CY TECH (E.I.S.T.I.)

Option Ingénierie Financière

Irina Kortchemski

Calibration et la couverture des produits dérivées

Cours 1. Delta et Gamma-hedging (Delta et Gamma-couverture) dans le marché complet et incomplet.

On étudie la pérformence de la stratégie de delta-couverture dans le modèle de Black et Scholes et celui de volatilité stochastique. Dans les deux cas le trading a lieu uniquement aux dates discrétes t_i et le portefeuille n'est rebalancé que dans le nombre finis de points temporels pendant la vie de l'option.

On applique une stratégie de portefeuille autofinançant qui représente une stratégie dynamique d'achat ou de vente d'action et de preêts ou d'emprunts à la banque, donc la valeur du portefeuille n'est pas modifié par l'ajout ou retrait du cash.

P& L (profit and loss) de la stratégie de delta-couverture est mesuré par la différence entre le prix de l'option á la maturité et la valeur finale du portefeuille de couverture.

1 Couverture des options

1.1 Delta-hedging continue

On se place dans un univers où les investisseurs sont insensibles au risque ("neutre" au risque), donc où le rendement attendu des actifs risqués est celui de l'actif sans risque : r. Cette étude se fera tout d'abord dans le cadre du modèle Black-Scholes standard, donc avec volatilitè constante σ, où le prix à l'instant t, S_t, d'un actif vérifie :

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

Nous vendons une option, un call européen avec le prix $V(S,t)$. Nous allons mettre en place une stratégie de couverture d'un produit dérivé, un call européen, avec un portefeuille constitué d'une part de l'actif sous -jacent, une action, et d'autre part de l'actif sans risque, du cash placé en banque. Le portefeuille de couverture P_t s'écrit par la formule:

$$P_t = A(S,t)\, S_t + B_t$$

où

- $A(S,t)$ est le nombre d'unité de l'actif risqué dans le portefeuille. Cette quantité s'appelle aussi **ratio de couverture.**
- B est la quantité d'argent, solde du compte.

Ce portefeuille est construit d'une combinaison d'actions et de l'argent de telle façon qu'il ait le même risque que celui de l'option.

Dans la litérature on peut rencontrer un portefeuille

$$\Pi_t = A_t\, S_t + B_t - V_t$$

"Hedging portfolio is composed of

- *Short position in an option:* $-V_t$
- *Long position in* S_t *shares*
- *An amount of the cash* B_t

A short option hedging portfolio starts with some initial capital and invest in the stock and money market account so that the portfolio $\Delta_t\, S_t + B_t$ *at each time* t *agrees with* V_t *."*

On dit que le portefeuille Π_t doit être Delta neutre:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial S} = A_t - \frac{\partial V_t}{\partial S} = 0$$

Dans ce cours nous utilisons le portefeuille $P_t = A(S,t)\, S_t + B_t$,nous étudions la différence entre le portefeuille et l'option à couvrir

$$P_t - V_t = A_t\, S_t + B_t - V_t$$

Considérons deux cas.

<u>Cas 1</u> On vend l'option au prix $V(S,t)$ et on utilise cette quantité de l'argent pour construire le portefeuille de couverture:

- $P_0 = V_0$ à $t = 0$.
- $A_0 S_0$ est l'investisement dans des actifs risqués.
- $B_0 = V_0 - A_0 S_0$ à $t = 0$ est l'investisement du montant résiduel dans des actifs sans risque.
- $P_t = V_t$ à chaque instant t. C'est la couverture.

<u>Cas 2</u> On vend l'option pour le prix $V(S,t)$ et on utilise cette quantité de l'argent et de l'argent supplémentaire B_0 pour construire le portefeuille de couverture:

- $P_0 = V_0 + B_0$ à $t = 0$.
- $A_0 S_0$ est l'investisement dans des actifs risqués.
- B_0 est quelconque. Cette somme est investi dans des actifs sans risque.
- $P_t^{actualis} = V_t$ à chaque instant t.

Dans les deux cas notre objectif est d'étudier les variations dV_t et dP_t afin d'assure $P_t = V_t$.

On utilise la lemme d'Ito

$$d\langle S\rangle_t = \sigma^2 S^2 dt$$

pour calculer la variation de l'option:

$$dV_t = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}d\langle S\rangle_t = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 dt$$

La variation de portefeuille est

$$dP_t = A(S,t)dS_t + dB_t$$

Notez que dans l'équation, nous avons pas inclus un terme dA. C'est en fait un point assez subtil, car nous allons le voir (plus tard) que la quantité des actions A dépend en fait de S_t. Cependant, si nous pensons à une situation réelle, à tout instant de temps, il faut choisir A, puis le maintenir dans le portefeuille alors que l'actif se déplace aléatoirement. Donc, l'équation est en fait la variation de la valeur du portefeuille, pas un diférentiel. Si nous prenions une vraie équation différentielle on avez

$$dP_t = A(S,t)dS_t + dA(S,t)\,S_t + dB_t$$

mais nous devons nous rappeler que A ne change pas avec un petit intervalle de temps, puisque nous choisissons A, et alors S change aléatoirement. Nous ne sommes pas autorisés à regarder dans l'avenir, (sinon, nous pourrions devenir riche sans risque, ce qui n'est pas autorisé par la condition de non-arbitrage) et donc A n'est pas autorisée á contenir toute informations sur l'évolution future des prix des actifs. C'est pourquoi Ito calcul stochastique est utilisé.

Donc on vend ou on achète des actions aux instants t, $t+dt$, $t+2dt$,... et entre ces moments la quantité d'actions A ne varie pas :

$$dA_t = A(S+dS, t+dt) - A(S,t) = 0.$$

De plus on applique une stratégie de portefeuille autofinançant, donc la valeur de P_t n'est pas modifié par l'ajout ou retrait du cash.

<u>Considérons Cas 2.</u>

Nous voulons assurer la couverture de l'option. Supposons qu'on assure la coverture à $t = t_0$. On va examiner comment évoluent l'option et le portefeuille dans le temps et essayer de maintenir cette couverture. On va calculer donc $V_t + dV_t$, $P_t + dP_t$ et $dV_t - dP_t$.

Calculons $dV_t - dP_t$.

On veut que cette différence soit non aléatoire (sans risque):

$$dV_t - dP_t = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 dt - (A_t dS_t + rB_t dt) =$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 dt - (A_t dS_t + rB_t dt) =$$

$$(\frac{\partial V}{\partial S} - A_t)dS_t + (\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - rB_t dt)$$

Pour éliminer le risque localement (à chaque instant temporel) on choisit

$$A_t = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

En effet S_t est connue à un instant t. Donc

$$d(V-P)_t = (\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t) - A_t)\cdot S_t(rdt + \sigma dW_t) + (\frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t)dt - rB_t dt)$$

est prévisible si on annule le terme avec le mouvement Brownien.

Puisque $V_t - P_t$ est maintenant sans risque dans l'intervalle $[t, t+dt]$, alors le principe de non-arbitrage affirme que

$$d(V-P)_t = rdt(V-P)_t$$

Donc

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - rB_t dt = rdt(V_t - A_t S_t - B_t)$$

Dans le cas de couverture continue l'option est couverte exactement.

On remplace A_t dans l'équation précedente et on obtient l'équation de Black et Scholes pour le prix le l'option $V(t,S)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

Dans cette equations les variables t et S sont indépendante et S est le prix le l'actif à la date t.

Si on intègre l'équation:

$$d(V-P)_t = rdt(V-P)_t \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \frac{d(V-P)_t}{(V-P)_t} = \int_0^t rdt$$

on obtient

$$V(S_t,t) - P(S_t,t) = (V(S_0,0) - P(S_0,0))e^{rt}$$

soit

$$V(S_t,t) = P(S_t,t) - (P(S_0,0) - V(S_0,0))e^{rt}$$

On définit le portefeuille actualisé

$$P_t^{actualise} = P_t - (P_0 - V_0)e^{r\,t}$$

La valeur du portefeuille actualisé $P_t^{actualise}$ coincide avec celle de l'option V_t à chaque instant t. La somme $(P_0 - V_0)$ representant le cash supplémentaire acquit les intérêts qu'on déduit du portefeuille total.

Dans le cas de la couverture discrete (Chapitre 1.2) il existe toujours l'erreur de la couverture qui s'appelle Profit et Loss:

$$P\&L = d(V-P)_t - rdt(V-P)_t$$

Considérons Cas 1.

$$d(V-P)_t = dV_t - dP_t = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S} rS_t dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 dt - (A_t dS_t + rB_t dt) = 0$$

Pour éliminer le risque localement (à chaque instant temporel) on choisit

$$A = \frac{\partial V}{\partial S}$$

On remplace aussi B_t par

$$B_t = V_t - A_t S_t = V_t - S_t \frac{\partial V}{\partial S}$$

et on obtient aussi l'équation de Black et Sholes pour le prix de l'option:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

En conclusion: Si l'option vérifie l'équation de Black et Scholes alors elle peut être couverte à chaque instant, l'erreur de la couverture est exactement zero. Le marché est complet.

1.2 Delta-hedging discrete

Dans le modèle de Black-Scholes, pour que l'option soit complétement rèpliquée, le portefeuille de couverture doit être réajusté en continu. En pratique, il est bien entendu réajusté un nombre fini de fois, à des dates discrètes, ce qui conduit à une erreur de couverture (erreur de discrétisation).

L'actif sous-jacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{1}$$

On note σ la volatilité de l'action.

