_1e^{r(n-1)\Delta t}$$

peut être approximée par l'intégral:

$$\int_0^T S_\tau e^{r(T-\tau)} d(A_\tau).$$

On en déduit

$$S_n A_n + V_0 e^{rT} - A_0 S_0 e^{rT} - \int_0^T S_\tau e^{r(T-\tau)} d(A_\tau) = V_n$$

Intégrons par parties

$$\int_0^T S_\tau e^{r(T-\tau)} d(A_\tau) = S_\tau e^{r(T-\tau)} A_\tau \Big|_0^T - \int_0^T d(S_\tau e^{r(T-\tau)}) A_\tau$$

et injectons le résultat dans la formule précédente. Finalement

$$V_0 = e^{-rT} V_T - \int_0^T d(S_\tau e^{-r\tau}) A_\tau$$

soit

$$V_0 = e^{-rT} V_T - \int_0^T A_\tau (dS_\tau - S_\tau r d\tau) e^{-r\tau}$$

Si on suppose que $\mu = r$ alors

$$dS_\tau - S_\tau r d\tau = \sigma S_\tau dW_\tau$$

Donc le prix initial de l'option est donné par la formule

$$V_0 = e^{-rT} V_T - \int_0^T e^{-r\tau} \sigma A_\tau S_\tau dW_\tau$$

Prenons maintenant l'espérance conditionnelle de chaque membre de cette relation et on obtient la formule du théorème de Feynmann - Kac qui dit que le prix de l'option est l'espérance conditionnelle du pay-off actualisé :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}[V_T / S(t=0) = S_0]$$

Le prix initial de l'option ne dépend ni de la procédure du hedging, ni de Delta.

1.9 Delta-hedging avec la volatilité implicite

Nous avons supposé que la volatilité est une constante. En réalité la volatilité est le paramètre qui mesure le risque associé au rendement de l'actif sous-jacent. Les praticiens ont rapidement vu que la volatilité historique, estimation du paramètre de volatilité par les données historiques, ne permet pas de reconstituer les prix observés sur le marché. Pour K et T différentes la volatilité n'est pas la même, donc la volatilité est une fonction du strike et la maturité: $\sigma = \sigma(T, K)$. $\sigma^{implicite}(K, T)$ est une volatilité qui introduite dans la formule de BS donne comme prix de l'option celui observé sur le marché.

Supposons que le prix de l'option V est calculé par la formule de Black et Sholes avec la volatilité implicite:

$$V^{BS}(S, t) = SN(d_1(S, t)) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2(S, t))$$

$$d_1(S, t) = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma_{implicite}^2/2)(T-t)}{\sigma_{implicite} \sqrt{T-t}} \quad d_2(S, t) = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma_{implicite}^2/2)(T-t)}{\sigma_{implicite} \sqrt{T-t}}$$

Supposons que le prix de l'action varie avec une autre volatilité - volatilité historique σ_h .

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_h S_t dW_t$$

Quelle volatilité utiliser pour la couverture? Historique ou implicite?

Supposons que la couverture est faite avec la volatilité implicite:

$$A(S) = N(d_1(\sigma_{implicite})), \quad d_1(S_t, t) = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma_{implicite}^2/2)(T - t)}{\sigma_{implicite}\sqrt{T - t}}.$$

Calculons dans ce cas $P\&L$.

On répète la procédure du hedging continue qui conduit à la déduction de l'équation de Black et Scholes, mais au moment d'application du lemme d'Ito on utilise volatilité historique σ_h :

$$d\langle S \rangle_t = \sigma_h^2 S_t^2 dt$$

Calculons

$$dP - dV - rdt(AS + B - V) = -\left(\frac{\partial V_{imp}}{\partial t}dt + \frac{\partial V_{imp}}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{imp}}{\partial S^2}\sigma_h^2 S^2 dt\right) + (A_{imp}dS + rBdt) - rdt(AS + B - V)$$

Utilisons le fait que V_{imp} vérifie l'équation de BS:

$$\frac{\partial V_{imp}}{\partial t} + rS\frac{\partial V_{imp}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma_{implicite}^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{imp}}{\partial S^2} - rV_{imp} = 0$$

On obtient ainsi l'erreur de couverture à chaque instant temporel

$$d(P - V) - rdt(P - V) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{imp}}{\partial S^2}((\sigma_{imp})^2 - (\sigma_h)^2)S^2 dt$$

On intègre cette équation avec la variation de la constante et on obtient

$$P(T) - V^{imp}(T) = \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r(t-T)} \frac{\partial^2 V_{imp}}{\partial S^2} ((\sigma_{implicite})^2 - (\sigma_h)^2) S_t^2 dt + (P(0) - V^{imp}(0))e^{rT}$$

Après l'introduction du portefeuille actualisé

$$P^{actualise}(T) = P(T) - (P(0) - V^{imp}(0))e^{rT}$$

on conclut finalement que le Profit et Loss final peut être représenté par l'intégrale sur la vie de l'option:

$$P^{actualise}(T) - V^{imp}(T) = \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r(t-T)} \frac{\partial^2 V_{imp}}{\partial S^2} ((\sigma_{implicite})^2 - (\sigma_h)^2) S_t^2 dt$$

Si $\sigma_{implicite} > \sigma_h$ le portefeuille de couverture domine le prix de l'option et on gagne. Cette intégrale dépend du chemin d'évolution d'action. Alors si la vraie volatilité du sous-jacent σ_h est plus petite que la volatilité implicite le Profit et Lost (ici le gain) est d'autant plus grande que la Gamma de l'option est grande.