

**ECOLE INTERNATIONNALE DES SCIENCES DU
TRAITEMENT DE L'INFORMATION**

E.I.S.T.I. Département Mathématiques

2 ème Année Spécialisation Genie Mathématique

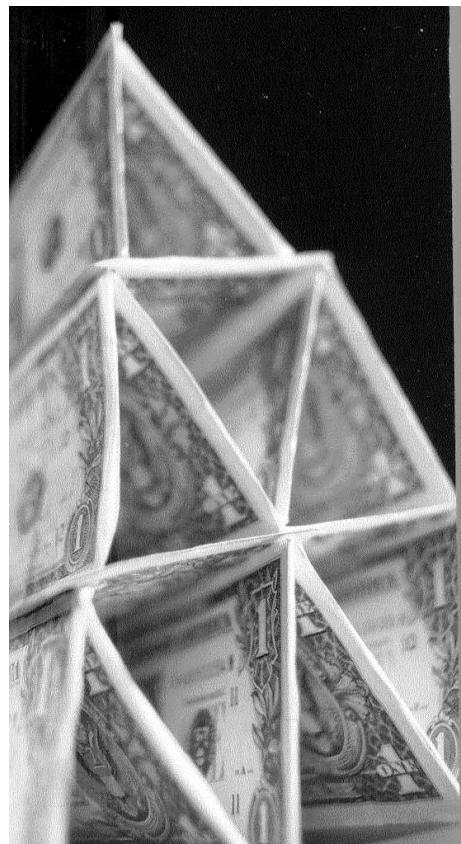
Parcours math-finance

MÉTHODES NUMÉRIQUES AVANCÉES

POUR

LES EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES EN FINANCES

Irina Kortchemski



Contents

1	Introduction	4
2	Méthodes de Monte-Carlo	4
2.1	Modèle de Black et Scholes.	4
2.2	Simulation du mouvement Brownien	5
2.3	Simulation d'évolution du prix de l'actif sousjacent	6
2.3.1	Simulation d'évolution du prix de l'actif sousjacent par la méthode aux Différences Finies	6
2.3.2	Simulation d'évolution du prix de l'actif à partir de la solution exacte de l'équation stochastique	7
2.4	Le prix de l'option Vanilla. Méthode 1	8
2.5	Le prix de l'option Vanilla. Méthode 2	9
2.6	Réduction de la variance. Variables antithétiques	9
2.7	Réduction de la variance. Variables de control.	12
2.8	Théorème de Feynman - Kac.	13
3	Méthode aux Différences Finies. Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes. Option Vanilla.	17
3.1	Solution analytique.	17
3.2	Maillage. Discrétisation de l'espace-temps et de l'équation.	17
3.3	Méthode explicite d'Euler	19
3.4	Précision des solutions numériques	22
3.5	Méthode implicite de Crank-Nicolson	22
3.5.1	Algorithme de Crank-Nicolson. Conditions aux limites de Dirichlet	23
3.5.2	Algorithme de Crank-Nicolson. Conditions aux limites de Neumann	26
3.6	Greeks. Option Vanilla	29
3.7	L'équation de Black et Scholes avec les paramètres variables. Conditions aux limites générales.	31
4	Différences Finies. Pricing des Options Asiatiques.	33
4.1	Déduction de l'EDP pour les Options Asiatiques à l'aide du théorème de Feynman-Kac. Strike fixe. Call	33
4.1.1	Changement de variables. Reduction dimensionnelle.	35
4.1.2	Conditions aux limites. Resolution analytique de l'EDP réduite	36
4.1.3	Applications numériques. Méthode de Crank-Nicolson.	37
4.2	Options Asiatiques. Strike fixe. Put	45
4.2.1	Applications numériques.	45
4.3	Options Asiatiques. Strike flottant. Put	48
4.3.1	Changement de variables. Reduction dimensionnelle.	48
4.3.2	Conditions aux limites pour les Options Asiatiques.	48
4.4	Résolution numérique de l'EDP originale. Strike fixe. Put.	49
4.4.1	Discrétisation de l'équation pour les Options asiatiques.	49
4.5	Algorithme de la résolution numérique de l'EDP originale. Méthode d'Euler explicite .	51
5	Méthodes de Monte-Carlo. Pricing des Options Asiatiques.	55
5.1	Algorithme pour $t = 0S$. Strike Fixe. Call.	55
5.2	Algorithme pour t est quelconque. Surface des prix. Strike Fixe. Call.	57

6 Options à deux actifs	60
6.1 Changements des variables. Option Exchange.	61
6.2 Exchange Option. Solution analytique. Formule de Margrabe	62
6.3 Résultats numériques pour l'Options Exchange	63
6.4 Changement de variables. Option Quotient.	64
6.5 Discréétisation de l'EDP originale	65
6.5.1 Basket options	65
7 Options Lookback.	69
7.1 Dédiction de l'EDP pour Options Lookback. Strike flottant. Put	69
7.2 Résultats numériques par les Différences Finies.	71
7.3 Options Lookback par Monte-Carlo.	73
7.3.1 Strike flottant. Put. $t = 0$.	73
7.3.2 Option Lookback pour une valeur S_t , une valeur M_t et un temps t quelconque	75
8 Options américaines	77
8.1 Options américaines. Méthode d'Euler explicite.	79
8.2 Options américaines. Méthode de splitting.	79
8.3 Options américaines. Méthode de Newton.	81
8.4 Options américaines. Algorithme PSOR (Projected Successive Over Relaxation).	82
9 Résolution numérique de l'équation de Heston.	83
9.1 Discréétisation de l'équation pour l'option Européene	83
10 Bibliographie.	88

1 Introduction

Les méthodes numériques fondées sur les équations aux dérivées partielles n'étaient pas très populaires jusque récemment. Les modèles obtenus par des arguments probabilistes et simulés par les méthodes de Monte-Carlo sont en effet plus naturelles et il est plus facile à implémenter des méthodes stochastiques que les algorithmes utilisés pour les EDP. Cependant, quand il est possible discréteriser les EDP, les algorithmes pour la résolution des équations discréterisées sont très efficaces. Les solutions, numériques des EDP donnent plus d'informations. Elles donnent, par exemple, les prix d'une option pour toutes les valeurs initiales de l'actif sous-jacent et pour toutes les valeurs du temps d'exercice, tandis que les méthodes de Monte-Carlo les donnent pour une seule valeur de l'actif et du temps d'exercice. Les EDP sont aussi très efficaces pour le calcul des Greeks.

Les PDF en finance possèdent plusieurs caractéristiques. On travaille sur des domaines temporels et spatiaux finis. On doit impérativement imposer des conditions aux limites et des conditions initiales. Les équations sont souvent parabolique, mais elles peuvent aussi contenir les termes hyperboliques, comme par exemple l'EDP pour les options asiatiques.

Des modèles de stratégie de hedging du marché nonliquide ont permis d'arriver à une équation de BS nonlinéaire. La resolution numérique des ces équations sont indispensables.

2 Méthodes de Monte-Carlo

2.1 Modèle de Black et Scholes.

L'actif sous-jacent S est un processus stochastique $S(t)$, $t \in [t, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_t = S_0 \quad (1)$$

On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt.

La solution de cette équation est donnée par la formule:

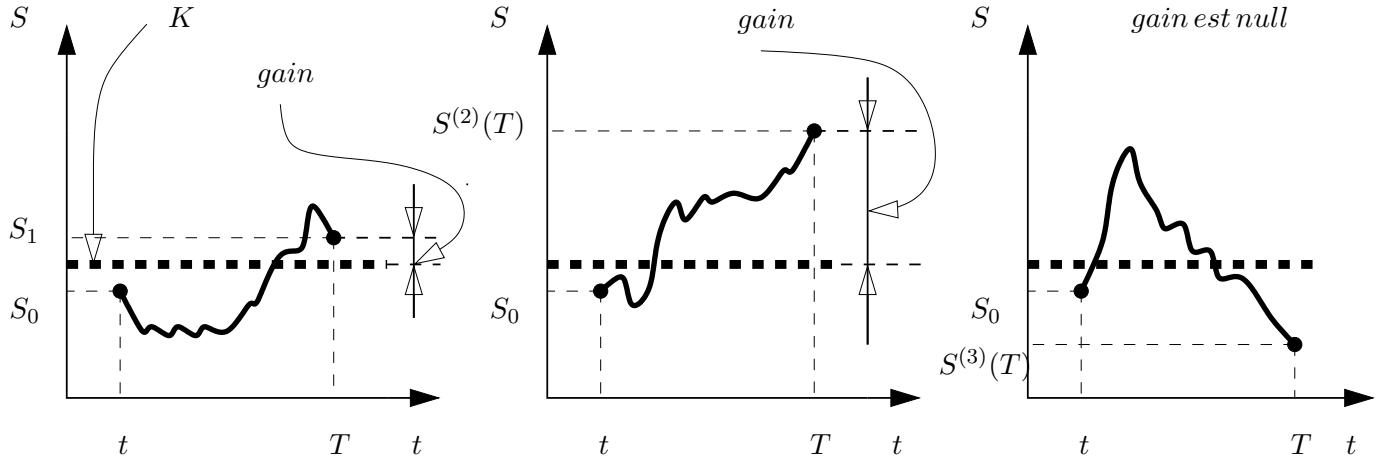
$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Le prix d'une option européenne au moment de temps t est donné par l'espérance conditionnelle d'une fonction pay-off.

$$V(S_0, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(S(T) - K, 0) / S(t) = S_0] \quad (2)$$

On peut expliquer ce résultat de façon suivante: on simule un grand nombre de chemins d'évolution de l'actif $S(t)$ sur l'intervalle de temps $[t, T]$, en partant toujours de S_0 . Pour chaque chemin on cherche la valeur finale $S(T)$. Puis on calcule la moyenne arithmétique de gains, c'est-à dire de $\Lambda(S(T)) = \max(S(T) - K, 0)$. Le facteur $e^{-r(T-t)}$ exprime le fait qu'une bank rembourse les intérêts sur l'intervalle du temps $T - t$.

Simulons 3 chemins:



$$gain = S^{(1)}(T) - K$$

$$gain = S^{(2)}(T) - K$$

$$S^{(3)}(T) < K$$

Figure 1: Bases de la méthode de Monté-Carlo

Le gain moyen (c'est le prix V de l'option) est

$$\frac{1}{3}((S^{(1)}(T) - K) + (S^{(2)}(T) - K) + 0).$$

Le prix V de l'option est

$$e^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{3}((S^{(1)}(T) - K) + (S^{(2)}(T) - K) + 0) \right)$$

2.2 Simulation du mouvement Brownien

On discrétise l'intervalle $[0, T]$ sur N intervalles Δt : ($\Delta t = T/N$, $t_n = n \Delta t$, $t_N = T$).

Pour un chemin du mouvement Brownien on code:

$$\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_{t_1} = g_1 \sqrt{\Delta t} \\ W_{t_2} = W_{t_1} + g_2 \sqrt{\Delta t} \\ \vdots \\ W_{t_N} = W_{t_{N-1}} + g_N \sqrt{\Delta t}, \end{cases} \quad (3)$$

où les nombres $\{g_n\}$ suivent la loi Normale $N(0, 1)$ et on réalise le graphe du W_t : $t_n \rightarrow W_{t_n}$.

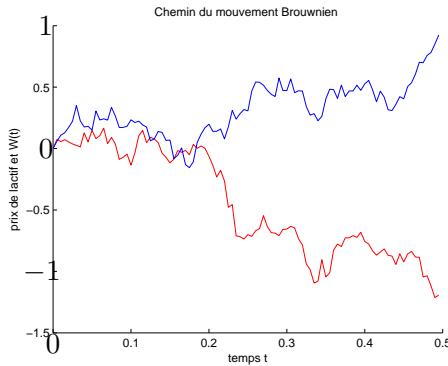


Figure 2: Deux trajectoires du mouvement Brownien

2.3 Simulation d'évolution du prix de l'actif sous-jacent

2.3.1 Simulation d'évolution du prix de l'actif sous-jacent par la méthode aux Différences Finies

L'évolution de l'actif sous-jacent S est un processus stochastique $S(t)$, $t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \quad (4)$$

On note σ la volatilité de l'actif, r le taux d'intérêt.

La méthode 1 consiste à discrétiser l'équation stochastique par les Différences Finies, puis la simuler.

- Discrétisons l'intervalle $[0, T]$ sur N parties: : $(\Delta t = T/N, \quad t_i = i \Delta t)$.
- Discrétisons le différentiel

$$dS(t_i) \sim S(t_i + \Delta t) - S(t_i) \equiv S_{t_{i+1}} - S_i$$

- Discrétisons le différentiel

$$dW(t_i) \sim W(t_i + \Delta t) - W(t_i) \equiv W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$$

- Discrétisons l'équation différentielle

$$S_{t_{i+1}} - S_{t_i} = rS_{t_i}\Delta t + S_{t_i}\sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

soit

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)((1 + r\Delta t) + \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}))$$

- Simulons pour un chemin du mouvement Brownien:

$$\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_{t_1} = g_1 \sqrt{\Delta t} \\ W_{t_2} = W_{t_1} + g_2 \sqrt{\Delta t} \\ \vdots \\ W_{t_N} = W_{t_{N-1}} + g_N \sqrt{\Delta t}, \end{cases} \quad (5)$$

où les nombres $\{g_i\}$ suivent la loi Normale $\mathbb{N}(0, 1)$.

- Pour ce chemin du mouvement Brownien simulons le chemin correspondant à l'évolution de l'actif

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)((1 + r\Delta t) + \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}))$$

$$\begin{cases} S_0 = S_{t_0} \\ S_{t_1} = S_{t_0}((1 + r\Delta t) + \sigma(W_{t_1} - W_{t_0})) \equiv S_{t_0}((1 + r\Delta t) + \sigma\sqrt{\Delta t}g_1) \\ S_{t_2} = S_{t_1}((1 + r\Delta t) + \sigma(W_{t_2} - W_{t_1})) \equiv S_{t_1}((1 + r\Delta t) + \sigma\sqrt{\Delta t}g_2) \\ \vdots \\ S_{t_N} = S(t_{N-1})((1 + r\Delta t) + \sigma(W_{t_N} - W_{t_{N-1}})) \equiv S_{t_{N-1}}((1 + r\Delta t) + \sigma\sqrt{\Delta t}g_N) \end{cases} \quad (6)$$

On simule maintenant N_{mc} chemins et on s'intéresse aux valeurs finales de l'actif $S_{t_N} \equiv S_T$.

Pour vérifier les codes on compare une estimation de la moyenne $E(S_T)$ et de la variance $Var(S_T)$ avec les valeurs théoriques. Comparer

$$E(S_T)_{estime} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} (S_T)^{(n)}$$

avec

$$\mathbb{E}[S_T/S(0) = S_0] = S_0 e^{-rT}$$

Comparer

$$Var(S_T)_{estime} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} ((S_T)^{(n)})^2 - \left(\frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} (S_T)^{(n)}\right)^2$$

avec

$$Var E[S_T/S(0) = S_0] = S_0^2 e^{2rT} (e^{\sigma^2 T} - 1).$$

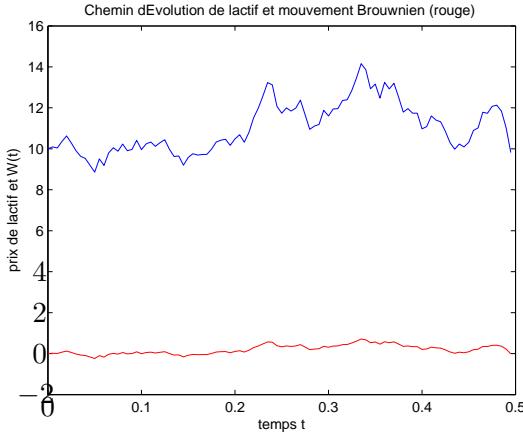


Figure 3: Trajectoires correlées du mouvement Brownien et de l'actif

2.3.2 Simulation d'évolution du prix de l'actif à partir de la solution exacte de l'équation stochastique

La méthode 2 consiste à utiliser la solution exacte de l'équation stochastique.

La solution de équation stochastique est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)\right)$$

soit

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma(W(t + \Delta t) - W(t))\right)$$

soit

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma W(\Delta t)\right)$$

Ici on a utilisé la stationnarité du mouvement Brownien.

Le mouvement Brownien suit la loi normal $N(0, \Delta t)$, donc on peut coder le mouvement Brownien comme:

$$W(\Delta t) = \sqrt{\Delta t} N(0, 1)$$

, où $\mathbb{N}(0, 1)$ est un nombre qui suit la loi normal centrée réduite. Pour simuler l'évolution du prix de l'actif on réalise le graphe $t_i \rightarrow S_{t_i}$ en partant de S_0 .

$$S_{i+1} = S_i \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sqrt{\Delta t} \sigma \mathbb{N}(0, 1)^{(i)}\right)$$

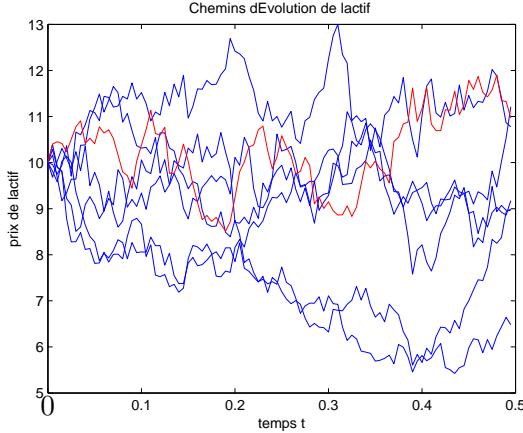


Figure 4: Trajectoires de l'actif S_t

2.4 Le prix de l'option Vanilla. Méthode 1

Pour l'option européenne on ne simule que la dernière valeur de l'actif $S(T)$.

Le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ est donné par l'espérance conditionnelle:

$$V(S_0, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}[\max(S(T) - K, 0) / S(t = 0)] = S_0 \quad (7)$$

On utilise l'expression pour la dernière valeur de l'actif:

$$S(T) = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W(T)\right)$$

et on obtient

$$V(S_0, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}[\max(S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W(T)\right) - K, 0) / S(t = 0)] = S_0 \quad (8)$$

$W(T)$ est la valeur du mouvement Brownien à l'instant (maturité) $t = T$. C'est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathbb{N}(0, \sqrt{T})$. On peut donc modéliser la valeur finale du mouvement Brownien par la variable aléatoire:

$$W(T) = \mathbb{N}(0, 1) \sqrt{T}$$

Pour cela on simule un grand nombre N_{mc} de variables aléatoires: $\mathbb{N}^{(1)}(0, 1), \mathbb{N}^{(2)}(0, 1), \mathbb{N}^{(3)}(0, 1), \mathbb{N}^{(4)}(0, 1) \dots$ qui suivent la loi Normale Centrée réduite.

Le prix de l'option européenne au moment $t = 0$ au point $S = S_0$ est donné par la moyenne arithmétique

$$V(S_0, 0) = e^{-rT} \sum_{n=1}^{N_{mc}} \max\left(S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \sqrt{T} \mathbb{N}^{(n)}(0, 1)\right) - K, 0\right) / N_{mc}$$

Puis on discrétise l'intervalle $[0, L]$ en $I + 1 = 100$ parties et on ajoute une boucle supplémentaire pour faire varier S_0 pour calculer le prix $V(S, 0)$ pour chaque valeur $S = S_0$. On trace le graphe

$$S_0 -> V(S_0, 0)$$

2.5 Le prix de l'option Vanilla. Méthode 2

Pour calculer le prix de l'option Vanilla on simule les trajectoires complètes de l'actif, par contre on n'utilise que la dernière valeur de l'actif: $S(T)$.

On simule un grand nombre N_{mc} de chemins d'évolution de l'actif $S^{(k)}(t)$ sur l'intervalle du temps $[0, T]$, en partant toujours de S_0 . Pour chaque chemin (k) on cherche la valeur finale $S^{(k)}(T)$. Puis on calcule la moyenne arithmétique des fonctions pay-off

$$\Lambda(S^{(k)}(T)) = \max(S^{(k)}(T) - K, 0).$$

On calcule le prix de l'option européenne pour chaque S_0 au moment du temps $t = 0$. Le prix est donné par la formule:

$$(e^{-rT} \sum_{k=1}^{N_{mc}} \max(S^{(k)}(T) - K, 0)) / N_{mc}$$

On peut montrer que la Méthode 2 donne les mêmes résultats car la somme des variables aléatoires normales est une variable aléatoire normale. En effet

$$S(T) = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^N g_i\right)$$

La somme des variables aléatoires normales

$$\sum_{i=1}^N g_i \text{ suit la loi } \mathbb{N}(0, N).$$

En déduit

$$\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^N g_i = \sqrt{T} \mathbb{N}(0, 1)$$

soit

$$S(T) = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T} \mathbb{N}(0, 1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0, 1)$ est une variable aléatoire centrée réduite.

2.6 Réduction de la variance. Variables antithétiques

Notons la fonction pay-off actualisée par la fonction Φ :

$$\Phi(W_T) = e^{-rT} \max(S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W(T)\right) - K, 0)$$

Le vrai prix du Call se trouve dans l'intervalle de confiance

$$\left[\frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)}) - \frac{1.96 \cdot \sqrt{Var[\Phi]}}{\sqrt{N_{mc}}}, \quad \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)}) + \frac{1.96 \cdot \sqrt{Var[\Phi]}}{\sqrt{N_{mc}}} \right]$$

avec la probabilité 0.95. Ici

$$\frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)}) = V(S_0, 0)_{estime}$$

est le prix du Call qu'on estime par la moyenne arithmétique.

En effet:

- Soit X une variable aléatoire qui suit la loi Normale Centrée réduite. Donc la probabilité que

$$\mathbb{P}[|X| < 1.96] = 0.95$$

- Du théorème de Limite Central

$$\sqrt{N_{mc}} \frac{\sum_{n=1}^{N_{mc}} X^{(n)} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{N_{mc} \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1)$$

Ici $\mu = \mathbb{E}(X)$ est l'espérance ou la vraie valeur de X , σ est la vraie variance de X .

Injectons au lieu de X l'expression pour le Call

- $X = \Phi(W_T)$
- $\mu = V(S_0, 0)$ est le vrai prix du Call
- σ est la vraie variance du Call

on obtient:

$$\mathbb{P}[\left| \sqrt{N_{mc}} \frac{\frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)}) - V(S_0, 0)}{\sigma} \right| < 1.96] = 0.95$$

On réécrit:

$$\frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)}) - \frac{1.96 \cdot \sqrt{Var[\Phi]}}{\sqrt{N_{mc}}} \leq V(S_0, 0) \leq \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)}) + \frac{1.96 \cdot \sqrt{Var[\Phi]}}{\sqrt{N_{mc}}}$$

On en conclut que

- L'erreur est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{N_{mc}}}$
- L'erreur est proportionnel à l'écart -type $\sigma = \sqrt{Var[\Phi]}$

Pour diminuer l'intervalle de confiance soit on augmente le nombre de scénarios N_{mc} soit on diminue la variance σ^2 . On ne connaît pas la vraie variance donc on la remplace par la variance estimée.

$$\sigma^2 = Var[\Phi] = \mathbb{E}[\Phi^2] - (\mathbb{E}[\Phi])^2$$

$$\sigma_{estime}^2 = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} (\Phi(W_T^{(n)}))^2 - \left(\frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)}) \right)^2.$$

Notre problème est de trouver un estimator du prix dont la variance est petite.

L'idée du contrôle antithétique est très simple. Elle est basée sur la propriété de symétrie du mouvement brownien W_t et $-W_t$. Donc pour une fonction Φ on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{\Phi(W_t) + \Phi(-W_t)}{2}\right] = \mathbb{E}[\Phi(W_t)].$$

Pour montrer cette propriété on peut explicité les expressions:

$$\mathbb{E}[\Phi(W_T)] = \mathbb{E}[e^{-rT} \max(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W(T)} - K, 0)] = e^{-rT} \int \max(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma \sqrt{T}x} - K, 0) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$\mathbb{E}[\Phi(-W_T)] = \mathbb{E}[e^{-rT} \max(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T-\sigma W(T)} - K, 0)] = e^{-rT} \int \max(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T-\sigma \sqrt{T}x} - K, 0) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

On voit bien que (grace au changement de variable $x \rightarrow -x$

$$\mathbb{E}[\Phi(W_T)] = \mathbb{E}[\Phi(-W_T)], \quad \mathbb{E}\left[\frac{\Phi(W_T) + \Phi(-W_T)}{2}\right] = \mathbb{E}[\Phi(W_T)].$$

On utilise l'identité

$$Var\left[\frac{\Phi(W_t) + \Phi(-W_t)}{2}\right] = \frac{1}{4}(Var[\Phi(W_t)] + Var[\Phi(-W_t)] + Cov(\Phi(W_t), \Phi(-W_t)))$$

on obtient

$$Var\left[\frac{\Phi(W_t) + \Phi(-W_t)}{2}\right] = \frac{1}{2}(Var[\Phi(W_t)] + Cov(\Phi(W_t), \Phi(-W_t)))$$

Montrons que si F et G sont monotones (toutes les deux croissantes ou les deux décroissantes) alors

$$Cov(F(W_t), G(W_t)) > 0.$$

Démonstration:

Soit X et Y sont les variables aléatoires indépendantes, identiquement distribués.

Soit F et G sont monotones (toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes), donc

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0, \quad x, y \in R$$

Donc

$$\mathbb{E}[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))] \geq 0$$

car si $X \geq 0$, $\mathbb{E}[X] \geq 0$

On développe la formule et on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)g(X)] + \mathbb{E}[f(Y)g(Y)] - \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)] - \mathbb{E}[f(Y)]\mathbb{E}[g(X)] &= 2(\mathbb{E}[f(X)g(X)] - \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(X)]) = \\ 2Cov[f(X)g(X)] &\geq 0 \end{aligned}$$

Dans notre cas prenons:

$$\Phi(W_t) \rightarrow \Phi(W_T), \quad G(W_t) \rightarrow -\Phi(-W_T)$$

Donc

$$\begin{aligned} Cov(\Phi(W_T), \Phi(-W_T)) &< 0 \\ Var\left[\frac{\Phi(W_T) + \Phi(-W_T)}{2}\right] &<= \frac{1}{2}Var[\Phi(W_T)] \end{aligned}$$

et on a réduit la variance de $\Phi(W_T)$.

Le prix de l'option européenne avec la variance réduite est donné alors par la formule

$$\hat{V}(S_0, 0) = \mathbb{E}\left[\frac{\Phi(W_T) + \Phi(-W_T)}{2}\right]$$

Sur la figure on voit le graphe

$$S_0 - > \hat{V}(S_0, 0)_{estime}$$

du Call avec la variance réduite pour $N_{mc}=100$ et 1000 . On voit que le Call avec la variance réduite est plus précise.

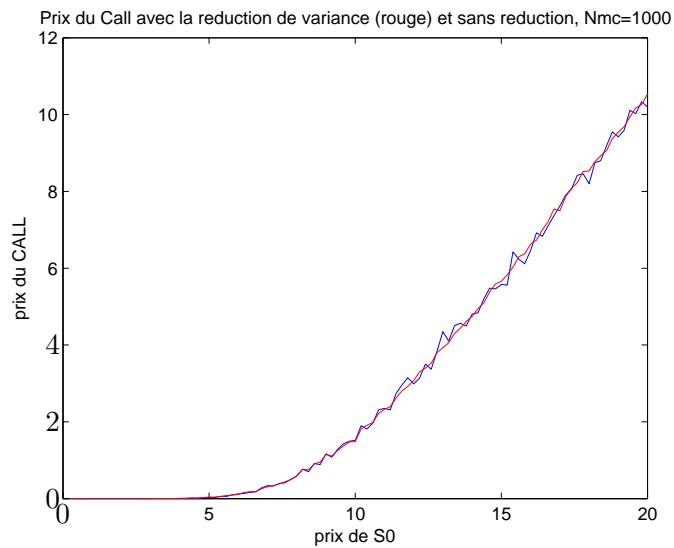
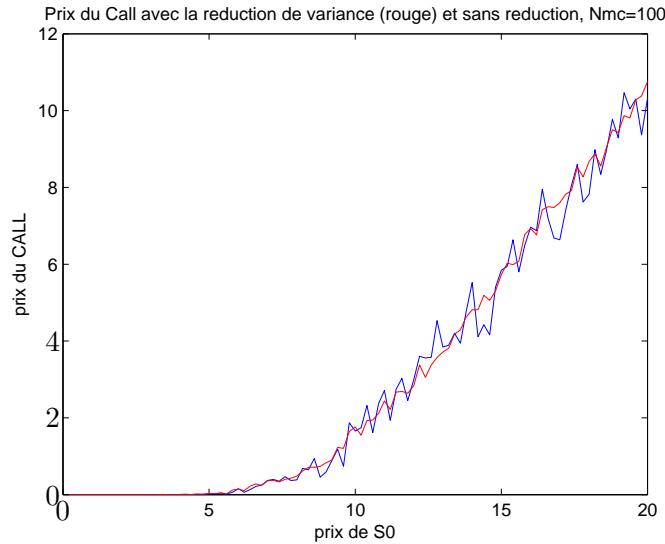


Figure 5: Les courbes du Call Vanilla avec et sans réduction

2.7 Réduction de la variance. Variables de control.

Au lieu de calculer l'espérance de variable aléatoire X on va calculer l'espérance de variable aléatoire

$$Z = X - b(Y - \mathbb{E}[Y])$$

Ici b est un nombre, Y est la variable aléatoire dont l'espérance est connue. On va montrer que $\text{Var}[Z] < \text{Var}[X]$.

