

# 第一章 随机过程及其分类

从物理的角度来讲，在自然界中存在着对于时间的确定性过程与不确定性过程（随机过程）。  
现象与时间存在着确定性关系的称为确定过程，比如在理想状态下，物体坠落的距离与时间的关系为： $h=1/2gt^2$ ）  
现象与时间存在着不确定关系的称为随机过程，比如，分子的运动状态、每天温度的变化情况等。

在概率论中，我们研究了随机变量， $n$  维随机向量。在极限定理中我们研究了无穷多个随机变量，但只局限在它们之间相互独立的情形。将上述情形加以推广，即研究一族无穷多个、相互有关的随机变量，这就是随机过程。

原概率空间  $(S, B, p)$ ，经过随机变量  $X$  诱导得到了概率空间  $(\Omega, \Sigma, P)$ 。

随机变量也是一个函数，他表示的是从样本空间到实数域的一个映射，使可以进行数字化表达与计算。

## 1. 随机过程的概念

$\Omega$  表示诱导后的样本空间， $\Sigma$  表示  $\Omega$  中的一些子集构成的集合。 $\omega$  表示样本空间中的样本点。

如何判断是不是随机过程：给定一个时间  $t$ ，看它是不是一个随机变量，即看他是不是有不确定的取值。

$X(t, \omega)$  表示的是在指定时间  $t$  的情况下的随机变量，那么对应不同的事件  $\omega$  就有不同的随机变量，那么这些随机变量就构成了一个随机变量族  $X(t)$ 。这些随机变量中并不是相互独立的，而是存在着某种联系的。

定义：设  $(\Omega, \Sigma, P)$  是一概率空间，对每一个参数  $t \in T$ ， $X(t, \omega)$  是一定义

$\omega$  的取值是基于  $t$  对样本空间  $\Omega$  的划分的。

在概率空间  $(\Omega, \Sigma, P)$  上的随机变量，则称随机变量族  $X_t = \{X(t, \omega); t \in T\}$  为该概率空间上的一随机过程。其中  $T \subset R$  是一实数集，称为指标集或参数集。

随机过程的两种描述方法：

用映射表示  $X_t$ ，

$$X(t, \omega): T \times \Omega \rightarrow R$$

即  $X(\cdot, \cdot)$  是一定义在  $T \times \Omega$  上的二元单值函数，固定  $t \in T$ ， $X(t, \cdot)$  是一定义在

这里的  $\omega$  指的是某一个样本函数的所包含的样本点，固定  $\omega$  也即是固定了一条样本函数。而  $t$  的取值是不确定的，故为关于  $t$  的函数。

样本空间  $\Omega$  上的函数，即为一随机变量；对于固定的  $\omega \in \Omega$ ， $X(\cdot, \omega)$  是一个关

于参数  $t \in T$  的函数，通常称为样本函数，或称随机过程的一次实现，**所有样本**

**函数的集合确定一随机过程**。记号  $X(t, \omega)$  有时记为  $X_t(\omega)$  或简记为  $X(t)$ 。**指的是指定时间为  $t$  时的随机变量，而不是  $t$  与  $\omega$  都变化**

参数  $T$  一般表示时间或空间。常用的参数一般有：(1)  $T = N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ；

离散时间与连续时间

(2)  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ；(3)  $T = [a, b]$ ，其中  $a$  可以取 0 或  $-\infty$ ， $b$  可以取  $+\infty$ 。

当参数取可列集时，一般称随机过程为**随机序列**。

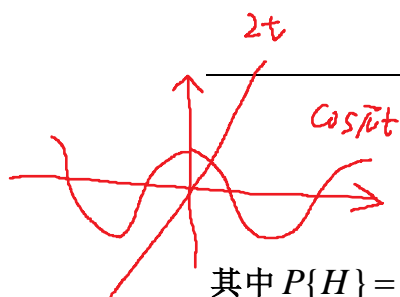
随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  可能取值的全体所构成的集合称为此随机过程的状态空间，记作  $S$ 。 $S$  中的元素称为状态。状态空间可以由复数、实数或更一般的抽象空间构成。实际应用中，随机过程的状态一般都具有特定的物理意义。

随机过程中的所有时间对应的所有随机变量的所有可能的取值的全体所构成的集合称为这个随机过程的状态空间。或者理解为所有样本函数的值域的并集，也为状态空间。

例 1：抛掷一枚硬币，样本空间为  $\Omega = \{H, T\}$ ，借此定义：

解：首先判断其是否为一个随机过程，取  $t=0.5$ ，则  $X(t)$  取  $\cos \pi/2=0$  或  $2 \times 0.5=1$ ， $X(t)$  有两个不相同的取值，故为随机过程。

固定  $\omega = \cos \pi t$ ，则得到关于时间  $t$  的曲线如下图所示的余弦曲线部分，这是一条样本函数；再固定  $\omega = 2t$ ，得到样本函数如下图所示斜线。应为余弦曲线的值域为  $(-1, +1)$ ，斜线的值域为  $(-\infty, +\infty)$ ，取并集，得状态空间为  $(-1, +1) \cup (-\infty, +\infty)$ 。



$$X(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{当出现 H 时} \\ 2t, & \text{当出现 T 时} \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

其中  $P\{H\} = P\{T\} = 1/2$ , 则  $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$  是一随机过程。试考察其样本函数和状态空间。

例 2: 设

$$X(t) = A \cos(\omega t + \theta), \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

其中  $A$  和  $\omega$  是正常数,  $\theta \sim U(0, 2\pi)$ 。试考察其样本函数和状态空间。

例 3: 设正弦随机过程  $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ , 其中:  $X(t) = A \cos \omega t$ ,  $\omega$  是常数,  $A \sim U[0, 1]$ 。试求: (1) 画出  $X(t)$  的样本函数; (2) 确定过程的状态空间; (3) 求  $t = 0, \pi/4\omega, 3\pi/4\omega, \pi/\omega, \pi/2\omega$  时  $X(t_k)$  的密度函数。  
因为振幅A服从均匀分布, 所以样本含有有无数条  $(-A, +A)$   
带进去然后求导