La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

Discrétisons l'intervalle temporelle:

$$[t_0 = 0, t_1, t_2, ..., t_i, ...t_N = T]$$

On peut presenter le prix de l'action à chaque t_i par la formule récurente:

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

La valeur théorique de l'option Call européene est donné par la formule de Black et Sholes:

$$V^{BS}(S_i, t_i) = S_i N(d_1(S_i, t_i)) - Ke^{-r\,(T-t_i)} N(d_2(S_i, t_i))$$

$$d_1(S_i, t_i) = \frac{ln(S_i/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}} \qquad d_2(S_i, t_i) = \frac{ln(S_i/K) + (r - \sigma^2/2)(T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}}$$

Il est possible de simuler à l'aide de MatLab l'évolution de l'actif et de constater que la courbe d'evolution du prix de l'option correspondante appartient à la surface Black-Scholes.

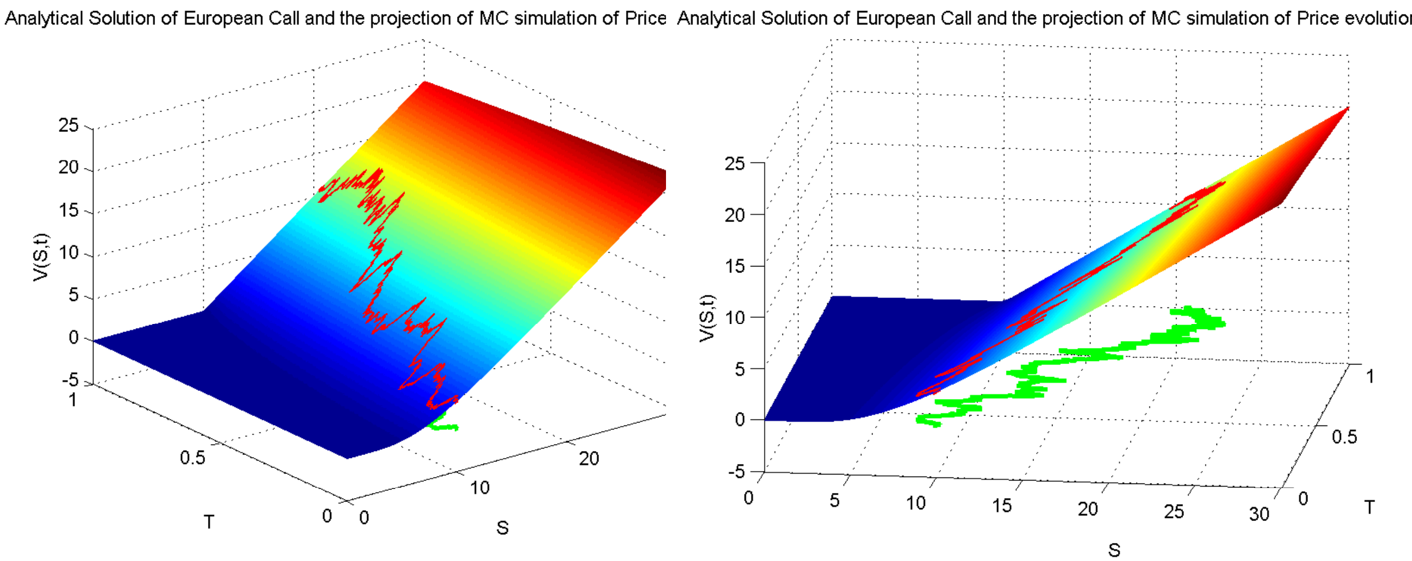


Figure 1: Courbe d'évolution (rouge) du prix de l'option Call EU

Figure 2: Courbe d'évolution (verte) du prix de l'actif sur les plan S-t

On visualise le portefeuille à l'instant $t = t_i$ et à l'instant $t = t_{i+1}$

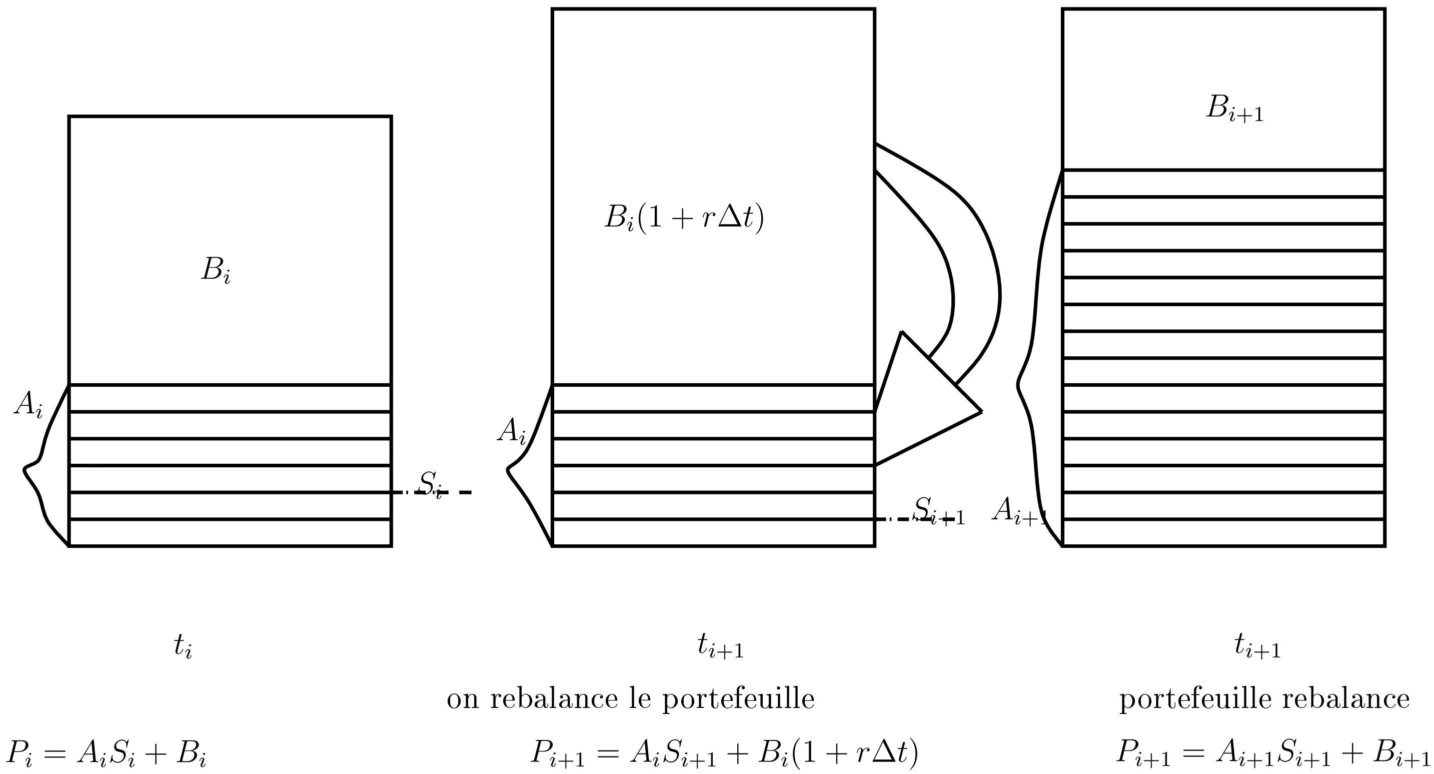


Figure 3: Portefeuille de la couverture en t_i et $t_i + \Delta t$

La valeur du portefeuille à l'instant $t = t_i$ est

$$P_i = A_i\, S_i + B_i$$

Pendant l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ la quantité d'actions ne varie pas. La valeur du portefeuille à l'instant $t = t_{i+1}$ est

$$P_{i+1} = A_i\, S_{i+1} + B_i(1 + rdt)$$

On doit maintenant rébalancer le portefeuille c'est à dire recalculer la quantité d'actions et la quantité du cash dans le portefeuille. Pour cela on utilise la procedure d'autofinancement:

$$P_{i+1} = A_{i+1}\, S_{i+1} + B_{i+1}$$

et

$$A_i\, S_{i+1} + B_i(1 + rdt) = A_{i+1}\, S_{i+1} + B_{i+1}$$

On a montré que la quantité d'actions qu'on doit avoir pour couvrir le portefeuille est

$$A_{i+1} = \frac{\partial V^{BS}(S_{i+1}, t_{i+1})}{\partial S_{i+1}}$$

Donc

- Si

$$A_{i+1} - A_i > 0$$

on achète des actions en utilisant **le portefeuille** P_{i+1} ou on emprunte de la banque.

- Si

$$A_{i+1} - A_i < 0$$

en vend des actions et place du cash à la banque.

Donc la quantité du cash dans le portefeuille est donné par la formule:

$$B_{i+1} = P_{i+1} - A_{i+1}\, S_{i+1} = A_i\, S_{i+1} + B_i(1 + rdt) - A_{i+1}\, S_{i+1}$$

On choisit de façon arbitraire la quantité du cash à $t = 0$.

La différence entre le prix de l'option et celui de portefeuille évolue selon la loi:

$$d(V - P) = rdt(V - P)$$

On intégre cette équation et on obtient:

$$V(S_i, t_i) - P(S_i, t_i) = (V(S(0), 0) - P(S(0), 0))e^{rt_i}$$

soit

$$V(S_i, t_i) = P(S_i, t_i) + (V(S(0), 0) - P(S(0), 0))e^{rt_i}$$

On définit le portefeuille actualisé

$$P^{actualise}(S_i, t_i) = P(S_i, t_i) + (V(S_0, 0) - P(S_0, 0))e^{r\, t_i}$$

Par les simulations on peut verifier que $P^{actualise}(S_i, t_i)$ et le prix de l'option BS évoluent de la même façon à chaque instant temporel.

Si l'option est dans la monnaie ($S_T > K$) la valeur de delta $(A_T) = 1$.

Si l'option est hors la monnaie ($S_T < K$) la valeur de delta $(A_T) = 0$.