Il est évidente que

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Z]$$

Calculons la variance de Z

$$\text{Var}[Z] = \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2] = \mathbb{E}[(X - b(Y - \mathbb{E}[Y])) - \mathbb{E}[X]]^2 =$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] - 2b\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] + b^2\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] = \\ Var[X] - 2bCov[XY] + b^2Var[Y]\end{aligned}$$

La variance de Z est minimale si $\frac{\partial Z}{\partial b} = 0$. Donc

$$b = \frac{Cov[XY]}{Var[Y]}, \quad Var[Z] = Var[X] - \frac{(Cov[XY])^2}{Var[Y]}$$

On applique maintenant cet idée au calcul du prix de l'option Européenne. Choisissons pour X et Y les variables aléatoires suivantes:

$$X = e^{-rT} \max(S_T - K, 0), \quad Y = S_T, \quad \mathbb{E}[Y] = S_0 e^{rT}$$

Le prix de l'option est égale à

$$V(S_0, 0) = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X - b(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

On approxime l'espérance par la moyenne arithmétique:

$$V(S_0, 0)_{estime} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} [e^{-rT} \max(S_T^{(n)} - K, 0) - b \cdot (S_T^{(n)} - S_0 e^{rT})]$$

Pour calculer ce prix on va procéder de la façon suivante:

1. On calcule b indépendamment de $V(S_0, 0)_{estime}$.

Pour cela:

- On simule N_{mc} nombres d'un ensemble \mathfrak{M} qui suivent la loi normale.
- On estime $\mathbb{E}[X]$ avec l'ensemble \mathfrak{M}

$$\mathbb{E}[X]_{estime} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} [e^{-rT} \max(S_T^{(n)} - K, 0)]$$

- Puis on calcule

$$b = \frac{\sum_{n=1}^{N_{mc}} (e^{-rT} \max(S_T^{(n)} - K, 0) - \mathbb{E}[X]_{estime})(S_T^{(n)} - S_0 e^{rT})}{\sum_{n=1}^{N_{mc}} (S_T^{(n)} - S_0 e^{rT})^2}$$

avec le même ensemble \mathfrak{M} .

2. Finalement on calcule le prix du Call

$$V(S_0, 0)_{estime} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} [e^{-rT} \max(S_T^{(n)} - K, 0) - b \cdot (S_T^{(n)} - S_0 e^{rT})]$$

soit avec un autre ensemble des nombres qui suivent la loi normale soit avec le même ensemble \mathfrak{M} .

2.8 Théorème de Feynman - Kac.

Théorème de Feynman - Kac

Soit $V(S, t)$ la solution de l'équation différentielle:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \max(S - K, 0) \end{cases} \quad (9)$$

Alors $V(S, t)$ peut être représenté de la forme

$$V(S_0, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(S(T) - K, 0) / S(t) = S_0]$$

ssi S_t vérifie l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{cases} dS(u) = rS(u)du + \sigma S(u)dW(u) \\ S(t) = S_0 \end{cases} \quad (10)$$

où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement Brownien sur $[t, T]$.

On fixe le moment t et la valeur de l'option à cet instant $S(t) = S_0$. On définit un processus stochastique

$$Z(u) = e^{-ru} V(u, S(u)) \quad \mathcal{F}_u \text{ measurable}, \quad u \in [t, T].$$

Ici la filtration \mathcal{F}_u est générée par le processus stochastique $S(u)$. Il faut aussi imposer une condition: l'expression $\frac{\partial V}{\partial S} S$ doit être intégrable:

$$\int_t^T \left(\frac{\partial V}{\partial S} S \right)^2 du < \infty$$

Démonstration:

Calculons $dZ(u)$ et utilisons le Lemme d'Ito pour la variation quadratique de $W(u)$ et $S(u)$:

$$\begin{aligned} d\langle W \rangle_u &\equiv (dW(u))^2 = du, \\ d\langle S \rangle_u &\equiv (dS(u))^2 = \sigma^2 S(u)^2 du, \\ dZ(u) &= \frac{\partial Z}{\partial u} du + \frac{\partial Z}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial S^2} (dS)^2 + \dots = \\ &-re^{-ru} V du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial u} du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial S} dS + e^{-ru} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 = \\ &-re^{-ru} V du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial u} du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial S} (rS(u)du + \sigma S(u)dW(u)) + \frac{1}{2} e^{-ru} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (rS(u)du + \sigma S(u)dW(u))^2 = \\ &-re^{-ru} V du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial u} du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial S} (rS(u)du + \sigma S(u)dW(u)) + \frac{1}{2} e^{-ru} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 du = \\ &e^{-ru} (-rV + \frac{\partial V}{\partial u} + rS(u) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial S} S(u) \sigma dW \end{aligned}$$

L'expression dans les parenthèses est égale à zéro, car V vérifie EDF de BS. Intégrons l'équation entre t et T . On obtient:

$$\int_t^T dZ(u) = \int_t^T e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial S} S \sigma dW \quad \Rightarrow \quad Z(T) - Z(t) = \int_t^T e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial S} S \sigma dW(\tau)$$

Prenons l'espérance de chaque membre:

$$\mathbb{E}[Z(T)/S(t) = S_0] - \mathbb{E}[Z(t)/S(t) = S_0] = \mathbb{E}\left[\int_t^T \frac{\partial V}{\partial S} S \sigma dW(\tau) / S(t) = S_0\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \frac{\partial V}{\partial S} S \sigma dW/S(t) = S_0\right] = \mathbb{E}\left[\int_t^T \frac{\partial V}{\partial S} S \sigma dW(u)/\mathcal{F}_t\right] = 0$$

Utilisons l'independance des accroissement du mouvement Brownien. De la definition de l'intégrale stochastique on écrit:

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial V}{\partial S} S(u) dW(u)/\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\sum \left(\frac{\partial V}{\partial S} S\right)_{u_i} (W_{u_{i+1}} - W_{u_i})/\mathcal{F}_t\right] = \sum \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial S} S\right)_{u_i}/\mathcal{F}_t\right] \mathbb{E}\left[(W_{u_{i+1}} - W_{u_i})/\mathcal{F}_t\right], \quad t = u_0$$

$$\mathbb{E}\left[(W_{u_{i+1}} - W_{u_i})/\mathcal{F}_t\right] = 0$$

car $(W_{u_{i+1}} - W_{u_i})$ est indépendante de \mathcal{F}_t et de $(\frac{\partial V}{\partial S} S)_{u_i} \quad \forall i$.

Utilisons maintenant la définition du processus stochastique $Z(u)$.

$$\mathbb{E}[Z(T)/S(t) = S_0] = \mathbb{E}[e^{-rT}V(T, S(T))/S(t) = S_0] = \mathbb{E}[e^{-rT} \max(S(T) - K, 0)/S(t) = S_0]$$

$$\mathbb{E}[Z(t)/S(t) = S_0] = \mathbb{E}[e^{-rt}V(t, S(t))/S(t) = S_0] = \mathbb{E}[e^{-rt}V(t, S_0)] = e^{-rt}V(t, S_0)$$

car l'espérance d'un nombre $e^{-rt}V(t, S_0)$ est le même nombre.

Finalement

$$V(S_0, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(S(T) - K, 0)/S(t) = S_0]$$

On a montré la relation entre les méthodes déterministes fondées sur les EDP et les méthodes de Monté-Carlo.

Pour calculer $V(S_0, t = 0)$ par MC il faut simuler N_{mc} chemins pour S_t . Pour trouver les prix de l'option pour différentes S_0 il faut répéter ces simulations encore plusieurs fois. Les méthodes aux différences finies permettent d'obtenir tout les prix $V(S, t)$ pour tout t et toutes S . Sur les dessins vous voyez l'évolution du prix $V(S, t)$ pour un chemin d'évolution de l'action. Le chemin d'évolution de l'option appartient à la surface qu'on trouve par les méthodes aux différences finies.

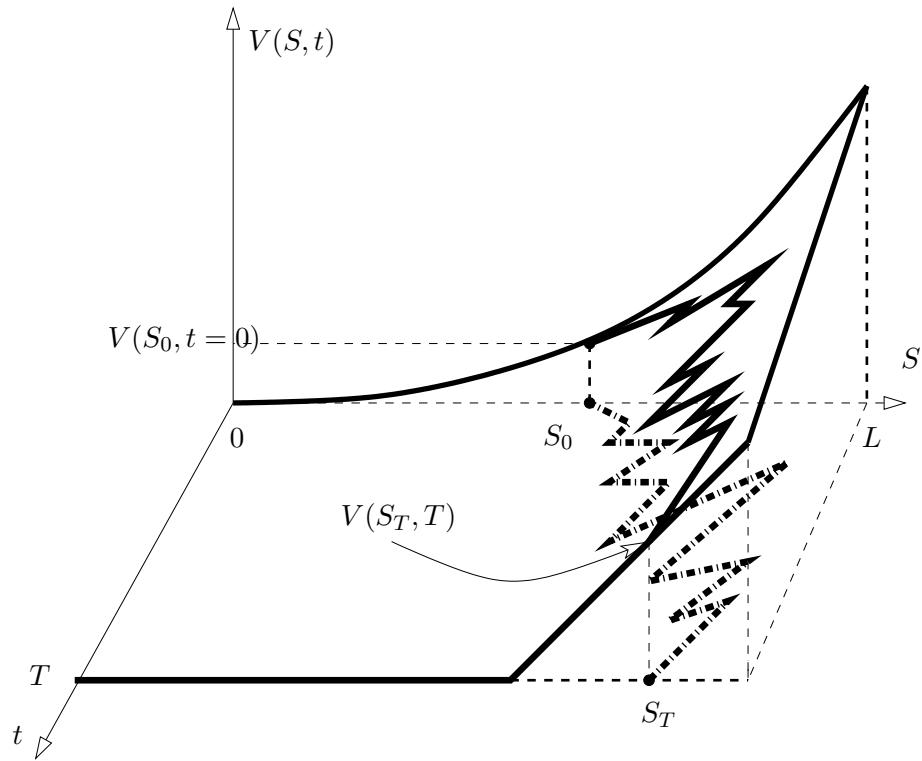


Figure 6: Le lien entre les méthodes déterministes et stochastiques

Il est possible de simuler à l'aide de MatLab l'évolution de l'actif et de constater que la courbe d'évolution du prix de l'option appartient à la surface Black-Scholes.

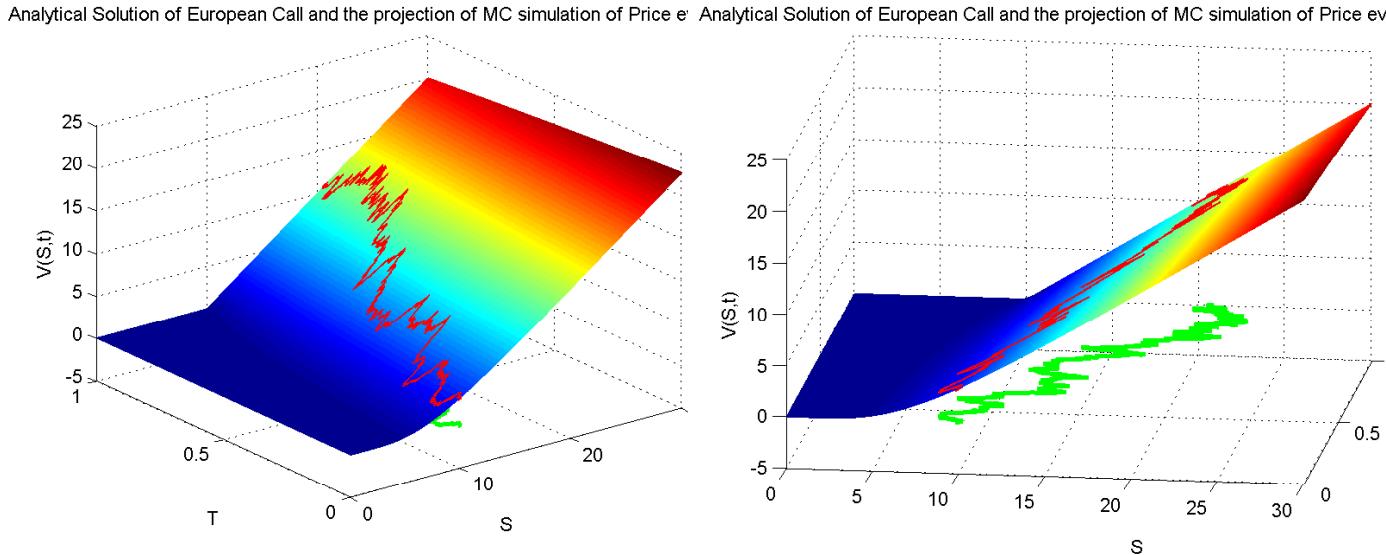


Figure 7: Courbe d'évolution (rouge) du prix de l'option Call EU

La section suivante enseigne comment obtenir les surfaces numériques de Black-Scholes.

Figure 8: Courbe d'évolution (verte) du prix de l'actif sur les plan S-t

3 Méthode aux Différences Finies. Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes. Option Vanilla.

3.1 Solution analytique.

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(t = T, S) = \max(S - K, 0) \\ V(t, S = 0) = 0 \\ V(t, S \rightarrow \infty) = L - Ke^{-r(T-t)} \end{cases} \quad (11)$$

Cette équation permet de trouver le prix $V(S, t)$ de l'option européenne d'achat (ou call) d'une action qui vaut initialement S et qu'on pourra acheter au prix K dans un temps ultérieur T . $V(0, S)$ est le prix au temps $t = 0$ de l'option d'achat de prix d'exercice K à l'échéance $T > 0$, et d'actif S en $t = 0$. On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt.

La solution analytique de l'équation de Black et Scholes:

$$V(t, S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

où

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-x^2/2} dx$$

est la fonction de répartition de la loi Normale.

On peut trouver le prix $V(t, S)$ quand $S \rightarrow 0$ et $S \rightarrow \infty$.

- $S \rightarrow 0 \implies \ln(S/K) \rightarrow -\infty \implies d_{1,2} \rightarrow -\infty \implies N(d_{1,2}) \rightarrow 0 \implies V(t, S) \rightarrow 0$.
- $S \rightarrow +\infty \implies \ln(S/K) \rightarrow +\infty \implies d_{1,2} \rightarrow +\infty \implies N(d_{1,2}) \rightarrow 1 \implies V(t, S) \rightarrow S - Ke^{-r(T-t)}$.

3.2 Maillage. Discréétisation de l'espace-temps et de l'équation.

Pour pouvoir discréétiser ce problème, on va d'abord se restreindre à un domaine borné en S : on introduit L assez grand pour que la solution de (5) satisfasse $V(t, L) \sim V(t, S \rightarrow \infty) = L - Ke^{-r(T-t)}$ pour $t \in [0, T]$

- 1) Discréétisons les variables: spatiale et temporelle:

x : $S_0 = 0, \dots, S_i, \dots, S_{N+1} = L$.

t : $t^0 = 0, \dots, t^n, \dots, t^{M+1} = T$.

Donc les points (t^n, S_i) forment une grille uniforme du rectangle $[0, T] \times [0, S]$

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, \dots, N + 1 \\ n = 0, 1, 2, \dots, M + 1 \\ \Delta S = \frac{L}{N+1}, \quad \Delta t = \frac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \quad (12)$$

Si la numération commence de 0

$$\begin{cases} S_i = \Delta S \cdot i, & i = 0, 1, 2, \dots, N + 1 \\ t^n = \Delta t \cdot n, & n = 0, 1, 2, \dots, M + 1 \end{cases} \quad (13)$$

Si la numération commence de 1 (MatLab, SciLab)

$$\begin{cases} S_i = \Delta S \cdot (i - 1), & i = 1, 2, \dots, N + 2 \text{ soit } S = \text{linspace}(0, L, N + 2) \\ t^n = \Delta t \cdot (n - 1), & n = 1, 2, \dots, M + 2 \text{ soit } t = \text{linspace}(0, T, M + 2) \end{cases} \quad (14)$$

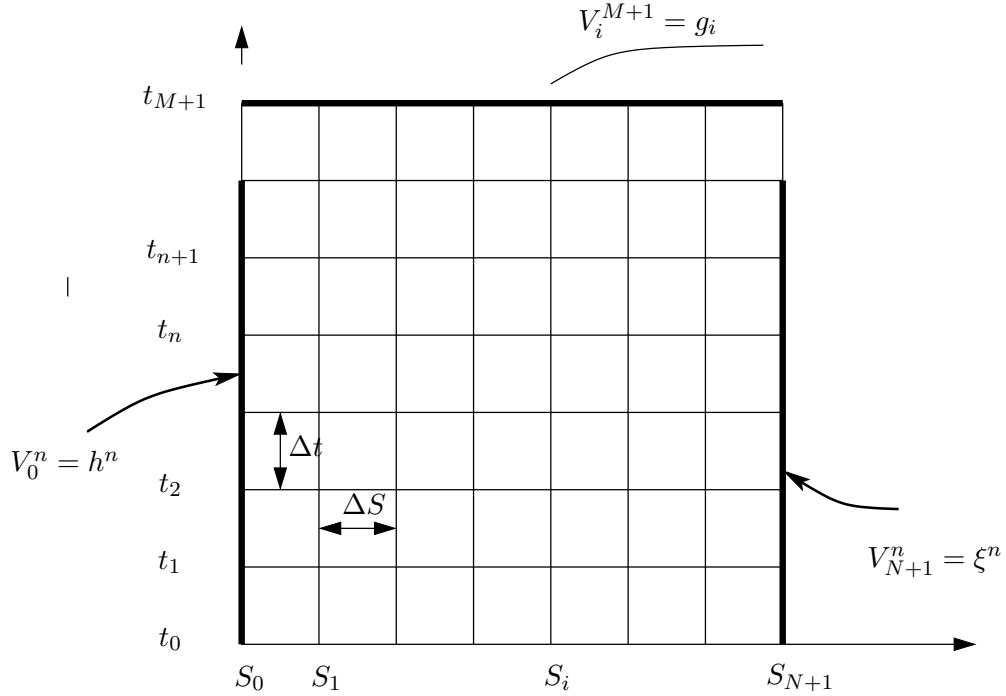


Figure 9: Maillage

2) Discrétons les conditions aux limites:

$$\begin{cases} V_{N+1}^n = \xi(S_n) \equiv \xi^n = L - K e^{-r(T-t^n)} \\ V_0^n = h(S_n) \equiv h^n = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Ici on a introduit les fonctions quelconques ξ et h pour pouvoir traiter les conditions aux limites arbitraires.

On pourra aussi imposer les conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial S}(S = L) = 1 \\ \frac{\partial V}{\partial S}(S = 0) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

soit

$$\begin{cases} \frac{V_{N+1}^n - V_N^n}{\Delta S} = 1 \\ \frac{V_1^n - V_0^n}{\Delta S} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

3) Discrétisons les conditions finales:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_i^{M+1} = \max(S_i - K, 0) \end{array} \right. \quad (18)$$

4) Pour discrétiser l'équation de Black et Scholes on utilise:

- pour $\frac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t}$$

- pour $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centré,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{V_{i+1}^n - 2V_i^n + V_{i-1}^n}{(\Delta S)^2}$$

- pour $\frac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S}$$

5) On définit l'opérateur de Black et Scholes \mathfrak{M}_{BS}^n par l'expression:

$$\mathfrak{M}_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

6) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \mathfrak{M}_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \mathfrak{M}_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\mathfrak{M}_{BS}^{n-1} + \mathfrak{M}_{BS}^n).$$

3.3 Méthode explicite d'Euler

L'équation discrète s'écrit de la forme:

$$V_i^{n-1} = V_i^n - \Delta t \cdot \mathfrak{M}_{BS}^n$$

Donc

$$V_i^{n-1} = V_{i+1}^n \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S(i)^2}{(\Delta S)^2} + r \frac{S(i)}{(\Delta S)} \right) + V_i^n \left(1 - \Delta t \left(\sigma^2 \frac{S(i)^2}{(\Delta S)^2} + r \right) \right) + V_{i-1}^n \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S(i)^2}{(\Delta S)^2} - r \frac{S(i)}{(\Delta S)} \right)$$

Algorithme d'Euler pour la résolution de l'équation de BS.

Conditions aux limites Dirichlet.

```

Pour (  $i = 0; i <= N + 1; i++$ )
 $V_i^{M+1} = \max(S_i - K, 0)$ 
Fin Pour
Pour (  $n = 0; n <= M; n++$ )
 $V_{N+1}^n = L - Ke^{-r(T-t^n)}, V_0^n = 0$ 
Fin Pour
Pour ( $n = M + 1 : -1 : 1$ )
Pour ( $i = 1 : N$ )

$$V_i^{n-1} = V_{i+1}^n \frac{\Delta t}{2} \left( \sigma^2 \frac{S(i)^2}{(\Delta S)^2} + r \frac{S(i)}{(\Delta S)} \right) + V_i^n (1 - \Delta t \left( \sigma^2 \frac{S(i)^2}{(\Delta S)^2} + r \right)) + V_{i-1}^n \frac{\Delta t}{2} \left( \sigma^2 \frac{S(i)^2}{(\Delta S)^2} - r \frac{S(i)}{(\Delta S)} \right)$$

Fin Pour
Fin Pour

```

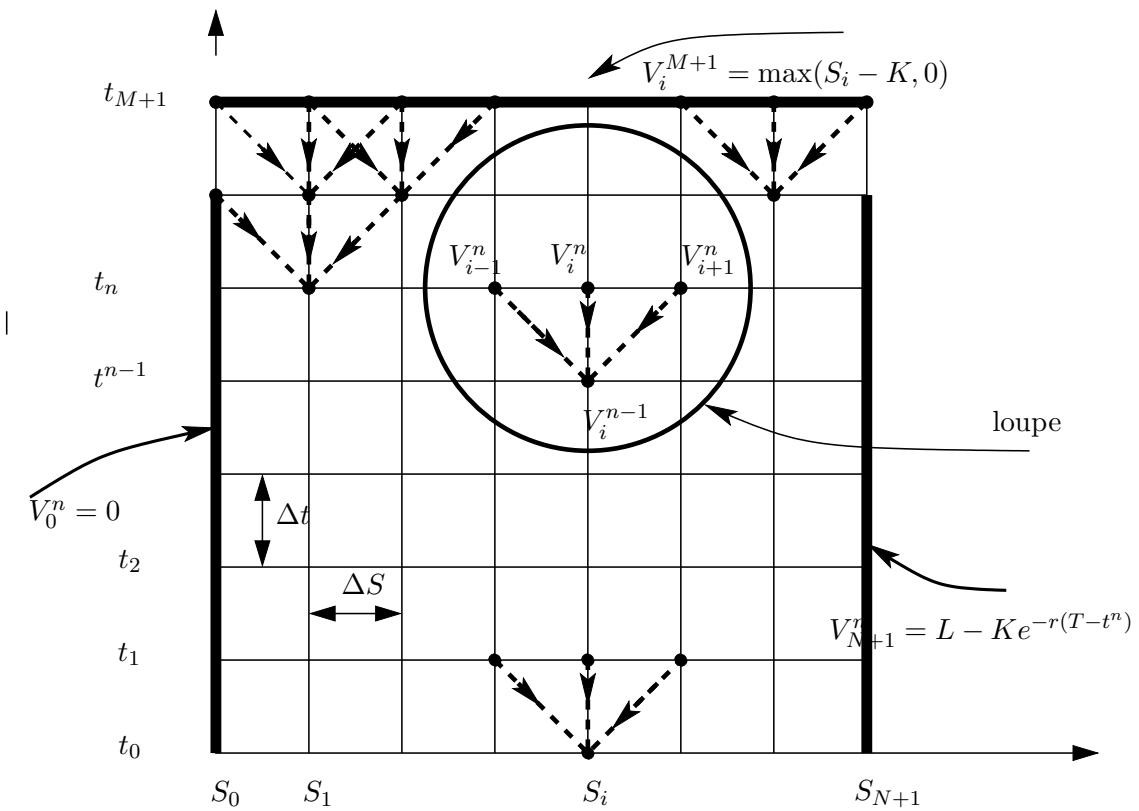


Figure 10: Visualisation de l'algorithme d'Euler avec les conditions aux limites de Dirichlet

La loupe indique la visualisation de la formule suivante:

$$V_i^{n-1} = V_{i+1}^n \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S(i)^2}{(\Delta S)^2} + r \frac{S(i)}{(\Delta S)} \right) + V_i^n (1 - \Delta t \left(\sigma^2 \frac{S(i)^2}{(\Delta S)^2} + r \right)) + V_{i-1}^n \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S(i)^2}{(\Delta S)^2} - r \frac{S(i)}{(\Delta S)} \right)$$

A partir de la condition finale ($n = M + 1$) on calcule le niveau ($n = M$) et pas à pas on descend jusqu'au ($n = 0$) ($t = 0$).

Algorithme d'Euler pour la résolution de l'équation de BS.

Conditions aux limites de Neumann.

Pour ($i = 0; i \leq N + 1; i++$)
 $V_i^{M+1} = \max(S_i - K, 0)$

Fin Pour

Pour ($n = M + 1 : -1 : 1$)

Pour $i = 1 : N$

$$V_i^{n-1} = V_{i+1}^n \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S(i)^2}{(\Delta S)^2} + r \frac{S(i)}{(\Delta S)} \right) + V_i^n \left(1 - \Delta t \left(\sigma^2 \frac{S(i)^2}{(\Delta S)^2} + r \right) \right) + V_{i-1}^n \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S(i)^2}{(\Delta S)^2} - r \frac{S(i)}{(\Delta S)} \right)$$

Fin Pour

$$V_0^{n-1} = V_1^{n-1}$$

$$V_{N+1}^{n-1} = V_N^{n-1} + \Delta S$$

Fin Pour

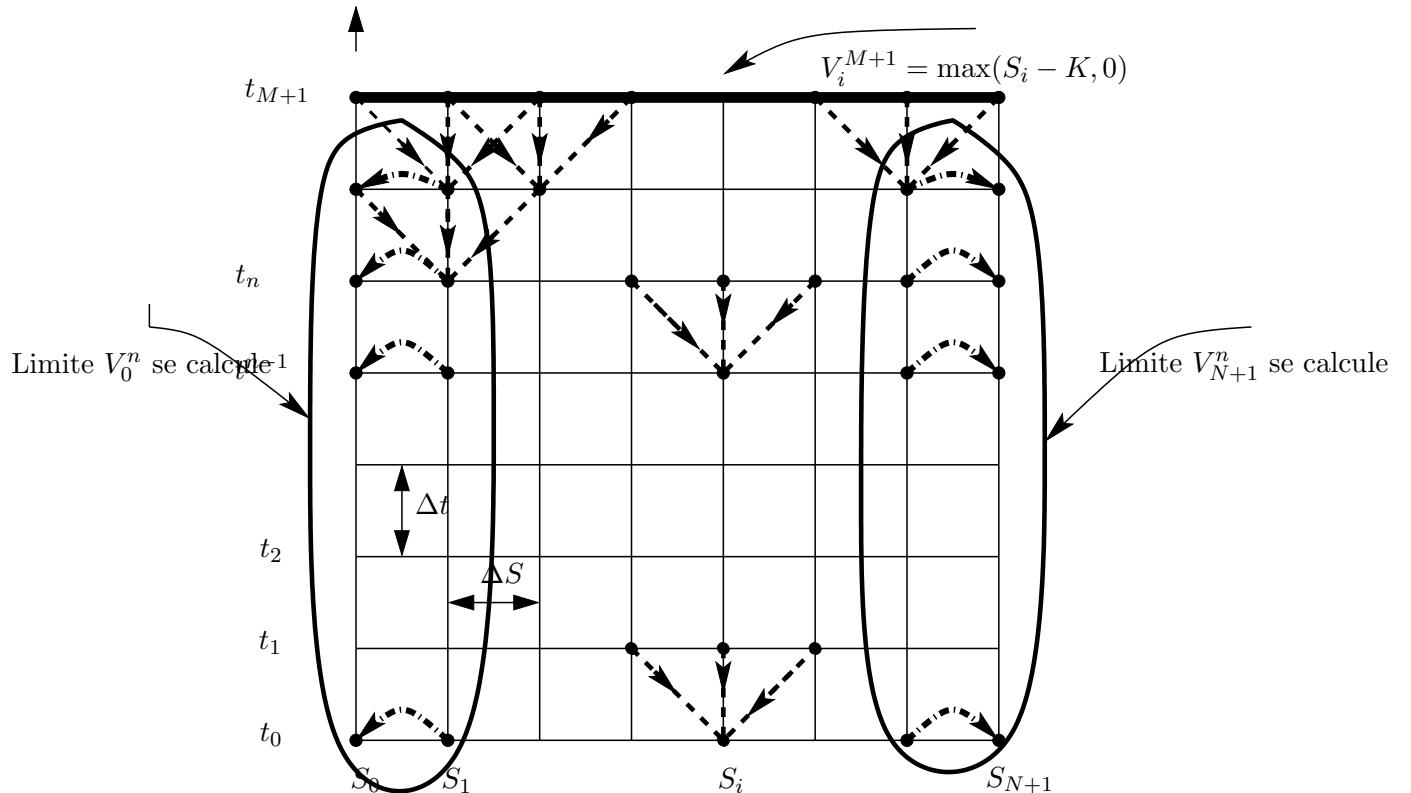


Figure 11: Visualisation de l'algorithme d'Euler avec les conditions aux limites de Neumann

A chaque iteration on calcule les conditions aux limites grace aux formules:

$$V_0^{n-1} = V_1^{n-1}$$

$$V_{N+1}^{n-1} = V_N^{n-1} + \Delta S \quad \forall n = 1 : M + 1$$

3.4 Précision des solutions numériques

On peut calculer les erreurs numériques imposés par les deux conditions aux limites. Pour cela on utilise la solution analytique de l'équation de Black et Scholes en points discrètes. Puis on calcule en mêmes points la différence entre les valeurs analytiques et celles de numériques calculées à l'aide de conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann.

