第二章　Markov 过程

本章我们先讨论一类参数离散、状态空间离散的特殊随机过程，即参数为 $T=\{0,1,2,\cdots\}=N_0$，状态空间为可列 $S=\{1,2,\cdots\}$ 或有限 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的 **Markov** 链。**Markov** 链最初由 **Markov** 于 **1906** 年引入，至今它在自然科学、工程技术、生命科学及管理科学等诸多领域中都有广泛的应用。之后我们将讨论另一类参数连续状态空间离散的随机过程，即研究纯不连续 **Markov** 过程。

参数和状态都离散的随机过程称为Markov链
参数连续，状态离散的随机过程称为纯不连续Markov过程，（也就是泊松过程？）

1.　Markov 链的定义

定义：设随机序列 $\{X(n);n\geq 0\}$ 的状态空间为 S（离散），如果对 $\forall n\in N_0$，
随机序列：参数集为离散型的随机过程 前面有讲
及 $i_0,i_1,\cdots,i_n,i_{n+1}\in S$，$P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\}>0$，有：

$$P\{X(n+1)=i_{n+1}\,|\,X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\}=$$
$$=P\{X(n+1)=i_{n+1}\,|\,X(n)=i_n\} \quad \textbf{(A)}$$

这个其实就是Markov property
(马尔可夫性)，也成为无后效性

则称 $\{X(n);n\geq 0\}$ 为 **Markov** 链。

注 **1**：随机序列 $\{X(n);n\geq 0\}$ 也可记为 $\{X_n;n\geq 0\}$。

注 **2**：等式（**A**）刻画了 **Markov** 链的特性，称此特性为 **Markov** 性或无后效性（即随机过程将来的状态只与现在的状态有关，而与过去无关），简称为马氏性。**Markov** 链也称为马氏链。

定义：设 $\{X(n);n\geq 0\}$ 为马氏链，状态空间为 S，对于 $\forall i,j\in S$，称

$$P\{X(n+1)=j\,|\,X(n)=i\}\triangleq p_{ij}(n)$$

转移概率：由一个状态到下一个状态的概率

为马氏链 $\{X(n);n\geq 0\}$ 在 n 时刻的一步转移概率。若对于 $\forall i,j\in S$，有

以随机游动为例，如何理解转移概率与时刻n无关？

$$P\{X(n+1)=j\,|\,X(n)=i\}\triangleq p_{ij}(n)\equiv p_{ij}$$

时刻n表示的是蚂蚁到达当前位置经过的步数。转移概率与n无关，表示下一时间的状态与蚂蚁经过多少步到达当前位置无关。
i表示的蚂蚁的当前位置，与i有关，表示下一时刻的状态与当前状态有关。

即上面式子的右边与时刻 n 无关，则称此马氏链为齐次（或时齐的）马氏链。

对于齐次马氏链，我们记 $P=(p_{ij})$，称矩阵 P 为齐次马氏链的一步转移概

率矩阵，简称为转移矩阵。转移矩阵是对齐次马氏链而言的，转移矩阵表示的是各个状态之间的转移概率，与时间无关

注 3：对于马氏链$\{X(n);n\geq 0\}$，我们有：

$$P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\}=$$

$$=P\{X(n)=i_n \mid X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n-1)=i_{n-1}\}\cdot$$

$$\cdot P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n-1)=i_{n-1}\}$$

$$=P\{X(n)=i_n \mid X(n-1)=i_{n-1}\}\cdot P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n-1)=i_{n-1}\}$$

$$=\cdots$$

$$=P\{X(n)=i_n \mid X(n-1)=i_{n-1}\}\cdot P\{X(n-1)=i_{n-1} \mid X(n-2)=i_{n-2}\}\cdot\cdots\cdot$$

$$\cdot P\{X(1)=i_1 \mid X(0)=i_0\}\cdot P\{X(0)=i_0\}$$

$$=p_{i_{n-1}i_n}(n-1)\,p_{i_{n-1}i_{n-1}}(n-2)\cdot\cdots\cdot p_{i_0i_1}(0)\cdot P\{X(0)=i_0\}$$ P{X(0)-i0}称为markov链的初始分布。

因此，只要得到了马氏链的一步转移概率及初始分布，就可以求得马氏链的任意前$n+1$维的联合分布。特别地，若马氏链是齐次的，则由转移矩阵及初始分布，就可以得到齐次马氏链的任意前$n+1$维的联合分布。

注 4：一步转移概率满足：

$$p_{ij}(n)\geq 0\quad (i,\ j\in S)$$ 一步转移概率一定大于0

$$\sum_{j\in S} p_{ij}(n)=1\quad i\in S$$ 下一时间的状态肯定在状态空间S中，j从S中选，故概率为1

注 5：若状态空间是有限的，设状态数为n则一步转移矩阵是n阶方阵，若状态是无限可列的情形，则一步转移矩阵只是形式上的矩阵。

2.　切普曼－柯尔莫哥洛夫（C－K）方程

（一）m步转移概率的定义

n时刻在i状态，经过m步以后处在j状态的概率

定义：称$p_{ij}^{(m)}(n)=P\{X(n+m)=j \mid X(n)=i\}$为马氏链$\{X(n);n\geq 0\}$的$m$步转移概率。在齐次马氏链的情况下，$p_{ij}^{(m)}(n)$与$n$无关，我们记为$p_{ij}^{(m)}$，称

$$P^{(m)}=(p_{ij}^{(m)})$$

为齐次马氏链的m步转移（概率）矩阵。

显然有：

$$p_{ij}^{(m)}(n)\geq 0 \qquad (i,j\in S)$$

$$\sum_{j\in S}p_{ij}^{(m)}(n)=1 \qquad (i\in S)$$

$m=1$时，即为一步转移矩阵。

规定：

$$p_{ij}^{(0)}(n)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

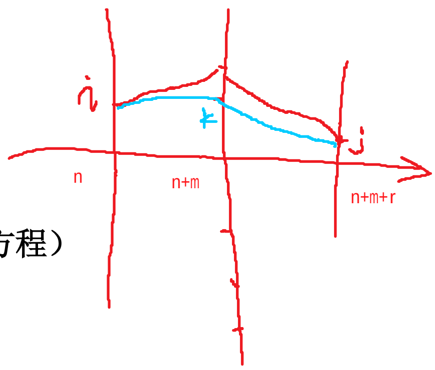
0步转移概率

（二）切普曼－柯尔莫哥洛夫（C－K）方程

通过C-K方程，只要知道初始分布与一步转移矩阵，我们能求出m步的状态转移矩阵

定理：对于m步转移概率有如下的 **C－K** 方程：

$$p_{ij}^{(m+r)}(n)=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}(n)p_{kj}^{(r)}(n+m) \qquad (i,j\in S)$$