Dans la figure 2 ci-après on retrouve l'évolution de l'action S_i, de la quantité du cash B_i et de la quantité des actions A_i

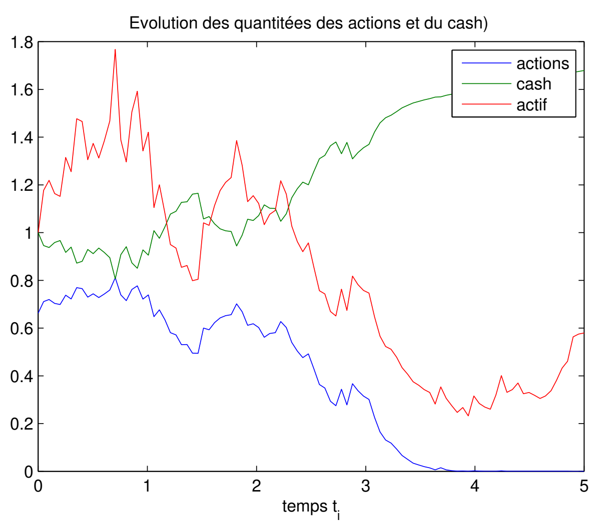


Figure 4: Evolution de S_i , A_i, B_i

L'évolution de la quantité d'actions et de la valeur du cash sont corrélés avec l'évolution de l'action et ainsi lorsque l'action augmente il est nécessaire d'acheter des actions en empruntant à la banque (A_i augmente et B_i diminue) alors que lorsque celle-ci diminue il faut vendre les actions pour prêter à la banque (B_i augmente et A_i diminue)

Dans la figure ci-après on retrouve l'évolution de portefeuille de couverture actualisé $P_i^{actualise}$ et du call européenne qui finit hors la monnaies: $V^{BS}(S_i, t_i)$.

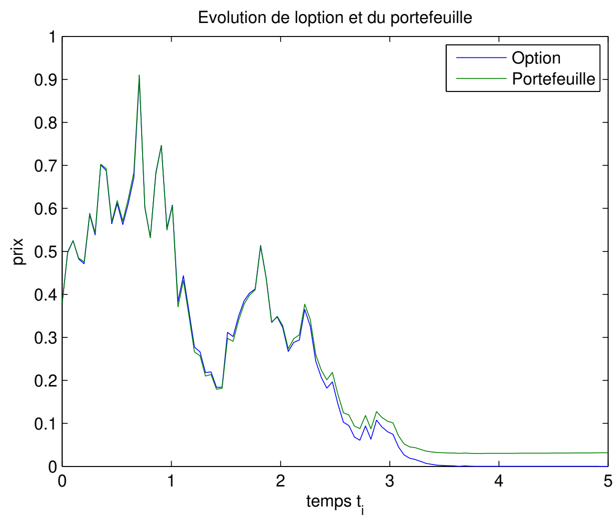


Figure 5: Evolution du portefeuille et de l'option

On constate que le portefeuille de couverture évolue de la même façon sauf une petite erreur. Dans la figure ci-après on trace l'erreur correspondant à la différence entre le portefeuille de couverture $P_i^{actualise}$ et du call européenne:

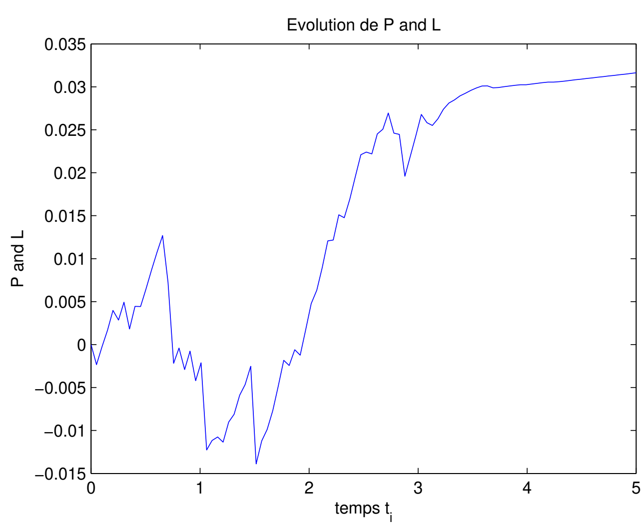


Figure 6: Evolution de l'erreur de la couverture $P^{actualise}(T) - V^{BS}(T)$

1.2.1 Profit et Loss

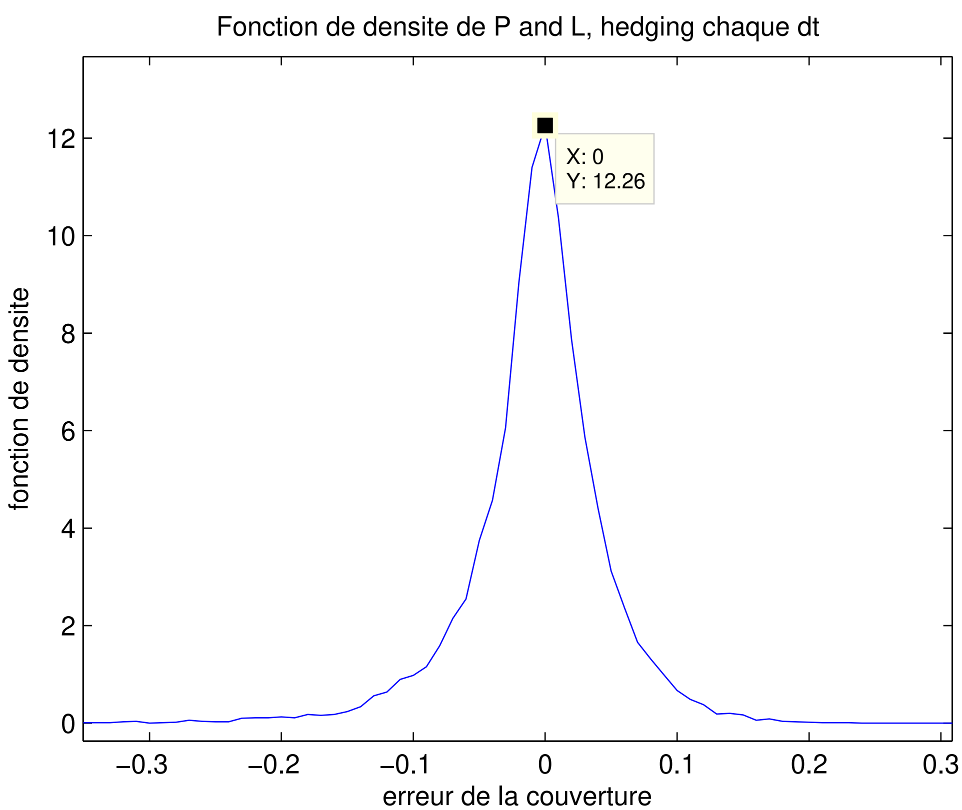
La pérformence de la stratégie de delta-couverture est donné par l'indice de Profit et Loss final:

$$P\&L(S_0, T) = \mathbb{E}[P^{actualise}(S_T, T) - V^{BS}(S_T, T)]$$

On peut simuler un grand nombre N_{mc} de chemins d'évolution des prix $P^{actualise}(S_T, T)$ et $V^{BS}(S_T, t_T)$. sur l'intervalle du temps $[0, T]$, en partant toujours de S_0. Pour chaque chemin n on cherche la valeur finale. Puis on calcule la moyenne arithméthique:

$$\mathbb{E}[P\&L] = \sum_{n=1}^{N_{mc}} (P^{actualise(n)}(S_T, T) - V^{BS}(S_T, T))/N_{mc}$$

Sur les figures vous voyez la fonction de densité de $P\&L$ sur l'intervalle [-0.3, 0.3] (l'intervalle est devisé sur 100 parties) pour le cas lorsque le portefeuille est rebalancé à chaque instant t_i. Toutes valeurs de $P\&L(S_T, T)$ sont distribuées selon une loi qui resemble la loi normale centrée réduites. On revient à la discussion de cette question plus tard.



è0mm

Figure 7: Fonction de densité du Profit et Loss final

1.2.2 Erreur de Couverture en Delta

Maintenant on choisit directement le nombre de discrétisation de l'intervalle temporelle. On la prendra égale à 100.

$$N = 100, \quad T = 0.5, \quad \Delta t = T/N$$

On effectue ensuite des simulations pour des nombres d'interventions du trading différents :

$$N_{trading} = 100; 25; 10$$

et une fois on ne couvre pas du tout l'option. Le nombre d'interventions du trading indique combien de fois le portefeuille est rebalancé. Par exemple, si $N = 100$ et $N_{trading} = 100$, on rébalance notre portefeuille à chaque instant t_i, si $N = 100$ et $N_{trading} = 25$, une fois sur quatre, c'est - à - dire on change la quantité des actions A_i une fois sur quatre t_i.On peut montrer par les simulation (et théoriquement en chapitre 1.7) que l'erreur de couverture est proportionnelle à Gamma de l'option qu'il faut couvrir et au $\sqrt{\Delta t}$ où Δt est l'intervalle entre deux trading successives:

$$(P^{actualise}(S_T, T) - V(S_T, T)) = \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \int_0^T e^{r(T-\tau)} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_\tau^2 dW_\tau$$

Dans la figure ci-après on retrouve l'évolution de portefeuille de couverture actualisé $P_i^{actualise}$ et du call européenne qui finit hors la monnaies: $V^{BS}(S_i, t_i)$, de quantités des actifs, du cash pour les trading une fois sur 10.

On présente ici les fonctions de densité et de repartition du Profit et Lost pour les différentes nombres d'interventions (trading). On voit que plus l'intervalles entre des trading est grande plus l'erreur de la couverture est elevée.