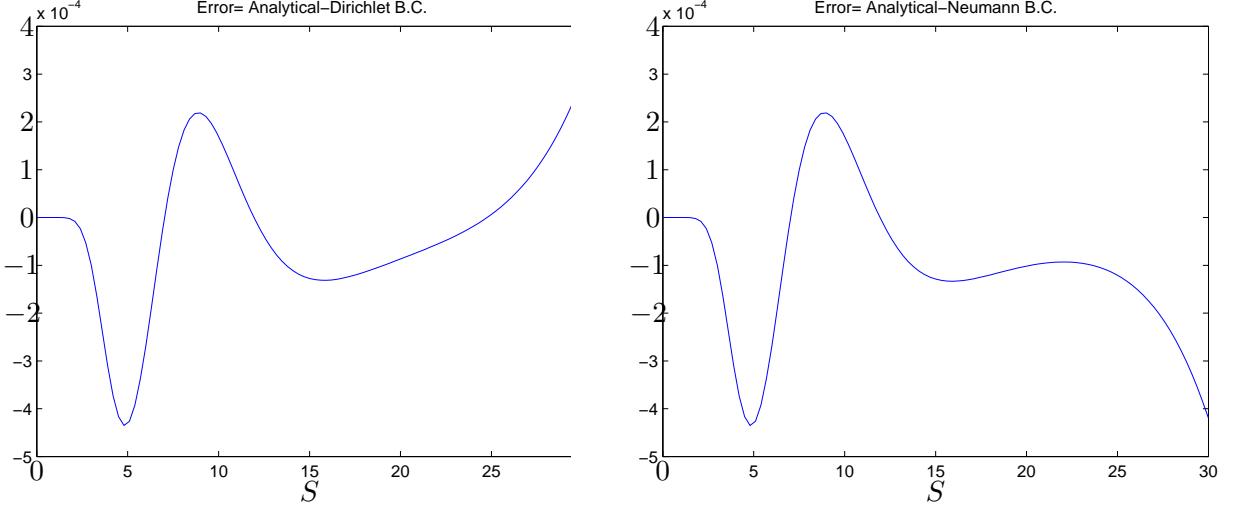


Figure 12: $V_{analytique} - V_{numerique,dirichlet}$ pour $t = 0$

Figure 13: $V_{analytique} - V_{numerique,neumann}$ pour $t = 0$

On constate que l'ordre de grandeur de l'erreur imposé par les deux conditions aux limites est le même, mais les signes en $S = L$ sont opposés.

3.5 Méthode implicite de Crank-Nicolson

Appliquons la méthode implicite de Crank-Nicolson et reécrivons l'équation de BS sous la forme :

$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{\Delta t}{4} \left(\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) \\ B_i &= \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{S_i}{\Delta S} r - \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) \\ D_i &= 1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} + r \right) \end{aligned}$$

$$K_i^n = \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) V_{i+1}^n + \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} + r \right) \right) V_i^n + \frac{\Delta t}{4} \left(-\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) V_{i-1}^n$$

On reécrit l'équation sous la forme de système linéaire :

$$\begin{aligned} i = 1, \quad & B_1 V_0^{n-1} + D_1 V_1^{n-1} + A_1 V_2^{n-1} = K_1^n \\ i = 2, \quad & B_2 V_1^{n-1} + D_2 V_2^{n-1} + A_2 V_3^{n-1} = K_2^n \end{aligned}$$

.....

$$i = N, \quad B_N V_{N-1}^{n-1} + D_N V_N^{n-1} + A_N V_{N+1}^{n-1} = K_N^n$$

3.5.1 Algorithme de Crank-Nicolson. Conditions aux limites de Dirichlet

On utilise les conditions aux limites $V_0^{n-1} = h^{n-1}$, $V_{N+1}^{n-1} = \xi^{n-1}$, on transmet les termes connus $B_1 V_0^{n-1} = B_1 h^{n-1}$ et $A_N V_{N+1}^{n-1} = A_N \xi^{n-1}$ à droite et on obtient la forme matricielle suivante:

$$\left(\begin{array}{ccccc} D_1 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & D_2 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & D_3 & A_3 & 0 \\ & & & B_{N-1} & D_{N-1} & A_{N-1} \\ & & & 0 & B_N & D_N \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} V_1^{n-1} \\ V_2^{n-1} \\ V_3^{n-1} \\ \vdots \\ V_N^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1^n - B_1 h^{n-1} \\ K_2^n \\ K_3^n \\ \vdots \\ K_{N-1}^n \\ K_N^n - A_N \xi^{n-1} \end{pmatrix}$$

Pour simplifier l'écriture de première et de dernière coordonnées du vecteur à droite introduisons le vecteur \mathbb{K} à l'aide de symboles de Kronecker δ_i^1 , δ_i^N .

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (20)$$

$$\mathbb{K}_i^n = K_i^n - \delta_i^N A_N V_{N+1}^{n-1} - \delta_i^1 B_1 V_0^{n-1}, \quad \text{soit}$$

$$\mathbb{K}_i^n =$$

$$\frac{\Delta t}{4} \left(\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) V_{i+1}^n + \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} + r \right) \right) V_i^n + \frac{\Delta t}{4} \left(- \frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) V_{i-1}^n - \delta_i^N A_N V_{N+1}^{n-1} - \delta_i^1 B_1 V_0^{n-1}.$$

Or

$$\mathbb{M} \cdot V^{n-1} = \mathbb{K}^n$$

Notre but est de trouver les valeurs

$$V^{n-1} = (V_N^{n-1}, V_{N-1}^{n-1}, V_{N-2}^{n-1}, \dots, V_1^{n-1}),$$

exprimées en termes des valeurs

$$(V_N^n, V_{N-1}^n, V_{N-2}^n, \dots, V_1^n).$$

On ne peut plus calculer directement V_i^{n-1} . Pour cela il faut inverser la matrice car

$$V^{n-1} = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K}^n.$$

Pour obtenir la matrice inverse d'une **matrice tridiagonale** on applique l'Algorithme de Thomas.

Introduisons les nouvelles variables D_i^* et \mathbb{K}_i^{*n} et appliquons l'algorithme de Thomas pour trouver la solution du système linéaire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}_i^n = \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) V_{i+1}^n + \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} + r \right) \right) V_i^n + \frac{\Delta t}{4} \left(-\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) V_{i-1}^n - \delta_i^N A_N V_{N+1}^{n-1} - \delta_i^1 B_1 V_0^{n-1} \\ V_N^{n-1} = \frac{\mathbb{K}_N^{*n}}{D_N^*} \\ V_i^{n-1} = \frac{\mathbb{K}_i^{*n} - A_i V_{i+1}^{n-1}}{D_i^*}, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ D_1^* = D_1 \quad \text{initialisation} \\ D_i^* = D_i - \frac{B_i A_{i-1}}{D_{i-1}^*}, \quad 2 \leq i \leq N, \\ \mathbb{K}_1^{*n} = \mathbb{K}_1^n \quad \text{initialisation} \\ \mathbb{K}_i^{*n} = \mathbb{K}_i^n - \frac{B_i \mathbb{K}_{i-1}^{*n}}{D_{i-1}^*}, \quad 2 \leq i \leq N-1 \end{array} \right. \quad (21)$$

On fait une boucle temporelle et l'algorithme de Thomas à l'intérieur de cette boucle.

Algorithme de Crank-Nicolson pour résolution de l'équation de BS.

Conditions aux limites Dirichlet.

Pour ($i = 0; i \leq N + 1; i++$)
 $V_i^{M+1} = \max(S_i - K, 0)$

Fin Pour

Pour ($i = 1; i \leq N; i++$)

$$A_i = -\frac{\Delta t}{4} \left(\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right)$$

$$B_i = \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{S_i}{\Delta S} r - \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right)$$

$$D_i = 1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} + r \right)$$

Fin Pour

Pour ($n = 0; n \leq M; n++$)

$$V_{N+1}^n = L - K e^{-r(T-t^n)}, \quad V_0^n = 0$$

Fin Pour

Pour ($n = M + 1; n \geq 1; n--$)

Pour ($i = 1; i \leq N; i++$)

$$\mathbb{K}_i^n = \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) V_{i+1}^n + \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} + r \right) \right) V_i^n + \frac{\Delta t}{4} \left(-\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) V_{i-1}^n - \delta_i^N A_N V_{N+1}^{n-1} - \delta_i^1 B_1 V_0^{n-1}$$

Fin Pour

$$D_1^* = D_1, \quad \mathbb{K}_1^{*n} = \mathbb{K}_1^n$$

Pour ($i = 2; i \leq N; i++$)

$$D_i^* = D_i - \frac{B_i A_{i-1}}{D_{i-1}^*}, \quad \mathbb{K}_i^{*n} = \mathbb{K}_i^n - \frac{B_i \mathbb{K}_{i-1}^{*n}}{D_{i-1}^*}$$

Fin Pour

$$V_N^{n-1} = \frac{\mathbb{K}_N^{*n}}{D_N^*}$$

Pour ($i = N - 1; i \geq 1; i--$)

$$V_i^{n-1} = \frac{\mathbb{K}_i^{*n} - A_i V_{i+1}^{n-1}}{D_i^*}$$

Fin Pour

Fin Pour

En effet, pour $n = M + 1$ la valeur

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_i^{M+1} &= \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) V_{i+1}^{M+1} + \\ &\quad \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} + r \right) \right) V_i^{M+1} + \frac{\Delta t}{4} \left(-\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) V_{i-1}^{M+1} - \delta_i^N A_N V_{N+1}^M - \delta_i^1 B_1 V_0^M \end{aligned}$$

est connue, car V_i^{M+1} représente les conditions finales.

On calcule les valeurs V_i^M : d'abord $V_N^M, V_{N-1}^M, \dots, V_1^M$ comme indiqué par les flèches sur la figure.
Puis pour $n = M$ la valeur

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_i^M &= \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) V_{i+1}^M + \\ &\quad \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} + r \right) \right) V_i^M + \frac{\Delta t}{4} \left(-\frac{S_i}{\Delta S} r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} \right) V_{i-1}^M - \delta_i^N A_N V_{N+1}^{M-1} - \delta_i^1 B_1 V_0^{M-1} \end{aligned}$$

se calcule à l'aide de V_i^M déjà calculées.

On calcule sur le niveau $n = M - 1$ les valeurs V_i^{M-1} : d'abord $V_N^{M-1}, V_{N-1}^{M-1}, \dots, V_1^{M-1}$ comme indiqué par les flèches sur la figure.

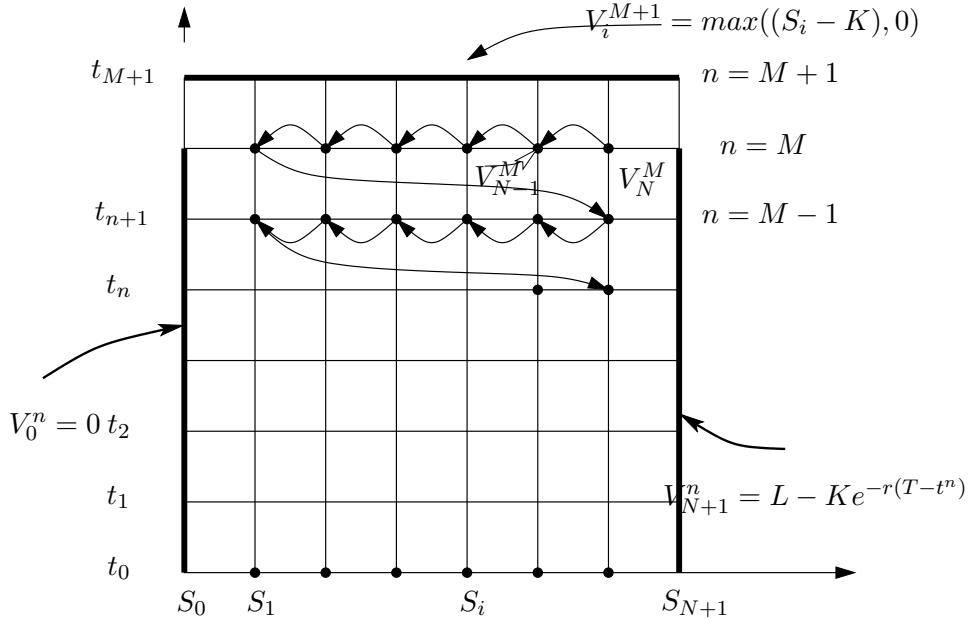


Figure 14: Déroulement de l'algorithme de Thomas

3.5.2 Algorithme de Crank-Nicolson. Conditions aux limites de Neumann

On impose maintenant les conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial S}(S = L) = \rho(t) = 1 \\ \frac{\partial V}{\partial S}(S = 0) = \mu(t) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

soit

$$\begin{cases} \frac{V_{N+1}^n - V_N^n}{\Delta S} = \rho(t^n) = 1 \\ \frac{V_1^n - V_0^n}{\Delta S} = \mu(t^n) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

On réécrit les conditions aux limites de la forme $V_0^{n-1} = V_1^{n-1} - \Delta S \rho^{n-1}$, $V_{N+1}^{n-1} = V_N^{n-1} + \Delta S \mu^{n-1}$ et on obtient le système linéaire suivante:

$$i = 1, \quad B_1(V_1^{n-1} - \Delta S \rho^{n-1}) + D_1 V_1^{n-1} + A_1 V_2^{n-1} = K_1^n$$

$$i = 2, \quad B_2 V_1^{n-1} + D_2 V_2^{n-1} + A_2 V_3^{n-1} = K_2^n$$

.....

$$i = N, \quad B_N V_{N-1}^{n-1} + D_N V_N^{n-1} + A_N (V_N^{n-1} + \Delta S \mu^{n-1}) = K_N^n$$

On utilise les conditions aux limites $V_0^{n-1} = h^{n-1}$, $V_{N+1}^{n-1} = \xi^{n-1}$, on transmet les termes connus $B_1\rho^{n-1}\Delta S$ et $A_N\mu^{n-1}\Delta S$ à droite, on factorise V_1^{n-1} et V_N^{n-1} et on obtient la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} D_1 + B_1 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & D_2 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & D_3 & A_3 & 0 \\ & & & B_{N-1} & D_{N-1} & A_{N-1} \\ & & & 0 & B_N & D_N + A_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1^{n-1} \\ V_2^{n-1} \\ V_3^{n-1} \\ \vdots \\ V_N^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1^n + B_1\Delta S\rho^{n-1} \\ K_2^n \\ K_3^n \\ \vdots \\ K_{N-1}^n \\ K_N^n - A_N\Delta S\mu^{n-1} \end{pmatrix}$$

On introduit \mathbb{K}_i^n légèrement modifiés.

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_i^n &= (1 - \frac{\Delta t}{2}(\sigma^2 + r))V_i^n + \\ &\frac{\Delta t}{4}(\frac{S_i}{\Delta S}r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2})V_{i+1}^n + \frac{\Delta t}{4}(-\frac{S_i}{\Delta S}r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2})V_{i-1}^n - \delta_i^N A_N \Delta S \mu^{n-1} + \delta_i^1 B_1 \Delta S \rho^{n-1} \end{aligned}$$

Algorithme de Crank-Nicolson pour résolution de l'équation de BS.

Conditions aux limites de Neumann

Pour ($i = 0; i \leq N + 1; i++$)
 $V_i^{M+1} = \max(S_i - K, 0)$

Fin Pour

Pour ($n = 0; n \leq M; n++$)
 $V_{N+1}^n = L - K e^{-r(T-t^n)}, V_0^n = 0$

Fin Pour

Pour ($i = 1; i \leq N; i++$)
 $A_i = -\frac{\Delta t}{4}(\frac{S_i}{\Delta S}r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2})$
 $B_i = \frac{\Delta t}{4}(\frac{S_i}{\Delta S}r - \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2})$
 $D_i = 1 + \frac{\Delta t}{2}(\sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} + r)$

Fin Pour

$D_1 = D_1 + B_1$

$D_N = D_N + A_N$

Pour ($n = M + 1; n \geq 1; n--$)

Pour ($i = 1; i \leq N; i++$)

$$\mathbb{K}_i^n = \frac{\Delta t}{4}(\frac{S_i}{\Delta S}r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2})V_{i+1}^n + (1 - \frac{\Delta t}{2}(\sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2} + r))V_i^n + \frac{\Delta t}{4}(-\frac{S_i}{\Delta S}r + \sigma^2 \frac{S_i^2}{(\Delta S)^2})V_{i-1}^n - \delta_i^N A_N \Delta S \mu^{n-1} + \delta_i^1 B_1 \Delta S \rho^{n-1}$$

Fin Pour

$D_1^* = D_1, \mathbb{K}_1^{*n} = \mathbb{K}_1^n$

Pour ($i = 2; i \leq N; i++$)

$$D_i^* = D_i - \frac{B_i A_{i-1}}{D_{i-1}^*}, \quad \mathbb{K}_i^{*n} = K_i^n - \frac{B_i \mathbb{K}_{i-1}^{*n}}{D_{i-1}^*}$$

```

Fin Pour
 $V_N^{n-1} = \frac{\mathbb{K}_N^{*n}}{D_N^*}$ 
Pour (i = N - 1; i >= 1; i --)
 $V_i^{n-1} = \frac{\mathbb{K}_i^{*n} - A_i V_{i+1}^{n-1}}{D_i^*}$ 
Fin Pour
 $V_0^{n-1} = V_1^{n-1} - \Delta S \rho^{n-1}$ 
 $V_{N+1}^{n-1} = V_N^{n-1} + \Delta S \mu^{n-1}$ 
Fin Pour

```

Visualisons les solutions pour $t = 0, t = \frac{T}{2}, t = T$.

Sur le graphe à 3 dimensions l'axe noté par "i" est l'axe de l'action S , l'axe noté par "n" est l'axe du temps, l'axe verticale est l'axe du prix $V(S, t)$.

On a utilisé les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

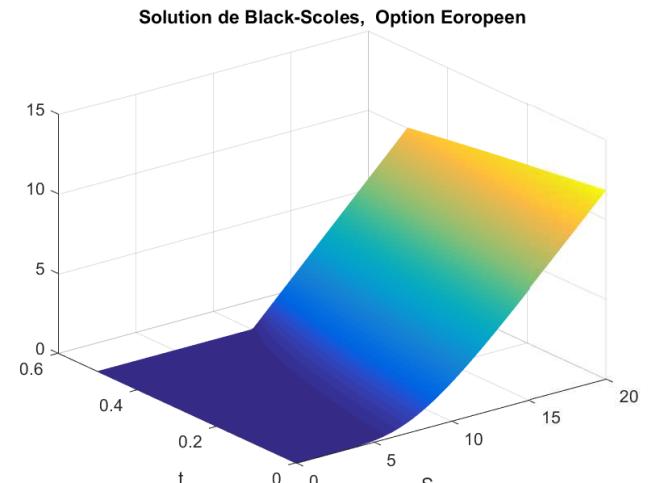
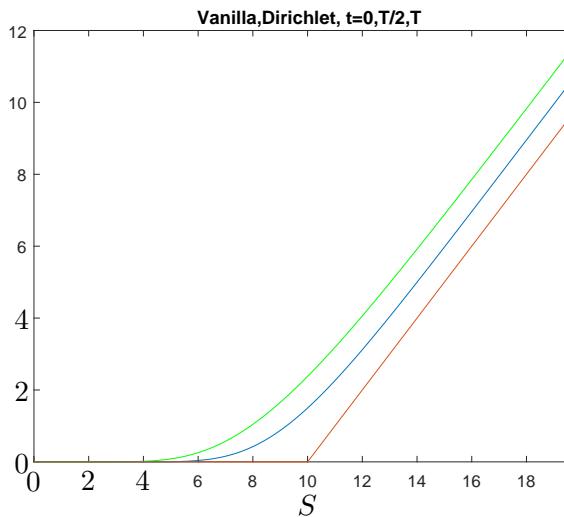


Figure 15: Prix du Call Vanilla pour $t = 0, T/2, T$

Figure 16: Prix du Call Vanilla en 3 dimensionnes

3.6 Greeks. Option Vanilla

Pour calculer Greeks il suffit d'ajouter dans le programmes qui calcule le prix d'une option quelques lignes des codes:

Pour calculer Delta

$$\Delta = \frac{\partial V(S, t)}{\partial S}$$

on discrétise la première dérivée de façon centrée et on obtient

$$\Delta(n, i) = (V(n, i + 1) - V(n, i - 1)) / (2\Delta S)$$

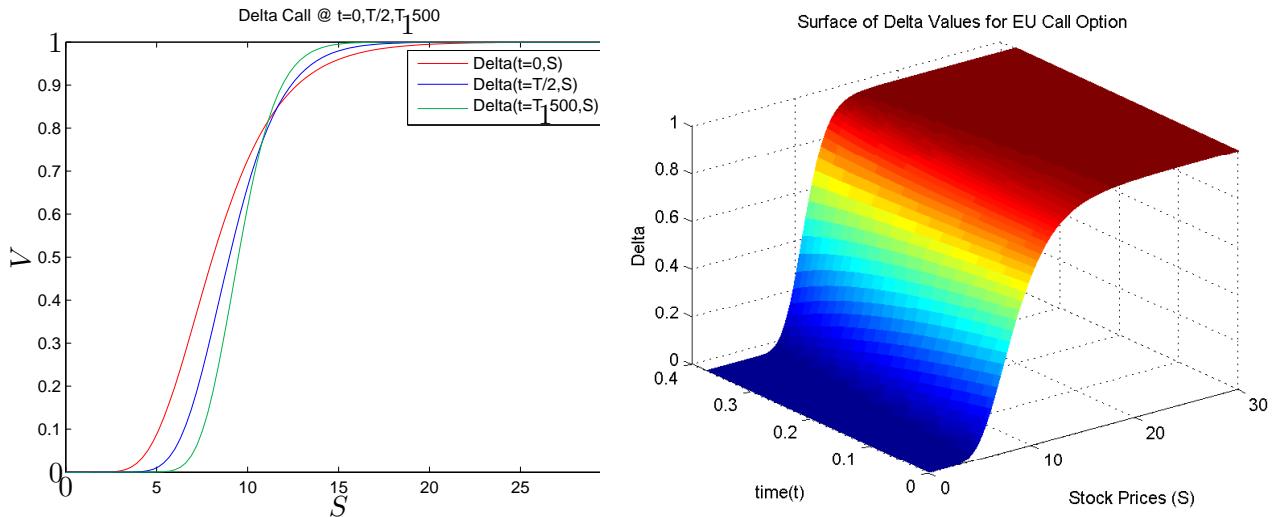


Figure 17: Δ du Call Vanilla pour $t = 0, T/2$

Figure 18: Surface de Δ du Call Vanilla en 3 dimensionnes

Pour calculer Gamma

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2}$$

on discrétise la seconde dérivée on obtient

$$\Gamma(n, i) = (V(n, i + 1) + V(n, i - 1) - 2 * V(n, i)) / (\Delta S)^2$$

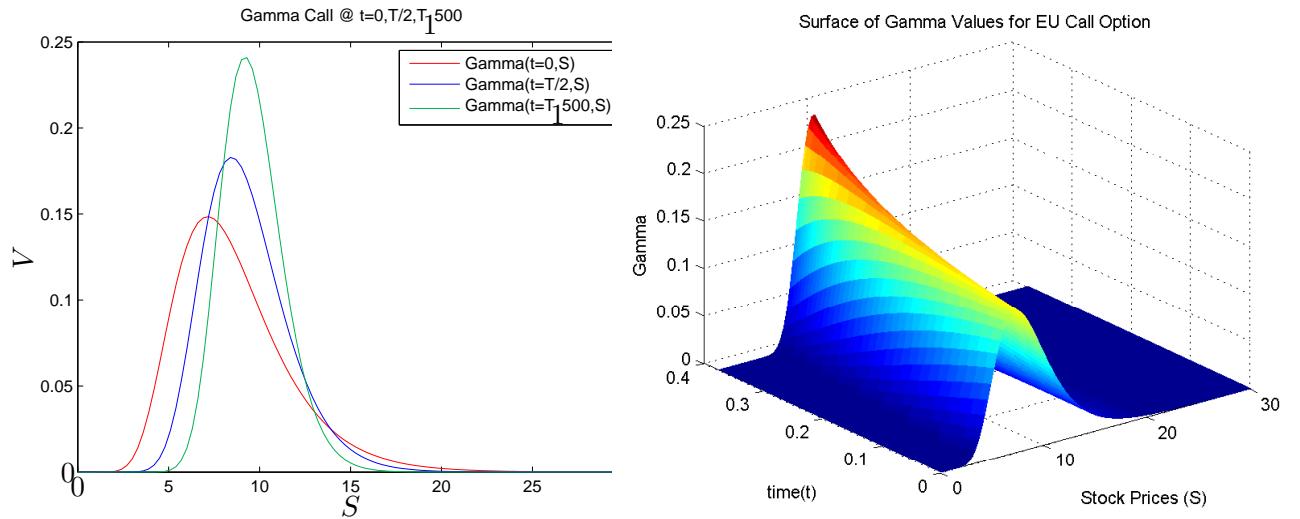


Figure 19: Γ du Call Vanilla pour $t = 0, T/2$

Figure 20: Surface de Γ du Call Vanilla en 3 dimensionnes

Pour calculer Theta

$$\Theta = \frac{\partial V(S, t)}{\partial t}$$

on discrétise la première dérivée de façon centrée et on obtient

$$\Theta(n, i) = (V(n + 1, i) - V(n - 1, i)) / (2\Delta t)$$

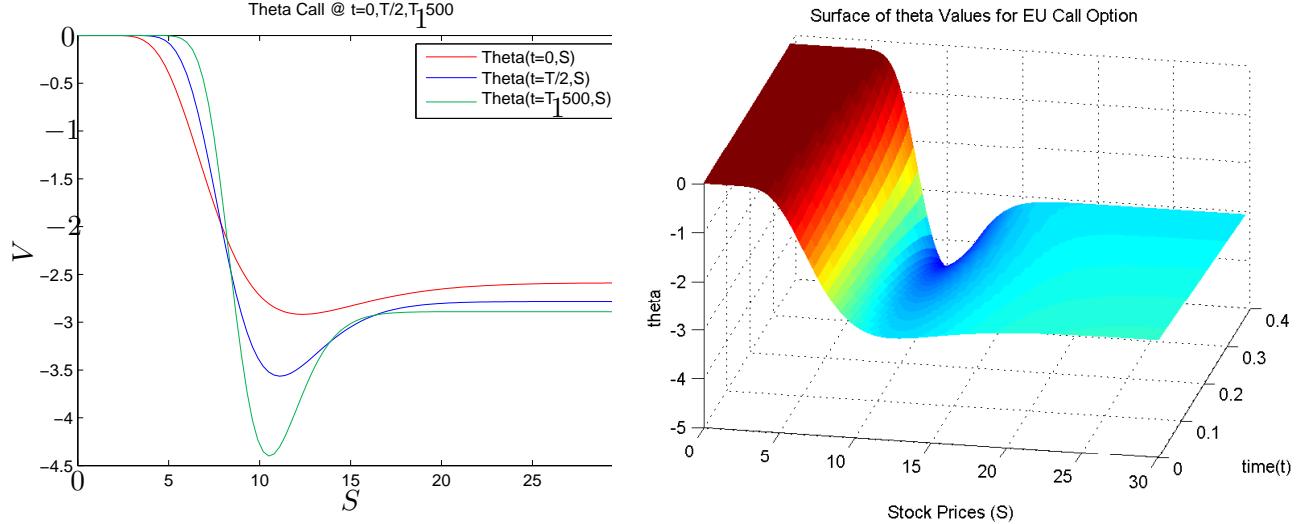


Figure 21: Θ du Call Vanilla pour $t = 0, T/2$

Pour calculer Vega

$$Vega = \frac{\partial V(S, t; \sigma)}{\partial \sigma}$$

Figure 22: Surface de Θ du Call Vanilla en 3 dimensionnes

on calcule deux fois les pris de l'option avec la volatilité σ et avec la volatilité $(\sigma + h)$ on calcule Vega par les différences finies:

$$Vega(n, i) = (V(n, i; \sigma) - V(n, i; \sigma + h))/h, \quad h \sim 0.1$$

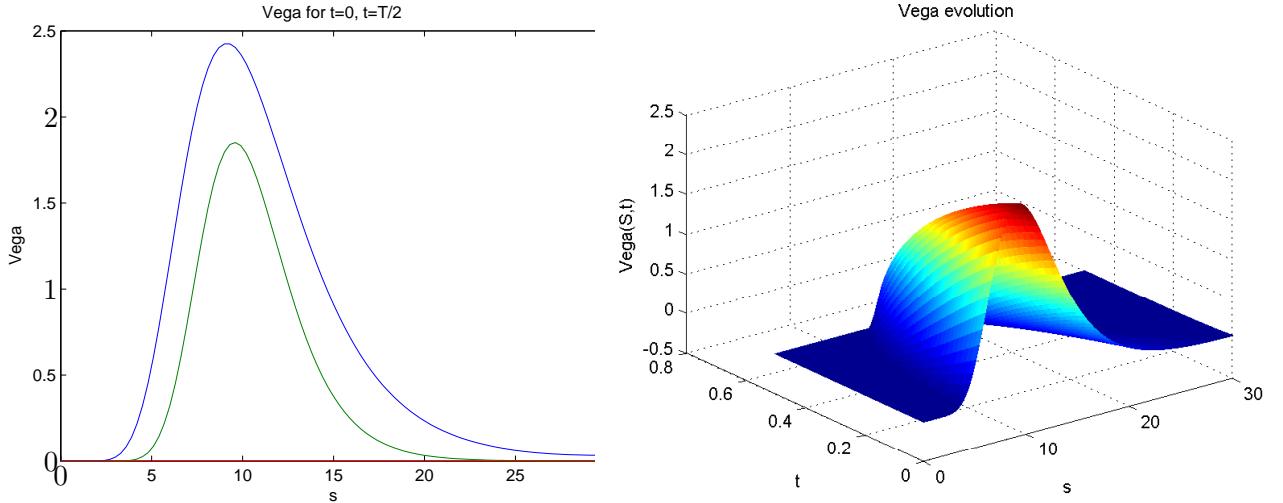


Figure 23: Vega du Call Vanilla pour $t = 0, T/2$

Figure 24: Surface de Vega du Call Vanilla en 3 dimensionnes

3.7 L'équation de Black et Scholes avec les paramètres variables. Conditions aux limites générales.

Supposons que le taux d'intérêt dépend du temps. On peut utiliser le schéma de Crank-Nicolson même si la volatilité et l'intérêt sont des fonctions de S et t : $\sigma(S_i, t^n), r(S_i, t^n)$. On complete le schéma avec les conditions aux limites:

$$V(t, L) = L - Ke^{-\int_0^t r(u)du}$$

On dérive d'abord cette expression par rapport à t

$$\frac{\partial V}{\partial t} = Ke^{-\int_0^t r(u)du}r(S(t), t) = r(S(t), t)(L - V(t, L)).$$

Maintenant on la discréteise par le schéma d'Euler implicite:

$$\begin{cases} \frac{V_{N+1}^{n+1} - V_N^n}{\Delta t} = -r(L, t^{n+1})(V_{N+1}^{n+1} - L) \\ V_0^n = 0 \end{cases} \quad (24)$$

soit

$$\begin{cases} V_{N+1}^{n+1} = \frac{L - V_N^n}{1 - \Delta t r(L, t^{n+1})} \\ V_0^n = 0 \end{cases} \quad (25)$$

On commence la boucle temporelle de $n = 0$, V_{N+1}^0 est connu des conditions aux limites, donc on peut calculer

$$V_{N+1}^1 = \frac{L - V_{N+1}^0}{1 - \Delta t r(L, t^1)}$$

et puis toutes les autres valeurs de cette condition aux limites.