例 4: 质点在直线上的随机游动, 令  $X_n$  为质点在  $n$  时刻时所处的位置, 试考察其样本函数和状态空间。

例 5: 考察某“服务站”在  $[0, t]$  时间内到达的“顾客”数, 记为  $N(t)$ , 则  $\{N(t), t \geq 0\}$  是一随机过程, 试考察其样本函数和状态空间。若记  $S_n$  为第  $n$  个“顾客”到达的时刻, 则  $\{S_n, n = 1, 2, \dots\}$  为一随机序列, 我们自然要关心  $\{S_n, n = 1, 2, \dots\}$  的情况以及它与随机过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  的关系, 这时要将两个随机过程作为一个整体来研究其概率特性 (统计特性)。

例 6: 布朗运动。

## 2. 随机过程的分类

随机过程的分类一般有两种方法: (1) 以参数集和状态空间的特征来分类; (2) 以统计特征或概率特征来分类。我们分述如下:

(一) 以参数集和状态空间的特性分类:

以参数集  $T$  的性质，随机过程可分为两大类：(1)  $T$  可列；(2)  $T$  不可列。

以状态空间  $S$  的性质，即  $X(t)$  所取的值的特征，随机过程也可以分为两大类：(1) 离散状态，即  $X(t)$  所取的值是离散的；(2) 连续状态，即  $X(t)$  所取的值是连续的。

由此可将随机过程分为以下四类：

前面指的是参数集，后面指的是状态空间

- (a) 离散参数离散型随机过程；
- (b) 连续参数离散型随机过程；
- (c) 连续参数连续型随机过程；
- (d) 离散参数连续型随机过程。

(二) 以随机过程的统计特征或概率特征分类：

以随机过程的统计特征或概率特征来进行分类，一般有以下一些：

- (a) 独立增量过程；
- (b) Markov 过程；
- (c) 二阶矩过程；
- (d) 平稳过程；
- (e) 鞅；
- (f) 更新过程；
- (g) Poisson 过程；
- (h) 维纳过程。

注意：以上两种对随机过程的分类方法并不是独立的，比如，我们以后要讨论的 Markov 过程，就有参数离散状态空间离散的 Markov 过程，即 Markov 链，也要讨论参数连续状态离散的 Markov 过程，即纯不连续 Markov 过程。在下面几章中，我们将研究几种重要的、应用非常广泛的随机过程。

### 3. 随机过程的数字特征

为什么要研究随机变量的数字特征，因为随机变量的概率密度函数往往是不可知的，所以通过观察，统计的方法求得其数字特征，进而反映出随机变量的分布特性。

(一) 单个随机过程的情形

设  $\{X(t); t \in T\}$  是一随机过程，为了刻画它的统计特征，通常要用到随机过程的数字特征，即随机过程的均值函数、方差函数、协方差函数和相关函数。下面我们给出它们的定义。

(a) 均值函数：随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  的均值函数定义为：（假设存在）

$$\mu_X(t) \triangleq m(t) = E\{X(t)\}$$

不同的时间对应不同的随机变量，不同的随机变量有不同的均值，所以随机过程的均值函数是一个关于  $t$  的函数

(b) 方差函数：随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  的方差函数定义为：（假设存在）

$$\sigma_X^2(t) \triangleq D_X(t) = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\}$$

(c) （自）协方差函数：随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  的（自）协方差函数定义为：

给定时间  $t, s$  确定了两个随机变量，协方差函数就是确定这两个事件对应的随机变量的相关性。这个“自”表示的是取自同一个随机过程不同事件的随机变量。

$$C_X(s, t) \triangleq E\{[X(s) - \mu_X(s)][X(t) - \mu_X(t)]\}$$

(d) （自）相关函数：随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  的（自）相关函数定义为：

相关函数是协方差函数的推广（把协方差函数大括号里乘出来。。。），他也是反映同一随机过程中不同时间对应的随机变量的线性相关性。相关函数更为常用。

$$R_X(s, t) \triangleq E\{X(s)X(t)\}$$

(e) 特征函数：记：

$$\phi_X(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \triangleq E\{\exp\{j[u_1 X(t_1) + \dots + u_n X(t_n)]\}\}$$

称

$$\{\phi_X(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n), t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

为随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  的有限维特征函数族。

数字特征之间的关系：

$$C_X(s, t) \triangleq E\{[X(s) - \mu_X(s)][X(t) - \mu_X(t)]\}$$

$$= E\{X(s)X(t)\} - \mu_X(s) \cdot \mu_X(t)$$

$$= R_X(s, t) - \mu_X(s) \cdot \mu_X(t)$$

$$\sigma_X^2(t) = D_X(t) = C_X(t, t) = R_X(t, t) - [\mu_X(t)]^2$$

例 7：考察上面的例 1，（1）写出  $X(t)$  的一维分布列  $X(1/2), X(1)$ ；（2）

写出  $X(t)$  的二维分布列  $(X(1/2), X(1))$ ；（3）求该过程的均值函数和相关函数。

例 8: 求例 2 中随机过程的均值函数和相关函数。

## (二) 两个随机过程的情形

设  $\{X(t); t \in T\}$ 、 $\{Y(t); t \in T\}$  是两个随机过程，它们具有相同的参数集，对于它们的数字特征，除了有它们自己的数字特征外，我们还有：