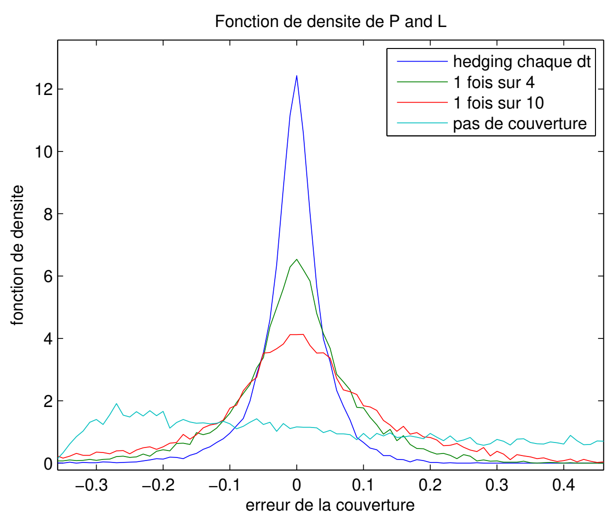


Figure 8: Fonctions de densité du Profit et Loss final

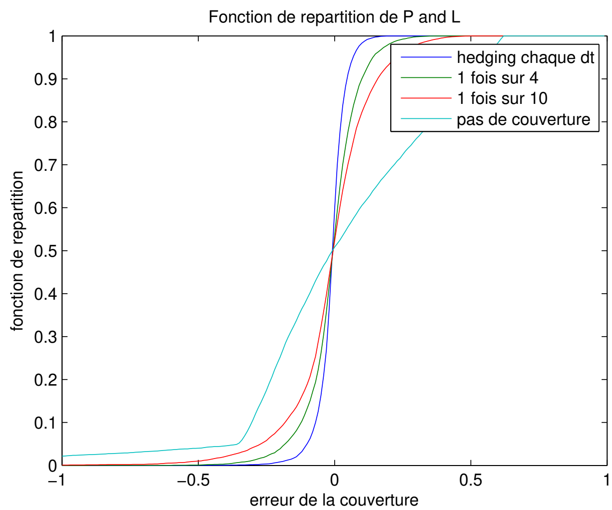


Figure 9: Fonctions de repartitions du Profit et Loss final

Présentons maintenant les fonctions de repartitions et de densité du Profit et Lost final sans hedging. On remarque qu'ils ne sont pas symétriques.

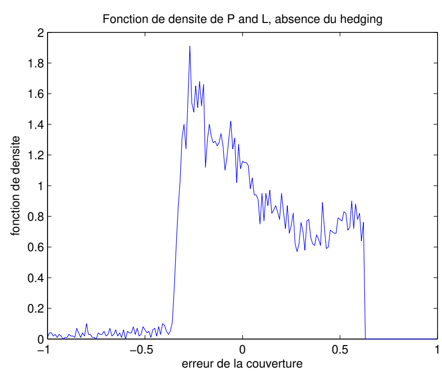


Figure 10: Fonctions de densité du Profit et Loss final. Pas de couverture

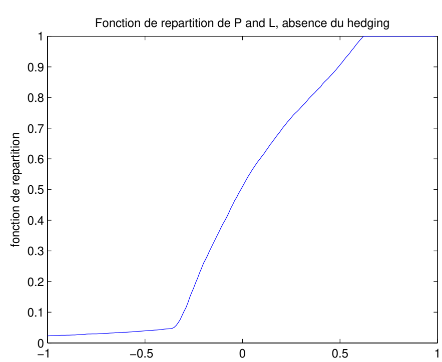


Figure 11: Fonctions de repartitions du Profit et Loss final. Pas de couverture

Ces graphes permettent de confirmer l'observation: plus la fréquence de rébalancement de notre portefeuille est élevée, plus l'erreur de couverture sera faible, c'est-à-dire meilleure sera la couverture. On peut montrer théoriquement que l'erreur de couverture est proportionnelle à Gamma de l'option qu'il faut couvrir et au $\sqrt{\Delta t}$ où Δt est l'intervalle entre deux trading successives:

$$(P^{actualise}(S_T, T) - V(S_T, T)) = \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \int_0^T e^{r(T-\tau)} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_\tau^2 dW_\tau$$

1.3 VaR: Value at Risk

La Value at Risk (ou VaR) est une mesure utilisée pour quantifier le risque de marché dun portefeuille dinstruments financiers. Celle-ci mesure la perte potentielle maximale encourue sur une position, á un seuil (probabilité) fixé, sur un horizon de temps donné (jour, semaine, mois). La VaR répond à l'affirmation suivante : " Avec la probabilité α % nous n'allons pas perdre plus de γ=Var euros. "

$$P(P\&L < \gamma) = \alpha$$

Sur la figure de la fonction de repartition de Profit and Loss (les valeurs negative correspond au pertes) on voit que

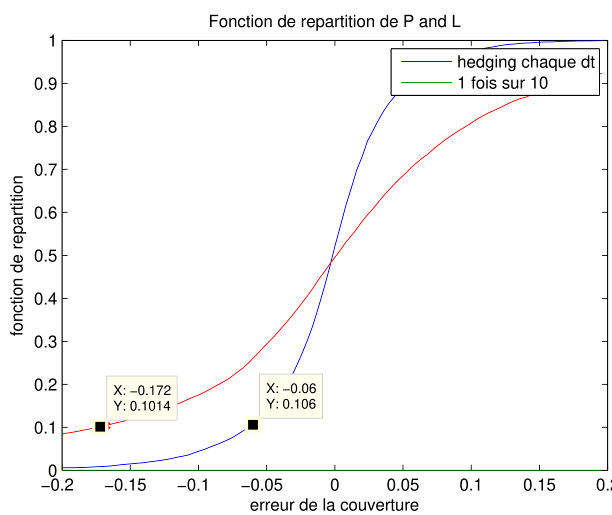


Figure 12: Value at Risk

• si on hedge chaque Δt $Var_{0.106 \sim 10\%} = -0.06$, par contre
• si on hedge une fois sur 10 $Var_{0.1014 \sim 10\%} = -0.172$

La figure Quantile-Quantile de Profit and Loss montre que Profit and Loss ne suit pas la loi normale.

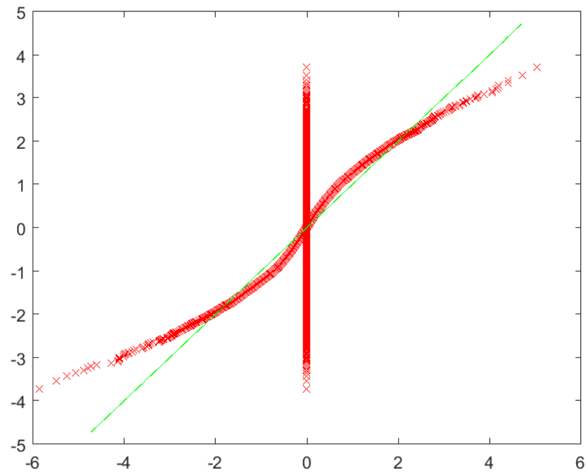


Figure 13: Quantile-Quantile de $P\&L$

1.4 Gamma-hedging

Dans une tentative pour rendre compte de certaines erreurs dans les opérations de couverture delta à intervalles infinis de couverture, on peut essayer d'utiliser l'informations de la dérivé seconde. La dérivée seconde d'une valeur de l'option de BS est appelé gamma, par conséquent, cette stratégie est appelée delta-gamma couverture. Pour que la couverture gamma travaille, nous avons besoin d'un instrument qui a une certaine gamma (S actif a dérivé seconde nulle). Par conséquent, les traders parlent souvent d'être long (positif) ou court (négatif) gamma, et essayer d'acheter / vendre des choses pour obtenir gamma neutre.

On vend une option europeénne avec le prix $V(S,t)$.

On utilise la quantité V de l'argent après avoir vendu l'option V et de l'argent supplémentaire pour construire le portefeuille de couverture pour pouvoir éliminer le risque.

$$P(S,t) = A(S,t)\,S + G(S,t)\,C(S,t) + B$$

- $A(S,t)$ est la quantité des actions dans le portefeuille
- $G(S,t)$ est la quantité des options du type C dans le portefeuille
- B est la quantité d'argent, solde du compte.

On applique une stratégie de portefeuille autofinancante qui représente une stratégie dynamique d'achat ou de vente d'action et de preêts ou d'emprunts à la banque, dont la valeur de P n'est pas modifié par l'ajout ou retrait du cash.

On vend ou on achète des actions et des options aux instants $t \;\; t+dt \;\; t+2dt...$ de facon à éliminer une partie aléatoire dans la différence entre les valeurs du portefeuille et l'option:

$$dV - dP = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt - (AdS + GdC + rBdt)$$

Le rendement de la somme $V-P$ qui est la différence entre le prix de l'option et celui de portefeuille est bien $rdt(V-P)$.

$$d(V-P)=rdt(V-P)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\partial V}{\partial S}dS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt-AdS-G(\frac{\partial C}{\partial t}dt+\frac{\partial C}{\partial S}dS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt)-rBdt=rdt(V-AS-GC-B)$$

On en obtient:

$$(\frac{\partial V}{\partial S}-A-G\frac{\partial C}{\partial S})dS+(\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-rVdt+ASrdt)=0$$

Pour éliminer le risque localement (à chaque instant temporel) on choisit

$$A+G\frac{\partial C}{\partial S}=\frac{\partial V}{\partial S}$$

On remplace A dans l'équation précedente et on obtient l'équation suivante:

$$(\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-rV)dt+G(\frac{\partial C}{\partial t}+rS\frac{\partial C}{\partial S}\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}-rC)dt=0$$

Cette egalité est correcte si les options $V(S,t)$ et $C(S,t)$ vérifient les équations de Black et Sholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-rV=0$$

et

$$\frac{\partial C}{\partial t}+rS\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}-rC=0$$

Si la procedure de couverture se fait de facon continue la couverture de Delta est suffisante. Si le rébalancement de portefeuille de couverture a lieu aux instants discrétes l'erreur de couverture est proportionnelle à Gamma de l'option qu'il faut couvrir:

$$(P^{actualise}(S_T,T)-V(S_T,T))=\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}\int_0^T e^{r(T-\tau)}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_\tau^2 dW_\tau$$

Ici Δt est l'intervalle entre deux trading successives.