Si on la discrétise par le schéma d'Euler explicite on obtient

$$\begin{cases} \frac{V_{N+1}^{n+1} - V_{N+1}^n}{\Delta t} = r(L, t^n)(V_{N+1}^n - L) \\ V_0^n = 0 \end{cases} \quad (26)$$

soit

$$\begin{cases} V_{N+1}^{n+1} = V_{N+1}^n(1 + r\Delta t) - r(L, t^n)L \\ V_0^n = 0 \end{cases} \quad (27)$$

4 Différences Finies. Pricing des Options Asiatiques.

4.1 Déduction de l'EDP pour les Options Asiatiques à l'aide du théorème de Feynman-Kac. Strike fixe. Call

On peut faire l'hypothèse que le prix de l'option à une date t antérieure dépend de t , de S et de la valeur moyenne de l'actif

$$I = \int_0^t S_\tau d\tau.$$

Étant donné que l'histoire de l'évolution du prix de l'actif est indépendante du prix actuel on peut considérer les variables I, S, t comme les variables indépendantes.

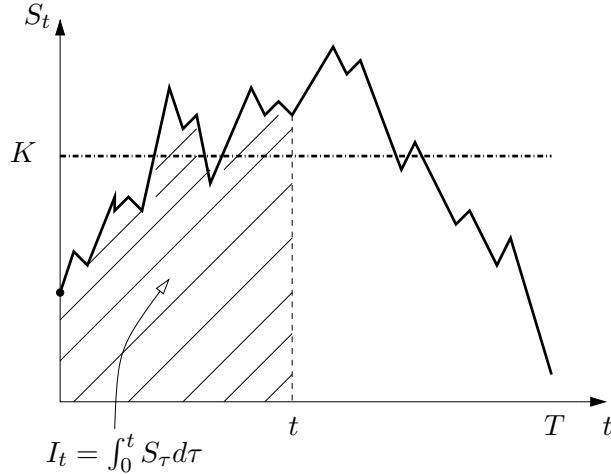


Figure 25: Définition de l'option Asiatique

Formulons pour l'option asiatique le théorème de Feynman-Kac:

Soit $V(S, t, I)$ la solution de l'équation différentielle:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(S,t,I)}{\partial t} - rV(S,t,I) + rS\frac{\partial V(S,t,I)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S,t,I)}{\partial S^2} + S\frac{\partial V(S,t,I)}{\partial I} = 0 \\ V(S, t = T, I) = \Phi(S(T), T, I(T)) \end{cases} \quad (28)$$

Alors $V(S, t, I)$ peut être représenté de la forme

$$V(S_0, t, I_0) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\Phi(S(T), T, I(T))/S(t) = S_0]$$

où S_t et I_t vérifient les équations différentielles stochastiques:

$$\begin{cases} dS(u) = rS(u)du + \sigma S(u)dW(u) \\ dI(u) = S(u)du \\ S(t) = S_0 \end{cases} \quad (29)$$

où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[t, T]$ et la fonction $\Phi(S(T), T, I(T))$ est une fonction pay-off.

Pour démontrer le théorème nous utilisons les mêmes idées que celles du chapitre 2.6. La différence provient de l'existence du 2 ème variable I et nouveaux termes dans la variation du processus stochastique

$$Z(u) = e^{-ru} V(S(u), u, I(u)), \quad \mathcal{F}_u \text{ mesurable}, \quad u \in [t, T].$$

Ces termes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial I^2} d\langle I \rangle_u, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial I \partial S} d\langle I, S \rangle_u$$

sont négligeables devant

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} d\langle S \rangle_u, \quad \frac{\partial V}{\partial I} dI(u), \quad \frac{\partial V}{\partial S} dS(u)$$

On calcule $dZ(u)$, on obtient

$$d\langle S \rangle_u \equiv (dS(u))^2 = \sigma^2 S(u)^2 du,$$

$$\begin{aligned} dZ(u) &= \frac{\partial Z}{\partial u} du + \frac{\partial Z}{\partial S} dS(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial I^2} d\langle I(u) \rangle_u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial I \partial S} d\langle I, S \rangle_u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial S^2} d\langle S(u) \rangle_u = \\ &= -re^{-ru} V du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial u} du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial S} dS + e^{-ru} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 + \frac{\partial V}{\partial I} dI(u) = \\ &= -re^{-ru} V du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial u} du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial S} (rS(u)du + \sigma S(u)dW(u)) + \frac{1}{2} e^{-ru} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (rS(u)du + \sigma S(u)dW(u))^2 + \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial I} S(u)du = -re^{-ru} V du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial u} du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial S} (rS(u)du + \sigma S(u)dW(u)) + \frac{1}{2} e^{-ru} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 du + \dots \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial I} S(u)du = e^{-ru} (-rV + \frac{\partial V}{\partial u} + rS(u) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial I} S(u))du + e^{-ru} \frac{\partial V}{\partial S} S(u) \sigma dW \end{aligned}$$

L'expression dans les parenthèses est égale à zéro, car $V(S, tI)$ vérifie EDF de BS:

$$\frac{\partial V(S, I, t)}{\partial t} - rV(t, S, I) + rS \frac{\partial V(t, S, I)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S, I)}{\partial S^2} + S \frac{\partial V(t, S, I)}{\partial I} = 0$$

Puis on suit le même raisonnement que dans 2.6.

On intègre l'équation entre t et T , on prend l'espérance de chaque membre, on utilise l'indépendance des accroissement du mouvement Brownien et la définition de processus $Z(u)$.

Finalement

$$V(S_0, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\Phi(S(T), T, I(T), 0) / S(t) = S_0]$$

Le théorème Feynman-Kac nous permet d'écrire l'équation différentielle aux dérivées partielles pour un prix d'une option multidimensionnelle.

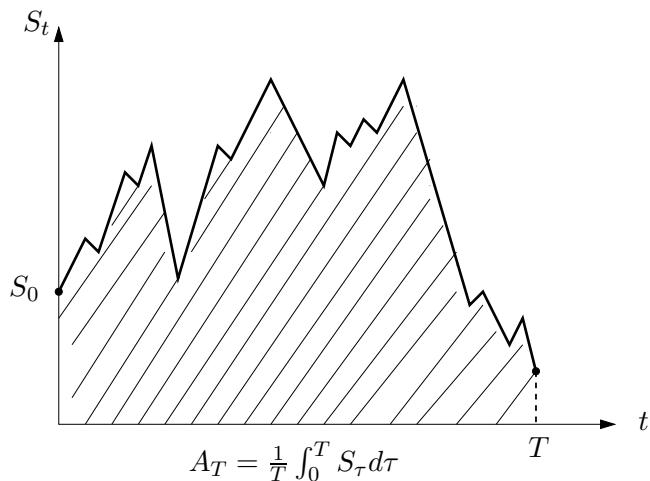


Figure 26: Evolution d'un actif et le payoff pour l'option asiatique.

On peut aussi faire le changement de variables

$$(t, S, I) \longrightarrow (t, S, A = I/t)$$

Pour faire des calculs on tient compte du fait que $V(t, S, I) = V(t, S, A(I, t))$, puis on considère A comme une variable indépendante parmi (t, S, A) . L'équation différentiel devient:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{S-A}{t} \frac{\partial V}{\partial A} = 0 \\ V(t = T, S, A) = \max(A(T) - K, 0) \end{cases}$$

En effet

$$\frac{\partial V}{\partial I} = \frac{\partial V}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial I} = \frac{\partial V}{\partial A} \frac{1}{t}$$

$$\frac{\partial V(t, S, I)}{\partial t} = \frac{\partial V(t, S, A)}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial V(t, S, A)}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial A} \left(\frac{-I}{t^2}\right) = \frac{\partial V(t, S, A)}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial A} \left(\frac{-A}{t}\right)$$

- Prix d'une options asiatiques $V(t, S, A)$ porte sur un actif S et sur la valeur moyenne

$$A(t) = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau$$

- Prix de l'option à la date T d'échéance $\Lambda(S) = \max(A(T) - K, 0)$
- Droit d'achat au prix $K - A(T) + S(T)$ à échéance.

Il s'agit donc d'une équation de type parabolique dégénérée dans la variable S et hyperbolique dans la variable A (il n'y a pas de terme de diffusion dans A). Il existe un changement de variable permettant de réduire la dimension du problème , et d'arriver à un problème de type parabolique en dimension un. On peut alors mettre en oeuvre les mêmes techniques de discréétisation que celles présentées pour l'équation de Black et Scholes avec un seul sous-jacent.

4.1.1 Changement de variables. Reduction dimensionnelle.

- Changement des variables:

$$(t, S, A) \longrightarrow (t, x = \frac{K - tA/T}{S}).$$

- Introduction de la fonction $f(t, x)$ telle que

$$V(S, A, t) = Sf(t, x)$$

Calculons les dérivées partielles:

$$\frac{\partial x}{\partial S} = -\frac{1}{S^2}(K - t\frac{A}{T}) = -\frac{x}{S}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial S^2} = \frac{2}{S^3}(K - t\frac{A}{T}) = \frac{2x}{S^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial(Sf(t, x))}{\partial t} = S \frac{\partial f}{\partial t} + S \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = S \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{A}{T} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = f + S \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = f + S \frac{\partial f}{\partial x} \left(-\frac{x}{S}\right) = f - x \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} - \frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{x^2}{S}$$

$$\frac{\partial V}{\partial A} = S \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial A} = -\frac{t}{T} \frac{\partial f}{\partial x}$$

On injecte ces dérivées dans l'équation. On obtient

- Nouvelle équation:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{1}{T} + rx\right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ f(t = T, x) = \max(-x, 0) \end{cases}$$

On a transformé la condition finale:

$$\begin{aligned} V(t = T, S, A) &= \max(A(T) - K, 0) \rightarrow Sf(T, x(T, S)) = \max(A(T) - K, 0) \rightarrow \\ f(T, x(T, S)) &= \max\left(\frac{A(T) - K}{S}, 0\right) = \max(-x(T, S), 0) \end{aligned}$$

4.1.2 Conditions aux limites. Resolution analytique de l'EDP réduite

D'abord on cherche une solution analytique de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{1}{T} + rx\right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ f(t = T, x) = \max(-x, 0) \end{cases}$$

pour $x \leq 0$. Dans ce cas la condition finale n'est pas null: $f(t = T, x) = -x$.

Cherchons une solution analytique de la forme

$$g(t, x) = xa(t) + b(t).$$

Il est claire que

$$\text{si } x \leq 0 \quad f(t, x) \rightarrow g(t, x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(t, x) = 0.$$

En effet $x \rightarrow +\infty$ signifie que $S \rightarrow 0$, est donc prix du Call $V(t, A, S = 0) \rightarrow 0$.

On injecte la forme de la solution proposée (pour $x \leq 0$) dans la condition finale:

$$f(t = T, x) = -x \implies xa(t) + b(t) = -x, \quad \forall x \leq 0$$

On en déduit

$$\begin{cases} b(T) = 0 \\ a(T) = -1 \end{cases}$$

On injecte la forme de la solution proposée dans l'équation :

$$x \frac{\partial a(t)}{\partial t} + \frac{\partial b(t)}{\partial t} - \left(\frac{1}{T} + rx\right)a(t) = 0.$$

Cette équation est valable pour $\forall x \leq 0$, donc on peut conclure que

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = ra(t) \\ \frac{db(t)}{dt} = \frac{1}{T}a(t) \\ b(T) = 0 \\ a(T) = -1 \end{cases}$$

Ce système admet la solution de la forme

$$\begin{cases} a(t) = -e^{-r(T-t)} \\ b(t) = \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-t)}) \end{cases}$$

soit

$$f(t, x) = \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-t)}) - xe^{-r(T-t)}$$

Maintenant on résout par les différences finies l'équation sur $[X_{min}, X_{max}]$ avec les conditions aux limites de Dirichlet:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} - (\frac{1}{T} + rx)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ f(t = T, x) = \max(-x, 0) \\ f(X_{min}, t) = \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-t)}) - X_{min}e^{-r(T-t)}, \quad X_{min} \leq 0 \\ f(X_{max}, t) = 0, \quad X_{max} > 0 \end{cases}$$

Pour déterminer le prix de l'option on revient aux variables S, T, A .

Le prix en $t = 0$ est donné par

$$V(t = 0, S, A) = S(0)f(t = 0, x(0)) = S(0)f(t = 0, \frac{K - tA/T}{S(0)}) = S(0)f(t = 0, \frac{K}{S(0)})$$

Le prix en t quelconque est donné par

$$V(t, S, A) = Sf(t, x) = Sf(t, \frac{K - tA/T}{S})$$

4.1.3 Applications numérique. Méthode de Crank-Nicolson.

Discrétons les variables: spatiale et temporelle:

x : $x_0 = X_{min} = 0, \dots, x_i, \dots, x_{N+1} = X_{max}$.

t : $t^0 = 0, \dots, t^n, \dots, t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, \dots, N+1 \\ n = 0, 1, 2, \dots, M+1 \\ \Delta x = \frac{L}{N+1} \\ \Delta t = \frac{T}{M+1} \\ f(t_n, x_i) \equiv f_i^n \end{cases} \quad (30)$$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} f_0^n = \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-n\Delta t)}) \\ f_{N+1}^n = 0 \\ n = M, \dots, 1, 0. \end{cases} \quad (31)$$

Conditions finales :

$$\{ f_i^{M+1} = \max(-i\Delta x, 0), i = 0, 1, 2, \dots, N+1 \quad (32)$$

Pour discréteriser l'équation (1) on utilise:

pour $\frac{\partial f}{\partial t}$ la dérivée rétrograde,

pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ la seconde dérivée, centrée,

pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ la dérivée centrée.

On applique la méthode de Crank-Nicolson et on obtient l'équation de la forme :

$$B_i f_{i-1}^{n-1} + D_i f_i^{n-1} + A_i f_{i+1}^{n-1} = K_i^n,$$

$$A_i = -\frac{\Delta t}{4}(-(ir + \frac{1}{T\Delta x}) + \sigma^2 i^2)$$

$$B_i = \frac{\Delta t}{4}(-(ir + \frac{1}{T\Delta x}) - \sigma^2 i^2)$$

$$D_i = 1 + \frac{\Delta t}{2} \sigma^2 i^2$$

$$K_i^n = \frac{\Delta t}{4}(-(ir + \frac{1}{T\Delta x}) + \sigma^2 i^2) f_{i+1}^n + (1 - \frac{\Delta t}{2} \sigma^2 i^2) f_i^n + \frac{\Delta t}{4}((ir + \frac{1}{T\Delta x}) + \sigma^2 i^2) f_{i-1}^n$$

On utilise les conditions aux limites

$$f_0^{n-1} = h^{n-1} = \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-(n-1)\Delta t)}), \quad f_{N+1}^{n-1} = \xi^{n-1} = 0$$

et on obtient la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} D_1 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & D_2 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & D_3 & A_3 & 0 \\ & & & B_{N-1} & D_{N-1} & A_{N-1} \\ & & & 0 & B_N & D_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1^{n-1} \\ f_2^{n-1} \\ f_3^{n-1} \\ \vdots \\ f_N^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1^n - B_1 h^{n-1} \\ K_2^n \\ K_3^n \\ \vdots \\ K_{N-1}^n \\ K_N^n - A_N \xi^{n-1} \end{pmatrix}$$

Utilisons les valeurs suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{min} = 0 \\ X_{max} = 2 \\ S(0) = 100 \\ K = 100 \\ T = 1 \\ r = 0.02 \\ \sigma = 0.3 \\ N = 99 \\ M = 999 \end{array} \right.$$

- On résout numériquement l'équation et on obtient les graphes pour la fonction f_i^n à $t = 0$ et à $t = T/2$

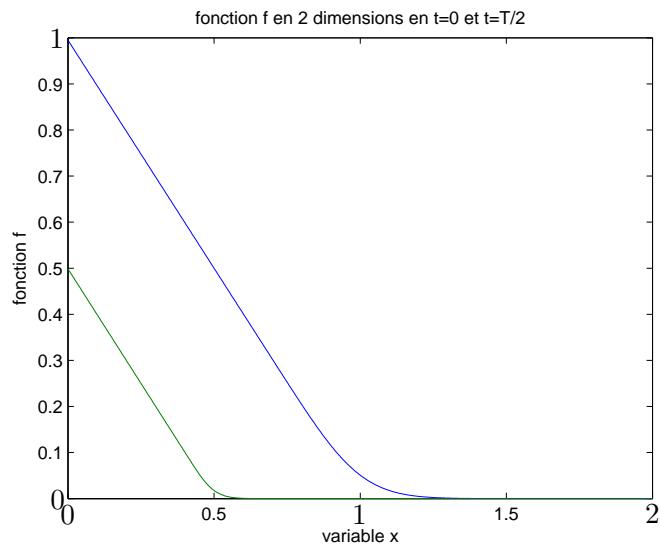


Figure 27: Prix réduit f_i^n pour $X_{min} = 0$ pour $t = 0$ et $t = T/2$

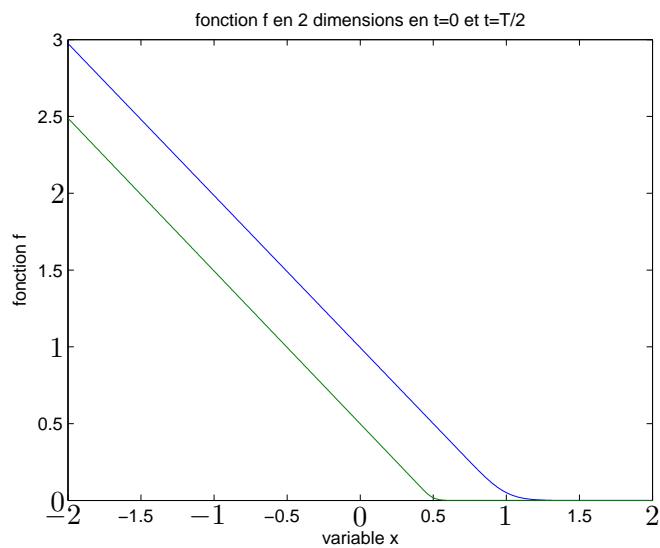


Figure 28: Prix réduit f pour $X_{min} = -2$ pour $t = 0$ et $t = T/2$

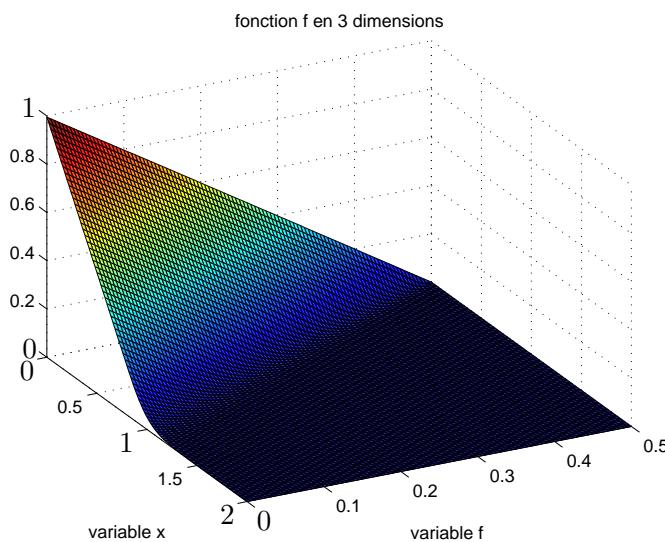


Figure 29: Prix réduit f en 3 dimensions pour $X_{min} = 0$

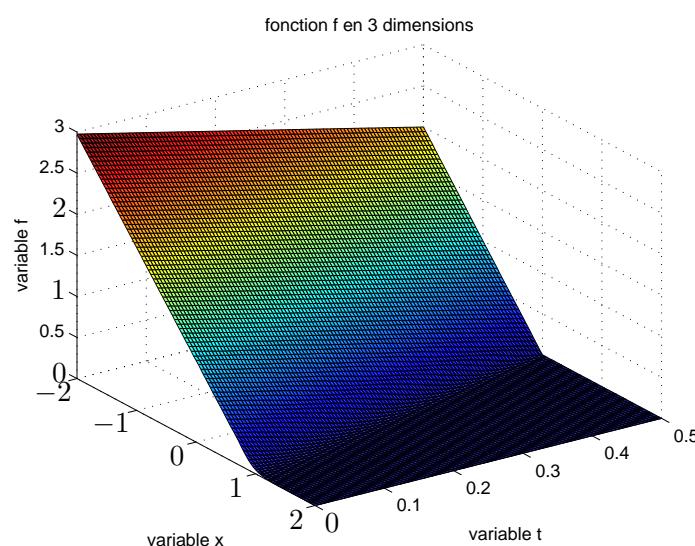


Figure 30: Prix réduit f en 3 dimensions pour $X_{min} = -2$

Pour déterminer le vrai prix de l'option en revient aux variables originales S, T, A .

Le prix en $t = 0$ est donné par

$$V(t = 0, S, A) = S(0)f(t = 0, x(0)) = S(0)f(t = 0, \frac{K - tA/T}{S(0)}|_{t=0}) = S_0f(t = 0, \frac{K}{S_0})$$

Pour obtenir la surface du prix en 3 dimensions on introduit deux boucles par rapport à la variable S_0 et celle de A .

L'équation était résolue par la méthode aux différences finies. On connaît la matrice f_i^n en chaque point discret (n, i)

- Pour $t = 0$ le prix ne dépend pas de A .
- Pour chaque $S_0 = 1 : 200$ on calcule la valeur $\frac{K}{S_0}$.
- A la valeur $x = \frac{K}{S_0}$ correspond l'indice i^* :

$$i^* = [\frac{x}{\Delta x}] = [\frac{K}{S_0} \frac{1}{\Delta x}]$$

Ici on a utilisé la partie entière: $[\cdot]$.

- On trace le graphe

$$S_0 \rightarrow V(0, S_0) = S_0 f_{i^*}^0 \quad \text{où} \quad i^* = [\frac{K}{S_0} \frac{1}{\Delta x}]$$

- Si on ne connaît pas la valeur de f_i^0 pour un indice i
soit on recalcule f_i^n par DF en utilisant X_{max} plus grande, soit on donne au prix la valeur zero:
- Si $[\frac{K}{S_0} \frac{1}{\Delta x}] > N + 1$ alors $V_i^n = 0$

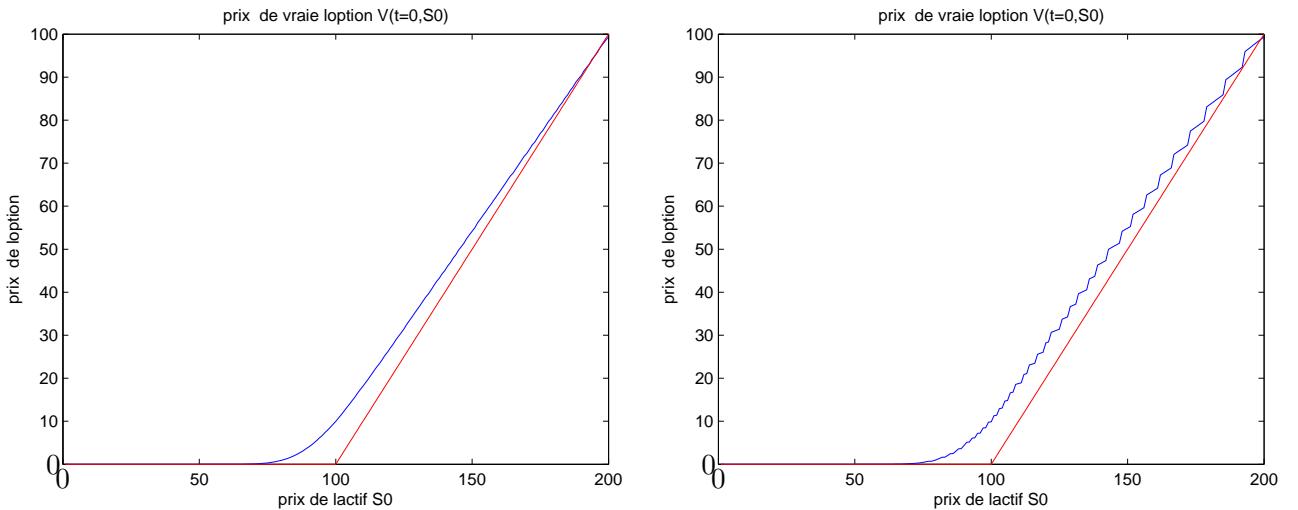


Figure 31: Prix du Call Asiatique pour $t = 0, r = 0.4$, la discréétisation spatiale $N + 1 = 1000$

Figure 32: Prix du Call Asiatique pour $t = 0, r = 0.4$, discréétisation grossière spatiale $N + 1 = 100$

Le prix en t quelconque est donné par

$$V(t, S, A) = Sf(t, x) = Sf(t, \frac{K - tA/T}{S})$$

Pour $t = T/2$

$$V(T/2, S, A) = Sf(n, x) = Sf(n, \frac{K - A/2}{S})$$

Soit $A = 100$. Donc à $t = T/2$ correspond le prix $V(T/2, S, 100) = Sf(50, (K - 50)/S)$.

- On trace le graphe

$$S_{T/2} \rightarrow V(T/2, S_{T/2}) = S_{T/2} f_{i^*}^{50} \quad \text{où} \quad i^* = [\frac{K - 50}{S_{T/2}} \frac{1}{\Delta x}]$$

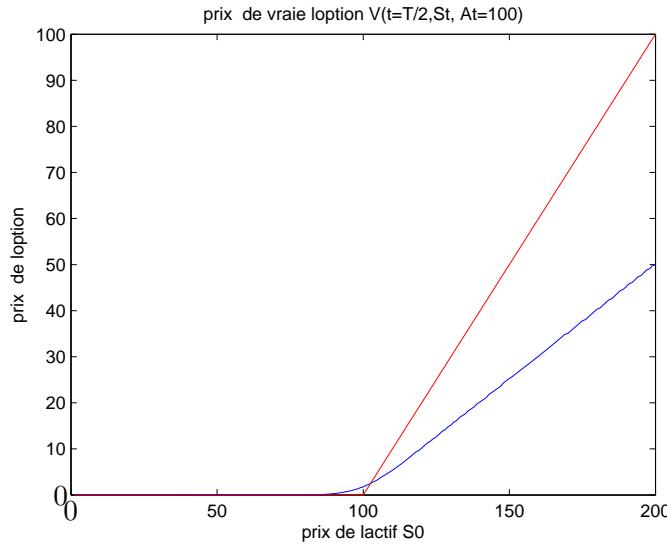


Figure 33: Prix de l'option Asiatique à $t = T/2$ pour $A = 100$

Pour obtenir les surfaces en 3 dimensions pour $t = T/2$ et pour chaque valeur de l'actif S et chaque valeur de l'actif moyenne A on introduit deux boucles

for $S = 1 : 200$

for $A = 1 : 200$

et on calcule

$$V(t, S, A) = Sf_{indice}^n \quad \text{où} \quad indice = [\frac{K - A/2}{S} \frac{1}{\Delta x}]$$

Ici l'indice $n = 50$ correspond à $t = T/2$ et au nombre de discréétisation spatial $M + 1 = 100$. On visualise la surface du prix de l'option asiatique pour $t = T/2$.