对于齐次马氏链，此方程为：

$$p_{ij}^{(m+r)}=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(r)} \qquad (i,j\in S) \qquad \text{（C－K 方程）}$$

证明：由m步转移概率的定义、全概率公式及马氏性，有：

中间时刻n+m可能的状态能取遍状态空间，也就是说从n时刻的i状态到n+m+r时刻的j状态可能的路线数量与状态空间状态数相同。
最后要把这些所有可能路线的概率做并集，所以要求和。

$$p_{ij}^{(m+r)}(n)=$$

$$=P\{X(n+m+r)=j\,|\,X(n)=i\}$$

$$=\sum_{k\in S}P\{X(n+m+r)=j,X(n+m)=k\,|\,X(n)=i\}$$

$$=\sum_{k\in S}P\{X(n+m+r)=j\,|\,X(n+m)=k,X(n)=i\}\cdot$$

$$\cdot P\{X(n+m)=k\,|\,X(n)=i\}$$

$$=\sum_{k\in S}P\{X(n+m+r)=j\,|\,X(n+m)=k\}P\{X(n+m)=k\,|\,X(n)=i\}$$

$$=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}(n)p_{kj}^{(r)}(n+m)$$

对于齐次马氏链的情形：我们可以写成矩阵的形式即有：

$$P^{(m+r)}=P^{(m)}P^{(r)}$$

m步转移矩阵等于一步转移矩阵的m次幂

由此推出：

$$P^{(m)}=P^{(m-1)}P^{(1)}=\cdots=(P)^m=P^m$$

P(m-1)=P(m-2) P(1) ,递推。。。

其中：$P^{(1)}=P$ P是一步转移概率矩阵

由此可知：对于齐次马氏链，如果知道了它的初始分布 $\pi(0)$ 和一步转移矩阵 P，就可以求得 $X(n)$ 的所有有限维概率分布。即有：

$$P\{X(n_1)=i_1,X(n_2)=i_2,\cdots,X(n_k)=i_k\}=$$
$$=\sum_{j\in S}p_{i_{k-1}i_k}^{(n_k-n_{k-1})}p_{i_{k-2}i_{k-1}}^{(n_{k-1}-n_{k-2})}\cdots p_{i_1i_2}^{(n_2-n_1)}p_{ji_1}^{(n_1)}P\{X(0)=j\}$$

上式中各 m 步转移概率均可由 **C－K** 方程求出，利用一步转移矩阵及初始分布就可以完全确定齐次马氏链的统计性质。也就是说，知道了初始分布，知道了一步转移概率，那么这条马氏链的所有性质就都知道了。

3.　马氏链的例子

- 随机游动：

（1）　无限制的随机游动：

以 $X(n)$ 表示时刻 n 时质点所处的位置，则 $\{X(n),n=0,1,2\cdots\}$ 是一齐次马氏链，其状态空间为 $S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，一步转移概率为：

$$\begin{cases} p_{i\,i+1}=p, & (i\in S,0<p<1) \\ p_{i\,i-1}=q=1-p, & (i\in S,0<p<1) \\ p_{i\,j}=0, & (j\neq i+1,i-1,\ j\in S) \end{cases}$$

一次只能走一个距离，所多个单位距离的概率为0

现在求 n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$：

设 n 次转移中向右 m_1 次，向左 m_2 次，则有

$$\begin{cases} m_1+m_2=n \\ m_1(+1)+m_2(-1)=j-i \end{cases}\Rightarrow m_1=\frac{n+j-i}{2},\quad m_2=\frac{n-j+i}{2}$$

即有：

$$p_{ij}^{(n)}=\begin{cases} C_n^{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}}, & (n+j-i\text{ 是偶数}) \\ 0, & (n+j-i\text{ 是奇数}) \end{cases}$$

$$p_{ii}^{(n)}=\begin{cases} C_n^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}}, & (n\text{是偶数}) \\ 0, & (n\text{是奇数}) \end{cases}$$

（2）　带有一个吸收壁的随机游动：

特点：当 $X(n)=0$ 时，$X(n+1)$ 就停留在零状态。

此时 $\{X(n), n=0,1,2\cdots\}$ 是一齐次马氏链，其状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，一步转移概率为：

$$\begin{cases} p_{i\,i+1}=p & (i\ge 1, i\in S) \\ p_{i\,i-1}=q & (i\ge 1, i\in S) \\ p_{i\,j}=0 & (j\ne i+1, i-1, i\ge 1, i\in S) \\ p_{0\,0}=1 \end{cases}$$

注意；i 状态为马氏链的吸收状态的充要条件是：$p_{i\,i}=1$。

（3）　带有二个吸收壁的随机游动：

此时 $\{X(n), n=0,1,2\cdots\}$ 是一齐次马氏链，状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,a\}$，$0, a$ 为两个吸收状态，它的一步转移概率为：