(a) 互协方差函数：随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  和  $\{Y(t); t \in T\}$  的互协方差函数定义为：

$$C_{XY}(s, t) \triangleq E\{[X(s) - \mu_X(s)][Y(t) - \mu_Y(t)]\}$$

(b) 互相关函数：随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  和  $\{Y(t); t \in T\}$  的互相关函数定义为：

$$R_{XY}(s, t) \triangleq E\{X(s)Y(t)\}$$

互协方差函数和互相关函数有以下关系：

$$C_{XY}(s, t) = R_{XY}(s, t) - \mu_X(s) \cdot \mu_Y(t)$$

如果两个随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  和  $\{Y(t); t \in T\}$ ，对于任意的两个参数  $s, t \in T$ ，有

$$C_{XY}(s, t) = 0$$

或

$$R_{XY}(s, t) = \mu_X(s) \cdot \mu_Y(t) = E\{X(s)\} \cdot E\{Y(t)\}$$

则称随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  和  $\{Y(t); t \in T\}$  是统计不相关的或不相关的。

可以将一个随机过程的有限维分布族看作是随机过程的所有变量的联合分布函数，它表示了所有随机变量的所有性质。也可以通过两个随机过程的有限维分布族研究两个随机过程之间的相关性。但这中方法在实际中是很难应用的，因为有限维分布族很复杂，很难求。

## (三) 有限维分布族

设  $\{X(t); t \in T\}$  是一随机过程，对于  $\forall n \in N$ ， $\forall t_i \in T (1 \leq i \leq n)$ ，记

$$\begin{aligned} F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \end{aligned}$$

其全体

## 分布函数的集合

$$\{F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n), t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

称为随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  的有限维分布族。它具有以下的性质：

(1) 对称性：对  $(1, 2, \dots, n)$  的任意排列  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ ，则有：

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F_X(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}; t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_n})$$

(2) 相容性：对于  $m < n$ ，有：

$$\begin{aligned} F_X(x_1, x_2, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty; t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n) \\ = F_X(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m) \end{aligned}$$

注 1：随机过程的统计特性完全由它的有限维分布族决定。

对于一维随机变量，其分布函数能完全确定这个随机变量的统计特性、概率性质。同样的，有限维分布族也能完全确定随机过程的统计特性。

注 2：有限维分布族与有限维特征函数族相互唯一确定。

有限维分布族，有限维特征函数族，随机过程彼此相互偶依确定，也就是所一个有限维分布族值表示一个随机过程的特性，而不会表示多个随机过程的特性，否则就乱套了。

问题：一个随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  的有限维分布族，是否描述了该过程的全

部概率特性？解决此问题有以下著名的定理，此定理是随机过程理论的基础。

定理：(Kolmogorov 存在性定理)

设分布函数族  $\{F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n), t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$  满足以上提到的对称性和相容性，则必存在唯一的随机过程  $\{X(t); t \in T\}$ ，使  $\{F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n), t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$  恰好是  $\{X(t); t \in T\}$  的有限维分布族，即：

$$\begin{aligned} F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \end{aligned}$$

注：定理说明了随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  的有限维分布族包含了  $\{X(t); t \in T\}$

的所有概率信息。因此，研究随机过程的统计特征可以通过研究其有限维分布函数族的特性来达到。

(四) 两个随机过程的独立性

两个随机变量的独立性：X, Y 的联合分布函数等于 X, Y 的分布函数相乘—— $F(X, Y) = F(X)F(Y)$  或者是联合概率密度等于各自的概率密度相乘—— $f(x, y) = f(x)f(y)$

而两个随机过程的相互独立等价于：随机过程 A 的 n 个（任意多个）随机变量于随机过程 B 的 m 个（任意多个）随机变量之间都无关，即 A, B 的联合 n+m 维分布族等于 A 的 n 维分布族与 B 的 m 维分布族的乘积。

设  $\{X(t); t \in T\}$ 、 $\{Y(t); t \in T\}$  是两个随机过程，它们具有相同的参数集，

任取  $n, m \in N$ ，以及  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ， $t'_1, t'_2, \dots, t'_m \in T$ ，则称  $n + m$  维随机向量

$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n), Y(t'_1), Y(t'_2), \dots, Y(t'_m))$  的联合分布函数:

$$\begin{aligned} F_{XY}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \\ = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n, Y(t'_1) \leq y_1, \dots, Y(t'_m) \leq y_m\} \end{aligned}$$

为随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  和  $\{Y(t); t \in T\}$  的  $n+m$  维联合分布函数。

如果对于任取的  $n, m \in N$ ，以及任意的  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ， $t'_1, t'_2, \dots, t'_m \in T$ ，

随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  和  $\{Y(t); t \in T\}$  的联合分布函数满足:

$$\begin{aligned} F_{XY}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \\ = F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot F_Y(y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \end{aligned}$$

则称随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  和  $\{Y(t); t \in T\}$  是独立的。

注：随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  和  $\{Y(t); t \in T\}$  独立可以得到随机过程  $\{X(t); t \in T\}$  和  $\{Y(t); t \in T\}$  统计不相关，反之不对。但对于正态过程来说是等价的，这一点我们以后将看到。

## 4. $\delta$ -函数及离散型随机变量分布列的 $\delta$ -函数表示

### (1) $\delta$ -函数 (Dirac 函数) 的定义及性质

定义：对于任意的无穷次可微的函数  $f(t)$ ，如果满足：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\varepsilon}(t) f(t) dt$$

其中：

$$\delta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$$

则称  $\delta_{\varepsilon}(t)$  的弱极限为  $\delta$ -函数，记为  $\delta(t)$ 。

显然，对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，有：



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\varepsilon}(t) dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

注 1:  $\delta(t)$  在  $t=0$  点的取值为  $\infty$ , 在  $t \neq 0$  点的取值为 0, 并且满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

注 2: 工程 (信号处理等) 上  $\delta$ -函数也称为单位脉冲函数或单位冲激函数。

$\delta$ -函数的筛选性质:

若  $f(t)$  为无穷次可微的函数, 则有:

$$\int_I \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

其中  $I$  是包含点  $t=0$  的任意区间。特殊地, 有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