Pour éliminer l'erreur de couverture du à hedging discrete on doit construire le portefeuille de Gamma - neutre, c'est-à - dire imposer la compensation de Gamma de $P^{actualise}$ et de Gamma de l'option V (qu'il faut couvrir):

$$\frac{\partial^2 P^{actualise}(S,t)}{\partial S^2}=\frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2}\quad soit\quad \frac{\partial^2 P(S,t)}{\partial S^2}=\frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2}$$

Parfois on introduit un portefeuille

$$\Pi=P-V$$

et on exige qu'il soit Gamma neutre: $\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}=0$

Utilisons l'équation

$$P(S,t) - V(S,t) = A(S,t)\,S + G(S,t)\,C(S,t) + B - V(S,t)$$

On dérive chaque membre une, puis deux fois par rapport à S, on tient compte du fait que la quantité des actions A et celle des options G restent constante pendant l'intervalle $[t, t+dt]$ donc

$$\frac{\partial A}{\partial S} = 0 \quad \frac{\partial^2 A}{\partial S^2} = 0$$

et

$$\frac{\partial G}{\partial S} = 0 \quad \frac{\partial^2 A}{\partial S^2} = 0$$

On obtient la relation:

$$G\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$$

De plus on a déduit

$$A + G\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Ces deux relations permettent de trouver A et G:

$$G = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} / \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \equiv \Gamma(V)/\Gamma(C)$$

$$A = \frac{\partial V}{\partial S} - G\frac{\partial C}{\partial S} \equiv \Delta(V) - \frac{\Gamma(V)}{\Gamma(C)}\Delta(C)$$

1.5 Discrete Gamma-hedging et les simulations Monté-Carlo

Pour réduire l'erreur de couverture, on peut soit augmenter la fréquence de réajustement, ce qui engendre des coûts de transaction, soit diminuer le Gamma, en rajoutant au portefeuille des instruments de couverture adaptés (en général, des options liquides). Ceci n'est pas réaliste pour la couverture d'une seule option mais peut être tout à fait envisageable lorsqu'on souhaite couvrir un portefeuille contenant beaucoup doptions sur le même sous-jacent.

On peut presenter le prix de l'action à chaque instant t_i:

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

La valeur théorique de l'option Call europóene

$$V^{BS}(S_i, t_i) = S_i N(d_{11}(S_i, t_i)) - K_1 e^{-r\,(T_1 - t_i)} N(d_{21}(S_i, t_i))$$

$$C^{BS}(S_i, t_i) = S_i N(d_{12}(S_i, t_i)) - K_2 e^{-r\,(T_2 - t_i)} N(d_{22}(S_i, t_i))$$

$$d_{11}(S_i, t_i) = \frac{ln(S_i/K_1) + (r + \sigma^2/2)(T_1 - t_i)}{\sigma\sqrt{T_1 - t_i}} \qquad d_{21}(S_i, t_i) = \frac{ln(S_i/K_1) + (r - \sigma^2/2)(T_1 - t_i)}{\sigma\sqrt{T_1 - t_i}}$$

$$d_{12}(S_i,t_i) = \frac{ln(S_i/K_2) + (r+\sigma^2/2)(T_2-t_i)}{\sigma\sqrt{T_2-t_i}} \qquad d_{22}(S_i,t_i) = \frac{ln(S_i/K_2) + (r-\sigma^2/2)(T_2-t_i)}{\sigma\sqrt{T_2-t_i}}$$

La valeur du portefeuille à l'instant $t = t_i$

$$P_i = A_i\, S_i + G_i C(S_i,t_i) + B_i$$

La valeur du portefeuille à l'instant $t = t_{i+1}$

$$P_{i+1} = A_i\, S_{i+1} + G_i C(S_{i+1},t_{i+1}) + B_i(1+rdt)$$

Ici les quantités A et G ne varient pas sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$

On a montre que la quantité des options qu'on doit avoir pour couvrir le portefeuille est

$$G_{i+1} = \frac{\partial^2 V^{BS}(S_{i+1},t_{i+1})}{\partial S_{i+1}^2} / \frac{\partial^2 C^{BS}(S_{i+1},t_{i+1})}{\partial S_{i+1}^2}$$

La quantité des actions est

$$A_{i+1} = \frac{\partial V^{BS}(S_{i+1},t_{i+1})}{\partial S_{i+1}} - G_{i+1}C^{BS}(S_{i+1},t_{i+1})$$

Donc si

$$A_{i+1} - A_i > 0$$

on achète des actions en utilisant **le portefeuille** P_{i+1}

Si

$$A_{i+1} - A_i < 0$$

en vend des actions et place du cash sur banque deposits compte.

Si

$$G_{i+1} - G_i > 0$$

on achète des options en utilisant **le portefeuille** P_{i+1}

Si

$$A_{i+1} - A_i < 0$$

en vend des options et on place du cash sur banque deposit compte.

Après avoir recalculer la quantité des actions et des options on doit recalculer la quantité du cash dans le portefeuille. Pour cela on utilise la procedure d'autofinancement:

$$B_{i+1} = P_{i+1} - A_{i+1}\, S_{i+1} - G_{i+1}C^{BS}(S_{i+1},t_{i+1}) = A_i\, S_{i+1} + B_i(1+rdt) - A_{i+1}\, S_{i+1} - G_{i+1}C^{BS}(S_{i+1},t_{i+1})$$

On choisit de facon arbitraire la quantité du cash à $t = 0$.

La différence entre le prix de l'option et celui de portefeuille évolue selon la loi connue:

$$d(V-P) = rdt(V-P)$$

On intègre cette équation et on obtient:

$$V(S_i,t_i) - P(S_i,t_i) = (V(S(0),0) - P(S(0),0))e^{rt_i}$$

soit

$$V(S_i, t_i) = P(S_i, t_i) + (V(S(0), 0) - P(S(0), 0))e^{rt_i}$$

On définit le portefeuille actualisé

$$P^{actualise}(S_i, t_i) = P(S_i, t_i) + (V(S_0, 0) - P(S_0, 0))e^{r\,t_i}$$

Par les simulations on peut verifier que $P^{actualise}(S_i, t_i)$ et le prix de l'option BS évoluent de la même facon. Les simulation ci-dessous sont effectués pour les paramètres suivants:

$$r = 0.05, \quad \sigma = 0.5, \quad \Delta t = T_1/N, \quad N = 100, \quad K_1 = 1.5, \quad K_2 = 1.5, \quad S_0 = 1, \quad B_0 = 1,$$

$$T_1 = 5, \quad T_2 = 10.$$

Chaque intervalle temporelle (l'axe horizontale) a été devisé en N=100 intervalles Δt. On couvre l'option de maturité $T_1 = 5$, de strike $K_1 = 1$ et on achète des options supplémentaires (utilisées pour la couvertures) de de maturité $T_2 = 10$, de strike $K_2 = 1.5$

Dans la figure ci-après on retrouve l'évolution des valeurs du cash B_i, de la quantités des actions A_i et de la quantités des options G_i .

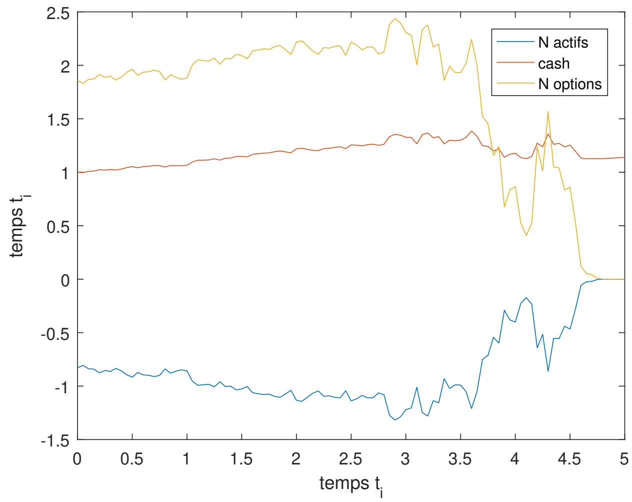
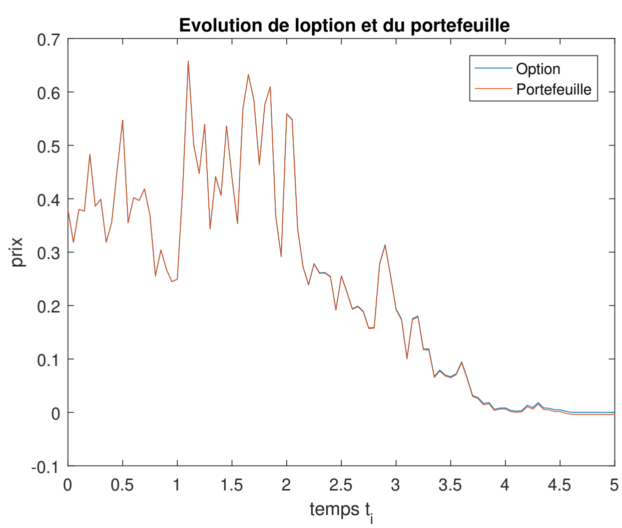


Figure 14: Evolution des instruments de couverture

L'évolution de la quantité d'actions et celle des options et du cash sont corrélés avec l'évolution de l'action et ainsi lorsque l'action augmente et l'option augmente on peut d'acheter des options et vendre des actions en placant à la banque (G_i augmente, B_i augmente et A_i diminue) alors que lorsque celles-ci diminue il faut vendre les actions pour prêter à la banque (B_i augmente et A_i diminue)

Dans la figure ci-après on retrouve l'évolution de portefeuille de couverture actualisé $P_i^{actualise}$ et celle du call à couvrire $V^{BS}(S_i, t_i)$.