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(a+1)\times(a+1)}$$

即有：

$$
\begin{aligned}
&p_{i\,i+1} = p && (1 \le i \le a-1) \\
&p_{i\,i-1} = q = 1-p && (1 \le i \le a-1) \\
&p_{i\,j} = 0 && (j \ne i+1, i-1; 1 \le i \le a-1) \\
&p_{00} = 1 && \\
&p_{aa} = 1 && \\
&p_{0\,j} = 0 && (j \ne 0) \\
&p_{a\,j} = 0 && (j \ne a)
\end{aligned}
$$

（4）　带有一个反射壁的随机游动：

特点：一旦质点进入零状态，下一步它以概率 p 向右移动一格，以概率 $q=1-p$ 停留在零状态。

此时的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，它的一步转移概率为：

$$
\begin{aligned}
&p_{i\,i+1} = p && (i \ge 1) \\
&p_{i\,i-1} = q = 1-p && (i \ge 1) \\
&p_{i\,j} = 0 && (j \ne i+1, i-1; i \ge 1) \\
&p_{01} = p && \\
&p_{00} = 1-p = q && \\
&p_{0\,j} = 0 && (j \ne 0,1)
\end{aligned}
$$

（5）　带有二个反射壁的随机游动：

此时的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,a\}$，它的一步转移概率矩阵为：

$$
P=\begin{pmatrix}
q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \cdots & \cdots & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q & p
\end{pmatrix}_{(a+1)\times(a+1)}
$$

即有：

$$
\begin{aligned}
&p_{00} = q = 1 - p \\
&p_{01} = p \\
&p_{aa} = p \\
&p_{a\,a-1} = q = 1 - p \\
&p_{0\,j} = 0 \quad (j \neq 0,1) \\
&p_{a\,j} = 0 \quad (j \neq a, a-1)
\end{aligned}
$$

- 排队模型

（1）　离散排队系统

考虑顾客到达一服务台排队等待服务的情况。

若服务台前至少有一顾客等待，则在单位时间周期内，服务员完成一个顾客的服务后，该顾客立刻离去；若服务台前没有顾客，则服务员空闲。

在一个服务周期内，顾客可以到达，设第n个周期到达的顾客数ξ_n是一个取值为非负整数的随机变量，且$\{\xi_n, n \geq 1\}$相互独立同分布。在每个周期开始时系统的状态定义为服务台前等待服务的顾客数。若现在状态为i，则下周期的状态j应该为：

$$
j = \begin{cases} (i-1) + \xi, & i \geq 1 \\ \xi, & i = 0 \end{cases}
$$

其中ξ为该周期内到达的顾客数。

记第n个周期开始的顾客数为X_n，则$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + \xi_n$，其中$a^+ \doteq \max\{a, 0\}$，根据马氏链的定义，可知$\{X_n, n \geq 0\}$是一马氏链。

若假设$P\{\xi_n = k\} = a_k$，$a_k \geq 0$，$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$，则$\{X_n, n \geq 0\}$的一步转移概率为：

$$
\begin{aligned}
&p_{0\,j} = a_j \qquad j \geq 0 \\
&p_{1\,j} = a_j \qquad j \geq 0 \\
&p_{i\,j} = a_{j+1-i} \quad i > 1, j \geq i-1 \\
&p_{i\,j} = 0 \qquad i > 1, j < i-1
\end{aligned}
$$

易见：当 $E\xi_n=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k>1$ 时，则当 n 充分大后，等待顾客的队伍将无限增大；若 $E\xi_n=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k<1$，则等待服务的顾客队伍长度趋近某种平衡。

（2） G/M/1 排队系统

略。（见纯不连续马氏过程的内容，以后会讲到。）

- 离散分支过程

考虑某一群体，假定某一代的每一个个体可以产生 ξ 个下一代，其中 ξ 是取值非负整数的离散型随机变量，$P\{\xi=k\}=a_k$，$a_k\ge 0,k\ge 0$，$\sum_{k=0}^{\infty}a_k=1$，设某一代各个体产生下一代的个数相互独立同分布且与上一代相互独立。

令：X_n 表示第 n 代个体的数目，则当 $X_n=0$ 时，有 $X_{n+1}=0$；当 $X_n>0$ 时，有：

$$X_{n+1}=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{X_n}$$

其中 ξ_i 是第 n 代中第 i 个个体产生下一代的个数。

由此可知，只要给定 X_n，那么 X_{n+1} 的分布就完全决定了，且与以前的 $X_{n-1},X_{n-2},\cdots$ 无关，故 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是一马氏链。把这一类马氏链称为离散的分支过程。由母函数的性质，可以证明一步转移概率为：

$$\begin{aligned}p_{ij}&=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}=P\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{X_n}=j\mid X_n=i\}\\&=P\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=j\}\\&=\frac{\partial^j\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right)^i}{j!\partial x^j}\Big|_{x=0}\end{aligned}$$

注 **1**：母函数的定义：设 $F(s)$ 是随机变量 ξ 的母函数，则 $F(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_ks^k$；

注 **2**：母函数的性质：（**1**） X 的母函数与其分布率是一一对应的，且有 $p_k=\dfrac{g^{(k)}(0)}{k!}$；（2）设非负整值随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，而

$g_1, g_2, \cdots, g_n$ 分别是它们的母函数，则 $Y=\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的母函数为：$g_Y(s)=g_1(s)g_2(s)\cdots g_n(s)$。

注 3：显然有：$p_{00}=1, p_{0k}=0\,(k>0)$，因此，状态 0 是离散分支过程的吸收状态。在离散分支过程模型中，我们最关心的问题是此过程被状态 **0** 吸收的概率，即灭绝概率问题。

- 卜里耶（**Polya**）模型（非齐次马氏链的例子）：

设盒子装有 b 个黑球，r 个红球。从盒子中随机摸出一球，观察颜色后将该球放回并加入与摸出的球同颜色的球 c 只。如此取放继续，经过 n 次摸放，研究盒子中的黑球数。