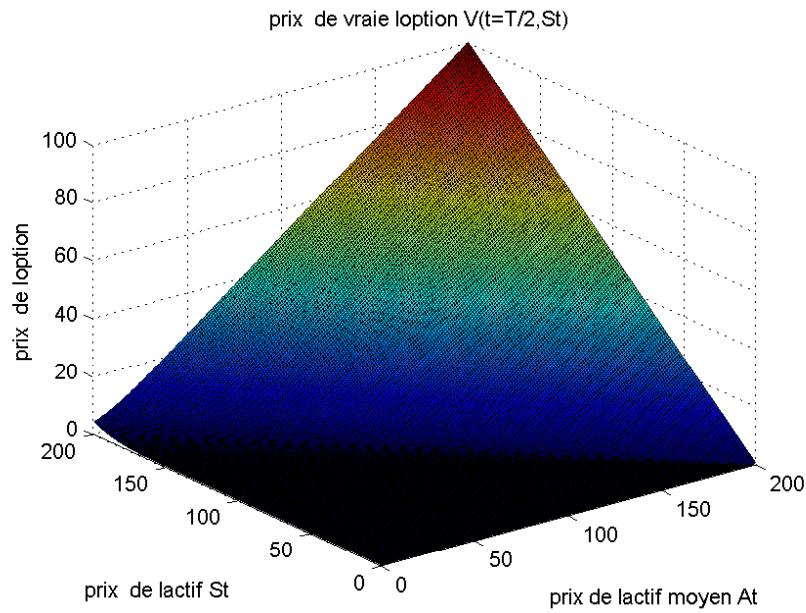


Figure 34: Prix de l'option Call Asiatique pour $t = T/2$

On présente ici les surfaces des vrais prix asiatiques $V(t, S_t, A_t)$ pour les différentes moments temporel.

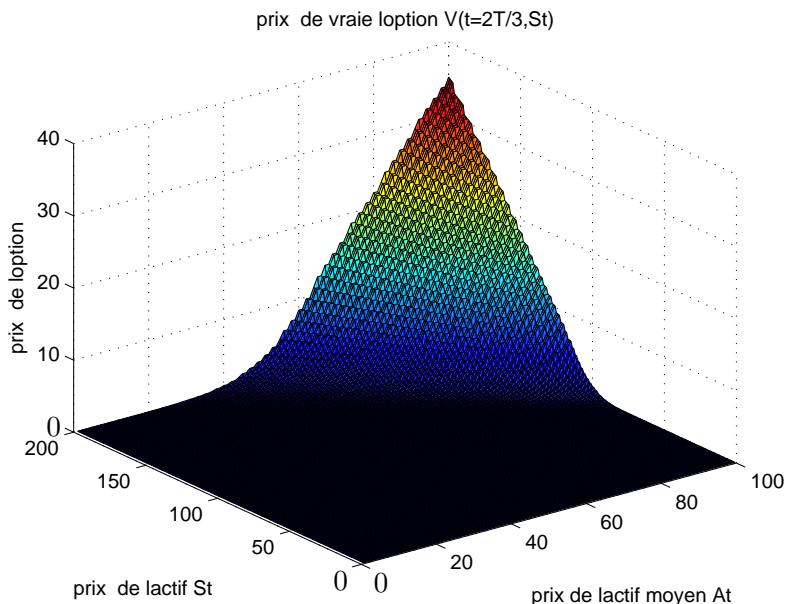


Figure 35: Prix $V(t, S_t, A_t)$ pour $t = 2T/3$

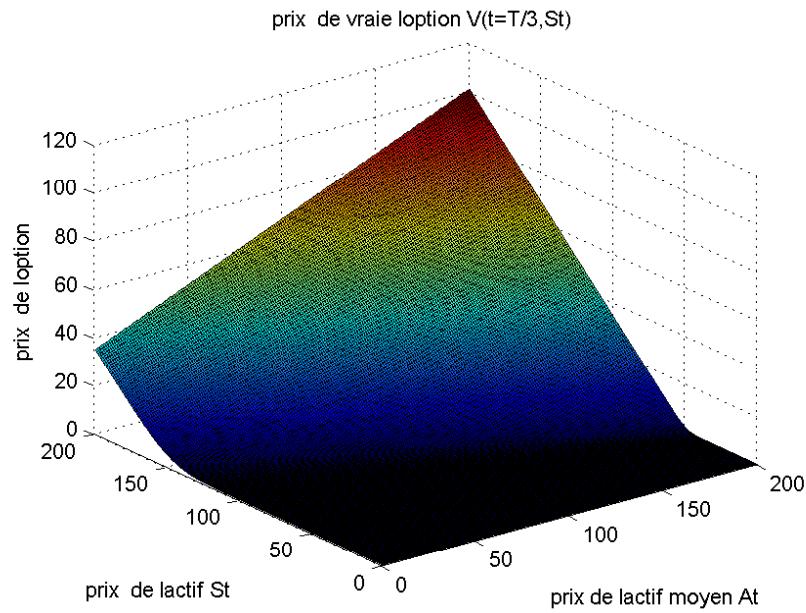


Figure 36: Prix $V(t, S_t, A_t)$ pour $t = T/3$

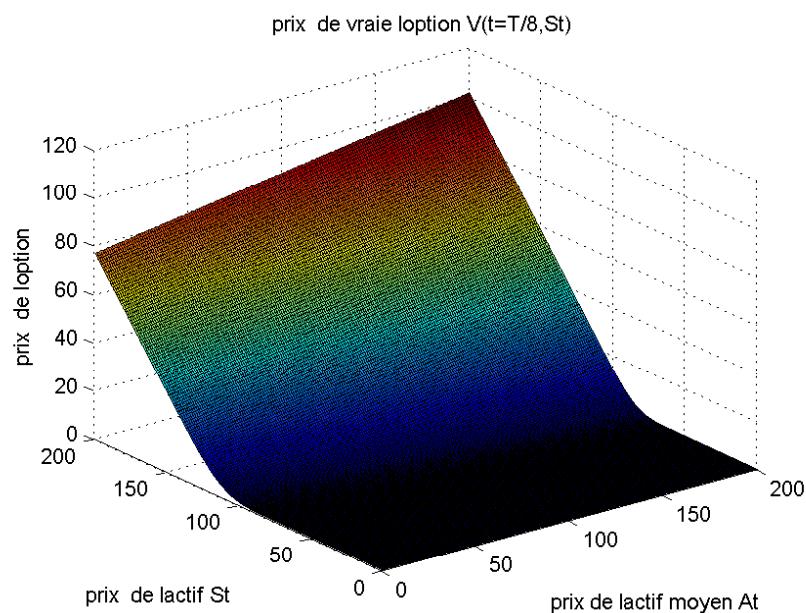


Figure 37: Prix $V(t, S_t, A_t)$ pour $t = T/8$

4.2 Options Asiatiques. Strike fixe. Put

On résout par les Différences Finies l'équation sur $[X_{min} = 0, X_{max}]$ avec les conditions aux limites de Dirichlet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} - (\frac{1}{T} + rx) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ f(t = T, x) = \max(x, 0) \\ f(0, t) = 0, \\ f(X_{max}, t) = \frac{1}{rT} (e^{-r(T-t)} - 1) + X_{max} e^{-r(T-t)}, \quad X_{max} > 0 \end{array} \right.$$

Pour déterminer le prix de l'option en revient aux variables S, T, A .

Le prix en $t = 0$ est donné par

$$V(t = 0, S, A) = S(0)f(t = 0, x(0)) = S(0)f(t = 0, \frac{K - tA/T}{S(0)}) = S(0)f(t = 0, \frac{K}{S(0)})$$

Le prix en t quelconque est donné par $V(t, S, A) = Sf(t, x) = Sf(t, \frac{K-tA/T}{S})$.

4.2.1 Applications numérique.

Pour les applications numériques on prend les valeurs suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 0.3, S(0) = 100, K = 100, r = 0.02, T = 1, N + 1 = 100 (ou N + 1 = 1000), M + 1 = 100 \end{array} \right.$$

- On résout numériquement l'équation et on obtient les graphes pour la fonction f_i^n à $t = 0$ et à $t = T/2$

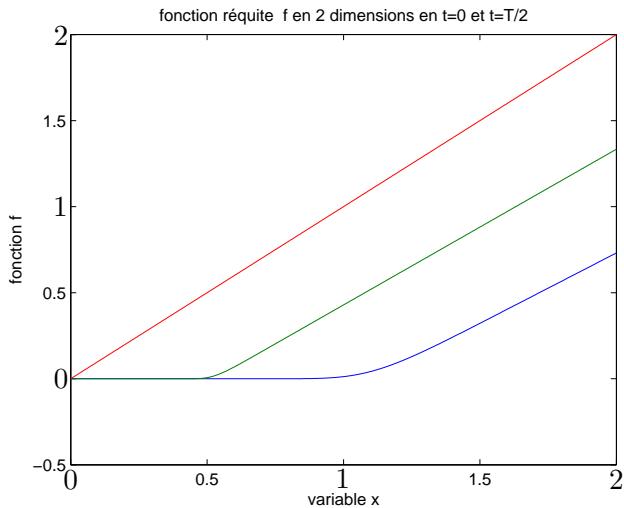


Figure 38: Prix réduit f pour $X_{min} = 0$ et pour $t = 0, t = T/2$ et $t = T$

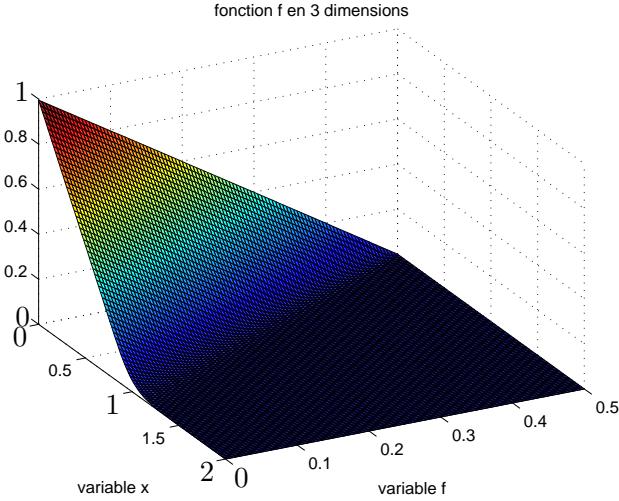


Figure 39: Prix réduit f pour $X_{min} = 0$

- Pour déterminer le vrai prix de l'option en revient aux variables S, T, A .
Le prix en $t = 0$ est donné par

$$V(t = 0, S, A) = S(0)f(t = 0, x(0)) = S(0)f(t = 0, \frac{K - tA/T}{S(0)}|_{t=0}) = S_0f(t = 0, \frac{K}{S_0})$$

Pour obtenir la surface du prix en 3 dimensions on introduit deux boucles par rapport à la variable S_0 et celle de $A_0 = S_0$.

L'équation était résolue par la méthode aux différences finies. On connaît la matrice f_i^n en chaque point discret.

- Pour $t = 0$ le prix ne dépend pas de A .
- Pour chaque $S_0 = 1 : 200$ on calcule la valeur $\frac{K}{S_0}$.
- La valeur $x = \frac{K}{S_0}$ correspond à l'indice i :

$$i = [\frac{x}{\Delta x}] = [\frac{K}{S_0} \frac{1}{\Delta x}]$$

Ici on a utilisé la partie entière: $[\cdot]$.

- On trace le graphe $S_0 \rightarrow V(t = 0, S_0)$.

$$V(t = 0, S_0) = S_0 f_i^0 \quad \text{où} \quad i = [\frac{K}{S_0} \frac{1}{\Delta x}]$$

- Si on ne connaît pas la valeur de f_i^0 pour un indice i
soit on recalcule f_i^n par DF en utilisant X_{max} plus grande, soit on impose la condition au limite de Neumann.

$$V(i) = V(i + 1) + 1, \quad \text{ou} \quad V(i) \equiv S_0 f_i^0$$

- Si $\lceil \frac{K}{S_0 \Delta x} \rceil > N + 1$ alors $V_i^n = V_{i+1}^n + 1$

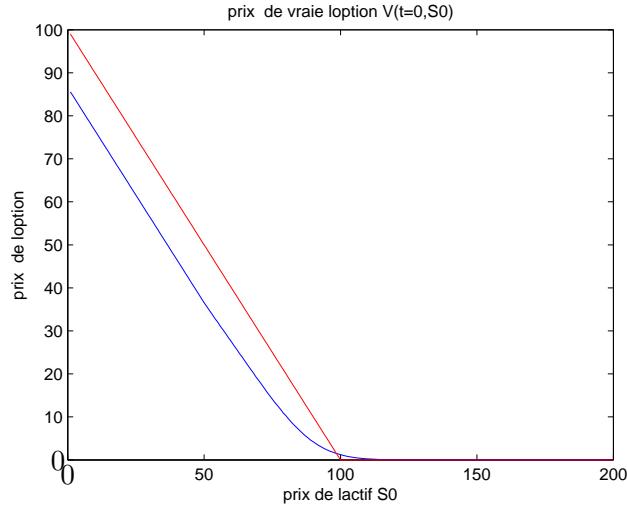


Figure 40: Prix du Put Asiatique pour $t = 0, r = 0.4$, discréétisation spatiale $N + 1 = 1000$

Le prix en t quelconque est donné par

$$V(t, S, A) = Sf(t, x) = Sf(t, \frac{K - tA/T}{S})$$

Pour $t = T/2$

$$V(T/2, S, A) = Sf(n, x) = Sf(n, \frac{K - A/2}{S})$$

On introduit deux boucles

for $S = 1 : 200$

for $A = 1 : 200$

et on calcule

$$V^n(S, A) = Sf_{index}^n \quad \text{où} \quad index = \lceil \frac{K - A/2}{S} \frac{1}{\Delta x} \rceil$$

Ici l'indice $n = 50$ correspond à $t = T/2$ et au nombre de discréétisation spatial $M + 1 = 100$. On visualise la surface du prix de l'option asiatique Put pour $t = T/2$.

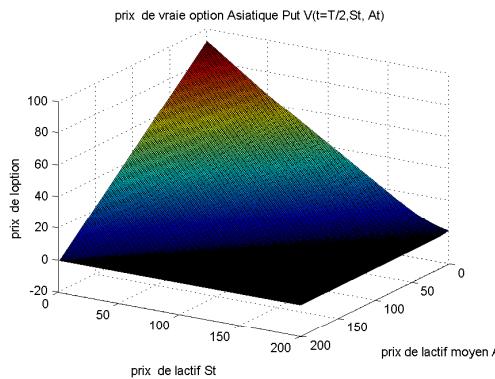


Figure 41: Prix du Put Asiatique pour $t = T/2$

4.3 Options Asiatiques. Strike flottant. Put

- Prix d'une options asiatiques $V(t, S, A)$ porte sur un actif S et sur la valeur moyenne

$$A(t) = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau$$

- Prix de l'option à la date T d'échéance $\Lambda(S) = \max(A(T) - S, 0)$
- Droit de vente au prix $A(T)$ à échéance.

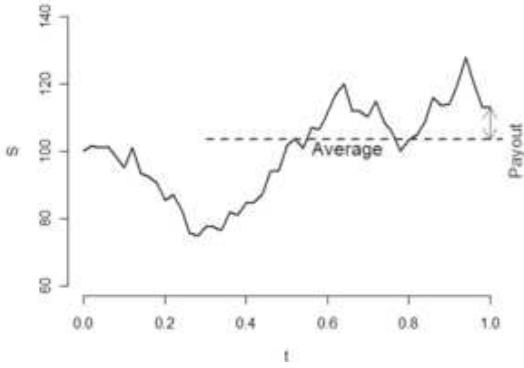


Figure 42: Variation d'un actif et le payoff pour l'option asiatique. Strike flottant. Put

- Prix de l'option $V(S_t, A_t, t) = V(S, A, t)$ vérifie l'équation:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{S-A}{t} \frac{\partial V}{\partial A} = 0 \\ V(t = T, S, A) = \max(A(T) - S, 0) \end{cases}$$

4.3.1 Changement de variables. Reduction dimensionnelle.

- Changement des variables: $(t, S, A) \rightarrow (t, x = \frac{-tA}{T})$
- Introduction de la fonction $f(t, x) \rightarrow V(S, A, t) = Sf(t, x)$
- Nouvelle équation:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} - (\frac{1}{T} + rx) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ f(t = T, x) = \max(-(x+1), 0) \end{cases}$$

4.3.2 Conditions aux limites pour les Options Asiatiques.

- Une solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} - (\frac{1}{T} + rx) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ f(t = T, x) = \max(-(x+1), 0) \end{cases}$$

est de la forme :

$$f(t, x) = \frac{1}{rT} (1 - e^{-r(T-t)}) - xe^{-r(T-t)} - 1$$

- On résout l'équation par différences finies l'équation sur $[X_{min}, X_{max}]$ avec les conditions aux limites de Dirichlet:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} - (\frac{1}{T} + rx)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ f(t = T, x) = \max(-(x+1), 0) \\ f(X_{min}, t) = \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-t)}) - X_{min}e^{-r(T-t)} - 1, \quad X_{min} \leq 0 \\ f(X_{max}, t) = 0, \quad X_{max} > 0 \end{cases}$$

4.4 Résolution numérique de l'EDP originale. Strike fixe. Put.

4.4.1 Discréétisation de l'équation pour les Options asiatiques.

On doit discréétiser l'équation compléte en deux dimensions spatiales: S et A .

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{S-A}{t}\frac{\partial V}{\partial A} = 0 \\ V(t = T, S, A) = \max(K - A(T), 0) \end{cases}$$

Faisons d'abord le changement de variable

$$t \longrightarrow T - t.$$

On obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + rV - rS\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{S-A}{T-t}\frac{\partial V}{\partial A} = 0 \\ V(t = 0, S, A) = \max(K - A(0), 0) \end{cases}$$

En $S = 0$, le coefficient $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2$ disparaît donc l'équation devient hyperboliques par rapport à la variable A .

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rV + \frac{A}{T-t}\frac{\partial V}{\partial A} = 0$$

Pour $S < A$ la vitesse

$$-\frac{S-A}{T-t} > 0$$

est entrante.

Considérons le cas générale : $S \neq 0$.

Pour $S > A$ la vitesse

$$-\frac{S-A}{T-t} < 0$$

est sortante.

Le terme "entrant" signifie que le graphe de V se déplace à droite (dans la direction d'augmentation de A) avec l'augmentation de t .

Donc pour que le schéma soit stable on utilise la méthode "upwind" pour discréétiser la dérivée $\frac{\partial V}{\partial A}$.

$$\frac{\partial V}{\partial A} = \begin{cases} \frac{V^n(S_i, A_j) - V^n(S_i, A_{j-1})}{\Delta A}, & S_i < A_j \\ \frac{V^n(S_i, A_{j+1}) - V^n(S_i, A_j)}{\Delta A}, & S_i > A_j \end{cases}$$

On tronque d'abord le domaine du calcul: $S \in [0, L_S]$, $A \in [0, L_A]$.

Discréétisons les variables spatiales et temporelle:

S : $S_0 = 0, \dots, S_i = i\Delta S, \dots, S_{N_s+1} = L_S$.

A : $A_0 = 0, \dots, A_j = j\Delta A, \dots, A_{N_a+1} = L_A$.

t : $t_0 = 0, \dots, t^n = n\Delta t, \dots, t_{M+1} = T$.

On note $V_{i,j}^n$ la valeur d'une solution calculée à l'aide d'un schéma numérique aux points S_i, A_j, t^n .

$$\frac{\partial V}{\partial t} \sim \frac{V_{i,j}^n - V_{i,j}^{n-1}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{(\Delta S)^2}$$

$$\frac{S - A}{T - t} \frac{\partial V}{\partial A} = \begin{cases} \frac{S_i - A_j}{T - t^n} \frac{V_{i,A_j}^n - V_{i,j-1}^n}{\Delta A}, & S_i < A_j \\ \frac{S_i - A_j}{T - t^n} \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n}{\Delta A}, & S_i > A_j \end{cases}$$

Pour trouver le prix V il reste à fixer les conditions aux limites en $S = 0, A = 0$ et en $S = L_S, A = L_A$.

- En $A = 0$ on peut ne pas fixer de conditions aux limites car le terme hyperbolique en A :

$$-\frac{S}{t - T} \frac{\partial V}{\partial A}$$

correspond à une vitesse sortante: $-\frac{S}{t - T}$. On pourra donc écrire sur cette partie de la frontière le même schéma décentré que pour les points intérieurs.

- En $S = 0$, on peut aussi ne pas imposer de conditions aux limites car l'équation devient EDP hyperbolique en A :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rV - \frac{S - A}{T - t} \frac{\partial V}{\partial A} = 0,$$

qu'on pourra discrétiser en écrivant en $S = 0$ le même schéma que pour les points intérieurs.

- En $A = L_A$ ($A \rightarrow \infty$) le prix de put tend vers zero comme pour le put européen.

Si $L_S < L_A$, la vitesse $-\frac{L_S - L_A}{T - t} > 0$ la vitesse est entrante, on peut ne pas imposer de conditions aux limites, on écrit sur $A = L_A$ le même schéma que pour les points intérieurs.

Si $L_S > L_A$, la vitesse $-\frac{L_S - L_A}{T - t} < 0$ la vitesse est sortante, on impose $V = 0$.

- En $S = L_A$ ($S \rightarrow \infty$) on impose des condition de Neumann

$$\frac{\partial V}{\partial S} = 0$$

- En $S = 0$ et $A = 0$ l'équation devient

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rV = 0$$

On donc approche le prix de put asiatique à strike fixe par le problème aux limites:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + rV - rS \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{S-A}{T-t} \frac{\partial V}{\partial A} = 0 \\ V(t, S, L_A) = 0, \quad S > L_A \\ \frac{\partial V}{\partial S}(t, L_S, A) = 0 \\ V(t=0, S, A) = \max(K - A(0), 0) \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation numériquement on peut utiliser la méthode d'Euler explicite ou Crank-Nicolson.

4.5 Algorithme de la résolution numérique de l'EDP originale. Méthode d'Euler explicite

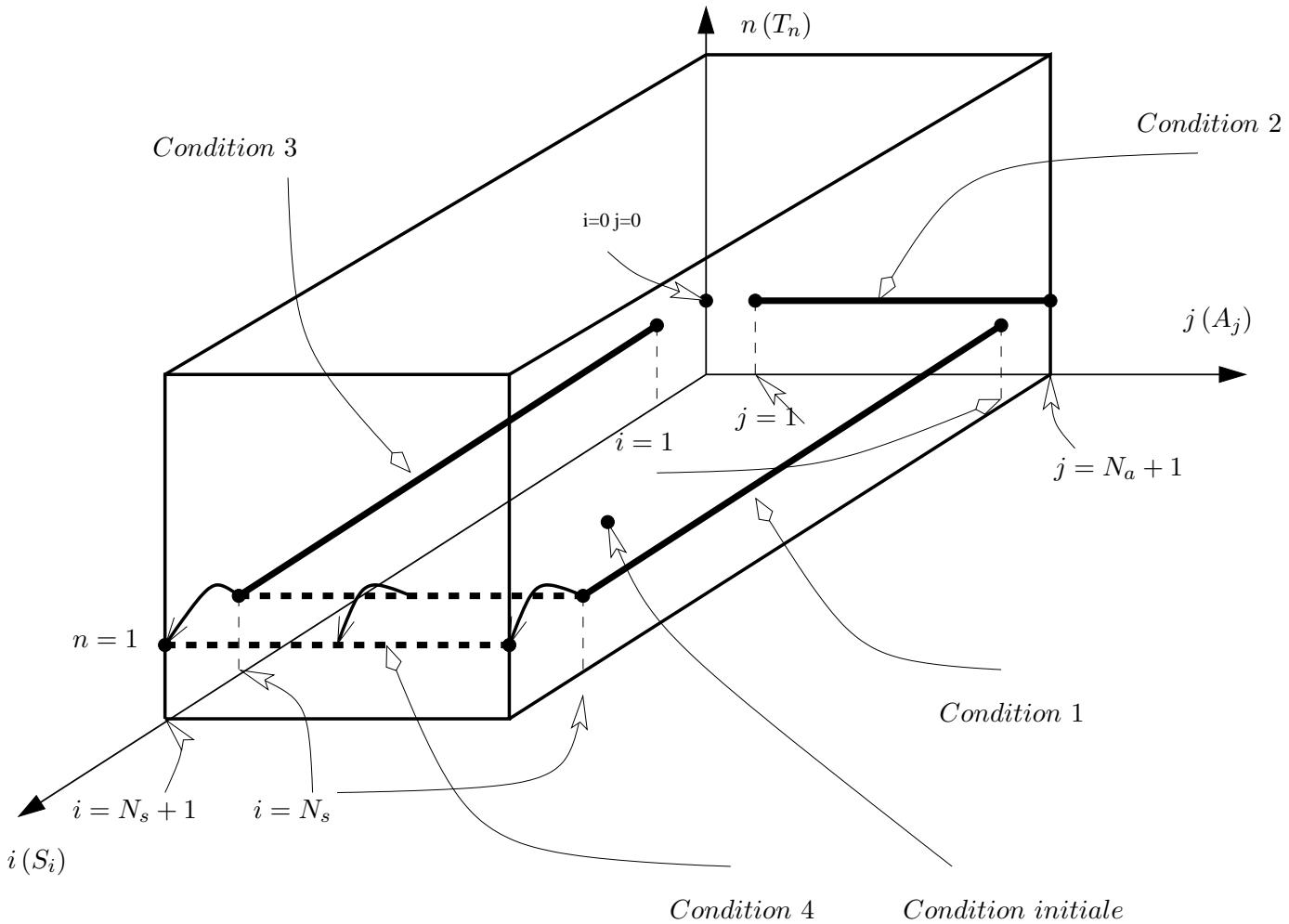


Figure 43: Discréétisation des conditions aux limites pour l'option Asiatique

Sur chaque niveau temporel on calcule les conditions aux limites 1 et 2. Les conditions 3 et 4 sont fixes.

- En $S = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rV + \frac{A}{T-t} \frac{\partial V}{\partial A} = 0,$$

on discrétise l'équation:

$$V_{0,j}^{n+1} = V_{0,j}^n (1 - r\Delta t) - \frac{A_j}{T - t^n} \frac{V_{0,j}^n - V_{0,j-1}^n}{\Delta A}, \quad j = 1 \dots N_a + 1$$

Sur la figure cette condition est marquée par "Condition 2".

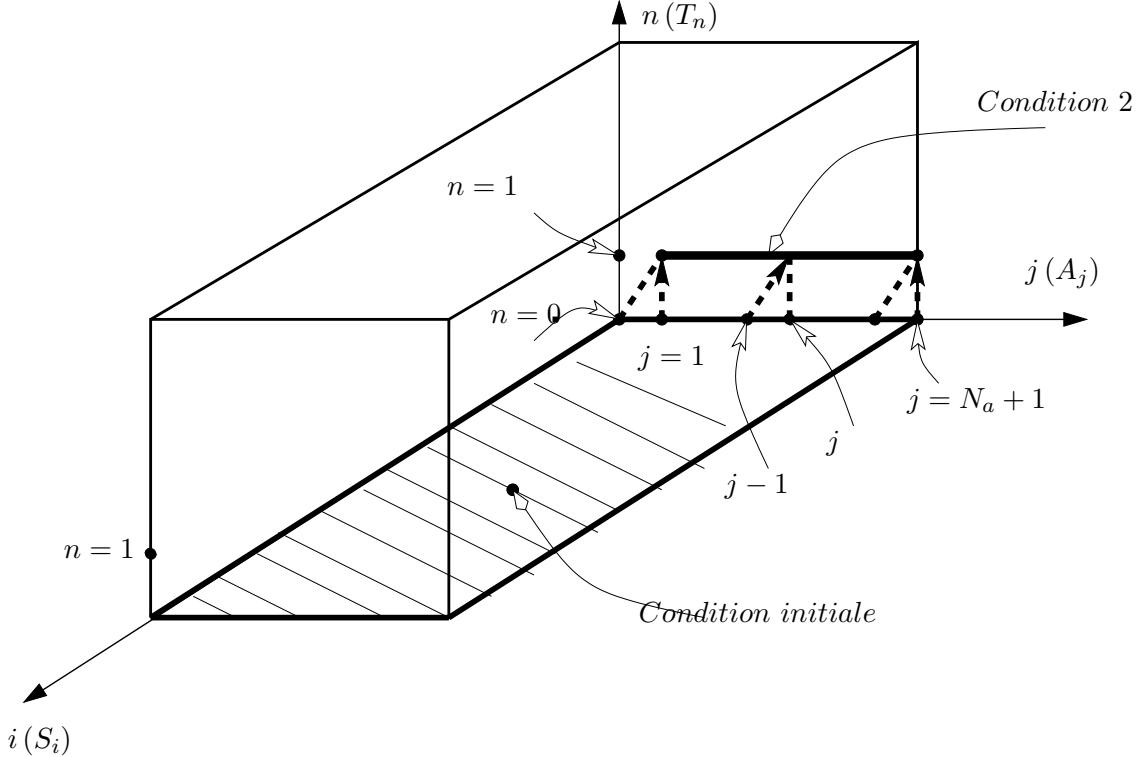


Figure 44: Discréétisation des conditions aux limites pour $S=0$

- En $A = 0$ on discrétise l'équation:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rV - rS \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{S}{T - t} \frac{\partial V}{\partial A} = 0$$

$$V_{i,0}^{n+1} = V_{i,0}^n (1 - r\Delta t) + rS_i \frac{V_{i+1,0}^n - V_{i-1,0}^n}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1,0}^n - 2V_{i,0}^n + V_{i-1,0}^n}{(\Delta S)^2} + \frac{S_i}{T - t^n} \frac{V_{i,1}^n - V_{i,0}^n}{\Delta A} \quad i = 1 \dots N_s$$

Sur la figure cette condition est marquée par "Condition 3".