Dans la figure ci-après on retrouve l'évolution du call européenne qu'il faut couvrir $V^{BS}(S_i, t_i)$ et du call faisant partie portefeuille $C^{BS}(S_i, t_i)$ dont la quantité on doit rebalancer:

Figure 15: Evolution du portefeuille de couverture actualisé et celle du call à couvrire.

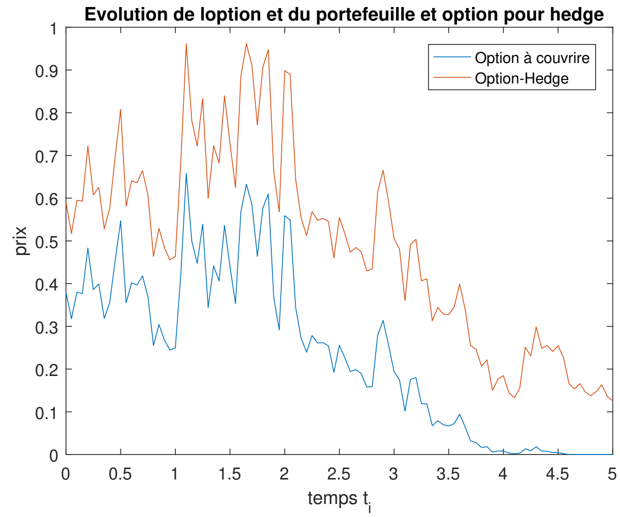


Figure 16: Evolution Evolution du Call V^{BS} et du Call pour Hedge

Dans la figure ci-après on trace l'erreur de la couverture PL correspondant à la différence entre le portefeuille de couverture $P_i^{actualise}$ et du call européene: $V^{BS}(S_i, t_i)$

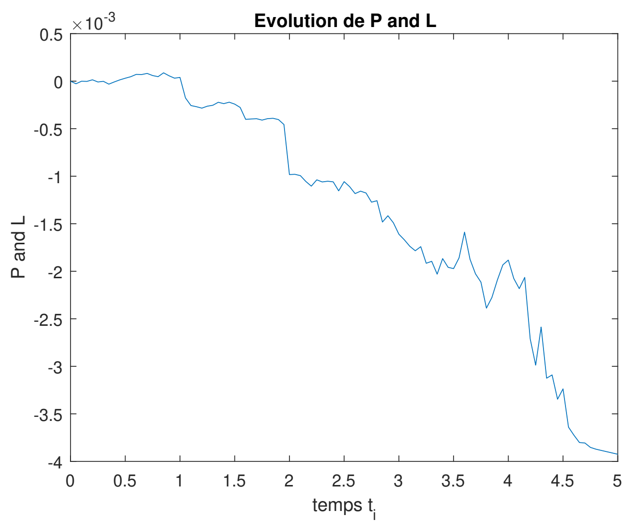


Figure 17: Evolution du l'erreur de la couverture

On constate par comparaison des Fig.7 et Fig.17 que la couverture en Gamma est beaucoup plus performante que celle en Delta.

La pérformence de la stratégie de delta-couverture est donné par l'indice de Profit et Lost final:

$$P\&L(S_0, T) = \mathbb{E}[P^{actualise}(S_T, T) - V^{BS}(S_T, T)]$$

On simule un grand nombre N_{mc} de chemins d'évolution des prix $P^{actualise}(S_T, T)$ et $V^{BS}(S_T, t_T)$. sur l'intervalle de temps $[0, T]$, en partant toujours de S_0. Pour chaque chemin n on cherche la valeur finale. Puis on calcule la moyenne arithméthique:

$$\sum_{n=1}^{N_{mc}} (P^{actualise(n)}(S_T, T) - V^{BS}(S_T, T))/N_{mc}$$

Sur la Figure 18 vous voyez les distributions pour le cas lorsque le portefeuille est rebalancées à chaque instant t_i.On constate encore une fois par comparaison des Fig.8 et Fig.18 que la couverture en Gamma est beaucoup plus performante que celle en Delta.

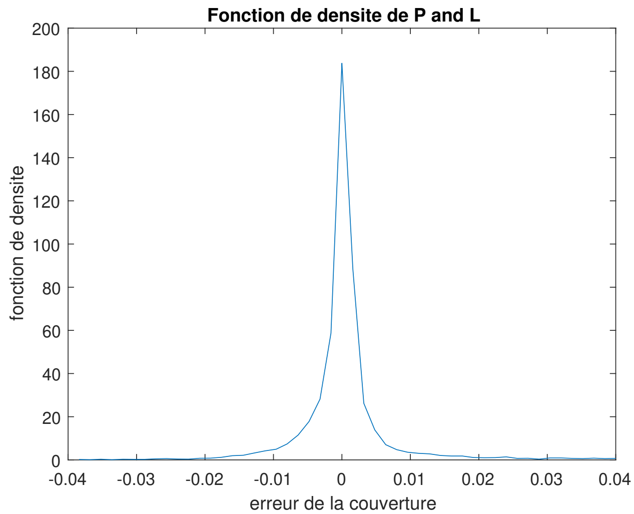


Figure 18: Fonction de densité de PL

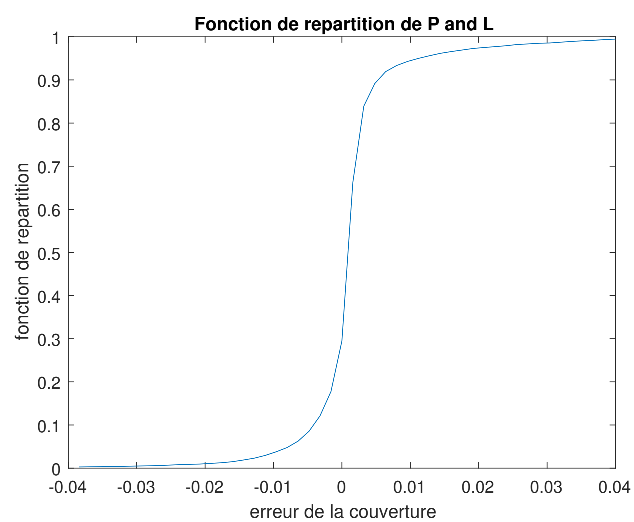


Figure 19: Fonction de repartition de PL

1.6 Etude de Delta-hedging. Déductuion de la formule fondamentale du pricing d'une option

Déduisons une relation entre la valeur initiale d'une options et sa valeur terminale en utilisant la procedure du hedging.

Soit $P_0, P_1, ..., P_n$ les valeurs du portefeuille en $t_0 = 0, t_1 ... t_n = T$.

Selon la procedure du hedging nous avons:

$$P_0 = A_0\, S_0 + B_0$$

$$P_1 = A_0\, S_1 + B_0(1+r\Delta t) = (autofinancement) = A_1\, S_1 + B_1 \quad \Rightarrow \quad B_1 = (A_0 - A_1)S_1 + B_0(1+r\Delta t)$$

$$P_2 = A_1\, S_2 + B_1(1+r\Delta t) = (autofinancement) = A_2\, S_2 + B_2 \quad \Rightarrow \quad B_2 = (A_1 - A_2)S_2 + B_1(1+r\Delta t)$$

Pour le portefeuille en t_2 nous avons

$$P_2 = A_2\, S_2 + S_2(A_1 - A_2) + S_1(A_0 - A_1)(1 + r\Delta t) + B_0(1 + r\Delta t)^2$$

On continue de la même facon et on obtient

$$P_n = A_n\, S_n + S_n(A_{n-1} - A_n) + (A_{n-2} - A_{n-1})S_{n-1}e^{r\Delta t} + (A_{n-3} - A_{n-2})S_{n-2}e^{2r\Delta t} + ... + B_0 e^{rn\Delta t}$$

De plus on connait la rélation

$$P_n + (V_0 - P_0)e^{rn\Delta t} = V_n$$

qui est la solution de l'équation

$$d(V - P) = rdt(V - P)$$

On injecte l'expression pour P_n dans la dernière formule et on obtient:

$$A_n\, S_n + S_n(A_{n-1} - A_n) + (A_{n-2} - A_{n-1})S_{n-1}e^{r\Delta t} + (A_{n-3} - A_{n-2})S_{n-2}e^{2r\Delta t} + ... + (A_0 - A_1)S_1^{(n-1)r\Delta t}$$

$$+ (P_0 - A_0\, S_0)e^{rn\Delta t} + (V_0 - P_0)e^{rn\Delta t} = V_n$$

On passe à la limite $\Delta t \to 0$, on note que $\Delta t \cdot n = T$ et $d\, A_n$ la quantité d'actions achetées

$$d\, A_n = A_{n+1} - A_n.$$

La somme

$$S_n(A_{n-1} - A_n) + (A_{n-2} - A_{n-1})S_{n-1}e^{r\Delta t} + (A_{n-3} - A_{n-2})S_{n-2}e^{2r\Delta t} + (A_0 - A_1)\, S_1 e^{r(n-1)\Delta t}$$

peut être approximée par l'intégral:

$$\int_0^T S_\tau e^{r(T-\tau)} d(A_\tau).$$

On en déduit

$$S_n\, A_n + V_0\, e^{rT} - A_0 S_0\, e^{rT} - \int_0^T S_\tau e^{r(T-\tau)} d(A_\tau) = V_n$$

Intégrons par parties

$$\int_0^T S_\tau e^{r(T-\tau)} d(A_\tau) = S_\tau e^{r(T-\tau)} A_\tau|_0^T - \int_0^T d(S_\tau e^{r(T-\tau)}) A_\tau$$

et injectons le résultat dans la formule précédente. Finalement

$$V_0 = e^{-rT} V_T - \int_0^T d(S_\tau e^{-r\tau}) A_\tau$$

soit

$$V_0 = e^{-rT} V_T - \int_0^T A_\tau (dS_\tau - S_\tau r d\tau) e^{-r\tau}$$

Si on suppose que $\mu = r$ alors

$$dS_\tau - S_\tau r d\tau = \sigma S_\tau dW_\tau$$

Donc le prix initiale de l'option est donné par la formule

$$V_0 = e^{-rT} V_T - \int_0^T e^{-r\tau} \sigma A_\tau S_\tau dW_\tau$$

Prenons maintenant l'espérance conditionnelle de chaque membre de cette relation et on obtient la formule du thèoréme de Feynmann - Kac qui dit que le prix de l'option est l'espérance conditionnelle du pay-off actualisé :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}[V_T / S(t=0) = S_0]$$

Le prix initial de l'option de dépend ni de la procedure du hedging, ni de Delta.