以 $X_n, n\ge 1$ 表示第 n 次摸球后盒子中的黑球数（状态），每取放一次后黑球数或者不变，或者增加 c 只，因此一步转移概率为：

$$p_{ij}(n)=P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}=\begin{cases}\dfrac{i}{b+r+nc}, & j=i+c\\ 1-\dfrac{i}{b+r+nc}, & j=i\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

注意：此过程是一非齐次的马氏链。另外，在研究实际问题时，如何设置过程的状态是非常重要的，考察下面的思考题会有深刻的体会。

思考题：在只装有 r 个红球和 b 个黑球的袋子中逐次随机取一球，每次将取出的球记下颜色并放回，同时在袋子中加进 c 个同色球。令：

$$R_k=\begin{cases}1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球}\\ 0, & \text{反之}\end{cases};\quad k=1,2,\cdots$$

问 $\{R_k\}$ 是否独立同分布？过程 $\{R_k\}$ 是否是马氏链？

解：由题意，我们有：

$$P\{R_1=1\}=\frac{r}{b+r},\quad P\{R_1=0\}=\frac{b}{b+r}$$

$$P\{R_2=1\}=P\{R_2=1|R_1=1\}P\{R_1=1\}+P\{R_2=1|R_1=0\}P\{R_1=0\}$$
$$=\frac{r+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r}+\frac{r}{b+r+c}\cdot\frac{b}{b+r}=\frac{r}{b+r}$$

$$P\{R_2=0\}=P\{R_2=0|R_1=1\}P\{R_1=1\}+P\{R_2=0|R_1=0\}P\{R_1=0\}$$
$$=\frac{b}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r}+\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{b}{b+r}=\frac{b}{b+r}$$

下面利用归纳法证明 R_k 的分布为：$P\{R_k=1\}=\dfrac{r}{b+r}$，$P\{R_k=0\}=\dfrac{b}{b+r}$。

当 $k=1$ 时，结论成立。设当 $k=l$ 时，结论成立，即：

$$P\{R_l=1\}=\frac{r}{b+r},\quad P\{R_l=0\}=\frac{b}{b+r}$$

当 $k=l+1$ 时，设在第 l 次取球之前，袋中有 m 只红球，n 只黑球，根据假设有：

$$P\{R_l=1\}=\frac{m}{m+n}=\frac{r}{b+r},\quad P\{R_l=0\}=\frac{n}{m+n}=\frac{b}{b+r}$$

由全概率公式，我们有：

$$P\{R_{l+1}=1\}=P\{R_{l+1}=1|R_l=1\}P\{R_l=1\}+P\{R_{l+1}=1|R_l=0\}P\{R_l=0\}$$
$$=\frac{m+c}{m+n+c}\cdot\frac{m}{m+n}+\frac{m}{m+n+c}\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{m}{m+n}=\frac{r}{b+r}$$

$$P\{R_{l+1}=0\}=P\{R_{l+1}=0|R_l=1\}P\{R_l=1\}+P\{R_{l+1}=0|R_l=0\}P\{R_l=0\}$$
$$=\frac{n}{m+n+c}\cdot\frac{m}{m+n}+\frac{n+c}{m+n+c}\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{n}{m+n}=\frac{b}{b+r}$$

因此，由归纳法可知：

$$P\{R_k=1\}=\frac{r}{b+r},\quad P\{R_k=0\}=\frac{b}{b+r}$$

又因为：

$$P\{R_2=1,R_1=1\}=P\{R_2=1|R_1=1\}P\{R_1=1\}=\frac{r+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r}$$

$$P\{R_2=1\}P\{R_1=1\}=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{r}{b+r}$$

显然有：

$$P\{R_2=1,R_1=1\}\neq P\{R_2=1\}P\{R_1=1\}$$

因此，$\{R_k\}$ 不是独立的，但同分布。

又有：

$$P\{R_{k+1}=1\,|\,R_k=1,R_{k-1}=1,\cdots,R_1=1\}=\frac{r+kc}{b+r+kc}$$

$$P\{R_{k+1}=1\,|\,R_k=1,R_{k-1}=0,\cdots,R_1=0\}=\frac{r+c}{b+r+kc}$$

如果过程$\{R_k\}$是马氏链，我们应该有：

$$P\{R_{k+1}=1\,|\,R_k=1,R_{k-1}=1,\cdots,R_1=1\}=P\{R_{k+1}=1\,|\,R_k=1\}$$

$$P\{R_{k+1}=1\,|\,R_k=1,R_{k-1}=0,\cdots,R_1=0\}=P\{R_{k+1}=1\,|\,R_k=1\}$$

即应该有：

$$P\{R_{k+1}=1\,|\,R_k=1,R_{k-1}=1,\cdots,R_1=1\}=P\{R_{k+1}=1\,|\,R_k=1,R_{k-1}=0,\cdots,R_1=0\}$$

但由上面的计算，当$k>1$时，显然有：

$$P\{R_{k+1}=1\,|\,R_k=1,R_{k-1}=1,\cdots,R_1=1\}\neq P\{R_{k+1}=1\,|\,R_k=1,R_{k-1}=0,\cdots,R_1=0\}$$

因此，过程$\{R_k\}$不是马氏链。

● 应用例子：　感觉这道题有问题！！！

某保密通信系统采用软件无线电，其信号的调制方式有 5 种。若此通信系统一直处于繁忙状态，在任何时刻只能采用其中一种信号调制方式，并且假设每经过一单位时间系统要进行调制方式转换，在转换时，这 5 种不同的调制信号方式被选择的概率分别为 1/5，2/5，1/10，1/10，1/5，且每次转换之间是独立的。ξ_n表示前n次信号转换中采用的信号调制方式为第二种方式的次数，问$\{\xi_n,n\geq 1\}$是否为齐次马氏链？如果是，写出其一步转移概率矩阵。

解：根据题意，此时的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$，由于调制方式的每次转换之间是独立的，因此