更一般地, 我们有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

(2) 离散型随机变量分布列的  $\delta$ -函数表示

设离散型随机变量  $X$  的分布列为:  $P\{X = x_i\} = p_i \quad i=1, 2, \dots$ , 则由  $\delta$ -函数的筛选性质可以定义离散型随机变量  $X$  的分布密度 (离散型分布密度) 为:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(x - x_i)$$

因为, 由  $\delta$ -函数的筛选性质, 离散型随机变量  $X$  的分布函数可以表示为:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i = \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(u - x_i) du$$

注: 工程上, 常用离散型随机变量分布列的  $\delta$ -函数表示法。它将离散型随机变量的分布列表示成分布密度的形式, 因此与连续型随机变量的概率分布密度函数一样, 可以进行统一处理。在下面的例子中我们将看到它的应用。



## 5. 条件数学期望

条件数学期望是随机数学中最基本最重要的概念之一，它在随机过程课程中具有广泛的应用，需要同学们很好地掌握。

### (1) 离散型情形

定义：设二维离散型随机变量  $(X, Y)$  所有可能取的值是  $(x_i, y_j)$ ，其联合分布率为  $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \geq 0$ ，记：

$$E\{X|Y\}(\omega) \rightarrow E\{X|Y\} \triangleq \sum_j I_{(Y=y_j)}(\omega) E\{X|Y = y_j\} \quad \text{其实就是把} Y \text{取不同值时的 } X \text{关于} Y \text{的数学期望之和}$$

称  $E\{X|Y\}$  为  $X$  关于  $Y$  的条件数学期望。

注 1：定义中的  $I_{(Y=y_j)}(\omega)$  是示性函数，即：

$$I_{(Y=y_j)}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{\omega: Y(\omega) = y_j\} \\ 0, & \omega \notin \{\omega: Y(\omega) = y_j\} \end{cases} \quad \{\omega: Y(\omega) = y_j\} : \text{表示当 } Y=y_j \text{ 时, 随机变量 } x \text{ 对应的样本空间。}$$

注 2：条件数学期望  $E\{X|Y\}$  是随机变量  $Y$  的函数，因此有关于它的分布，其分布为：

当  $E\{X|Y = y_j\} \neq E\{X|Y = y_k\} (j \neq k)$  时，

$$P\{E\{X|Y\} = E\{X|Y = y_j\}\} = P\{Y = y_j\}$$

设  $Y$  的取值是离散型的  
如果  $Y$  取不同值时，所得到的期望  $E\{X|Y=y_j\}$  不相同，那么这些  $Y$  的取值及其对应的概率在  $E\{X|Y\}$  的分布列中应该分别占一项。  
如果当  $Y$  取不同值时，求到的  $E\{X|Y=y_j\}$  相同，那么应该把他们整合分布列中的一项，求出其概率之和。

否则，令：  $D_j = \{k: E\{X|Y = y_k\} = E\{X|Y = y_j\}\}$ ，则

$$P\{E\{X|Y\} = E\{X|Y = y_j\}\} = \sum_{k \in D_j} P\{Y = y_k\}$$

注 3：由于条件数学期望  $E\{X|Y\}$  是随机变量  $Y$  的函数，故可以求其数学期望，其数学期望为：

$$E\{E\{X|Y\}\} = \sum_j E\{X|Y = y_j\} P\{Y = y_j\} = E\{X\}。 \quad \text{局部平均的平均等于全局平均}$$

例 9：离散型随机变量  $(X, Y)$  的联合分布率如下表所示，试求  $E\{X|Y\}$  的分布率， $E\{X\}$ ， $E\{E\{X|Y\}\}$ 。

| $\begin{matrix} \text{X} \\ \text{Y} \end{matrix}$ | 1      | 2       | 3      | $p_{\cdot j}$ |
|--|--------|---------|--------|---------------|
| 1  | $2/27$ | $4/27$  | $1/27$ | $7/27$        |
| 2  | $5/27$ | $7/27$  | $3/27$ | $15/27$       |
| 3  | $1/27$ | $2/27$  | $2/27$ | $5/27$        |
| $p_{i \cdot}$                                      | $8/27$ | $13/27$ | $6/27$ | 1             |

## (2) 连续型情形

定义：设二维随机变量具有联合分布密度函数  $f(x, y)$ ， $Y$  的边缘分布为

$f_Y(y)$ ，若随机变量  $E\{X|Y\}$  满足：

(a)  $E\{X|Y\}$  是随机变量  $Y$  的函数，当  $Y = y$  时，它的取值为  $E\{X|Y = y\}$ ；

(b) 对于任意的事件  $D$ ，有：

$$E\{E\{X|Y\}|Y \in D\} = E\{X|Y \in D\}$$

则称随机变量  $E\{X|Y\}$  为  $X$  关于  $Y$  的条件数学期望。

注 1：由于条件数学期望  $E\{X|Y\}$  是随机变量  $Y$  的函数，故可以求其数学期望，其数学期望为：

$$E\{E\{X|Y\}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|Y = y) f_Y(y) dy = E\{X\}$$

例 10：设：  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ ，则有：

离散型随机变量要先求出关于  $X$  关于  $Y$  的条件分布列。  
连续型则要求出  $X$  关于  $Y$  的条件分布密度函数，

$$E\{Y|X = x\} = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1)$$

知道了  $X$  关于  $Y$  的分布列或是密度函数，则可以求出其他东西/

$$E\{Y|X\} = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (X - \mu_1)$$

解：先求  $Y$  关于  $X = x$  的条件分布密度，

$$\begin{aligned} f_{Y|X=x}(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}[y - \mu_2 - \rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x - \mu_1)]^2\right\} \end{aligned}$$

即

$$f_{Y|X=x}(y|x) \sim N[\mu_2 + \rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2)]$$

就是把x换成X。

$$E\{Y|X=x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X=x}(y|x) dy = \mu_2 + \rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x - \mu_1)$$

$$E\{Y|X\} = \mu_2 + \rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(X - \mu_1)$$