- En $A = L_A$ ($A \rightarrow \infty$)

$$V_{i,N_a+1}^{n+1} = V_{i,N_a+1}^n (1 - r\Delta t) + rS_i \frac{V_{i+1,N_a+1}^n - V_{i-1,N_a+1}^n}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\eta^2 S_i^2 \frac{V_{i+1,N_a+1}^n - 2V_{i,N_a+1}^n + V_{i-1,N_a+1}^n}{(\Delta S)^2} + \frac{S_i - A_{N_a+1}}{T - t^n} \frac{V_{i,N_a+1}^n - V_{i,N_a}^n}{\Delta A} \quad i = 1 \dots N_s$$

Sur la figure cette condition est marquée par "Condition 1".

- En $S = L_S$ ($S \rightarrow \infty$) on impose les conditions de Neumann $\frac{\partial V}{\partial S} = 0$:

$$V_{N_s+1,j}^n = V_{N_s,j}^n \quad j = 0 \dots N_a + 1$$

Sur la figure cette condition est marquée par "Condition 4".

- En point $i = 0, j = 0$ on impose la condition:

$$V_{0,0}^{n+1} = V_{0,0}^n(1 - r\Delta t)$$

- Discrétisation de la condition initiale

$$V_{i,j}^0 = \max(K - A_j, 0)$$

- Pour calculer le prix en tout points (i, j) à partir des conditions aux limites on utilise la discrétisation:

$$V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n(1 - r\Delta t) + rS_i \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{(\Delta S)^2} + \begin{cases} \frac{S_i - A_j}{T - t^n} \frac{V_{i,A_j}^n - V_{i,j-1}^n}{\Delta A}, & S_i < A_j \\ \frac{S_i - A_j}{T - t^n} \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n}{\Delta A}, & S_i > A_j \end{cases}$$

• Algorithme pour les options asiatiques

Conditions initiales

Pour $n = 1 \dots M + 1$

Conditions aux limites

Pour $i = 1 \dots N_s$

Pour $j = 1 \dots N_a$

$$V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n(1 - r\Delta t) + rS_i \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{(\Delta S)^2} + \begin{cases} \frac{S_i - A_j}{T - t^n} \frac{V_{i,A_j}^n - V_{i,j-1}^n}{\Delta A}, & S_i < A_j \\ \frac{S_i - A_j}{T - t^n} \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n}{\Delta A}, & S_i > A_j \end{cases}$$

End Pour

End Pour

End Pour

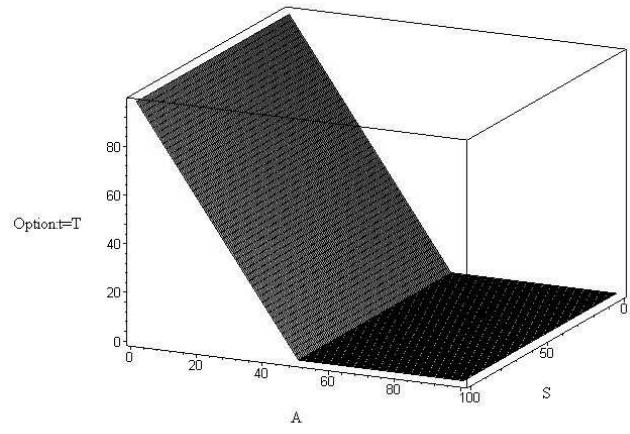


Figure 45: Prix de l'option Asiatique, $t = T$

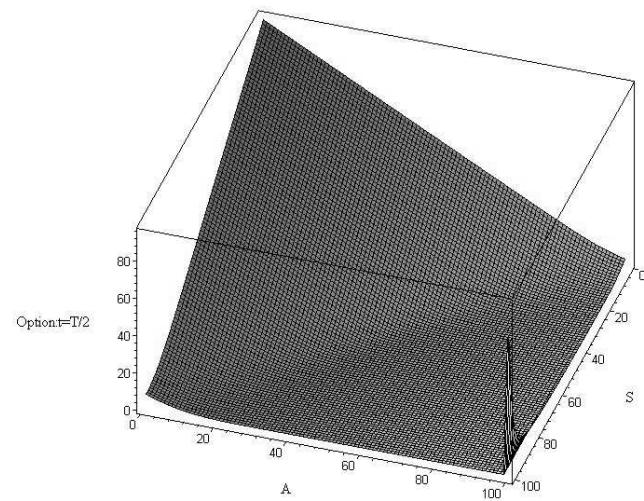


Figure 46: Prix de l'option Asiatique, $t = T/2$

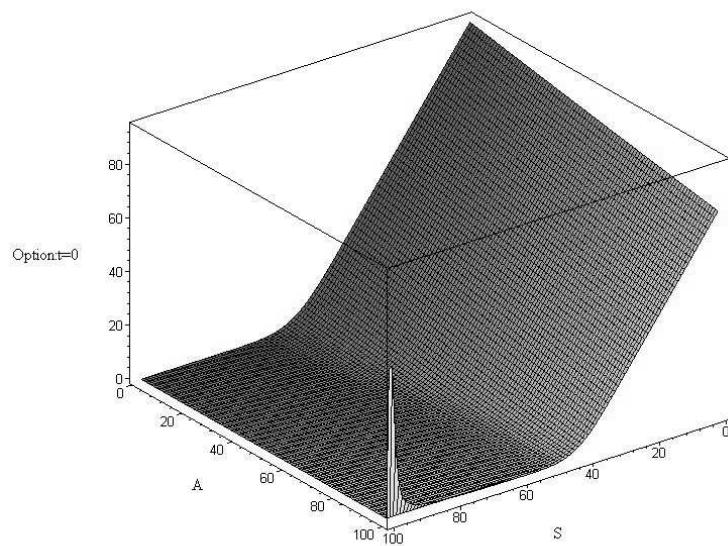


Figure 47: Prix de l'option Asiatique, $t = 0$

On présente ici sur les Fig. , Fig. et Fig les graphes de prix de l'option asiatique V en $t = T, t = T/2, t = 0$ calculés avec les paramètres suivants:

$$T = 1, \quad r = 0.05, \quad L_s = 200, \quad L_a = 200, \quad K = 100, \quad \Delta_s = 1, \quad \Delta A = 1, \quad \Delta t = 10^{-4}$$

5 Méthodes de Monte-Carlo. Pricing des Options Asiatisques.

5.1 Algorithme pour $t = 0$. Strike Fixe. Call.

On commence les simulations d'un chemin d'évolution de l'actif de $t = 0$. Donc la courbe du prix correspond à la solution de EDP pour

$$V(t = 0, S_0, A = S_0)$$

1. On programme d'abord la fonction qui calcule **la fonction pay-off** de l'option asiatique.
 - D'abord on fixe S_0 .
 - On simule un chemin d'évolution S_n à partir de $t = 0$.
 - On discrétise l'intégrale et on calcule la valeur moyenne de l'actif

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T S_\tau d\tau \sim \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N S_n \Delta t.$$

- On calcule le gain pour ce chemin.
- Finalement le programme est suivant:

```

function[res]= Payoff-asiatique(S0)
    S0 = S0
    sum = 0
    Pour n = 1...N
        Sn+1 = Sn exp((r - σ²/2) Δt + σ√Δt N(0, 1))
        sum = sum + SnΔt
    Fin Pour
    res = max(sum/T - K, 0)
endfunction
  
```

2. On programme la fonction qui calcule **le prix de l'option asiatique pour S_0 fixe**.
 - On simule un grand nombre N_{mc} de chemins d'évolution de l'actif $S_n^{(k)}$ sur l'intervalle du temps $[0, T]$, en partant toujours de S_0 . Pour chaque chemin on cherche la valeur moyenne $A^{(k)}(T)$.
 - Le prix de l'option européenne au moment $t = 0$ est donné par

$$V(0, S_0) = e^{-rT} \sum_{k=1}^{N_{mc}} \max(A^{(k)}(T) - K, 0) / N_{mc}$$

- Voici le programme:

```

    function[res] = Prix_Asiatique_S0_fixe(S0)
        sum = 0
        Pour k = 1...Nmc
            sum = sum + Payoff_asiatique(S0)
        Fin Pour
        res = e^-rT sum/Nmc
    endfunction
}

```

3. On programme la fonction qui calcule **le prix de l'option asiatique pour chaque S_0** .

- On discrétise l'intervalle $S_0 \in [0, L = 200]$ sur 200 parties et calculer le prix $V(S_0, 0)$ pour chaque valeur $S = S_0$ et on obtient le graphe

$$S_0 -> V(S_0, 0)$$

```

    function[prix_option] = Prix_Asiatique( )
        for k = 1 : 200
            S0(k) = (k - 1)
        prix_option(k) = Prix_Asiatique_S0_fixe(S0(k))
    end
    plot(S0,prix_option)
endfunction
}

```

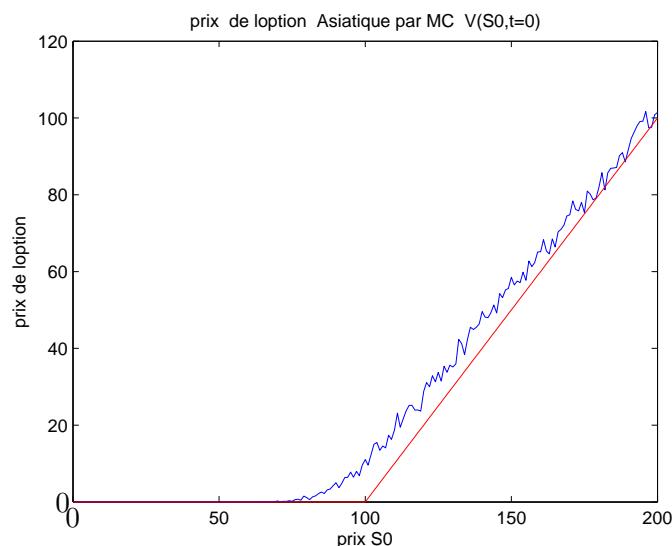


Figure 48: Prix par MC de l'option Asiatique $V(0, S_0)$ pour $t = 0$, $r = 0.4$

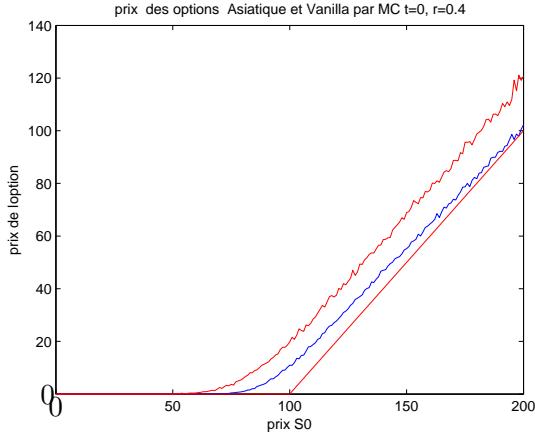


Figure 49: Comparaison par MC des prix des options Asiatique et Vanilla (rouge)

On voit que l'option Asiatique est moins chère que l'option européenne.

5.2 Algorithme pour t est quelconque. Surface des prix. Strike Fixe. Call.

On commence par les simulations d'un chemin d'évolution de l'actif à partir d'un t arbitraire. Donc la courbe du prix correspond à la solution de EDP pour

$$V(t, S_t, A_t)$$

1. On programme d'abord la fonction qui calcule la fonction pay-off de l'option asiatique à un t fixe. A cette date on connaît le prix de l'actif S_t et la valeur moyenne de l'actif A_t .

- On fixe S_t .
- On fixe A_t .

Il sont indépendantes maintenant

• On simule un chemin d'évolution S_n avec $\Delta t = (T - t)/N$ à partir de S_t
 • On calcule la valeur moyenne A de l'actif pour le **chemin complet**. On cherche donc l'intégrale $\int_t^T S_\tau d\tau$ sur le chemin $[t, T]$, on ajoute aussi la valeur $A_t \cdot t$ qui est égale en réalité à $\int_0^t S_\tau d\tau$. Puis on normalise l'expression. Finalement

$$A = \frac{1}{T} (A_t \cdot t + \sum_{n=1}^N S_n \Delta t)$$

- On calcule le gain pour ce chemin
- Voici le programme:

```

function[res] = Payoff_asiatique(S_t, A_t, t)
    S0 = S_t
    sum = 0
    Pour n = 1...N
        S_{n+1} = S_n exp((r - \sigma^2/2) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} N(0, 1))
        sum = sum + S_n \Delta t
    FinPour
    res = max((A_t \cdot t + sum)/T - K, 0)
endfunction
  
```

2. On programme la fonction qui calcule le **prix de l'option asiatique pour S_t fixe et A_t fixe**.

- On simuler un grand nombre N_{mc} de chemins d'évolution de l'actif $S_n^{(k)}$ sur l'intervalle du temps $[t, T]$, en partant toujours de S_t . Pour chaque chemin on cherche l'intégrale $\int_t^T S_\tau d\tau$ sur le chemin $[t, T]$, on ajoute aussi la valeur $A_t \cdot t$ qui est égale en réalité $\int_0^t S_\tau d\tau$. Puis on normalise l'expression.
- Le prix de l'option européenne au moment t est donné par

$$V(t, S_t, A_t) = e^{-r(T-t)} \sum_{k=1}^{N_{mc}} \max(A^{(k)}(T) - K, 0) / N_{mc}$$

- Voici le programme:

```

function[res] = Prix_Asiatique_St_fixe_At_fixe(S_t, A_t, t)
    sum = 0
    Pour k = 1...N_mc
        sum = sum + Payoff_asiatique(S_t, A_t, t)
    Fin Pour
    res = e^{-r(T-t)}sum/N_mc
endfunction

```

3. On programme la fonction qui calcule le prix de l'option asiatique pour chaque S_t et chaque A_t indépendantes.

- On discrétise S_t et A_t et on calcule le prix $V(S_t, A_t, t)$ pour chaque valeur S_t et A_t et on obtient une surface des prix

$$(S_t, A_t) -> V(t, S_t, A_t)$$

- Voici le programme:

```

function[prix_option] = Prix_asiatique( )
    for k = 1 : 200
        for j = 1 : 200
            St(k) = k - 1
            At(j) = j - 1
        price_option(k, j) = option_asiatique_St_fixe_At_fixe(St(k), At(j), t)
    end
    end
    surf(St, At, price_option)
endfunction

```

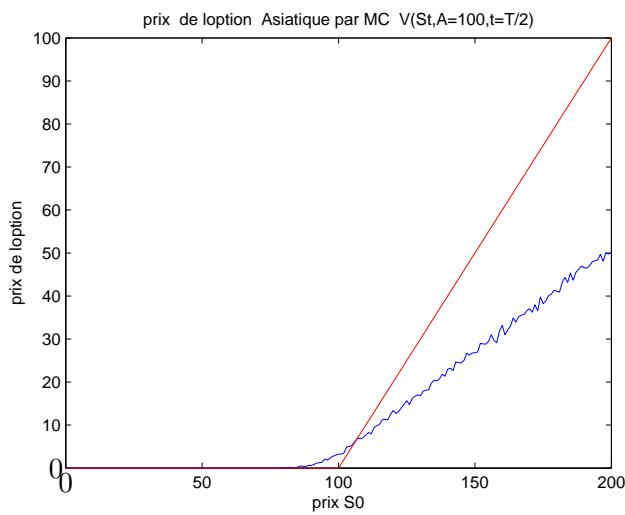


Figure 50: Prix de l'option Asiatique pour $t = T/2$ et $A_t=100$

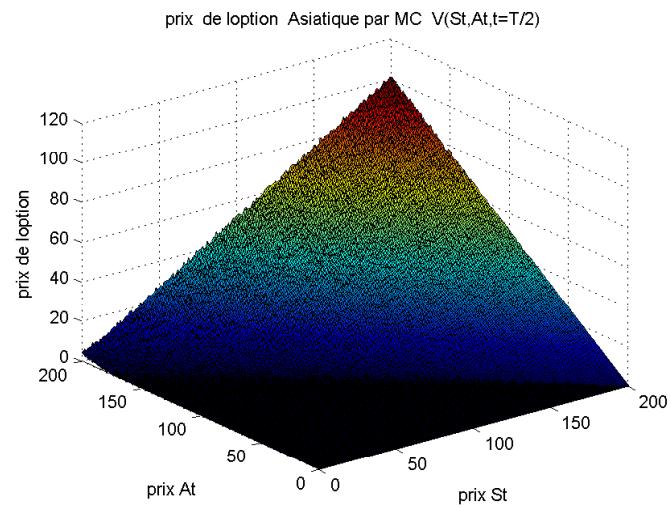


Figure 51: Prix de l'option Asiatique pour $t = T/2$

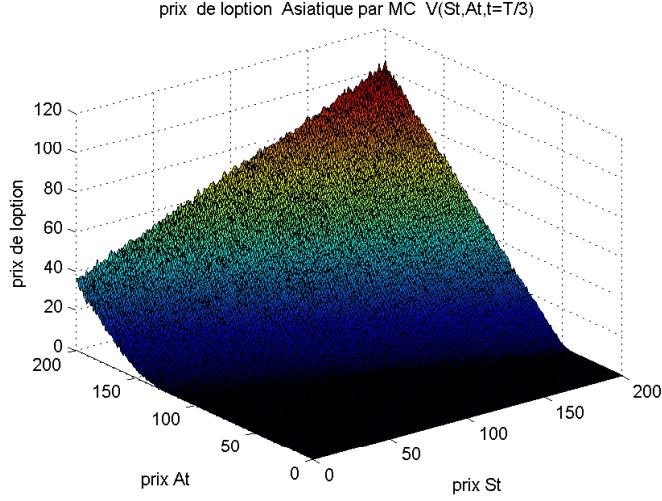


Figure 52: Prix de l'option Asiatique pour $t = T/3$

On compare les solutions obtenues par Monté-Carlo, présentées sur les figures 36 et 37 avec celles obtenues par Différences Finies, présentées sur les figures 19 et 20. . On voit qu'elles sont identiques.

6 Options à deux actifs

Considérons un panier composées de deux actifs dont les prix S_1 et S_2 . Supposons que les prix des actifs vérifient le systèmes des équations différentielles stochastiques

$$\begin{cases} dS_{1t} = S_{1t}(rdt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{1+\rho^2}}(dW_{1t} + \rho dW_{2t})) \\ dS_{2t} = S_{2t}(rdt + \frac{\sigma_2}{\sqrt{1+\rho^2}}(\rho dW_{1t} + dW_{2t})) \end{cases}$$

où W_{1t} et W_{2t} sont deux mouvements Browniens indépendants. Le paramètre ρ est le facteur de corrélation. On peut appliquer la formule d'Ito à deux dimensions et trouver EDP pour l'option à deux actifs $V(S_1, S_2, t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - rV + r \sum_{k=1,2} S_k \frac{\partial V}{\partial S_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1,2} \Gamma_{k,l} S_k S_l \frac{\partial^2 V}{\partial S_k \partial S_l} = 0$$

$\Gamma_{k,l}$ est la matrice de covariance:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \frac{2\rho}{1+\rho^2}\sigma_1\sigma_2 \\ \frac{2\rho}{1+\rho^2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

On définit maintenant des différentes options (on a noté $\rho_1 = \frac{2\rho}{1+\rho^2}$):

- Basket options

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho_1 \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = 0 \\ V(S_1, S_2, t = T,) = \max(S_1 + S_2 - K, 0) \end{cases}$$

- Exchange option:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho_1 \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = 0 \\ V(S_1, S_2, t = T,) = \max(S_2 - S_1, 0) \end{cases}$$

- Quotient option:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho_1 \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = 0 \\ V(S_1, S_2, t = T,) = \max(S_2/S_1 - K, 0) \end{cases}$$

6.1 Changements des variables. Option Exchange.

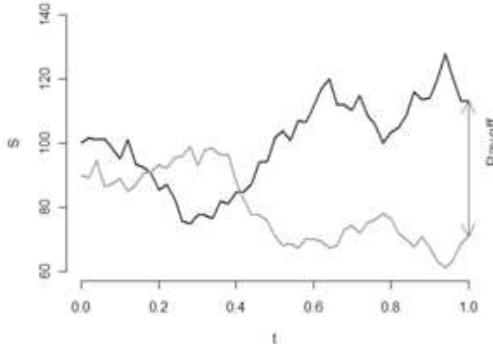


Figure 53: Fonction pay-off pour l'option Exchange

- Changement des variables: $(t, S_2 S_1) \rightarrow (t, \xi = \frac{S_2}{S_1})$

- Introduisons la fonction $\omega(t, \xi)$ t.q. $V(S_1, S_2, t) = S_1 \omega(t, \frac{S_2}{S_1})$

On choisit le changement de variables du fait que la fonction pay-off s'exprime facilement en termes de nouvelle variable:

$$\begin{aligned} V(S_1, S_2, t) &= \max(S_2 - S_1, 0) \implies S_1 \omega(t, \frac{S_2}{S_1}) = \max(S_2 - S_1, 0) \implies \\ \omega(t, \frac{S_2}{S_1}) &= \max(\frac{S_2}{S_1} - 1, 0) \implies \omega(t, \xi) = \max(\xi - 1, 0) \end{aligned}$$

Calculons les dérivées partielles:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = S_1 \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S_2} = S_1 \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial S_2} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial S_2} = \frac{1}{S_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S_1} = \omega + S_1 \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial S_1} = \omega - \xi \frac{\partial \omega}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial S_1} - \frac{\partial \xi}{\partial S_1} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial S_1} = \frac{\xi^2}{S_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = \frac{\partial}{\partial S_1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial S_1} = -\frac{\xi}{S_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}$$

On injecte ces dérivés dans l'équation originale et on obtient l'équation suivante:

- L'équations après le changement de variable a la forme avec $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_1\sigma_1\sigma_2 \geq 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} = 0 \\ \omega(t=T, \xi) = \max(\xi - 1, 0) \end{cases}$$

Pour appliquer ensuite la méthode aux différences finies il faut imposer les conditions aux limites.
On peut les trouver de la solution analytique de l'équation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} = 0$$

qui représente l'équation de BS avec $r = 0$.

6.2 Exchange Option. Solution analytique. Formule de Margrabe

- On résout l'équation de Black et Scholes avec $r = 0$ et $K = 1$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} = 0 \\ \omega(t=T, \xi) = \max(\xi - 1, 0) \end{cases}$$

La solution est:

$$\begin{aligned} \omega(t, \xi) &= \xi N(d_1) - N(d_2) \\ d_{1,2} &= \frac{\ln \xi \pm \sigma^2/2(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

On en déduit les conditions aux limites:

$$\begin{cases} \omega(t, \xi=0) = 0 \\ \omega(t, \xi \rightarrow \infty) = \xi - 1 \end{cases}$$

- Finalement on applique la méthode aux différences finies au problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} = 0 \\ \omega(t=T, \xi) = \max(\xi - 1, 0) \\ \omega(t, \xi=0) = 0 \\ \omega(t, L) = \xi - 1 \end{cases}$$

Après avoir trouvé la solution numérique on revient aux variables S_1 et S_2 et au vrai prix:

$$V(S_1, S_2, t) = S_1 \omega(t, \frac{S_2}{S_1})$$

et on construit un graphe en 3 dimensions pour les moments t différents:

$$V(S_1, S_2, t) = S_1 \omega(t, \xi = \frac{S_2}{S_1}) \quad \text{en fonction de } S_1, \text{ et } S_2$$

Il est possible de comparer la solution numérique avec la solution analytique:

$$V(S_1, S_2, t) = S_1 \omega(\frac{S_2}{S_1}, t) = S_2 N(d_1) - S_1 N(d_2)$$

Cette formule s'appelle formule de Margrabe.

6.3 Résultats numériques pour l'Options Exchange

Sur la Fig. 12 vous voyez le prix réduit ω en fonction de ξ (discretisée sur $N = 100$ intervalles) pour $t = 0, t = T/2, t = T$.

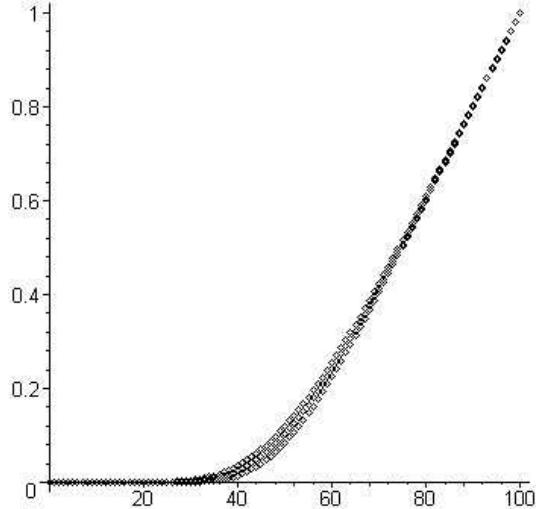


Figure 54: Prix réduit de l'option Exchange pour $t = 0, t = T/2, t = T$.

Sur la Fig. 13 vous voyez le vrai prix de l'option exchange $V(S_1, S_2, t) = \omega(\frac{S_2}{S_1})$ en fonction de S_1, S_2 pour $t = 0$.

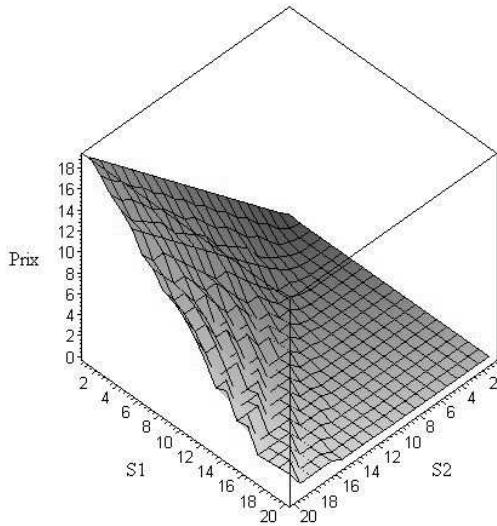


Figure 55: Prix numérique de l'option Exchange à $t = 0$, $N = 100$

Sur la Fig. 14 vous voyez le vrai prix de l'option Exchange $V(S_1, S_2, t) = \omega(\frac{S_2}{S_1})$ en fonction de S_1, S_2 à $t = 0$. Le maillage est plus fin, $N = 1000$.

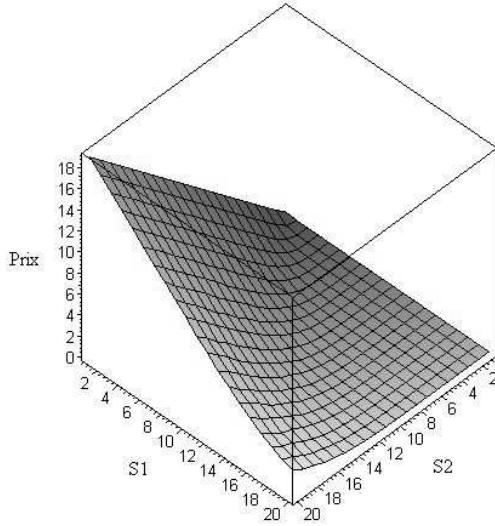


Figure 56: Prix numérique de l'option Exchange à $t = 0, N = 1000$

Sur la Fig. 15 vous voyez le vrai prix de l'option Exchange $V(S_1, S_2, t) = S_2 N(d_1) - S_1 N(d_2)$ en fonction de S_1, S_2 à $t = 0$. La cohérence entre la résolution numérique et théorique est parfaite.(Comparez Fig. 14 et 15).

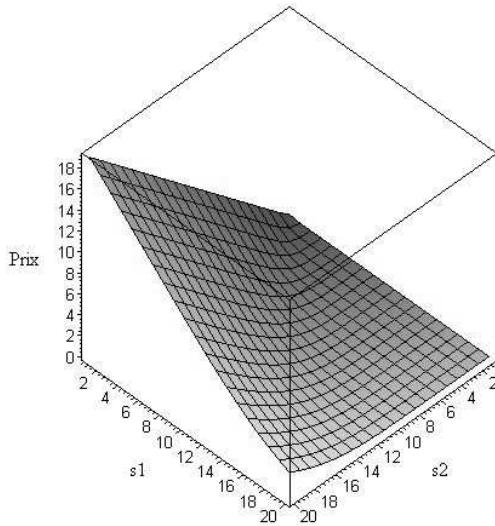


Figure 57: Option Exchange tracée à l'aide de la formule de Margrabe

6.4 Changement de variables. Option Quotient.

- Changement des variables: $(t, S_2 S_1) \rightarrow (t, \xi = \frac{S_2}{S_1})$
- Introduisons la fonction $\omega(t, \xi)$ t.q. $V(S_1, S_2, t) = \omega(t, \frac{S_2}{S_1})$

- L'équations après le changement des variables a la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - r\omega + r_1\xi \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} = 0 \\ \omega(t=T, \xi) = \max(\xi - 1, 0) \end{cases}$$

avec

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_1\sigma_1\sigma_2, \quad r_1 = (\sigma_1)^2 - \rho_1\sigma_1\sigma_2$$

:

Pour appliquer ensuite la méthode aux différences finies il faut imposer les conditions aux limites. On peut les trouver de la solution analytique de l'équation. La solution analytique de cette équation avec dividende ($D = r - r_1$) est donnée par la formule:

$$\omega(t, \xi) = \xi e^{-(r-r_1)(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln(\xi/K) + (r_1 \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Imposons les conditions aux limites pour $\xi = 0, \xi \rightarrow \infty$.

$$\begin{cases} \omega(t, \xi=0) = 0 \\ \omega(t, \xi \rightarrow \infty) = \xi e^{-(r-r_1)(T-t)} - K e^{-r(T-t)} \end{cases}$$

On résout ensuit l'équation par la méthode de Crank-Nicolson. Pour revenir au problème initiale on construit le graphe

$$V(S_1, S_2, t) = \omega(t, \frac{S_2}{S_1}) \quad \text{en fonction de } S_1, \quad S_2 = \xi S_1$$

6.5 Discréétisation de l'EDP originale

6.5.1 Basket options

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = 0 \\ V(S_1, S_2, t=T) = \max(K - S_1 - S_2, 0) \end{cases}$$

On doit résoudre numériquement l'équation sur le domaine $S_1 \in [0, L_1]$, $S_2 \in [0, L_2]$. On suppose que L_1 et L_2 sonr assez grands pour pouvoir imposer les conditions aux limites pour "Put":

$$V(t=T, L_1, L_2) = 0$$

$$\begin{cases} V(t=T, S_1, S_2) = \max(K - S_1 - S_2, 0) & \text{condition final} \\ V(t, L_1, S_2) = 0 & \text{condition aux limites} \\ V(t, S_1, L_2) = 0 & \text{condition aux limites} \end{cases} \quad (33)$$

Ici, nous utilisons des conditions aux limites de Dirichlet.