状态空间表示的是使用第二种信号的次数，是离散的；因为是单位时间转换一次，所以参数集也是离散的。

$$P\{\xi_{n+1}=j\,|\,\xi_1=i_1,\cdots,\xi_{n-1}=i_{n-1},\xi_n=i\}=P\{\xi_{n+1}=j\,|\,\xi_n=i\}$$

所以此链是马氏链，且是齐次的，其一步转移矩阵为：

0-0　0-1

1-0　1-1　1-2

$$P=\begin{pmatrix}3/5 & 2/5 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 3/5 & 2/5 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & \cdots & 0\\ & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

4. 马尔可夫链状态的分类

（一） 到达与相通

这个大于0使为了表示这种情况的可能性使存在的。

定义：对给定的两个状态$i,\ j\in S$，若存在正整数$n\geq 1$，使得$p_{ij}^{(n)}>0$，则称从状态i可到达状态j，记作$i\to j$，反之称从状态 i不可到达状态j。

注意：当状态 i不能到达状态j时，对于$\forall n\geq 1$，$p_{ij}^{(n)}=0$，因此

$$P\{\text{到达状态 } j \mid X_0=i\}=P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n=j \mid X_0=i)\right\}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}P\{X_n=j \mid X_0=i\}=\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}=0$$

定义：有两个状态 i和j，如果由 i状态可到达j状态，即$i\to j$，且由j状态也可到达i状态，即$j\to i$，则称状态 i和状态j相通，记作$i\leftrightarrow j$。

定理：可到达和相通都具有传递性。即若$i\to k,k\to j$，则$i\to j$；若$i\leftrightarrow k,k\leftrightarrow j$，则$i\leftrightarrow j$。

原因在于C-K方程

证明：如果$i\to k,k\to j$，则由定义，存在$r\geq 1$和$n\geq 1$，使得：

$$p_{ik}^{(r)}>0,\quad p_{kj}^{(n)}>0$$

根据 **C－K** 方程，我们有：

$$p_{ij}^{(r+n)}=\sum_{m\in S}p_{im}^{(r)}p_{mj}^{(n)}\geq p_{ik}^{(r)}p_{kj}^{(n)}>0\ \ (k\in S)$$

因此，$i\to j$。同理可以证明相通的情形。

（二） 首达时间和首达概率：

首达时间是一个随机变量，使关于n的函数，因此可以根据n的不同列出分布列

可以把样本函数想象成一个球体，样本点散落在球体的各个部分，每个状态都有可能到达另一个状态
而不应该把样本像本函数想象成一条直线

定义：对于任意给定的$i,j\in S$，称随机变量：

$$T_{ij}(\omega) \triangleq \min\left\{ n : X_0 = i,\ X_n(\omega) = j, n \ge 1 \right\}$$

为从状态 i 出发首次到达（进入）状态 j 的时间（时刻），简称首达时间。

注意：首达时间 $T_{ij} : \Omega \to N_\infty \subset R$ 是一随机变量，它取值于 $N_\infty = \{1, 2, \cdots, \infty\}$。

首达概率定义：对于任意给定的 $i, j \in S$，称：

$$f_{ij}^{(n)} \triangleq P\left\{ T_{ij} = n \middle| X_0 = i \right\}$$

为系统在 **0** 时从状态 i 出发，经 n 步首次到达状态 j 的概率。

由定义，显然有：

$$f_{ij}^{(n)} = P\left\{ X_n = j; X_m \ne j, m = 1, 2, \cdots, n-1 \middle| X_0 = i \right\}$$ shou

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij} = P\left\{ X_1 = j \middle| X_0 = i \right\}$$ 一步首达概率等价于转移概率

$$f_{ij}^{(\infty)} = P\left\{ X_m \ne j, \forall m \ge 1 \middle| X_0 = i \right\}$$ 无数步到达的概率也就是不能到达的概率

定义：对于任意给定的 $i, j \in S$，称：

$$f_{ij} = \sum_{1 \le n < \infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{1 \le n < \infty} P\left\{ T_{ij} = n \middle| X_0 = i \right\} = P\left\{ T_{ij} < \infty \right\}$$ 把任意步的，能从 i 到 j 的概率都加起来

无穷处没取等号

为系统在 **0** 时从状态 i 出发经过有限步转移后迟早到达状态 j 的概率。

注意：$P\left\{ T_{ij} = \infty \right\} \triangleq f_{ij}^{(\infty)} = 1 - f_{ij}$，它表示系统在 **0** 时从状态 i 出发，经过

不能到达状态 j 的概率

有限步转移后不能到达状态 j 的概率。

（三）首达概率的基本性质：

（**1**）对于任意的 $i, j \in S$，$0 \le f_{ij}^{(n)} \le p_{ij}^{(n)} \le f_{ij} \le 1$；

（**2**）对于任意的 $i, j \in S$ 及 $1 \le n < \infty$，有：$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$； 转移概率与首达概率的关系

（**3**）对于任意的 $i, j \in S$，$f_{ij} > 0 \Leftrightarrow i \to j$；

（4）对于任意的$i,j\in S$，$f_{ij}>0\ \ and\ \ f_{ji}>0 \Leftrightarrow i\leftrightarrow j$；

证明：因为：

$$\begin{aligned}\{X_0=i,X_n=j\}&=\{X_0=i,X_n=j\}\cap\left\{\bigcup_{l=1}^{\infty}(T_{ij}=l)\right\}\\&=\bigcup_{l=1}^{n}\{X_0=i,X_n=j,T_{ij}=l\}\cup\left\{\bigcup_{l>n}\{X_0=i,X_n=j,T_{ij}=l\}\right\}\end{aligned}$$