### (3) 条件数学期望的性质

在各给定的随机变量的数学期望存在的条件下，我们有：

$$(a) E\{X\} = E\{E\{X|Y\}\};$$

$$(b) E\left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i | Y\right\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i E\{X_i | Y\} \text{ a.s.}; \text{ 其中 } \alpha_i (1 \leq i \leq n) \text{ 为常数};$$

两边都是随机变量

几乎处处相等

随机变量乘以一个常数不会影响其均值；相同的，X关于Y的随机变量乘以一个常数，也不会改变其均值。

$$(c) E\{g(X)h(Y)|Y\} = h(Y)E\{g(X)|Y\} \text{ a.s.};$$

$$(d) E\{g(X)h(Y)\} = E\{h(Y)E\{g(X)|Y\}\}; \quad E(XY) = E(E(XY|Y)) = E(Y E(X|Y))$$

$$(e) \text{ 如果 } X, Y \text{ 独立, 则有 } E\{X|Y\} = E\{X\};$$

证明：设  $(X, Y) \sim f(x, y)$ ，则有：

$$\begin{aligned} E\{g(X)h(Y)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)f(x, y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx \right] h(y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E\{g(X)|Y=y\}}_{\text{小写y都变为大写Y}} h(y) f_Y(y) dy = E\{h(Y)E\{g(X)|Y\}\} \end{aligned}$$

注 1：常用的计算式子：

$$E\{g(X)h(Y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{g(X)|Y=y\} h(y) f_Y(y) dy$$

$$P\{A\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{A|Y=y\} f_Y(y) dy \quad \text{连续型的全概率公式}$$

$$P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{X \leq x|Y=y\} f_Y(y) dy$$

## 6. 随机过程举例

例 a：如果正弦波随机过程为

$$X(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

其中振幅  $A$  取常数, 角频率  $\omega$  取常数, 而相位  $\theta$  是一个随机变量, 它均匀分布于  $(-\pi, \pi)$  之间, 即:

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求在  $t$  时刻  $X(t)$  的概率密度。

解: 固定时刻  $t$ , 则随机变量  $X(t) = A \cos(\omega t + \theta)$  是随机变量  $\theta$  的函数。

由分布函数的定义:

$$F_{X(t)}(y) = P\{X(t) \leq y\} = P\{A \cos(\omega t + \theta) \leq y\}$$

当  $y < -A$  时,  $F_{X(t)}(y) = 0$ ; 当  $y \geq +A$  时,  $F_{X(t)}(y) = 1$

当  $-A \leq y < +A$  时, 我们有:

$$\begin{aligned} F_{X(t)}(y) &= P\{X(t) \leq y\} = P\{A \cos(\omega t + \theta) \leq y\} = \\ &= P\left\{\{-\pi < \theta \leq -\omega t - \arccos \frac{y}{A}\} \cup \{\arccos \frac{y}{A} - \omega t < \theta \leq \pi\}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\omega t - \arccos \frac{y}{A}} dx + \int_{\arccos \frac{y}{A} - \omega t}^{\pi} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\omega t - \arccos \frac{y}{A} + \pi + \pi - \arccos \frac{y}{A} + \omega t \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \pi - \arccos \frac{y}{A} \right] \end{aligned}$$

因此, 当  $-A \leq y < +A$  时,  $X(t)$  的概率密度为:

$$f_{X(t)}(y) = F'_{X(t)}(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - y^2}}$$

最终得到  $X(t)$  的概率密度为:

$$f_{X(t)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - y^2}}, & -A \leq y \leq +A \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例 b: 设一由正弦振荡器输出的随机过程:

$$X(t) = A \cos(\Omega t + \theta), \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

其中  $A$ 、 $\Omega$  和  $\theta$  是相互独立的随机变量, 并且已知它们的分布密度函数分别为:

$\Omega \sim U(250, 350)$ 、 $\theta \sim U(0, 2\pi)$  及

$$f_A(a) = \begin{cases} \frac{2a}{A_0^2}, & a \in (0, A_0) \\ 0, & a \notin (0, A_0) \end{cases}$$

试求随机过程  $X(t)$  的一维概率密度。

解: 设  $Y(t) = a \cos(\omega t + \theta)$ , 其中  $a$  和  $\omega$  是常数,  $\theta \sim U(0, 2\pi)$ , 由例 a 的结果可知  $Y(t)$  的一维分布密度为:

$$f_{Y(t)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - y^2}}, & -a \leq y \leq +a \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

比较  $X(t)$  与  $Y(t)$ , 我们有:

$$Y(t) = X(t) | A = a, \Omega = \omega \quad Y(t) \text{ 就是 } X(t) \text{ 的 } A, \Omega \text{ 集合取特定值的情况}$$

由连续型全概率公式, 我们有:

$$P\{X(t) \leq x\} = \iint P\{X(t) \leq x | A, \Omega\} dF(a, \omega)$$

dF(a, ω) 求导写全出来就是 f(a, ω) dadω, f(a, ω) 是 a, ω 的联合概率密度。但是为了简便起见, 都会如是写

由于  $A, \Omega$  相互独立, 因此有:

$$dF(a, \omega) = f(a, \omega) da d\omega = f_A(a) f_\Omega(\omega) da d\omega$$

故有  $X(t)$  的一维概率密度为:

$$\begin{aligned} f_{X(t)}(x) &= \iint \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} f_A(a) f_\Omega(\omega) da d\omega = \\ &= \int_x^{A_0} da \int_{250}^{350} \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{2a}{A_0^2} \cdot \frac{1}{100} d\omega \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi A_0^2} \sqrt{A_0^2 - x^2}, & |x| \leq A_0 \\ 0, & |x| > A_0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 c: (一维随机游动) 设有一质点在  $x$  轴上作随机游动, 即在  $t=0$  时质点属于  $x$  轴的原点, 在  $t=1, 2, 3, \dots$  时质点可以在  $x$  轴上正向或反向移动一个单位距离, 作正向和作反向移动的概率分别为  $p$  和  $q=1-p$ 。经时间  $n$ , 质点偏离原点的距离为  $k$ , 问经时间  $n$  步后, 质点处于位置  $k$  的概率如何?