Discréétisons les variables spatiales et temporelle

S_1 : $S_{10} = 0, \dots, S_{1i} = i\Delta S_1, \dots, S_{1(N_1+1)} = L_1$.

S_2 : $S_{20} = 0, \dots, S_{2j} = j\Delta S_2, \dots, S_{2(N_2+1)} = L_2$.

t : $t_0 = 0, \dots, t^n = n\Delta t, \dots, t_{M+1} = T$.

On note $V_{i,j}^n$ la valeur d'une solution calculée à l'aide d'un schéma numérique aux points $S_{1i}, S_{2j}, t = t^n$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial S_1} &\sim \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta S} \\ \frac{\partial V}{\partial S_2} &\sim \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta S} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} &\sim \frac{V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{(\Delta S)^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} &\sim \frac{V_{i,j+1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n}{(\Delta S)^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S_2 \partial S_1} &\sim \frac{V_{i+1,j+1}^n - V_{i+1,j-1}^n - V_{i-1,j+1}^n + V_{i-1,j-1}^n}{4(\Delta S)^2}\end{aligned}$$

Pour ($i = N_1 + 1, j$ quelconque) ou ($j = N_2 + 1, i$ quelconque) le prix V vaut zéro.

Pour $i = 0, j = 0$ on prend le même schéma, en ne gardant que les termes correspondant à des points contenus dans $[0, L_1], [0, L_2]$. Donc pour obtenir les conditions aux limites pour $S_1 = 0; S_2 = 0$ ($i = 0, j = 0$), on résout les équations de Black et Scholes unidimensionnelles.

Conditions aux limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{N_1+1,j}^n = 0 \\ V_{i,N_2+1}^n = 0 \\ V_{0,j}^n = W(j \Delta S, n \Delta t) \\ V_{i,0}^n = Q(i \Delta S, n \Delta t) \end{array} \right. \quad (34)$$

La fonction W est la solution du problème à un actif:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial t} - rW + rS_1 \frac{\partial W}{\partial S_1} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S_1^2} = 0 \\ W(t = T, S_1) = \max(K - S_1, 0) \\ W(t, S_1 = 0) = Ke^{-r(T-t)} \end{array} \right.$$

La fonction Q est la solution du problème à un actif:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial t} - rQ + rS_2 \frac{\partial Q}{\partial S_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial S_2^2} = 0 \\ Q(t = T, S_2) = \max(K - S_2, 0) \\ Q(t, S_2 = 0) = Ke^{-r(T-t)} \end{array} \right.$$

Conditions final :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{i,j}^0 = \max(K - i \Delta S - j \Delta S, 0) \end{array} \right. \quad (35)$$

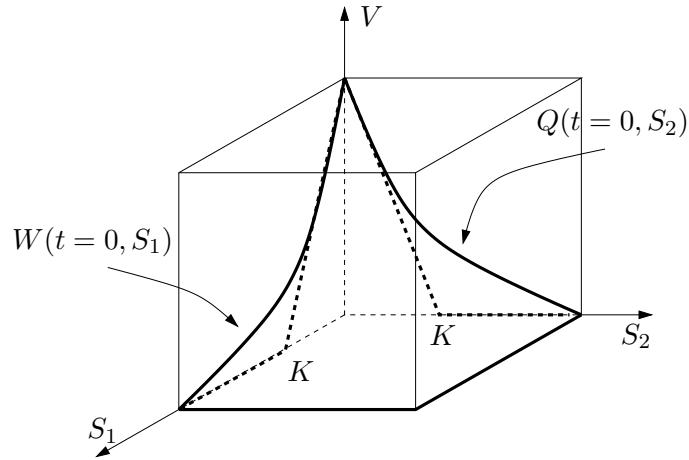


Figure 58: Conditions aux limites en 3 dimensions

Après la discréétisation et l'application de la méthode d'Euler explicite on a l'équation:

$$V_{ij}^{n+1} = V_{ij}^n (1+r\Delta t) - \Delta t (r S_1(i) \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta S_1} - r S_2(j) \Delta t \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta S_2} - \frac{1}{2} S_1(j)^2 \sigma_1^2 \frac{(V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n)}{(\Delta S_1)^2} + \\ - \frac{1}{2} S_2(j)^2 \sigma_2^2 \frac{(V_{i,j+1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n)}{(\Delta S_2)^2} - \rho S_1(i) S_2(j) \sigma_1 \sigma_2 \frac{(V_{i+1,j+1}^n - V_{i+1,j-1}^n - V_{i-1,j+1}^n + V_{i-1,j-1}^n)}{4\Delta S_1 \Delta S_2})$$

On peut aussi utiliser la méthode d'Euler implicite ou Crank-Nicolson. La résolution d'un système des équations se fait ensuite par la méthode de Directions Alternées.(Voir le cours de Différences Finies).

On présente ici les résultats pour le Put.

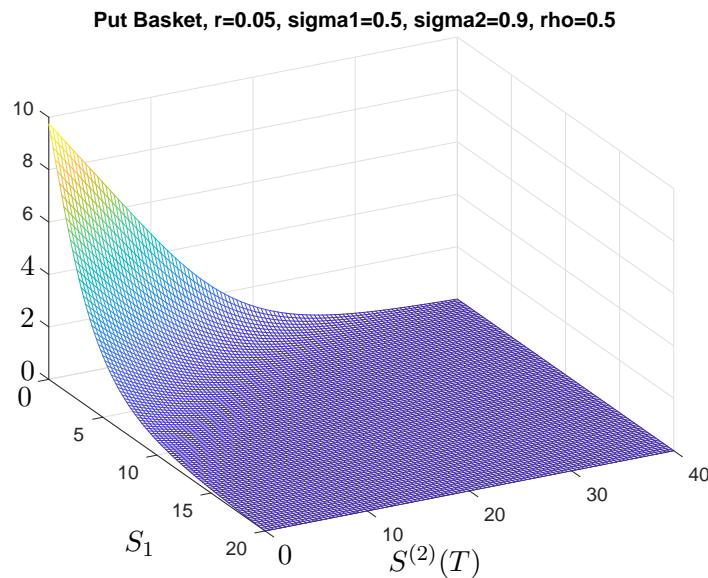


Figure 59: Basket Option. Put. $r=0.4$

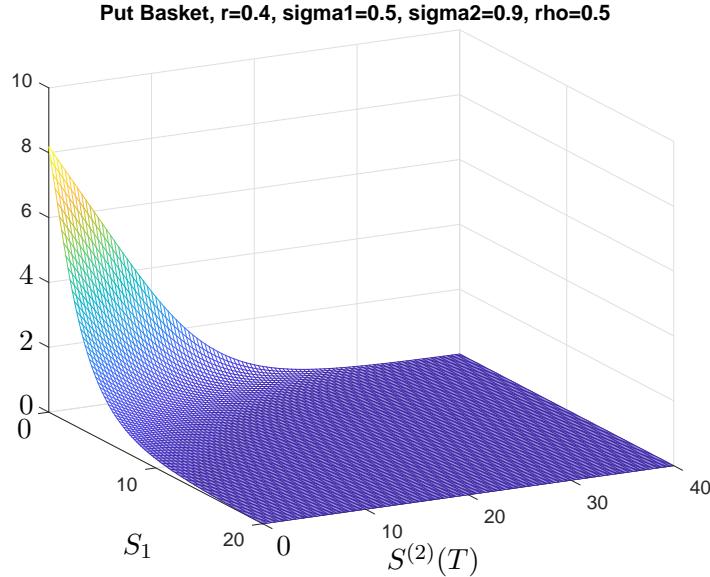


Figure 60: Basket Option. Put. $r=0.05$

Les conditions aux limites pour Call Basket sont plus sophistiquées. Donc pour obtenir les conditions aux limites pour ($S_1 = L_1, S_2$ quelconque), pour ($S_2 = L_2, S_1$ quelconque), on impose les conditions aux limites de Neumann.

Conditions aux limites:

$$\begin{cases} V_{N_1+1,j}^n = V_{N_1,j}^n + \Delta S_1 \\ V_{i,N_2+1}^n = V_{i,N_2}^n + \Delta S_2 \\ V_{0,j}^n = W(j \Delta S, n \Delta t) \\ V_{i,0}^n = Q(i \Delta S, n \Delta t) \end{cases} \quad (36)$$

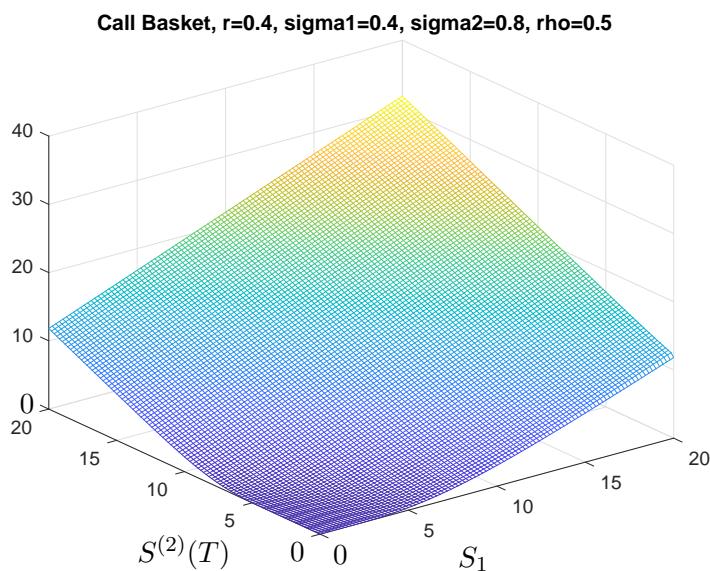


Figure 61: Basket Option. Call. $r=0.4$

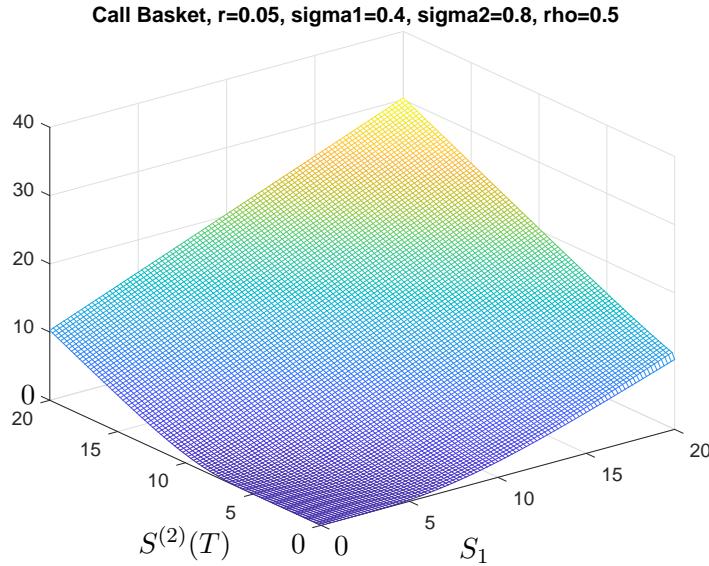


Figure 62: Basket Option. Call. $r=0.05$

7 Options Lookback.

7.1 Deduction de l'EDP pour Options Lookback. Strike flottant. Put

- Valeur maximale de l'action de risk sur l'intervalle de temps $[0, t]$ est

$$M_t = \max(S_\tau, 0 \leq \tau \leq t).$$

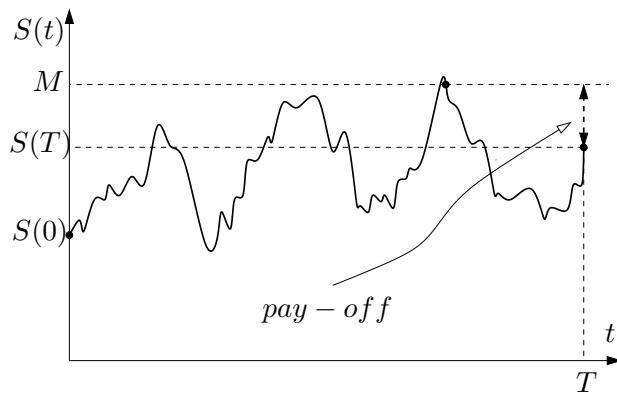


Figure 63: Variation d'un actif et le payoff pour l'option Lookback.Strike flottant. Put

- Prix de l'option $V(S_t, M_t, t) = V(S, M, t)$ porte sur un actif S_t et sur M_t - la valeur maximale de S_τ sur l'intervalle $[0, t]$

$$M_t = \max_{0 \leq \tau \leq t} S_\tau$$

- Fonction payoff $V(t = T, S_T, M_T) = \max(M_T - S(T), 0)$ $0 \leq S \leq M$

Pour écrire l'EDP pour l'option Lookback on applique le théorème de Feynman-Kac:

Soit $V(S, t, M)$ la solution de l'équation différentielle:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(S, t, M)}{\partial t} - rV(S, t, M) + rS \frac{\partial V(S, t, M)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t, M)}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T, M) = \Phi(S(T), T, M(T)) \end{cases} \quad (37)$$

Alors $V(S, t, M)$ peut être représenté de la forme

$$V(S_0, t, M_0) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\Phi(S(T), T, M(T)) / S(t) = S_0]$$

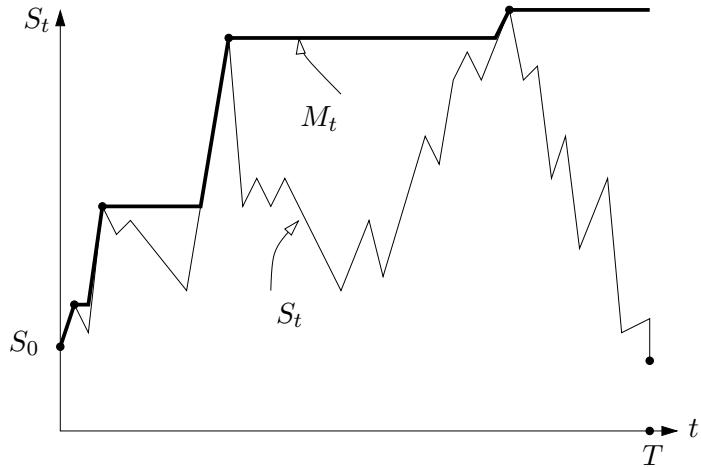
où S_t et M_t vérifient les équations différentielles stochastiques:

$$\begin{cases} dS(u) = rS(u)du + \sigma S(u)dW(u) \\ dM(u) = 0 \\ S(t) = S_0 \end{cases} \quad (38)$$

Le terme $\frac{\partial V(S, t, M)}{\partial M}$ ne apparaît pas dans l'équation différentielle car

$$\frac{\partial V(S, t, M)}{\partial M} dM_t = 0$$

car $dM_t = 0$



En effet on voit sur le dessin l'allure du processus stochastique

$$M_t = \max_{t < \tau} S_\tau$$

calculé de façon continue. D'après la figure, nous pouvons voir que pour la plupart du temps, le prix de l'actif est inférieure au maximum. Mais il y a des moments où ils coïncident. Lorsque $S_t < M_t$ le maximum ne peut pas changer et le processus M_t vérifie l'équation

$$dM_t = 0.$$

Maintenons cette idée.

Quand $S_t < M_t$ l'équation qui régit l'évolution du prix de l'option doit être l'équation de Black-Scholes. Le comportement de la valeur de l'option lorsque $S_t = M_t$ nous fournit la condition aux limites à appliquer là-bas.

Supposons qu'à un certain moment avant l'expiration, le stock est proche de son maximum publié à ce jour, soit S_t est proche de M_t . On peut montrer que la probabilité que la valeur actuelle du maximum est toujours le maximum à l'échéance est égale à zéro. Donc la valeur actuelle du maximum n'est pas le maximum finale, par conséquence la valeur de l'option doit être insensible à de petits changements dans M_t . Donc

$$\frac{\partial V}{\partial M}(T, S, M)|_{S=M} = 0$$

- Prix de l'option $V(S, M, t)$ vérifie l'équation:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 & 0 \leq S \leq M \\ V(t = T, S, M) = \max(M - S, 0) & 0 \leq S \leq M \\ \frac{\partial V}{\partial M}(T, S, M)|_{S=M} = 0 \end{cases}$$

- Changement des variables: $(t, S, M) \rightarrow (t, \xi = \frac{S}{M})$, $\xi \leq 1$
- Introduction de la fonction $\omega(t, \xi) \rightarrow V(S, M, t) = M\omega(t, \frac{S}{M})$
- Nouvelle équation avec les conditions aux limites de Neumann:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - r\omega + r\xi\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\sigma^2 \xi^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} = 0 & \xi \leq 1 \\ \omega(t = T, \xi) = 1 - \xi & \xi \leq 1 \\ \frac{\partial \omega}{\partial \xi}(t, 1) = \omega(t, 1) \\ \omega(t, 0) = e^{-r(T-t)} \end{cases}$$

L'équation de BS est définie sur l'intervalle $[0, 1]$. Il n'est pas facile de trouver la solution analytique. Par contre il est facile de résoudre l'équation par la méthode aux différences finies.

7.2 Résultats numériques par les Différences Finies.

Sur la Fig.18 on présente le graphe du prix réduit ω en fonction de ξ (discretisée sur $N=100$ intervalles) pour $t = 0, t = T/2, t = T$.

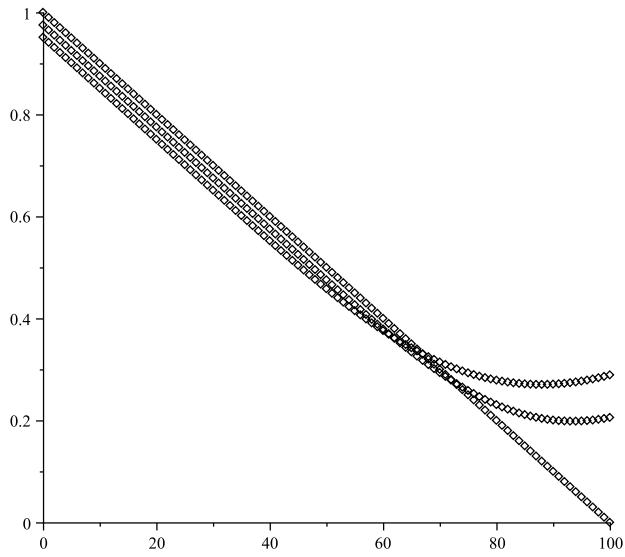


Figure 64: Prix réduit ω de l'Option Lookback pour $t = 0, t = T/2, t = T$.

Sur la Fig.19 on présente le graphe de ω en 3 dimension en fonction de ξ (discretisée sur $N=100$ intervalles) et du temps t (discretisée sur $M=100$ intervalles.)

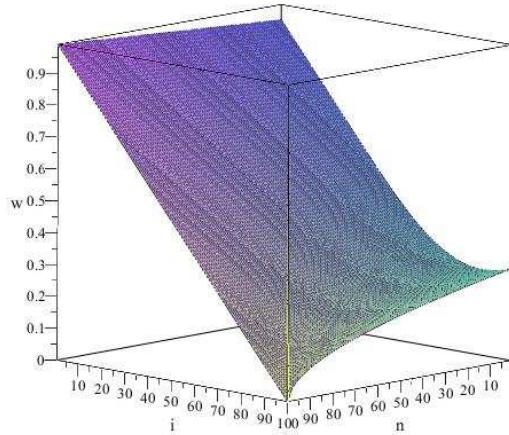


Figure 65: Prix réduit de l'Option Lookback en 3 dim

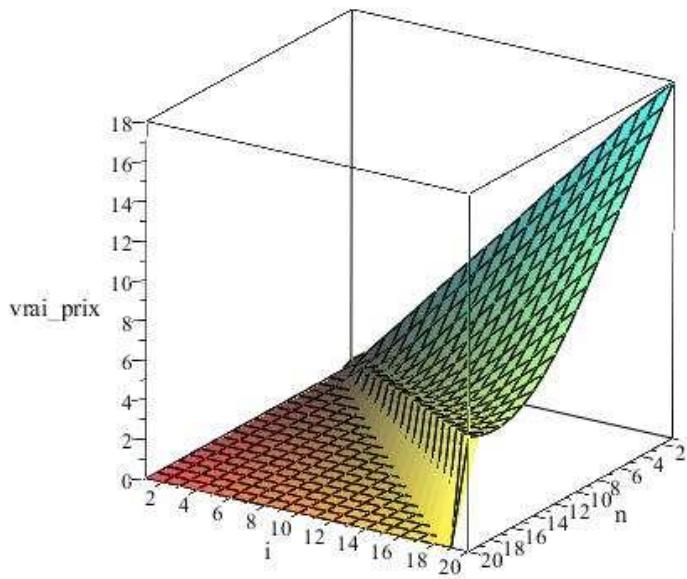
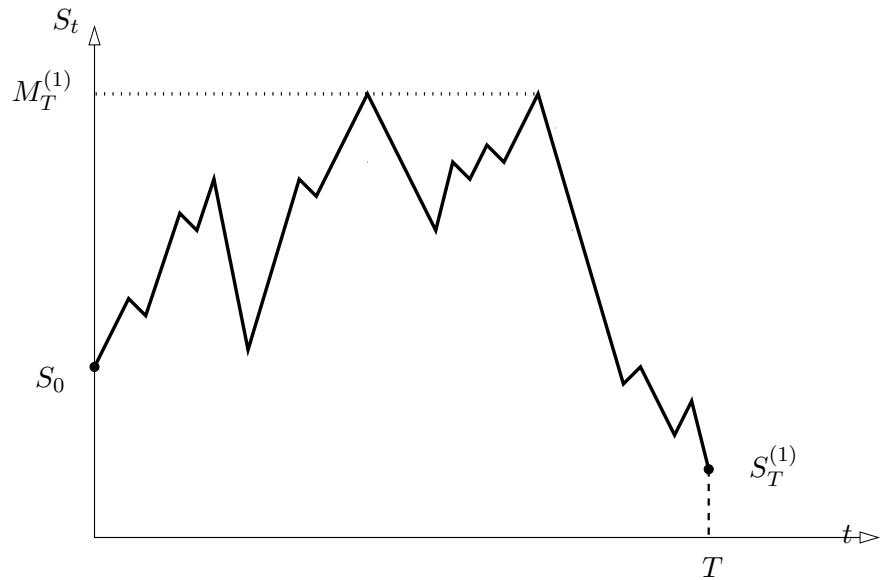


Figure 66: Vrai prix de l'Option Lookback $V(S, M)$ pour $t = 0$

7.3 Options Lookback par Monte-Carlo.

7.3.1 Strike flottant. Put. $t = 0$.



Pour évaluer le prix de l'option on peut procéder de façon suivante:

- On fixe S_0 et on simule premier chemin d'évolution $S_n^{(1)}$

Pour $n = 0 \dots K - 1$

$$S_{n+1} = S_n \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} N(0, t_{n+1} - t_n)\right)$$

Fin Pour

- On calcule la valeur finale $S^{(1)}(T)$ et la valeur maximale $M = S_{MAX}^{(1)}$ au cours d'évolution.

On réalise un simple code:

$$S_{MAX} = 0$$

Si $S_n > S_{MAX}$ alors $S_{MAX} = S_n$

- On calcule le gain pour ce chemin

$$\max(S_{MAX}^{(1)} - S^{(1)}(T), 0)$$

- On simuler un grand nombre N_{mc} de chemins d'évolution de l'actif $S_n^{(k)}$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$, en partant toujours de S_0 . Pour chaque chemin on cherche la valeur finale $S^{(k)}(T)$ et la valeur maximale $S_{MAX}^{(k)}$

Le prix de l'option européenne au moment $t = 0$ est donné par

$$e^{-rT} \sum_{k=1}^{N_{mc}} \max(S_{MAX}^{(k)} - S^{(k)}(T), 0) / N_{mc}$$

- On Discrétise l'intervalle $[0, L]$ sur $N = 40$ parties et on calcule le prix $V(S_0, 0)$ pour chaque valeur $S = S_0$. Le graphe

$$S_0 \rightarrow V(S_0, 0)$$

est présente sur la figure suivante:

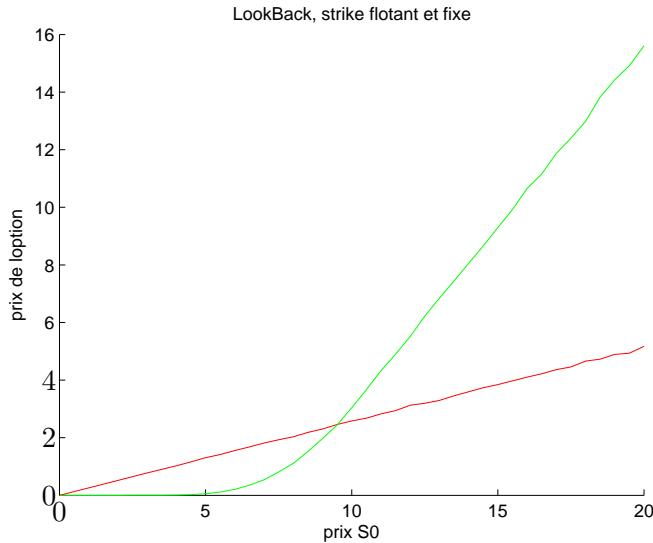


Figure 67: Prix de l'option Lookback pour $t = 0$ simulé par Monte-Carlo avec $N_{mc} = 10000$ chemins. Strike flotant et fixe

Comment comparer ce graphe avec les solutions obtenues par la méthode aux différences finies? On commence les simulations de $t = 0$. A $t = 0$ la valeur initiale de l'actif $S_0 = M_0$. On a exprimé le prix de l'option en terme de la fonction ω et une variable ξ . Donc

$$\xi = 1, \quad V(S_0, M_0, 0) = S_0 \omega(0, 1).$$

Alors le graphe du prix $V(S_0, M_0, 0)$ est linéaire en fonction de S_0 . On retrouve cette allure à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. $\omega(0, 1)$ est le coefficient directeur et on compare ce nombre avec le coefficient directeur du graphe obtenu par Monte-Carlo.

7.3.2 Option Lookback pour une valeur S_t , une valeur M_t et un temps t quelconque

XE ET UN t FIXE

On commence par les simulations d'un chemin d'évolution de l'actif à partir d'un t arbitraire. Donc la courbe du prix correspond à la solution de EDP pour

$$V(t, S_t, M_t)$$

1. On programme d'abord la fonction qui calcule la fonction pay-off de l'option asiatique à un t fixe. A cette date on connaît le prix de l'actif S_t et la valeur moyenne de l'actif $M_t \geq S_t$.

- On fixe S_t .
- On fixe M_t .

Il sont indépendantes maintenant

- On simule un chemin d'évolution S_n avec $\Delta_t = (T - t)/N$ à partir de S_t
- On calcule la valeur maximale M de l'actif pour le **chemin complet**. On compare alors M_t avec tous les S_n des schema générée.
- On calcule le gain pour ce chemin

XE ET UN t FIXE

On programme la fonction qui calcule le **prix de l'option asiatique pour S_t fixe et M_t fixe**.

- On simuler un grand nombre N_{mc} de chemins d'évolution de l'actif $S_n^{(k)}$ sur l'intervalle du temps $[t, T]$, en partant toujours de S_t . Pour chaque chemin on cherche la valeur maximale de l'actif.
- Le prix de l'option Lookback au moment t est donné par

$$V(t, S_t, M_t) = e^{-r(T-t)} \sum_{k=1}^{N_{mc}} \max(M^{(k)}(T) - S(T), 0) / N_{mc}$$

On programme la fonction qui calcule le prix de l'option asiatique pour chaque S_t et chaque M_t indépendantes, mais $\mathbf{M}_t \geq \mathbf{S}_t$

- On discrétise S_t et M_t , $\mathbf{M}_t \geq \mathbf{S}_t$. La partie où $\mathbf{M}_t < \mathbf{S}_t$ n'a pas de sens et on donne à l'option la valeur 0. et on calculer le prix $V(S_t, M_t, t)$ pour chaque valeur S_t et M_t et on obtient une surface des prix

$$(S_t, M_t) -> V(t, S_t, M_t)$$

- Voici le programme:

```

function[prix_option] = Prix_asiatique( )
    for k = 1 : 20
        for j = k : 20
            St(k) = k - 1
            Mt(j) = j - 1
        price_option(k, j) = option_asiatique_St_fixe_At_fixe(St(k), Mt(j), t)
        end
        for j = 1 : k - 1
            price_option(k, j) = 0
        end
    end
    surf(St, Mt, price_option)
endfunction

```

- Voici la surface de l'option Lookback pour $t = T/2$. Les prix zero correspondent ou couples (S_t, M_t) impossible: $S_t > M_t$.