而

$$\bigcup_{l>n}\{X_0=i,X_n=j,T_{ij}=l\}=\varnothing$$

于是我们有：

$$\{X_0=i,X_n=j\}=\bigcup_{l=1}^{n}\{X_0=i,X_n=j,T_{ij}=l\}$$

因此，有：

$$\begin{aligned}&P\{X_0=i\}P\{X_n=j\mid X_0=i\}=\\&=\sum_{l=1}^{n}P\{X_0=i\}P\{T_{ij}=l\mid X_0=i\}P\{X_n=j\mid X_0=i,T_{ij}=l\}\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}&P\{X_n=j\mid X_0=i\}=\\&=\sum_{l=1}^{n}P\{T_{ij}=l\mid X_0=i\}P\{X_n=j\mid X_0=i,T_{ij}=l\}\\&=\sum_{l=1}^{n}P\{T_{ij}=l\mid X_0=i\}P\{X_n=j\mid X_0=i,X_k\neq j,1\le k\le l-1,X_l=j\}\\&=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}P\{X_n=j\mid X_l=j\}\\&=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)}\end{aligned}$$

即有：

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)}$$

于是结论（2）成立。

当$i \to j$时，$\exists n > 0$，使得$p_{ij}^{(n)} > 0$，取：

$$n' = \min\left\{ n : p_{ij}^{(n)} > 0 \right\},$$

则有：

$$f_{ij}^{(n')} = P\left\{ T_{ij} = n' \middle| X_0 = i \right\} = p_{ij}^{(n')} > 0$$

因此

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \ge f_{ij}^{(n')} > 0$$

反之，当$f_{ij} > 0$时，$\exists n' > 0$，使得$f_{ij}^{(n')} > 0$，从而$p_{ij}^{(n')} > 0$，得$i \to j$。

因此（3）成立，（4）是（3）的结果。

（四）状态的分类

定义：对于状态$i \in S$，如果$f_{ii} = 1$，则称状态i为常返态（返回态）；如果$f_{ii} < 1$，则称状态i为非常返态（滑过态、瞬时态）。

令条件数学期望：

$$\mu_{ij} \hat{=} E\left\{ T_{ij} \mid X_0 = i \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

μ_{ij}是从状态i出发，首次到达状态j的平均转移步数（时间）。

注意：特别地，若$i = j$，则$\mu_{ii} = \mu_i$是从状态i出发，首次返回状态i的平均转移步数，称为状态i的平均返回时间；对应的f_{ii}称为状态i的返回概率；$f_{ii}^{(n)}$称为从状态i出发，经n步首次返回状态i的概率。

定义：对于常返态 $i \in S$，若$\mu_i < +\infty$，则称状态 i是正常返的；否则，若$\mu_i = \infty$，则称状态 i是零常返的。

零常返状态只可能在状态空间包含无限的情况下出现。

（五）常返态和非常返态的判别

（1）　状态 $i \in S$ 是常返的（ $f_{ii}=1$ ）$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ 。 级数发散

（2）　状态 $i \in S$ 是非常返的（ $f_{ii}<1$ ）$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} < \infty$ 。 级数收敛

fii小于1，所以1-fii大于0，故收敛

（3）　如果 $j \in S$ 是非常返的，则对 $\forall i \in S$ ，有 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$ ； $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ 。

（4）　设 $i \leftrightarrow j$，则 i 和 j 或者都是正常返的，或者都是非常返的，或者都是零常返的。 相通的状态，其常返性与非常返性是相同的

证明：对于序列 $\{p_{ij}^{(n)}, n \ge 0\}$ 和 $\{f_{ij}^{(n)}, n \ge 1\}$，分别引入其母函数为：

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n$$

$$F_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$$

上面两个级数当 $|s|<1$ 时，都是绝对收敛的。利用公式：

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}$$

我们有：

$$\begin{aligned}
P_{ij}(s) &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}\right)s^n \\
&= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{n}\left(f_{ij}^{(v)} s^v\right)\left(p_{jj}^{(n-v)} s^{n-v}\right) \\
&= \delta_{ij} + \sum_{v=1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} s^v \sum_{n=v}^{\infty}\left(p_{jj}^{(n-v)} s^{n-v}\right) \\
&= \delta_{ij} + \sum_{v=1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} s^v \sum_{m=0}^{\infty}\left(p_{jj}^{(m)} s^{m}\right) \\
&= \delta_{ij} + F_{ij}(s) P_{jj}(s)
\end{aligned}$$

令 $j=i$，由上式，有：

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1-F_{ii}(s)}$$

在上式中，令$s \to 1^-$，我们有：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$$

由此可得以上结论的（1）、（2）。

另外，当j是非常返态，且$i \neq j$时，由

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij} + F_{ij}(s) P_{ij}(s)$$

可得：

$$P_{ij}(1) = F_{ij}(1) P_{jj}(1) \le P_{jj}(1) < \infty$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty \text{，且 } \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

由此可得结论（3）。

若$i \leftrightarrow j$，则存在正整数k, m，使得

$$p_{ij}^{(k)} > 0,\quad p_{ji}^{(m)} > 0$$

因此对于任意的正整数r，有：

$$p_{jj}^{(k+r+m)} \ge p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(k)}$$

由此可得：

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(k+r+m)} \ge \sum_{r=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(k)} = p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)}$$

因此，当i是常返态时，可知j也是常返态；当i是非常返态时，可知j也是非常返态。结论（4）成立。

引入随机变量：

$$Y_n(i) = \begin{cases} 1, & X_n = i \\ 0, & X_n \neq i \end{cases};\ n = 1, 2, \cdots$$

令：$Y(i) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(i)$，$Y(i)$表示马氏链$\{X_n; n \ge 1\}$处于状态$i$的次数，若$i$是非常返状态，计算：

$$E\left\{\sum_{n=1}^{\infty}Y_n \mid X_0=i\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}E\{Y_n \mid X_0=i\}=\sum_{n=1}^{\infty}1\times P\{Y_n=1 \mid X_0=i\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X_n=i \mid X_0=i\}=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}-1<\infty$$