解: 设质点第  $i$  次移动时的距离为  $\xi_i$ , 则  $\xi_i$  是离散的随机变量, 它可取  $+1$ , 也可取  $-1$ 。且  $P\{\xi_i = +1\} = p$ ,  $P\{\xi_i = -1\} = 1 - p = q$

设: 质点在  $t = n$  时, 偏离原点的距离为  $X_n$ , 则  $X_n$  也是一随机变量, 且有:

$$X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad X_0 = 0$$

由题意,  $\xi_i$  与质点所处位置无关, 且  $\xi_i$  与  $\xi_k$  ( $i \neq k$ ) 独立。

当  $t = n$  时, 质点可取的值为:

$$n, n-2, n-4, \dots, -(n-4), -(n-2), -n$$

如果在  $n$  次游动中有  $m$  次质点右向移动一个单位, 即有  $m$  次  $\xi_i = +1$  发生, 则有  $n-m$  次质点左向移动一个单位, 即有  $n-m$  次  $\xi_i = -1$  发生, 此时有:

$$X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i = m \times (+1) + (n-m) \times (-1) = 2m - n = k$$

由此得到  $m = \frac{n+k}{2}$ 。

因此, 由题意, 我们有:

$$P\{X_n = k\} = C_n^m p^m q^{n-m} = C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} = \frac{n!}{(\frac{n+k}{2})! (\frac{n-k}{2})!} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

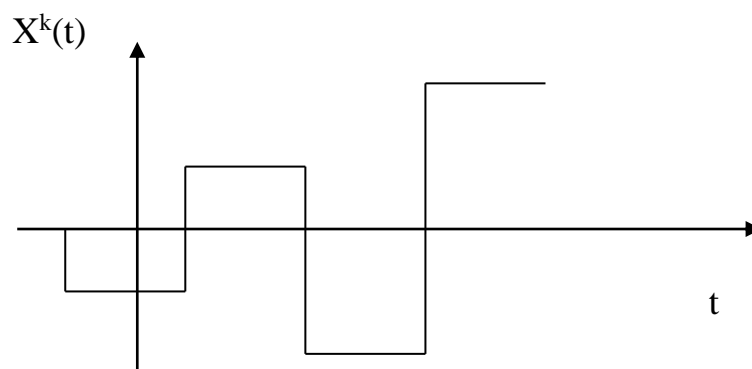
此式中  $m$  是一正整数, 则如果  $n$  为奇数时,  $k$  也是奇数 ( $k < n$ ); 如果  $n$  为偶数时,  $k$  也是偶数 ( $k < n$ )。

例 d: 设有一脉冲数字通信系统, 它传送的信号是脉宽为  $T_0$  的脉冲信号, 每隔  $T_0$  送出一个脉冲。脉冲幅度  $X(t)$  是一随机变量, 它可取四个值  $\{+2, +1, -1, -2\}$ , 且取这四个值的概率是相等的, 即:

$$P\{X(t) = +2\} = P\{X(t) = +1\} = P\{X(t) = -1\} = P\{X(t) = -2\} = 1/4$$

不同周期内脉冲的幅度是相互统计独立的, 脉冲的起始时间相对于原点的时间差  $u$  为均匀分布在  $(0, T_0)$  内的随机变量。试求在两个时刻  $t_1, t_2$  时, 随机过程  $X(t)$  所取值  $(X(t_1), X(t_2))$  的二维联合概率密度。

解: 典型样本函数如下图:



在时间轴上任意固定两个时刻  $t_1, t_2$ , 我们令:

事件  $C$ :  $t_1, t_2$  间有不同周期的脉冲存在, 即  $t_1, t_2$  处在不同的脉冲周期内;

事件  $C^c$ :  $t_1, t_2$  间没有不同周期的脉冲存在, 即  $t_1, t_2$  处在相同的脉冲周期内;

(1) 当  $|t_1 - t_2| > T_0$  时, 有  $P\{C\} = 1$  和  $P\{C^c\} = 0$

(2) 当  $|t_1 - t_2| \leq T_0$  时,  $t_1, t_2$  可能处在同一脉冲内, 也可能不处在同一脉冲内。假设  $\theta$  为  $t_1$  所在的脉冲的起始时刻, 由于脉冲的起始时刻相对于原点  $t = 0$  的时间差  $u$  是  $(0, T_0)$  内的均匀分布, 而且该信号是等宽的脉冲信号, 因此  $\theta$  可以看作均匀分布于  $(t_1 - T_0, t_1)$  的随机变量。

如果  $t_1 < t_2$ , 则:



$$\begin{aligned}
 P\{C^c\} &= P\{t_2 < \theta + T_0\} = P\{\theta > t_2 - T_0\} = 1 - P\{\theta < t_2 - T_0\} \\
 &= 1 - \frac{1}{T_0} \int_{t_1 - T_0}^{t_2 - T_0} d\theta = 1 - \frac{t_2 - t_1}{T_0}
 \end{aligned}$$

如果  $t_1 > t_2$ ，则：  $P\{C^c\} = P\{t_2 > \theta\} = \frac{1}{T_0} \int_{t_1 - T_0}^{t_2} d\theta = 1 - \frac{t_1 - t_2}{T_0}$

因此有：  $P\{C^c\} = 1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \quad P\{C\} = \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}$

由全概率公式：

$$f_{X_{t_1} X_{t_2}}(x_1, x_2) = f_{X_{t_1} X_{t_2} | C}(x_1, x_2 | C) P\{C\} + f_{X_{t_1} X_{t_2} | C^c}(x_1, x_2 | C^c) P\{C^c\}$$