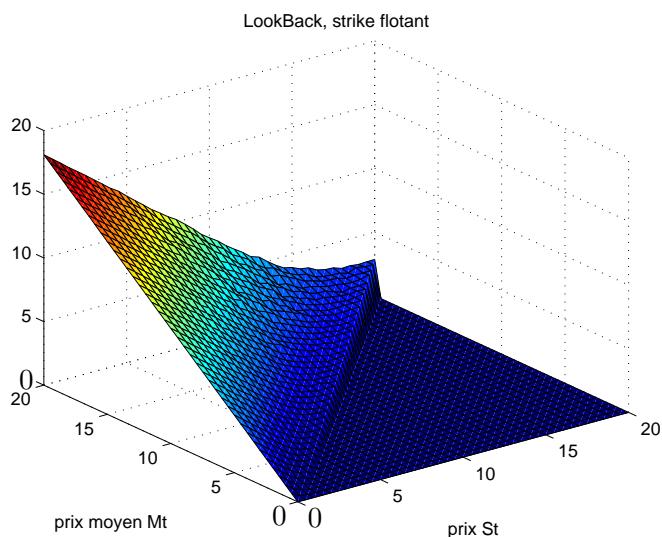


Figure 68: Prix de l'option Lookback, strike flotant

- Voici la surface de l'option Lookback pour $t = T/2$ pour l'option Lookback avec le strike fixe $K = 10$:

$$V(S_T, M_T, T) = \max(M_T - K, 0) \quad (39)$$

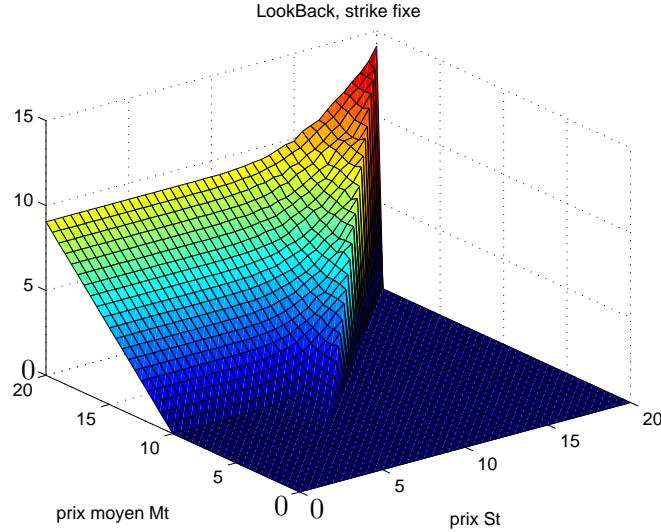


Figure 69: Prix de l'option Lookback, strike fixe

8 Options américaines

Notre but est de trouver le prix $V(S, t)$ de l'option de vente (ou put) d'une action qui vaut initialement S et qu'on pourra vendre au prix K dans un moment $t \in [0, T]$. L'option américaine va être exercée à un instant τ entre l'origine et l'échéance.

On peut prouver que le prix de l'option américaine est donné par la formule:

$$V(t, S) = \text{Sup}_{\tau \in [t, T]} E[e^{-r(T-\tau)} \Lambda(S_\tau) | S(t) = S]$$

On simule 100000 chemins. On calcule toutes les différences $\Lambda(S_t)$ pour chaque moment $t^n \in [t, T]$ puis on prend la moyenne ces différences pour chaque moment t^n . Le maximum des ces differences doit être bonne approximation du prix de l'option américaine pour une valeur initiale de l'actif $S_t = S$. Le put américaine ne peut pas avoir le prix inférieure à son pay-off:

$$V(t, S) \geq \max(K - S, 0).$$

La fonction V est continue et monotone, si $S \rightarrow 0$ $V(t, S) = \max(K - S, 0)$, donc il existe une valeur $0 < S_\tau < K$ telle que

$$V(t, S_\tau) = \max(K - S_\tau, 0)$$

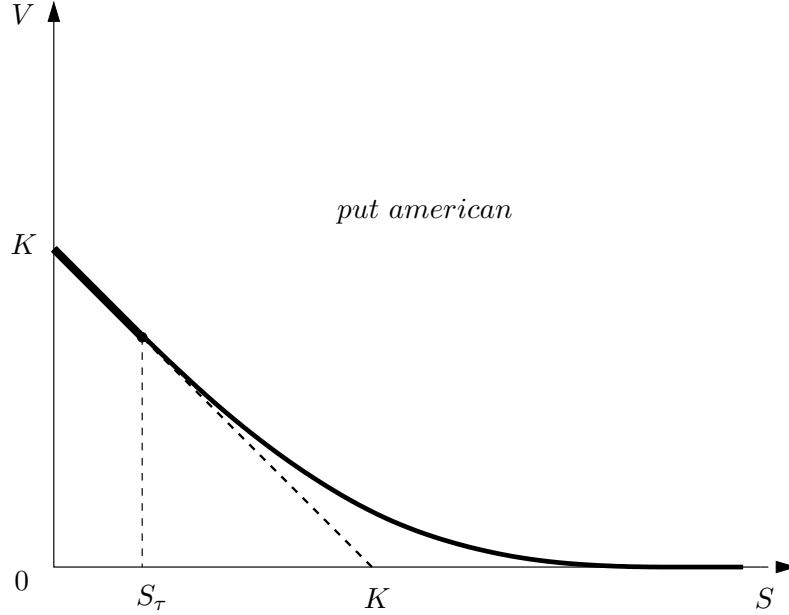


Figure 70: Put Americain

Le point S_τ représente le dernier point où l'égalité a lieu. Le temps τ s'appelle le temps d'arrêt.

$$\begin{cases} S < S_\tau : & V(t, S) = \Lambda(S), \quad \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} < 0 \\ S > S_\tau : & V(t, S) > \Lambda(S), \quad \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \end{cases}$$

Il est possible de réécrire ce système de la forme:

$$\begin{cases} \min(-\frac{\partial V}{\partial t} + M_{BS}(V), V - \Lambda(S)) = 0 \\ V(t = T, S) = \Lambda(S) = \max(K - S, 0) \end{cases}$$

où

$$M_{BS}(V) = rV - rS\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

En effet

$$\text{Si } -\frac{\partial V}{\partial t} + M_{BS}(V) < V - \Lambda(S) \implies \frac{\partial V}{\partial t} - M_{BS}(V) = 0 \implies 0 < V - \Lambda(S)$$

$$\text{Si } -\frac{\partial V}{\partial t} + M_{BS}(V) > V - \Lambda(S) \implies V - \Lambda(S) = 0 \implies \frac{\partial V}{\partial t} - M_{BS}(V) < 0$$

Finalement on cherche une approximation numérique de la fonction put américain, solution du système d'inéquations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} \min(-\frac{\partial V}{\partial t} + M_{BS}(V), V - \Lambda(S)) = 0 \\ V(t, S = L) = 0 \\ V(t = T, S) = \Lambda(S) = \max(K - S, 0) \end{cases}$$

8.1 Options américaines. Méthode d'Euler explicite.

On cherche la solution de l'équation:

$$\min\left(-\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} + M_{BS}^n(V), V_i^{n-1} - \Lambda(S_i)\right) = 0$$

Soit

$$\begin{cases} Si & -\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} + M_{BS}^n(V) < V_i^{n-1} - \Lambda(S_i) \implies \frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} - M_{BS}^n(V) = 0 \implies 0 < V_i^{n-1} - \Lambda(S_i) \\ Si & -\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} + M_{BS}^n(V) > V_i^{n-1} - \Lambda(S_i) \implies V_i^{n-1} - \Lambda(S_i) = 0 \implies \frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} - M_{BS}^n(V) < 0 \end{cases}$$

On vérifie que l'équation peut être réécrite de la forme:

$$V_i^{n-1} = \max(V_i^n - \Delta t M_{BS}^n(V), \Lambda(S_i))$$

En effet:

$$\begin{cases} Si & V_i^n - \Delta t M_{BS}^n(V) > \Lambda(S_i) \implies V_i^{n-1} = V_i^n - \Delta t M_{BS}^n(V) \implies V_i^{n-1} > \Lambda(S_i) \\ Si & V_i^n - \Delta t M_{BS}^n(V) < \Lambda(S_i) \implies V_i^{n-1} = \Lambda(S_i) \implies V_i^n - \Delta t M_{BS}^n(V) < V_i^{n-1} \end{cases}$$

On voit les formes explicites des équations sont les mêmes.

Donc on programme facilement le prix de l'option américaine (put) par la méthode d'Euler explicite:

$$\begin{cases} V_i^{n-1} = \max(V_i^n - \Delta t(rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}), \max(K - S_i, 0)) \\ V_{N+1}^n = 0 \\ V_i^{M+1} = \max(K - S_i, 0) \end{cases}$$

8.2 Options américaines. Méthode de splitting.

On commence par le problème générale:

$$\begin{cases} \min\left(\frac{-\partial V}{\partial t} + M_{BS}(V), V - \Lambda(S)\right) = 0 \\ V(t, S = L) = 0 \\ V(t = T, S) = \Lambda(S) = \max(K - S, 0) \end{cases}$$

et on discrétise ce problème par la méthode d'Euler implicite

$$\min\left(-\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} + M_{BS}^{n-1}(V), V_i^{n-1} - \Lambda(S)\right) = 0$$

On propose maintenant une méthode simplifiée qui exige l'introduction d'un prix correcteur Ψ^n .

$$Calculer \quad \Psi_i^{n-1} \quad t.q. \quad \frac{V_i^n - \Psi_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1}(\Psi)$$

$$Calculer \quad V_i^{n-1} \quad t.q. \quad V_i^{n-1} = \max(\Psi^{n-1}, \Lambda(S))$$

Soit

$$Calculer \quad \Psi_i^{n-1} \quad t.q. \quad \frac{V_i^n - \Psi_i^{n-1}}{\Delta t} = r\Psi_i^{n-1} + rS_i \frac{\Psi_{i+1}^{n-1} + \Psi_{i-1}^{n-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{\Psi_{i+1}^{n-1} + \Psi_{i-1}^{n-1} - 2\Psi_i^{n-1}}{(\Delta S)^2}$$

Calculer V_i^{n-1} *t.q.* $V_i^{n-1} = \max(\Psi_i^{n-1}, \max(K - S_i, 0))$

On propose une variante de type Crank-Nicolson.

Calculer Ψ_i^{n-1} *t.q.* $\frac{V_i^n - \Psi_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1}(\Psi) + M_{BS}^n(V))$

Calculer V_i^{n-1} *t.q.* $V_i^{n-1} = \max(\Psi^{n-1}, \Lambda(S))$

Pour programmer cette méthode de splitting basée sur Crank-Nicolson on ajoute deux lignes de code dans une boucle temporelle et l'algorithme de Thomas.

For ($n = M + 1; n > 0; n --$) {

For ($i = 1; i <= N; i ++$) {

$$K_i^n = \frac{\Delta t}{4}(ir + \sigma^2 i^2)V_{i+1}^n + (1 - \frac{\Delta t}{2}(\sigma^2 i^2 + r))V_i^n + \frac{\Delta t}{4}(-ir + \sigma^2 i^2)V_{i-1}^{n-1} - \delta_i^N A_N V_{N+1}^{n-1} - \delta_i^1 B_1 V_0^{n-1}$$

}

$$D_1^* = D_1, K_1^* = K_1$$

$$\text{For } (i = 2; i <= N; i++) \{ D_i^* = D - \frac{B_i A_{i-1}}{D_{i-1}^*}, K_i^{*n} = K_i^n - \frac{B_i K_{i-1}^{*n}}{D_{i-1}^*} \}$$

$$\boxed{\Psi_N^{n-1} = \frac{K_N^{*n}}{D_N^*}}$$

$$\boxed{V_N^{n-1} = \max(\Psi_N^{n-1}, \max(K - N \Delta S, 0))}$$

$$\text{For } (i = N - 1; i <= 1; i++) \{$$

$$V_i^{n-1} = \frac{K_i^{*n} - A V_{i+1}^{n-1}}{D_i^*}$$

$$\boxed{V_i^{n-1} = \max(V_i^{n-1}, \max(K - i \Delta S, 0))} \}$$

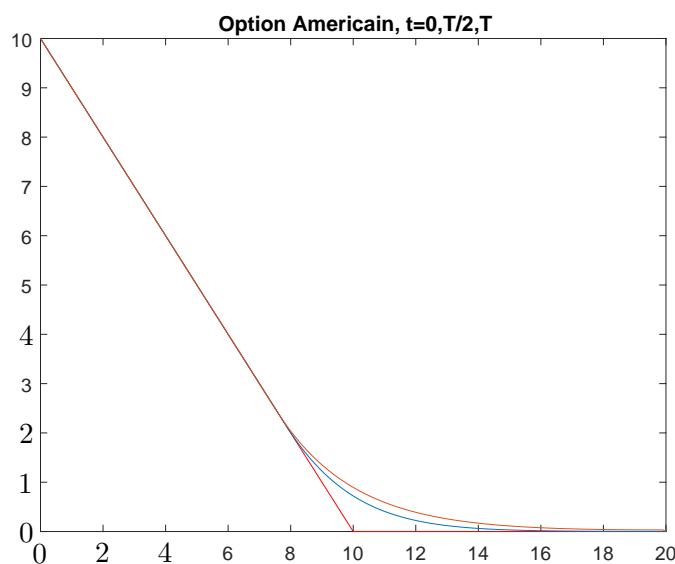


Figure 71: Put américain est simulé par la méthode de Spliting pour $t = 0, t = T/2, t = T$

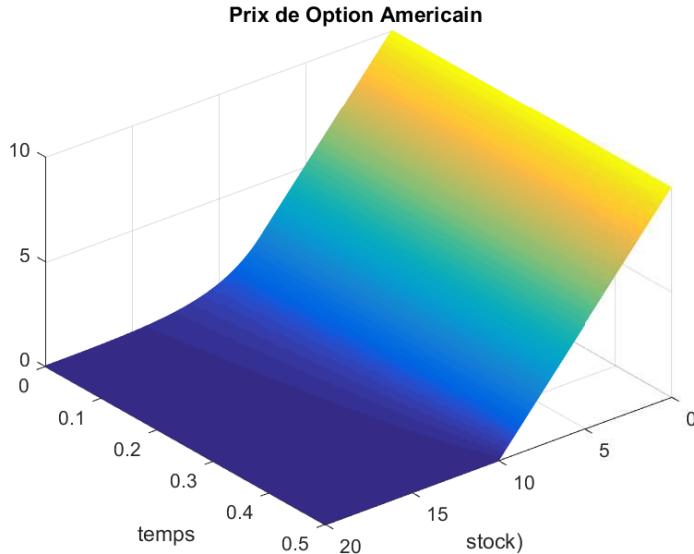


Figure 72: Put américain est simulé par la méthode de Spliting pour

8.3 Options américaines. Méthode de Newton.

On cherche la solution du problème:

$$\min\left(-\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} + M_{BS}^{n-1}(V), V_i^{n-1} - \Lambda(S)\right) = 0$$

Posons

$$x = V^{n-1}, \quad b = V^n, \quad B = I + \Delta t M_{BS}^{n-1}$$

L'équation devient de la forme:

$$\min(Bx - b, x - \Lambda) = 0$$

On veut appliquer la méthode de Newton pour résoudre

$$F(x) = 0 \quad \text{avec} \quad F(x) = \min(Bx - b, x - \Lambda)$$

On considère l'algorithme suivant:

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1} F(x_k),$$

où x_0 est un point de départ à choisir, il faut itérer jusqu'à ce que $F'(x) = 0$

On calcule $F'(x_k)$:

$$F'(x_k)_{ij} = \begin{cases} B_{ij} & \text{if } (Bx_k - b)_i \leq (x_k - \Lambda)_i \\ \delta_{ij} & \text{otherwise} \end{cases}$$

8.4 Options américaines. Algorithme PSOR (Projected Successive Over Relaxation).

On cherche la solution du problème:

$$\min_x(Bx - b, x - \Lambda) = 0$$

$$\begin{cases} Si \quad Bx - b < x - \Lambda \implies Bx - b = 0 \quad et \quad 0 < x - \Lambda \\ Si \quad Bx - b > x - \Lambda \implies x = \Lambda \quad et \quad Bx - b > 0 \end{cases}$$

On peut réécrire l'équation de la forme:

$$x = \max(B^{-1}b, \Lambda) \quad ou \quad V^{n-1} = \max((I + \Delta t M_{BS}^{n-1})^{-1}V^n, \Lambda)$$

En effet

$$\begin{cases} Si \quad B^{-1}b > \Lambda \implies x = B^{-1}b \quad soit \quad Bx - b = 0 \quad et \quad x > \Lambda \\ Si \quad B^{-1}b < \Lambda \implies x = \Lambda \quad et \quad B^{-1}b < x \quad soit \quad Bx - b > 0 \end{cases}$$

On utilise la méthode de Gauss-Seidel pour décomposer la matrice B , puis pour trouver $x = B^{-1}b$.
On obtient (voir le cours "Optimisation nonlinéaire numérique. Méthodes itératives.")

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{B_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n B_{ij}x_j^{(k)})$$

Il faut inclure la contrainte de maximum avec un paramètre de la relaxation ω :

$$x_i^{(k+1)} = \max(x_i^{(k)} + \omega(\frac{1}{B_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n B_{ij}x_j^{(k)}) - x_i^{(k)}), \Lambda)$$

9 Résolution numérique de l'équation de Heston.

Le modéle de Heston est l'un des modèles à volatilité stochastique les plus populaires. La volatilité est aléatoire et donnée par la racine carrée de v_t

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{v_t} dW_t \\ dv_t = k(\theta - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}dW'_t \\ d\langle W, W' \rangle_t = \rho dt \end{cases}$$

- θ la moyenne de la volatilité à long terme. Lorsque t tend vers $+\infty$, v_t tend vers θ .
- κ la rapidité à laquelle la volatilité s'approche de θ .
- η est la volatilité de v_t , appelée "vol of vol".
- W_t est le mouvement brownien standard corrélé avec dW'_t par un facteur de correlation ρ .

En utilisant la procedure de la couverture on arrive à l'équation EDP pour une option Call Vanilla:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\kappa(\theta - v) - \lambda v)\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \rho\eta S v\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

λ est le prime du risque. On prend $\lambda = 0$

9.1 Discrétisation de l'équation pour l'option Européenne

On doit discréteriser l'équation originale avec deux dimensions spatiales S et v .

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \kappa(\theta - v)\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \rho\eta S v\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Condition finale:

$$\{ V(S, v, T) = \max(S - K, 0)$$

Conditions aux limites:

$$\begin{cases} V(0, v, t) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial S}(\infty, v, t) = 1 \\ rS\frac{\partial V}{\partial S}(S, 0, t) + \kappa\theta\frac{\partial V}{\partial v}(S, 0, t) - rV(S, 0, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S, 0, t) = 0 \\ V(S, \infty, t) = S \end{cases}$$

Discrétisons de l'équation par la méthode explicite d'Euler

On tronque d'abord le domaine du calcul: $S \in [O, L_s]$, $v \in [O, L_v]$.

Discrétisons les variables spatiales (l'actif et la volatilité et une temporelle):

S : $S_0 = 0, \dots, S_i = i\Delta S, \dots, S_{N_s+1} = L_s$.

v : $v_0 = 0, \dots, v_j = j\Delta v, \dots, v_{N_v+1} = L_v$.

t : $t_0 = 0, \dots, t^n = n\Delta t, \dots, t_{M+1} = T$.

On note $V_{i,j}^n$ la valeur d'une solution calculée à l'aide d'un schéma numérique aux points S_i , v_j , t^n .

$$\frac{\partial V}{\partial t} \sim \frac{V_{i,j}^{n-1} - V_{i,j}^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{(\Delta S)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} = \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta v}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} \sim \frac{V_{i+1,j+1}^n + V_{i-1,j-1}^n - V_{i-1,j+1}^n - V_{i+1,j-1}^n}{(\Delta S)\Delta v}$$

L'équation devient:

$$V_{i+1,j}^{n-1} = A_{ij} V_{i,j}^n + B_{ij} V_{i,j+1}^n + C_{ij} V_{i,j-1}^n + D_{ij} V_{i+1,j}^n + E_{ij} V_{i-1,j}^n + \frac{\rho\eta i j \Delta t}{4} (V_{i+1,j+1}^n + V_{i-1,j-1}^n - V_{i-1,j+1}^n - V_{i+1,j-1}^n)$$

Les expressions pour les coefficients sont:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 1 - r\Delta t - \Delta t \Delta v j i^2 - \Delta t \frac{\eta^2 j}{\Delta v} \\ B_{ij} &= \left(\frac{\kappa(\theta - \Delta v j)}{2\Delta v} + \frac{\eta^2 j}{2\Delta v} \right) \Delta t \\ C_{ij} &= \left(-\frac{\kappa(\theta - \Delta v j)}{2\Delta v} + \frac{\eta^2 j}{2\Delta v} \right) \Delta t \\ D_{ij} &= \left(\frac{1}{2} r i + \frac{1}{2} i^2 j \Delta v \right) \Delta t \\ E_{ij} &= \left(-\frac{1}{2} r i + \frac{1}{2} i^2 j \Delta v \right) \Delta t \end{aligned}$$

Pour trouver le prix V il reste à fixer les conditions aux limites en $S = 0, v = 0$ et en $S = L_s, v = L_v$.

- En $v = 0$, les coefficients devant $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2$ et devant $\frac{1}{2}\sigma^2 v^2$ disparaissent donc l'équation devient hyperboliques par rapport à la variable v :

$$rS \frac{\partial V}{\partial S}(S, 0, t) + \kappa\theta \frac{\partial V}{\partial v}(S, 0, t) - rV(S, 0, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S, 0, t) = 0$$

Pour $\kappa\theta > 0$ la "vitesse" $\kappa\theta$ est sortante (l'équation est backward).

Le terme "sortante" signifie que le graphe de V se déplace dans la direction où v diminue avec l'augmentation de t .

Donc pour que le schéma soit stable on utilise la méthode "upwind" pour discréteriser la dérivée $\frac{\partial V}{\partial v}$.

$$\frac{\partial V}{\partial v} = \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n}{\Delta v}$$

En $v = 0$ on peut ne pas fixer des conditions aux limites car le terme hyperbolique en v : $\frac{\partial V}{\partial v}$ correspond à une vitesse sortante. On pourra donc écrire sur cette partie de la frontière le même schéma décentré que pour les points intérieurs.

- En $S = 0$ il est évident que le prix est zéro. Donc

$$V(0, v, t) = 0$$

- En $v = L_v$ ($v \rightarrow \infty$) le prix de l'option tend vers le prix de l'actif S .

$$V(S, v = L_v, t) = S$$

- En $S = L_s$ ($S \rightarrow \infty$) le prix de l'option tend vers le prix de l'actif S . On impose les conditions aux limites de Neumann:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = 1$$

- Discrétisation de la condition finale:

$$V_{i,j}^{M+1} = \max(i\Delta S - K, 0)$$

Discrétisons les conditions aux limites.

- En $v = 0$,

$$V_{i,0}^{n-1} = V_{i,0}^n (1 - r\Delta t) + \Delta t r i \frac{V_{i+1,0}^n - V_{i-1,0}^n}{2\Delta S} + \Delta t \kappa \theta \frac{V_{i,1}^n - V_{i,0}^n}{\Delta v}$$

- En $v = L_v$

$$V_{i,N_v+1}^{n-1} = i\Delta S$$

- En $S = L_s$,

$$V_{N_s+1,j}^{n-1} = V_{N_s-1,j}^{n-1} + 2\Delta S$$

- En $S = 0$,

$$V_{0,j}^n = 0$$

- En $S = 0, v = 0$

$$V_{0,0}^{n-1} = V_{0,0}^n (1 - r\Delta t) + \Delta t \kappa \theta \frac{V_{0,1}^n - V_{0,0}^n}{\Delta v}$$

Pour que le schéma soit stable il faut que

$$\Delta t \leq \frac{1}{N_s^2 L_v + N_v \eta^2 + r}$$

- **Algorithme pour le modèle de Heston**

Conditions finales

Pour $n = M + 1 : -1 : 1$

Conditions aux limites

Pour $i = 1 \dots N_s$

Pour $j = 1 \dots N_v$

$$V_{i,j}^{n-1} = A_{ij} V_{i,j}^n + B_{ij} V_{i,j+1}^n + C_{ij} V_{i,j-1}^n + D_{ij} V_{i+1,j}^n + E_{ij} V_{i-1,j}^n + \frac{\rho \eta i j \Delta t}{4} (V_{i+1,j+1}^n + V_{i-1,j-1}^n - V_{i-1,j+1}^n - V_{i+1,j-1}^n)$$

End Pour

End Pour

End Pour

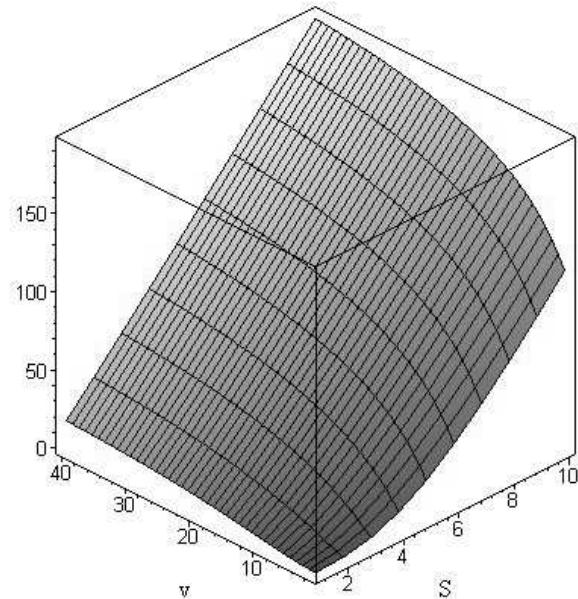


Figure 73: Prix de l'option de Heston, volatilité $v_t \in [0, 40]$

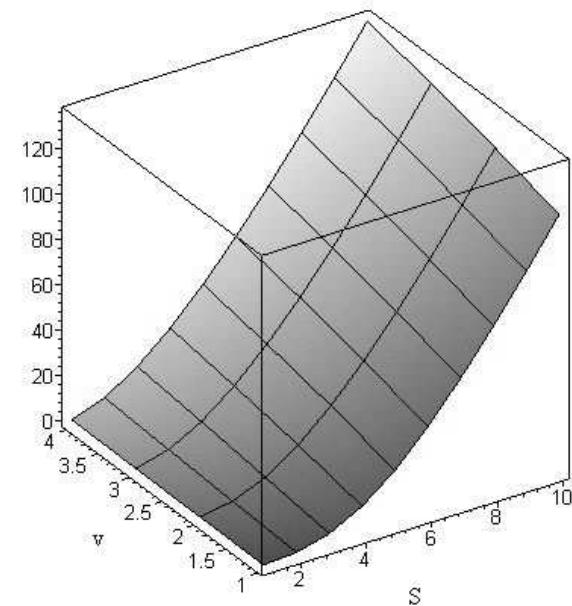


Figure 74: Prix de l'option de Heston, représente la partie zoomée de la Figure , où volatilité $v_t \in [0, 3]$

On présente ici sur les Fig. et Fig. les graphes du prix de l'option Vanilla dans le modèle de Heston V calculés avec les paramètres suivants:

$$T = 1, \quad r = 0.05, \quad \kappa = 2, \quad \theta = 0.2, \quad \eta = 0.3 \\ L_s = 200, \quad L_v = 40, \quad K = 100, \quad \Delta S = 20, \quad \Delta v = 1/2, \quad \Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$$

Pour L_v il faut choisir la valeur assez élevée, par exemple, $L_v = 40$, car on impose la condition aux limites pour $L_v \mapsto \infty$. Par contre, pour le graphe qui nous intéresse on choisit l'intervalle de variation: $v_t \in [0, 3]$.

10 Bibliographie.

1. H. M. Antia. *Numerical Methodes for Scietists and Engineers*. Birkhauser.
2. M. Rappaz, M. Bellet, M. Deville. *Numerical Modeling in Material Science and Engineering*. Springer
3. John C. Hull. *Options, Futures and other Derivatives* Pearson, Prentice Hall
4. Yves Achdou, Olivier Pironneau. *Computational Methodes for Option Pricing*. SIAM
5. Desmond J. Higham. *An Intoduction to Financial Option Valuation*. Springer
6. J.W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations* Springer.
7. Yves Achdou, Olivier Bokanowski, Tony Lelièvre. *Partial Differential Equations in finance*.
8. I. Karatzas, S.E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer-Verlag.
9. D. Lamberton, B. Lapeyre. *Introduction au calcule stochastique appliqué à la finance*. Ellipses.
10. P. Wilmott, J. Dewynne, S Howison. *Option pricing: Mathematical models and computation*. Oxford financial press.
11. F. Dubois, T. Lelièvre. *Efficient pricing of Asian options by the PDF approach*. *Journal of Computational Finance*, 8(2):55-64, 2005.
12. L.C.G. Rogers, Z. Shi. *The value of an Asian option*. *J. Appl. Probability*, 32:1077-1088, 1995.
13. G. Barles, Ch. Daher, M. Romano. *Convergence of numerical schemes for parabolic equation arising in finance theory*. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 5(1)125-143, 1995.
14. I. Karatzas, S.E. Shreve. *Methods of mathematical finance*. Springer, 1998.
15. P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1983.
16. L.A. Bordag *Symmetry reductions of a nonlinear option pricing model*. arXiv:math/0604207
17. Paul Wilmott *Paul Wilmott on Quantitative Finance* Wiley.
18. Tomas Bjork *Arbitrage Theory in Continuous Time* Oxford.
19. Jim Gatheral *The volatility surface* Wiley.
20. Salih N. Neftci *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives* Academic Press.
21. F. Douglas Rouah, Gregory Vainberg *Option pricing models and volatility. Using EXCEL-VBA* Wiley.
22. P. Wilmott, J. Dewynne, S Howison. *The Mathematics of Financial Derivatives. A Student Introduction*. Cambridge university press.