由此可知，若i是非常返状态，则在过程中访问它的平均次数是有限的。

对于$\forall i,j\in S$，将从状态i出发至少到达状态j m次的概率记为$g_{ij}(m)$，即：

$$g_{ij}(m)=P\{Y(j)\ge m \mid X_0=i\}$$

由于事件$\{Y(j)\ge m\}\supset\{Y(j)\ge m+1\}$，因此$\{g_{ij}(m);m=1,2,\cdots\}$为单调有界数列，其极限一定存在。记此极限为$g_{ij}$，它表示从状态$i$出发无限次访问状态$j$的概率，即：

$$g_{ij}=\lim_{m\to\infty}g_{ij}(m)=P\{Y(j)=+\infty \mid X_0=i\}$$

定理：对于$\forall i,j\in S$，有：$g_{ij}=f_{ij}g_{jj}$，$g_{ii}=\lim_{n\to\infty}(f_{ii})^n$。

证明：由于

$$\{Y(j)\ge m+1\}=\{Y(j)\ge m+1\}\cap\left[\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{T_{ij}=k\}\right]=$$
$$=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{Y(j)\ge m+1,T_{ij}=k\}$$

记：k时刻之后（不包括k时刻）访问状态j的次数为$Y^k(j)$，则有：

$$g_{ij}(m+1)=P\{Y(j)\ge m+1 \mid X_0=i\}=\sum_{k=1}^{+\infty}P\{Y(j)\ge m+1,T_{ij}=k \mid X_0=i\}$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}P\{Y^k(j)\ge m,X_k=j,X_l\ne j,1\le l\le k-1 \mid X_0=i\}$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}P\{Y^k(j)\ge m \mid X_k=j,X_l\ne j,1\le l\le k-1,X_0=i\}\times$$
$$\times P\{X_k=j,X_l\ne j,1\le l\le k-1 \mid X_0=i\}$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}f_{ij}^{(k)}P\{Y(j)\ge m \mid X_k=j\}=\sum_{k=1}^{+\infty}f_{ij}^{(k)}g_{jj}(m)=f_{ij}g_{jj}(m)$$

特别地，$g_{ij}(1)=f_{ij}$，因此有

$$g_{ii}(m+1)=f_{ii}g_{ii}(m)=\cdots=(f_{ii})^m g_{ii}(1)=(f_{ii})^{m+1}$$

因此，一般地有

$$g_{ij}(m+1)=f_{ij}(f_{jj})^m$$

两边令 $m\to+\infty$，即有：$g_{ij}=f_{ij}g_{jj}$，$g_{ii}=\lim\limits_{n\to\infty}(f_{ii})^n$。

注意：（**1**）对于一个常返态 i，由 $g_{ii}=1$ 可知，在过程中访问它的次数必然是无限的；（**2**）对于一个非常返态 i，由 $g_{ii}=0$ 可知，在过程中访问它的次数必然是有限的；（**3**）一个状态有限的马氏链，不可能所有状态都为非常返态。

一个状态空间有限的马氏链，至少有一个状态是正常返的；只有状态空间是无限的马氏链，才有可能所有状态都是非常返的

定理：若 i 为常返状态，且 $i\to j$，则有 $i\leftrightarrow j$，且 j 为常返状态。

例 1（赌徒输光问题）赌徒甲有赌资 a 元，赌徒乙有赌资 b 元，a,b 为不小于 1 的正整数。两人进行一系列的赌博。每赌一局，输者给赢者 1 元，没有和局，直赌到两人中有一人输光为止。设在每局中甲赢的概率为 p，输的概率为 $1-p$，求甲输光的概率。

X0=a,意为初始时，甲首先由a元钱

解：此问题实际上就是状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots a+b\}$ 的一个马氏链，其中状态 0 和状态 $a+b$ 为吸收态。甲开始处于状态 a，最后它要么到达状态 0（输光），要么到达状态 $a+b$（将对方赢完），然后就不赌了。求甲输光的概率，实际上就是求甲从状态 a 首达状态 0 的概率。理论上有一步转移概率矩阵（很容易写出）就可以求得，但这样求相当麻烦，现在用其它方法来求。

令 u_i 为甲从状态 i 出发首达状态 0 的概率。我们要求的是 u_a。因为状态 0 和状态 $a+b$ 为吸收态，所以 $u_0=1,u_{a+b}=0$，用全概率公式，

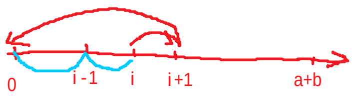
因为0与a+b都是吸收态

我们有：

从i状态出发，有概率p赢一元到i+1状态在首达0状态，即p（u i+1）；也有概率q先到状态i-1再首达0状态，即q（ui-1）

$$u_i=pu_{i+1}+qu_{i-1}\Rightarrow(p+q)u_i=pu_{i+1}+qu_{i-1}$$

因此有：



$$p(u_{i+1}-u_i)=q(u_i-u_{i-1})\Rightarrow(u_{i+1}-u_i)=\frac{q}{p}(u_i-u_{i-1})=$$

$$=\cdots=\left(\frac{q}{p}\right)^i(u_1-u_0)$$

因此有：

$$\sum_{i=k}^{a+b-1}(u_{i+1}-u_i)=\sum_{i=k}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i(u_1-u_0)$$

连加中间可以消掉

$$u_{a+b}-u_k=(u_1-1)\sum_{i=k}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i \quad k=0,1,2,\cdots,a+b$$

令 $k=0$，利用 $u_0=1, u_{a+b}=0$，可得：

$$-1=(u_1-1)\sum_{i=0}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i \quad \Rightarrow \quad (-1)/\sum_{i=0}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i=u_1-1$$

u1-1部分与i无关，所以可以先算出来再带回去

代入上面的式子，有

$$u_{a+b}-u_k=\frac{-1}{\sum_{i=0}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i}\sum_{i=k}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i \quad k=0,1,2,\cdots,a+b$$

令 $k=a$，$u_{a+b}=0$，可得：

$$u_a=\frac{1}{\sum_{i=0}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i}\sum_{i=a}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i$$