根据不同周期内脉冲幅度是相互独立的随机变量，我们有：

$$f_{X_{t_1} X_{t_2} | C}(x_1, x_2 | C) = \left[ \sum_{i=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_1 - i) \right] \times \left[ \sum_{k=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_2 - k) \right]$$

如果  $t_1, t_2$  处在同一周期内，则  $X_{t_1} = X_{t_2}$ ，此时有：

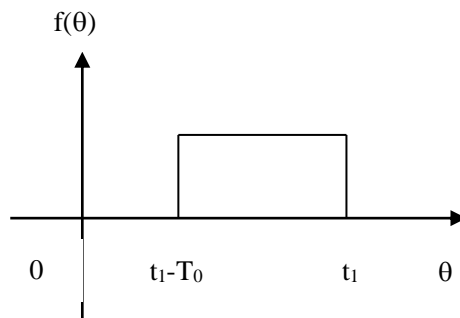
$$f_{X_{t_1} X_{t_2} | C^c}(x_1, x_2 | C^c) = \left[ \sum_{i=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_1 - i) \delta(x_2 - i) \right]$$

由此最终得到  $(X(t_1), X(t_2))$  的二维联合概率密度如下：

当  $|t_1 - t_2| \leq T_0$  时：

$$\begin{aligned}
 f_{X_{t_1} X_{t_2}}(x_1, x_2) &= \left[ \sum_{i=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_1 - i) \right] \times \left[ \sum_{k=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_2 - k) \right] \frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \\
 &\quad + \left[ \sum_{i=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_1 - i) \delta(x_2 - i) \right] \left( 1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \right)
 \end{aligned}$$

当  $|t_1 - t_2| > T_0$  时：  $f_{X_{t_1} X_{t_2}}(x_1, x_2) = \left[ \sum_{i=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_1 - i) \right] \times \left[ \sum_{k=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_2 - k) \right]$



例 e: 设有某通信系统, 它传送的信号是脉宽为  $T_0$  的脉冲信号, 脉冲信号的周期为  $T_0$ 。如果脉冲幅度  $X(t)$  是随机的, 幅度服从正态分布  $N(0, \sigma^2)$ , 不同周期内的幅度是相互统计独立的。脉冲沿的位置也是随机的, 脉冲的起始时间相对于原点的时间差  $u$  为均匀分布在  $(0, T_0)$  内的随机变量。  $u$  和脉冲幅度间也是相互统计独立的 (脉冲幅度调制信号), 试求在两个时刻  $t_1, t_2$  时, 该随机过程  $X(t)$  所取值  $(X(t_1), X(t_2))$  的二维联合概率密度。

解: 在时间轴上任意固定两个时刻  $t_1, t_2$ , 讨论同例 d。

特别注意此时的状态空间!

(a) 当  $|t_1 - t_2| > T_0$  时,  $t_1, t_2$  位于不同的周期内, 此时我们有:

$$f_{X_{t_1} X_{t_2}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}\right\}$$

(b) 当  $|t_1 - t_2| \leq T_0$  时,  $t_1, t_2$  位于两个不同的周期内的概率为:

$$P\{C\} = \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}$$

$t_1, t_2$  位于相同的周期内的概率为:

$$P\{C^c\} = 1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}$$

根据全概率公式, 我们有:

$$\begin{aligned} f_{X_{t_1} X_{t_2}}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right\} \delta(x_1 - x_2) \cdot \left[1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}\right] \end{aligned}$$

因为当  $t_1, t_2$  处在同一脉冲周期时,  $X(t_1), X(t_2)$  取相同的值, 所以上式的第二项出现了  $\delta(x_1 - x_2)$  函数。

此例中看出,  $X(t_1), X(t_2)$  的二维联合概率密度不再是二维正态分布, 虽然

$X(t_1)$  和  $X(t_2)$  都是正态分布。

例 f: 考察一随机过程, 它在  $t_0 + nT_0$  时刻具有宽度为  $b$  的矩形脉冲波, 脉冲幅度  $A$  为一等概率取值  $\pm a$  的随机变量, 且  $b < T_0$ ,  $t_0$  是在  $(0, T_0)$  上服从均匀分布的随机变量, 并且脉冲幅度  $A$  与  $t_0$  独立, 试求该过程的相关函数和方差。

解: 由给定的随机过程, 我们有:

$$E\{X(t)\} = a \times p + (-a) \times p + 0 \times (1 - 2p) = 0$$

下面求相关函数:

任意取  $t_1, t_2$ , 且  $t_1 < t_2$ , 当  $|t_1 - t_2| > T_0$  时,  $t_1, t_2$  位于不同的周期内, 此时有:

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\} = 0$$

当  $|t_1 - t_2| \leq T_0$ , 且  $t_1, t_2$  位于两个不同的周期内时, 我们有:

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\} = 0$$

当  $|t_1 - t_2| \leq T_0$ , 且  $t_1, t_2$  位于同一的周期内时, 假设  $\theta$  为  $t_1$  所在的脉冲的起始时刻, 只有当  $t_2 < \theta + b$  时,  $X(t_1)$  和  $X(t_2)$  取到不为零的值, 此时的概率为:

$$P\{t_2 < \theta + b\} = 1 - P\{\theta < t_2 - b\} = 1 - \frac{1}{T_0} \int_{t_1 - T_0}^{t_2 - b} d\theta = \frac{b - (t_2 - t_1)}{T_0}$$

由此, 我们有:

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = a^2 \cdot \frac{b - (t_2 - t_1)}{T_0}$$

同理, 当  $t_1 > t_2$  是, 我们有:

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = a^2 \cdot \frac{b - (t_1 - t_2)}{T_0}$$

因此, 最终得到:

$$R_X(\tau) = \frac{a^2(b - |\tau|)}{T_0}, \quad \tau = t_2 - t_1, \quad |\tau| \leq b, \quad D_X(t) = R_X(0) = \frac{a^2 b}{T_0}$$

例 g: 随机电报信号定义如下:

(1) 在任何时刻  $t$ ,  $X(t)$  取值为 0 或 1, 只有两种可能状态。并设

$$P\{X(t)=0\}=1/2, P\{X(t)=1\}=1/2$$

(2) 每个状态的持续时间是随机的, 设在  $T$  时间内波形变化的次数  $\mu$  服从 Poisson 分布即:

$$P\{\mu=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T} \quad (\lambda>0, T>0)$$

(3)  $X(t)$  取何值 (即所处的状态) 与随机变量  $\mu$  是相互统计独立的。

求随机电报信号  $X(t)$  的均值函数和自相关函数。

解: 由均值函数和自相关函数的定义, 有:

(1) 均值函数:  $E\{X(t)\}=1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ , 即均值函数是常数。

(2) 相关函数: 在时间轴上任意固定两个时刻  $t_1, t_2$ , 如果  $t_2 > t_1$ , 则

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = 1\times 1P\{X(t_1)=1, X(t_2)=1\} +$$

$$+ 0\times 1P\{X(t_1)=0, X(t_2)=1\} + 1\times 0P\{X(t_1)=1, X(t_2)=0\}$$

$$+ 0\times 0P\{X(t_1)=0, X(t_2)=0\}$$

下面求  $P\{X(t_1)=1, X(t_2)=1\}$ 。由于事件:  $\{X(t_1)=1, X(t_2)=1\}$  等价于事件:  $\{X(t_1)=1, \text{在 } t_2-t_1 \text{ 时间内波形发生偶数次变化}\}$ , 即等价于事件:  $\{X(t_1)=1, \mu=\text{偶数}\}$ , 故:

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= P\{X(t_1)=1, \mu=\text{偶数}\} \\ &= P\{X(t_1)=1\}P\{\mu=\text{偶数}\} \\ &= \frac{1}{2}P\{\mu=\text{偶数}\} = \frac{1}{2} \sum_{k=\text{偶数}} \frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2-t_1)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2-t_1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2-t_1)} \right] \\ &= \frac{1}{4} e^{-\lambda(t_2-t_1)} [e^{\lambda(t_2-t_1)} + e^{-\lambda(t_2-t_1)}] = \frac{1}{4} [1 + e^{-2\lambda(t_2-t_1)}] \end{aligned}$$

同理，如果  $t_2 < t_1$ ，则有

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \frac{1}{4} [1 + e^{2\lambda(t_2 - t_1)}]$$

故有：

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \frac{1}{4} [1 + e^{-2\lambda|t_1 - t_2|}]$$

因此有：

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= R_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) = \text{Cov}(X(t_1), X(t_2)) \\ &= \frac{1}{4} e^{-2\lambda|t_1 - t_2|} \end{aligned}$$

设时间差  $\tau = t_1 - t_2$ ，则有

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \frac{1}{4} [1 + e^{-2\lambda|\tau|}]$$

$$C_{XX}(t_1, t_2) = \text{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = \frac{1}{4} e^{-2\lambda|\tau|}$$

因为随机电报信号  $X(t)$  的均值函数为常数，相关函数仅为时间差的函数，故随机电报信号是宽平稳过程。

## 6. 复随机过程

定义：设  $X, Y$  为同一概率空间  $(\Omega, \Sigma, P)$  上的两个取实数值的随机变量，并

$j$  是虚数单位， $j^2$  等于  $-1$

设  $Z = X + jY$ ，则称  $Z$  为该概率空间上的一个复随机变量。

我们有：

$$E\{Z\} = E\{X\} + jE\{Y\}$$

$$\begin{aligned} D\{Z\} &= E\{|Z - E\{Z\}|^2\} = E\{[Z - E\{Z\}][\overline{Z - E\{Z\}}]\} \\ &= E\{(X - EX)^2\} + E\{(Y - EY)^2\} \end{aligned}$$

定义：设  $\{X(t)\}$  和  $\{Y(t)\}$  是具有相同参数和概率空间的一对实随机过程，

则  $Z(t) = X(t) + jY(t)$  称为复随机过程。

同样有：

$E\{Z(t)\} = E\{X(t)\} + jE\{Y(t)\}$ ，称为均值函数。

$R_{ZZ}(t_1, t_2) \triangleq E\{Z(t_1)\overline{Z(t_2)}\} = E\{[X(t_1) + jY(t_1)][\overline{X(t_2) + jY(t_2)}]\}$ ，称为复随机过程的相关函数。

例 8：设有复随机过程  $\xi(t) = \sum_{k=1}^N \eta_k e^{j\omega_k t}$ ，其中  $\eta_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) 是相互独立的随机变量，且服从正态分布  $N(0, \sigma_k^2)$ ， $\omega_k$  为常数。试求  $\xi(t)$  的均值函数和相关函数。

解：由于：

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N \eta_k e^{j\omega_k t} = \sum_{k=1}^N \eta_k \cos(\omega_k t) + j \sum_{k=1}^N \eta_k \sin(\omega_k t)$$

因此有：

$$E\{\xi(t)\} = E\left\{\sum_{k=1}^N \eta_k e^{j\omega_k t}\right\} = E\left\{\sum_{k=1}^N \eta_k \cos(\omega_k t) + j \sum_{k=1}^N \eta_k \sin(\omega_k t)\right\} = 0$$

$$\begin{aligned} R_{\xi}(t_1, t_2) &= E\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\} = E\left\{\left(\sum_{k=1}^N \eta_k e^{j\omega_k t_1}\right)\overline{\left(\sum_{i=1}^N \eta_i e^{j\omega_i t_2}\right)}\right\} \\ &= E\left\{\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \eta_k \eta_i e^{j\omega_k t_1 - j\omega_i t_2}\right\} = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 e^{j\omega_k (t_1 - t_2)} = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 e^{j\omega_k \tau} \end{aligned}$$

其中  $\tau = t_1 - t_2$ 。

注意：均值为零，相关函数是时间差的函数，是宽平稳过程。