1.7 Delta-hedging avec la volatilité implicite

Nous avons supposé que la volatilité est une constante. En realité la volatilité est le paramètre qui mesure le risque associé au rendement de l'actif sous-jacent. Les praticiens ont rapidement vu que la volatilité historique, estimation du paramètre de volatilité par les données historiques, ne permet pas de reconstituer les prix observés sur le marché. Pour K et T différentes la volatilité n'est pas la même, donc la volatilité est une fonction du strike et la maturité: $\sigma = \sigma(T, K)$. $\sigma^{implicite}(K,T)$ est une volatilité qui introduite dans la formule de BS donne comme prix de l'option celui observé sur le marché.

Supposons que le prix de l'option V est calculé par la formule de Black et Sholes avec la volatilité implicite:

$$V^{BS}(S,t) = SN(d_1(S,t)) - Ke^{-r\,(T-t)} N(d_2(S,t))$$

$$d_1(S,t) = \frac{ln(S/K) + (r + \sigma^2_{implicite}/2)(T-t)}{\sigma_{implicite}\sqrt{T-t}} \qquad d_2(S,t) = \frac{ln(S/K) + (r - \sigma^2_{implicite}/2)(T-t)}{\sigma_{implicite}\sqrt{T-t}}$$

Supposons que le prix de l'action varie avec une autre volatilité - volatilité historique σ_h.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_h S_t dW_t$$

Quelle volatilité utiliser pour la couverture? Historique ou implicite?

Supposons que la couverture est faite avec la volatilité implicite:

$$A(S) = N(d_1(\sigma_{implicite})), \quad d_1(S_t, t) = \frac{ln(S_t/K) + (r + \sigma^2_{implicite}/2)(T-t)}{\sigma_{implicite}\sqrt{T-t}}.$$

Calculons dans ce cas $P\&L$.

On répete la procedure du hedging continue qui conduit à la déduction de l'équation de Black et Scholes, mais au moment d'application du lemme d'Ito on utilise volatilité historique σ_h:

$$d\langle S\rangle_t = \sigma_h^2 S_t^2 dt$$

Calculons

$$dP-dV-rdt(AS+B-V) = -(\frac{\partial V_{imp}}{\partial t}dt+\frac{\partial V_{imp}}{\partial S}dS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{imp}}{\partial S^2}\sigma_h^2 S^2 dt)+(A_{imp}dS+rBdt)-rdt(AS+B-V)$$

Utilisons le fait que V_{imp} vérifie l'équation de BS:

$$\frac{\partial V_{imp}}{\partial t} + rS\frac{\partial V_{imp}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2_{implicite}S^2\frac{\partial^2 V_{imp}}{\partial S^2} - rV_{imp} = 0$$

On obtient ainsi l'erreur de couverture à chaque instant temporel

$$d(P-V) - rdt(P-V) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V^{imp}}{\partial S^2}((\sigma_{imp})^2 - (\sigma_h)^2)S^2 dt$$

On intègre cette équation avec la variation de la constante et on obtient

$$P(T) - V^{imp}(T) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{-r(t-T)}\frac{\partial^2 V^{imp}}{\partial S^2}((\sigma_{implicite})^2 - (\sigma_h)^2)S_t^2 dt + (P(0) - V^{imp}(0))e^{rT}$$

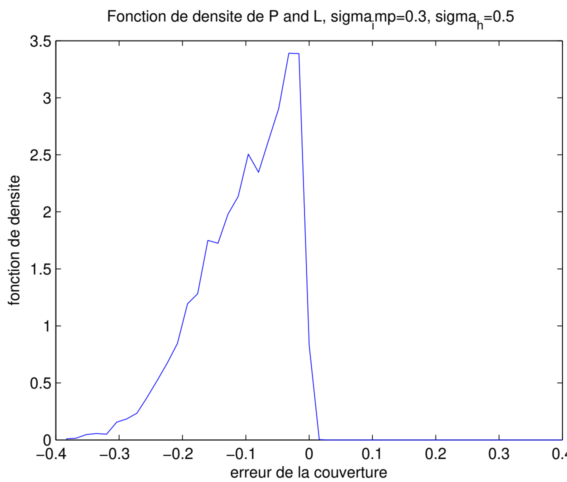
Après l'introduction du portefeuille actualisé

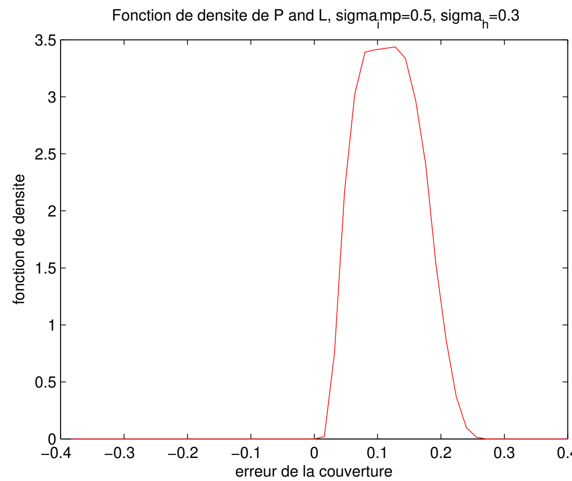
$$P^{actualise}(T) = P(T) - (P(0) - V^{imp}(0))e^{rT}$$

on conclut finalement que le Profit et Loss final peut être représenté par l'intégrale sur la vie de l'option:

$$P^{actualise}(T) - V^{imp}(T) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{-r(t-T)}\frac{\partial^2 V^{imp}}{\partial S^2}((\sigma_{implicite})^2 - (\sigma_h)^2)S_t^2 dt$$

Si $\sigma_{implicite} > \sigma_h$ le portefeuille de couverture domine le prix de l'option et on gagne. Cette intégrale dépend du chemin d'evolution d'action. Allore si la vraie volatilité du sous-jacent σ_h est plus petite que la volatilité implicite le Profit et Lost (ici le gain) est d'autant plus grande que la Gamma de l'option est grande.





1.8 Etude théorique de Profit et Loss dans le cas de Delta Hedging

1.8.1 Rappel sur la demonstration de la Lemme d'Ito.

Considérons la partition de l'intervalle de $[0, t]$ en n intervalles $]t_i, t_{i+1}]$. La somme

$$\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \equiv \langle W\rangle_t$$

est par définition la variation quadratique du mouvement Brownien. Dans $L^2(\Omega)$ la variation quadratique converge et vaut t:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = t, \quad soit \int_0^t d\,\langle W\rangle_t = t \quad soit \quad d\langle W\rangle_t = dt$$

0n peut faire la conclusions heuristique: Si

$$dt \to 0 \quad (dW_t)^2 \equiv d\langle W\rangle_t$$

n'est plus une variable aléatoire mais déterministe et

$$(dW_t)^2 = dt$$

Considérons maintenant l'objet $f(W_t) - f(W_0)$, où une fonction $f \in C^2(R)$. La formule de Taylor avec la continuité p.s. du mouvement Brownien nous donne:

$$f(W_t)-f(W_0) = \sum_{i=1}^{n}(f(W_{t_i})-f(W_{t_{i-1}})) = \sum_{i=1}^{n} f'(W_{t_i})(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(W_{\theta_i})(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})^2,$$

où $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

La partie gauche de cette formule converge dans $L^1(\Omega)$ à

$$\int_0^t f'(W_t)dW_t + \int_0^t f''(W_t)dt$$

C'est - à - dire nous avons la formule d'Ito:

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_t)dW_t + \int_0^t f''(W_t)dt$$

Considérons l'équation stochastique pour S_t

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

et calculons sa variation quadratique.

$$\langle S\rangle_t = \sum_{i=1}^{n}(S_{t_i} - S_{t_{i-1}})^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} S_{t_{i-1}}^2(r^2\Delta t^2 + 2r\Delta t\sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \sigma^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2) \to_{n\to\infty} = \sum_{i=1}^{n} S_{t_{i-1}}^2\sigma^2\Delta t$$

On peut montrer que

$$\langle S\rangle_t = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} S_{ti-1}^2\sigma^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = \int_0^t S_t^2\sigma^2 dt,$$

soit

$$d\langle S\rangle_t = S_t^2\sigma^2 dt.$$

Finalement, au lieu de la fonction f on peut utiliser une fonction $V(S,t)$ le prix de l'option et donc si $\Delta_t \to 0$ nous avons

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + V'(S)dS + \frac{1}{2}V''(S)S^2\sigma^2 dt.$$

Si le trading se passe rarement, Δt peut être suffisamment grande, donc dans ce cas la lemme d'Ito ne plus applicable, mais la formule de Taylor est toujours applicable:

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + V'(S)dS_t + \frac{1}{2}V''(dS_t)^2.$$

$$(dS_t)^2 \neq S_t^2\sigma^2 dt$$

Nous devons utiliser la formule suivante pour $(dS_t)^2$

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma\sqrt{\Delta t}\mathbb{N}(0,1)), \quad (dS_t)^2 \sim \sigma^2 S_t^2\mathbb{N}^2(0,1)\Delta t$$

Ici le nombre $\mathbb{N}(0,1)$ suit la loi normales centré réduite. Pour déduire l'erreur de la couverture nous allons utiliser la formule suivante:

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + V'(S)dS_t + \frac{1}{2}V''\sigma^2 S_t^2\mathbb{N}^2(0,1)\Delta t.$$

Calculons de nouveau l'erreur de la couverture après le temps Δt:

$$\Delta P\&L = dP_t - dV_t - rdt(P-V)_t$$

$$dP_t - dV_t - rdt(A_tS_t + B_t - V_t) = (A_t dS_t + rB_t dt) - \frac{\partial V}{\partial t}dt - \frac{\partial V}{\partial S}dS_t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 \mathbb{N}^2(0,1)dt - rdt(A_tS_t + B_t - V_t)$$

On en obtient:

$$\Delta P\&L = (-\frac{\partial V}{\partial S} + A_t)dS_t +$$

$$(-\frac{\partial V}{\partial t}dt - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + rV_t dt - r\, S_t\, A_t\, dt) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2(1 - \mathbb{N}^2(0,1))dt$$

Pour éliminer le risque localement (à chaque instant temporel t_i) on choisit

$$A_t = \frac{\partial V}{\partial S}$$

mail on tient compte du fait que $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ n'est plus petit. On remplace A dans l'équation précedente, on ajoute et on déduit à droite le même terme

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt$$

et on obtient l'expression

$$\Delta P\&L = (-\frac{\partial V}{\partial t}dt - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}dt + rV_t dt - S\frac{\partial V}{\partial S}rdt) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2(1 - \mathbb{N}^2(0,1))dt$$

L'expression dans les parentheses vérifie l'équation de Black que est null donc on obtient pour $\Delta P\&L$

$$\Delta P\&L = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2(1 - \mathbb{N}^2(0,1))\Delta t$$

En pratique l'option qui était couvert une seule fois au debut $(t = 0)$ **doit suivre cette lois.**

1.8.2 Etude de χ

Introduisons la variable aléatoire

$$\chi = (1 - \mathbb{N}^2(0,1))$$

Après chaque traiding hedging l'erreur est proportionnel à l'intervalle entre les traiding Δt. L'espérance de l'erreur est null. En effet

$$\mathbb{E}[\chi] = 0$$

L'erreur n'est pas symmétrique car la fonction de répartition de χ

$$F_\chi(x) = P(\chi < x)$$

presentée sur le graphe au-dessous

montre que

$$\mathbb{P}[\chi \leq 0] = 0.32 \quad \mathbb{P}[\chi \geq 0] = 0.68$$

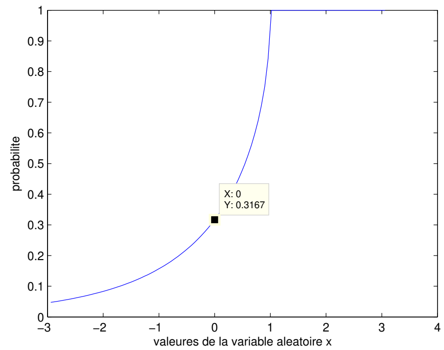


Figure 20: Fonction de densité de PL

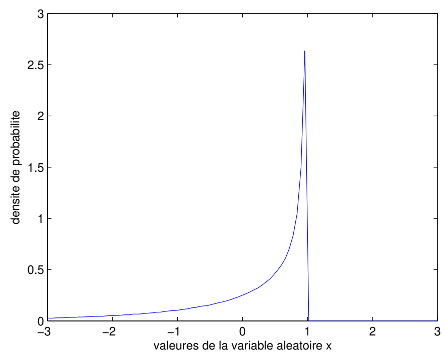


Figure 21: Fonction de densité de PL

Étudions l'erreur total du hedging. Comment se comporte

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_i ?$$

Nous savons que

$$Var[\chi] = \mathbb{E}(\chi^2) = \mathbb{E}(\mathbb{N}^4(0,1)) - 2\mathbb{E}(\mathbb{N}^2(0,1)) + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$$

D'après le théorème de Limite Centrale

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \chi_i - 0}{\sqrt{2}\sqrt{n}} \to \mathbb{N}(0,1)$$

On peut estimer que

$$\Delta t \sum_{i=1}^{n} \chi_i \to \sqrt{2}\mathbb{N}(0,1)\sqrt{n}\Delta t = \sqrt{2T}\mathbb{N}(0,1)\sqrt{\Delta t}$$

Par un thèoréme de limite centrale fonctionnel (c'est-à-dire qui permet d'obtenir la convergence non pas d'une suite de variables à une gaussienne mais d'une suite de processus vers le mouvement brownien), on obtient alors que

$$\Delta t \sum_{t_i<t} \chi_i \to \sqrt{2t}\mathbb{N}(0,1)\sqrt{\Delta t} \to \sqrt{2}\int_O^t d\widehat{W}_t$$

en tant qu'un processus paramétré part t, converge en loi vers un mouvement brownien standard $\widehat{W}_t$ indépendant de W_t, lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. On peut donc écrire de manière informelle, en supposant que le pas de discrétisation est constant et égale à Δt.

Donc l'erreur total du hedging est décrit de facon approximative par la distribution gaussienne et proportionnel à $\sqrt{\Delta t}$:

$$P\&L \sim \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \int_0^T e^{r(T-\tau)} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_\tau^2 d\widehat{W}_\tau$$

Les distributions simulées ressemblent une distribution Gausienne mais elles sont plus pointues.

1.9 Hedging avec coût de transaction

Introduisons $\mathcal{F}_t$ une filtration générée par le mouvement Brownien W_t.

Supposons que la couverture s'effectue chaque Δt. Donc à chaque t_i on doit acheter ou vendre la quantité des actions égale à

$$A(S_t + dS_t, t + dt) - A(S_t, t) = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS_t$$

Le coût de ce rébalancement est la quantité des actions de traiding multiplié sur la valeur de l'action et la fraction k:

$$|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS_t \times (kS_t)|.$$

La valeur absolue reflet le fait qu'on paye une transaction positive quel que soit la procedure: achat ou vente. Car

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma\sqrt{\Delta t}\mathbb{N}(0,1))$$

le coût de transaction devient

$$\mathbb{E}[k|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma\sqrt{\Delta t}\mathbb{N}(0,1))S_t^2||\mathcal{F}_t] = \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t} k |\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}|\sigma \Delta t S_t^2}$$

L'espérance de $|\mathbb{N}(0,1)|$ est non null donc l'espérance de coût de transaction est non nulle. Pour une option avec la maturité T il y a $T/\Delta t$ traiding donc le coût total de transaction est d'ordre

$$(T/\Delta t)\sqrt{\Delta t} \to \infty$$

si l'intervalle entre les traiding tend vers zero.

On peut mener l'étude analytique grace au travail de Hoggard, Whaley et Willmott.

Soit

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma\sqrt{\Delta t}\mathbb{N}(0,1))$$

On essaye d'assurer la couverture d'une option avec coût de transaction après le temps Δt. Construisons le portefeuille de la couverture

$$\Pi_t = P_t + cash\ pay\ pour\ les\ transactions - V_t = A_t\, S_t + cash\ pay\ pour\ les\ transactions - V_t$$

Calculons

$$d\Pi_t = A_t dS_t - \frac{\partial V}{\partial t}dt - \frac{\partial V}{\partial S}dS_t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 \mathbb{N}^2(0,1)dt + \sqrt{\frac{1}{\Delta t}}k|\mathbb{N}(0,1)| \cdot |\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}|\sigma \Delta t S_t^2 =$$

$$(A - \frac{\partial V}{\partial S})(rS_t dt + \sigma\sqrt{\Delta t}S\mathbb{N}(0,1))) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 \mathbb{N}^2(0,1)dt + \sqrt{\frac{1}{\Delta t}}|\mathbb{N}(0,1)|k|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}|\sigma \Delta t S_t^2$$
$$-\frac{\partial V}{\partial t}dt$$

L'espérance de cette variation:

$$E[d\Pi_t|\mathcal{F}_t] = (A - \frac{\partial V}{\partial S})rSdt - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + k\sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}}|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}|\sigma \Delta t S_t^2 - \frac{\partial V}{\partial t}dt$$

On peut aussie trouver la variance de cette expression:

$$E[(d\Pi_t)^2|\mathcal{F}_t] = dt(\sigma^2 S_t^2 (A - \frac{\partial V}{\partial S})^2 + k^2\sigma^2 S_t^4 (\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})^2)$$

$$E[(d\Pi_t)^2|\mathcal{F}_t] - (E[d\Pi_t|\mathcal{F}_t])^2 = dt(\sigma^2 S_t^2 (A_t - \frac{\partial V}{\partial S})^2 + (1 - \frac{2}{\pi})k^2\sigma^2 S_t^4 (\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})^2)$$

On ne peut pas supprimer le risque complétement, cependant le risque peut être minimiser si on choisit

$$A_t = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Dans ce cas la

$$E[d\Pi_t] = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 dt + k\sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}}|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}|\sigma \Delta t S_t^2 - \frac{\partial V}{\partial t}dt$$

Cette expression est une espérance et on la fait égale à la quantité d'argent gagné du compte sans risque:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 dt + k\sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}}|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}|\sigma \Delta t S_t^2 - \frac{\partial V}{\partial t}dt = r\Pi_t dt = r(S_t\frac{\partial V}{\partial S} - V_t)dt$$

On obtient donc Hoggard-Whalley-Wilmott equation avec au coût de transaction:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} - \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}}k|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}|\sigma S_t^2 = 0$$