此即为所要求的结果。

当 $p=q=0.5$ 时，$u_a=\frac{b}{a+b}$

当 $p\neq q$ 时，$u_a=\dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^a-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$。

例 2 设有一电脉冲，脉冲的幅度是随机的，其幅度的可取值是 $\{1,2,3,\cdots,n\}$，且各幅度出现的概率相同。现用一电表测量其幅度，每隔一单位时间测量一次，从首次测量开始，记录其最大幅值为 $X_n\ (n\geq 1)$。（1）证明该过程为一齐次马氏链；（2）写出一步转移概率矩阵；（3）仪器记录到最大值 n 的期望时间。

解：（1）记：ξ_i 是第 i（$i=1,2,\cdots$）次记录的幅度值，则 ξ_i 是相互独立同分布的随机变量序列。X_m 是前 m 次记录幅度的最大值。

则有：

$$\begin{aligned} &P\left\{ X_{m+k}=j \middle| X_m=i, X_{m-1}=i_{m-1}, \cdots, X_1=i_1 \right\} \\ &\quad = P\{\max_{m+1\le l\le m+k}\left(\xi_l, i\right)=j\} \\ &\quad = P\{\max_{2\le l\le k+1}\left(\xi_l, i\right)=j\} \end{aligned}$$

以上用到了 ξ_i 的相互独立性。

因此：

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(k)}(m) &= P\{X_{m+k}=j \mid X_m=i\} \\ &= P\{\max_{1\le l\le m+k}\xi_l=j \mid \max_{1\le l\le m}\xi_l=i\} \\ &= P\{\max_{2\le l\le k+1}\left(\xi_l, i\right)=j\} \end{aligned}$$

因此此过程是齐次马氏过程。

（2）一步转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases} \dfrac{i}{n}, & j=i \\ \dfrac{1}{n}, & i<j\le n \\ 0, & \text{其 它} \end{cases}$$

（3）设 T_n 为仪器记录到最大值 n 的首达时间，则可以理解为起初在 n 状态的首次返回时间，则：

$$P\{T_n=k\}=f_{nn}^{(k)}=\frac{1}{n}\frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}},$$

因此记录到最大值 n 的期望为

$$E\{T_n\}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{1}{n}\frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}}=n$$

由此可知，n 状态是正常返态。

例 **3**　随机游动：

（1）　一维情形：状态空间为 $S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，都是相通的，因此构成一个类，任意取一个状态 $i\in S$，则有：$p_{ii}^{(2n-1)}=0$，　$p_{ii}^{(2n)}=C_{2n}^{n}p^nq^n$，考虑母函数：

$$
\begin{aligned}
P_{ii}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n s^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(-1)^n}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(pqs^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(-4pqs^2)^n \\
&= (1-4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

n=奇数是概率为0，只留下偶数项，所以s的商标是2n。也能解释左边的阶乘的形式

从而有：

$$
\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim_{s\to 1-0} P_{ii}(s) = (1-4pqs^2)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \infty, & p=1/2 \\ \text{有限}, & p\neq 1/2 \end{cases}
$$

由此可知，当 $p=1/2$ 时，所有状态为常返状态，当 $p\neq 1/2$ 时，状态为非常返状态，即马氏链是非常返的。

进一步研究当 $p=1/2$ 时，一维随机游动的各个状态是属于零常返还是属于正常返。由上面的结论，我们有：

$$
P_{ii}(s) = (1-4pqs^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}
$$

且有：

$$
P_{ii}(s) = 1 + F_{ii}(s) P_{ii}(s)
$$

其中：$F_{ii}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n$，由此我们有：

$$
F_{ii}(s) = 1 - (1-s^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{（A）}
$$

因此有：

$$
\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = F_{ii}'(1) = \lim_{s\to 1-} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} = \infty
$$

所以，当 $p=1/2$ 时，一维随机游动的所有状态都是零常返的。

注意：将（**A**）式在原点泰勒展开，可以求得首达概率 $f_{ii}^{(n)}$，即：

$$
f_{ii}^{(2)} = \frac{1}{2}, \quad f_{ii}^{(2k)} = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}(2k-1)} \quad (k\geq 2), \quad f_{ii}^{(2k-1)} = 0 \quad (k\geq 1)
$$

（**2**）　二维情形：计算质点经过 $2n$ 步后仍然回到原位置的概率 $p_{ii}^{(2n)}$。此时，质

点必须与横坐标平行地向右移k步，向左移k步，向上移l步，向下移l步，并且$k+l=n$，因此有：

$$p_{ii}^{(2n)}=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{[k!(n-k)!]^2}=\frac{1}{4^{2n}}C_{2n}^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2=\frac{1}{4^{2n}}\left(C_{2n}^{n}\right)^2\approx\frac{1}{\pi n}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$，因此，平面上的对称随机游动也是常返的。

（3）　三维情形： 可以证明，空间上的对称随机游动是非常返的（**Polya** 定理）。

A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever.

例 4：将小白鼠放在如下的迷宫中，假定小白鼠在其中作随机地移动，即当它处于某一格子中，而此格子又有k条路径通入别的格子，则小白鼠以$1/k$的概率选择任一条路径。如设小白鼠每次移动一个格子，并用X_n表示经n次移动后它所在的格子号码数，试：

（1）　说明$\{X_n;n\ge 1\}$构成一个齐次有限马氏链；

（2）　写出它的转移概率；

（3）　分解它的状态空间。

解：由题意可知其状态空间为$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

（1）由马氏链的定义可知，下一时刻小白鼠所处各个状态的概率只与当时小白鼠所处的状态有关，因此$\{X_n;n\ge 1\}$ $\{X_n;n\ge 1\}$构成一个齐次有限马氏链；

（2）一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

（3）画出状态转移图，状态空间的分解为两个闭集：

$$S_1 = \{1,2,3,6\}$$

$$S_2 = \{4,5,7,8,9\}$$